Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, Усреднение смешанной задачи с условием Синьорини для эллиптического оператора в перфорированной области, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 2, 87–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 02:23:01

УДК 517.953

С. Е. Пастухова

Усреднение смешанной задачи с условием Синьорини для эллиптического оператора в перфорированной области

Для случая перфорированного 2-связного ε -периодического ($\varepsilon \in (0, 1)$) пространства, в котором выделена ограниченная область Ω_ε , доказано свойство усреднения при $\varepsilon \rightarrow 0$ для краевой задачи в области Ω_ε для эллиптического оператора второго порядка с односторонними условиями типа Синьорини на границе “дыр” и с условием Дирихле на внешней границе.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Введение

1. Пусть F есть 1-периодическое открытое множество в $\mathbb{R}^d$, необязательно связанное (дополнительное требование, заменяющее связность, будет сформулировано в §2), $Q = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$ – ячейка периодичности, $Y = Q \cap F$, $\text{mes } Y = |Y| = \theta \in (0, 1)$. Множество $F_\varepsilon = \varepsilon F = \{x : x \in F\}$ ε -периодическое по всем переменным, его принято называть *перфорированным пространством*, $\varepsilon \in (0, 1)$.

Пусть Ω – ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^d$ с замыканием $\bar{\Omega}$, тогда $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap F_\varepsilon$ – перфорированная область с границей $\partial\Omega_\varepsilon$, которая состоит из двух частей: $S_\varepsilon = \partial F_\varepsilon \cap \Omega$ и $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \cap F_\varepsilon$.

Введем лагранжиан, зависящий от параметра ε :

$$f_\varepsilon(\xi) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi\right), \quad \text{где} \quad f(y, \xi) = \frac{1}{2}a(y)\xi\xi = \frac{1}{2}a_{ij}(y)\xi_i\xi_j,$$

при этом $y = (y_1, \dots, y_d)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ (здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до d), $\{a_{ij}(y)\}_{i,j=1}^d$ – симметрическая матрица с 1-периодическими по всем переменным y_j , $j = 1, \dots, d$, коэффициентами из $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, которая является положительно определенной, т.е.

$$\alpha^{-1}\xi_i\xi_i \geq a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geq \alpha\xi_i\xi_i$$

с некоторой константой $\alpha > 0$ для почти всех (п.в.) $y \in \mathbb{R}^d$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^d$.

$$\text{Далее } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right), \quad g \in L^2(\Omega).$$

Пусть $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство гладких функций, равных нулю в некоторой окрестности $\partial\Omega$, тогда V^ε есть замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\left(\int_{\Omega_\varepsilon} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx\right)^{1/2}$. Для функций $u \in V^\varepsilon$ определено ограничение $u|_{S_\varepsilon}$.

Пусть $K_\varepsilon = \{u \in V^\varepsilon : u|_{S_\varepsilon} \geq 0 \text{ п.в.}\}$.

Рассмотрим вариационную задачу на нахождение инфимума

$$m_\varepsilon = \inf_{u \in K_\varepsilon} J_\varepsilon(u), \quad \text{где} \quad J_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} (f_\varepsilon(\nabla u) + |u|^2 - gu) dx. \quad (1.1)$$

Известно, что K_ε является выпуклым замкнутым конусом в V^ε . В (1.1) инфимум непрерывного функционала можно заменить на его минимум. И эта задача минимизации функционала $J_\varepsilon(u)$ на конусе K_ε в силу перечисленных выше свойств лагранжиана $f(y, \xi)$ имеет решение, притом единственное, что следует, например, из теоремы 2.1 [1; гл. II] (см. также [2]–[4]).

Заметим, что задача минимизации (1.1) эквивалентна следующей краевой задаче в перфорированной области Ω_ε с условием Синьорини на части границы S_ε [1]–[4]:

$$\begin{cases} L_\varepsilon u = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + u = g & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_\varepsilon} \geq 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial \nu_\varepsilon} = 0 & \text{на } S_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.2)$$

где вектор ν_ε – вектор внешней кономали оператора L_ε на S_ε , его координаты $(\nu_\varepsilon)_j = a_{ij}(x/\varepsilon)n_i$, где n – вектор внешней единичной нормали на S_ε .

2. Задача минимизации (1.1) на конусе K_ε может быть усреднена в том же смысле, что и вариационные задачи на минимум в перфорированных областях с выпуклым лагранжианом, рассматриваемые не на выпуклом конусе функций, а во всем соболевском пространстве определенного вида. Заметим, что такие вариационные задачи, где инфимум берется по некоторому соболевскому пространству, представляют собой в эквивалентной формулировке краевые задачи с одним из классических граничных условий (например, Дирихле или Неймана) на границе перфорированной области. Эти задачи в наиболее общей постановке по отношению к геометрии перфорированного пространства F рассматривались при различных предположениях на лагранжиан функционала или на оператор краевой задачи в работах [5; гл. XIV], [6]–[10].

В настоящей работе распространена техника усреднения из [6]–[10] на задачу (1.1) и получены для нее аналогичные, как в [6]–[10], результаты. Следовательно, многочисленные примеры усреднения неклассических вариационных задач (задачи с вырождающимся лагранжианом, задачи на графах и др.) из наиболее поздней работы по этому вопросу [9], поддающиеся изложенной в [6]–[10] технике, могут быть дополнены усреднением вариационной задачи на выпуклом конусе функций, которая эквивалентна краевой задаче с односторонними условиями на границе типа Синьорини.

§ 2. Основные результаты. Их обсуждения

1. Следуя [6]–[9], под свойством усреднения задачи (1.1) будем подразумевать сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$ энергий m_ε и минимизантов u^ε задачи (1.1) соответственно к энергии m_0 и минимизанту u^0 усредненной задачи.

Прежде чем ввести усредненную задачу, сформулируем вспомогательную задачу на ячейке периодичности, через которую, как это обычно бывает в теории усреднения, определяется усредненный лагранжиан. А для этого введем необходимые пространства и множества.

Пусть $C_{\text{per}}^\infty(Q)$ множество бесконечно дифференцируемых функций $u(y)$, $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, 1-периодических по всем переменным y_i .

Усредненный лагранжиан определяется с помощью следующей вариационной задачи на ячейке периодичности:

$$f_0(\xi) = \inf_{u(y) \in C_{\text{per}}^\infty(Q)} \int_Y f(y, \xi + \nabla_y u(y)) dy. \quad (2.1)$$

Если V_Y есть замыкание множества $\{\nabla_y \varphi(y) : \varphi(y) \in C_{\text{per}}^\infty(Q)\}$ по норме $\left(\int_Y |u|^2 dy\right)^{1/2}$, то усредненный лагранжиан можно задать как

$$f_0(\xi) = \min_{v \in V_Y} \int_Y f(y, \xi + v) dy. \quad (2.2)$$

В силу коэрцитивности лагранжиана $f(y, \xi)$ задача минимизации (2.2) имеет, притом единственное, решение $v = v_\xi(y) \in V_Y$. Для него выполняется интегральное тождество

$$\int_Y a(y)(\xi + v)\psi dy = 0 \quad (2.3)$$

для любой функции $\psi \in V_Y$.

Из (2.2), (2.3) следует, что

$$f_0(\xi) = \frac{1}{2} a_0 \xi \xi, \quad (2.4)$$

где a_0 — матрица, определяемая равенством

$$a_0 \xi = \int_Y a(y)(\xi + v_\xi) dy \quad \text{для любого } \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (2.5)$$

Матрица a_0 оказывается неотрицательной (см. (2.2), (2.4)). Во многих случаях, но не всегда, a_0 положительно определена, т.е.

$$a_0 \xi \xi \geq \alpha_0 |\xi|^2, \quad \alpha_0 = \text{const} > 0, \quad \text{для любого } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Так же, как в [9], в нашем случае можно указать подпространство

$$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}^d, \quad \dim \mathbb{E} = k, \quad k \leq d,$$

такое, что a_0 положительно определена на $\mathbb{E}$ и имеет место: $a_0 \xi = 0$ для любого $\xi \in \mathbb{E}^\perp$. Это подпространство для простоты и наглядности будем представлять как

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^k = \{\xi \in \mathbb{R}^d : \xi = (\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0)\}.$$

Тогда лагранжиан $f_0(\xi)$ не зависит от $\xi_{k+1}, \dots, \xi_d$.

Введем нестандартное соболевское пространство, связанное с лагранжианом $f_0(\xi)$:

$$V_\Omega = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^2(\Omega) \right\}$$

с нормой

$$\left(\int_\Omega \left(|u|^2 + \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right) dx \right)^{1/2}, \quad (2.6)$$

и его подпространство

$$V_{\Omega,0} = \{ u \in V_\Omega : u|_{\partial\Omega} = 0 \},$$

где по определению равенство $u|_{\partial\Omega} = 0$ означает, что для любой $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ имеет место интегральное тождество

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx, \quad j = 1, \dots, k.$$

Важно отметить, что множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $V_{\Omega,0}$, т.е. $V_{\Omega,0}$ можно рассматривать как замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (2.6) (см. по этому поводу наряду с [9] также и [11; гл. II, § 2]).

Далее, пусть

$$K = \{ u \in V_{\Omega,0} : u \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega \}.$$

Тогда K – замкнутый выпуклый конус в $V_{\Omega,0}$.

Если лагранжиан $f_0(\xi)$ коэрцитивен в $\mathbb{R}^d$, то очевидно, что $V_{\Omega,0} = H_0^1(\Omega)$ – стандартное соболевское пространство. Коэрцитивность же $f_0(\xi)$ зависит от геометрии периодической области F . О требованиях на геометрию F , обеспечивающих коэрцитивность $f_0(\xi)$, речь пойдет ниже.

Итак, в рассматриваемом нами случае усредненной задачей является следующая вариационная задача на нахождение инфимума в конусе K (связанном с областью Ω без перфорации):

$$m_0 = \inf_{u \in K} J(u), \quad \text{где} \quad J(u) = \int_\Omega (f_0(\nabla u) + \theta u^2 - \theta g u) dx. \quad (2.7)$$

Решение задачи (2.7) существует и единственно по теореме 2.1 из [1; гл. II] в силу отмеченных выше свойств лагранжиана $f_0(\xi)$ и выбора конуса K .

Любопытно заметить, что задача (2.7) есть классическая задача о препятствии в области Ω .

Усреднение для задачи (1.1) устанавливается ниже в предположении 2-связности области F на торе периодичности. Понятие p -связности периодической области было введено в работах В. В. Жикова [6]–[9]; p -связность представляет собой более слабое ограничение на область F по сравнению с обычной связностью ее. Требование о 2-связности периодической области F на торе периодичности оказывается вполне естественным, если принять во внимание доказанную в [8] необходимость этого свойства области F для того, чтобы можно было усреднять вариационную задачу с квадратическим лагранжианом в перфорированной области Ω_ε .

Заметим также, что до работ [6]–[10] в многочисленных исследованиях прошлых лет, посвященных усреднению краевых задач в перфорированных областях (см. обширную библиографию по этой тематике, например, в [5]), требование обычной связности периодической области F даже усиливалось до требования “сильной связности”, включающего в себя помимо связности еще и липшицевость (см. [12]). Именно при таких наиболее общих предположениях на периодическую область F существуют определенные операторы продолжения для функций, заданных в перфорированной области Ω_ε , на всю область Ω , удовлетворяющие равномерным по ε оценкам. А эти операторы продолжения существенно использовались при доказательстве свойства усреднения.

Отметим, что условие “сильной связности” является весьма ограничительным. Ему не удовлетворяют многие периодические области, представляющие интерес в теории усреднения из-за приложений. Например, не “сильно связна”, а лишь связна область, являющаяся дополнением к плотной кубической упаковке шаров одинакового радиуса в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Также для приложений (например, для теории просачивания) интересны периодические области, не связные даже на торе периодичности, но обладающие p -связностью для некоторого $p \geq 1$. Для примера можно привести область из $\mathbb{R}^2$, имеющую шахматную структуру (см. [7]), которая p -связна на квадрате периодичности для $p > 2$, или общего вида периодическую область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, состоящую из ряда компонент, между которыми есть сообщение только через часть граничных точек, емкость которых достаточно велика (подробно эти примеры описаны в [8]).

Напомним понятие p -связности периодической области на торе периодичности из [6]–[9]. Далее под $H_{\text{per}}^p(Y)$ понимаем замыкание множества $C_{\text{per}}^\infty(Q)$ по норме $\int_Y (|u|^p + |\nabla u|^p)^{1/p} dy$, $p \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Открытое 1-периодическое множество F называется p -связным ($p \geq 1$) на торе периодичности, если для любой функции $u \in H_{\text{per}}^p(Y)$ из соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y |u - u_n|^p dy = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y |\nabla u_n|^p dy = 0,$$

где $u_n \in C_{\text{per}}^\infty(Q)$, вытекает: $u = \text{const}$ п.в. в Y .

2. Основной результат работы дан в следующей теореме 2.2. Прежде чем ее сформулировать, сделаем относительно области F одно техническое предположение, исключающее некоторые нежелательные аномалии в ее геометрии. А именно, пусть для функций $u \in H^1(Y)$, $Y = F \cap Q$, и их сужений на S , $S = \partial F \cap Q$, имеют место два стандартных неравенства:

$$|u|_{L^2(S)} \leq c_1 |u|_{H^1(Y)}, \quad (2.8)$$

$$|u|_{L^2(Y)} \leq c_2 |\nabla u|_{L^2(Y)}, \quad \text{если} \quad \int_Y u dy = 0, \quad (2.9)$$

где константы c_1, c_2 не зависят от функции $u \in H^1(Y)$.

Заметим, что для выполнения неравенств (2.8), (2.9) достаточно потребовать, чтобы граница F была из класса C и на ней п.в. была определена нормаль (см. об этом подробно в [13]).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть область F 2-связна на торе периодичности, u^ε – минимизант задачи (1.1), u^0 – минимизант задачи (2.7). Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место:

(i) слабая сходимость решений

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi u^\varepsilon dx \rightarrow \theta \int_{\Omega} \varphi u^0 dx$$

при любой $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$;

(ii) сходимость энергий

$$m_\varepsilon \rightarrow m_0,$$

а также сходимости

$$\int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) dx \rightarrow \int_{\Omega} f_0(\nabla u^0) dx, \quad \int_{\Omega_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx \rightarrow \theta \int_{\Omega} |u^0|^2 dx.$$

Заметим, что в предположениях теоремы 2.2 лагранжиан $f_0(\xi)$ в (2.7) не обязательно коэрцитивный в $\mathbb{R}^d$. Легко увидеть, что в силу определения (2.1) и предположений на лагранжиан $f(y, \xi)$ коэрцитивность $f_0(\xi)$ имеет место тогда и только тогда, когда коэрцитивен $\Psi(\xi)$, где

$$\Psi(\xi) = \inf_{v \in V_Y} \int_Y |\xi + v|^2 dy, \quad (2.10)$$

при этом выполняется оценка

$$\alpha \Psi(\xi) \leq f_0(\xi) \leq \alpha^{-1} \Psi(\xi) \quad (2.11)$$

с константой α из § 1 для любого $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Вот почему в силу результатов из [7; разд. 6], [8; § 4], [9; § 4] можно сформулировать условия на геометрию периодической области F , при выполнении которых гарантируется коэрцитивность $f_0(\xi)$. Эти условия включают понятие p -связности периодической области в $\mathbb{R}^d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Открытое 1-периодическое множество F называется p -связным в $\mathbb{R}^d$, если из соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F \cap B_R} |u - u_n|^p dy = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{F \cap B_R} |\nabla u_n|^p dy = 0,$$

выполнимых для любого $R > 0$ (B_R – шар в $\mathbb{R}^d$ радиуса R с центром в начале координат), в которых $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, следует: $u \equiv 0$ п.в. на F .

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть выполнено одно из двух условий: либо F связна в $\mathbb{R}^d$, либо F 2-связна в $\mathbb{R}^d$ и при этом F симметрична относительно координатных плоскостей. Тогда усредненный лагранжиан $f_0(\xi)$ коэрцитивен.*

Теорема 2.4 верна потому, что аналогичное ей утверждение доказано в [7]–[9] для лагранжиана $\Phi(\xi)$, определенного в (2.10), и справедлива оценка (2.11).

В [8; § 4] приведен пример плоской периодической области F , несвязной в $\mathbb{R}^2$, но являющейся, во-первых, 2-связной в $\mathbb{R}^2$ и к тому же связной на квадрате периодичности (что сразу влечет 2-связность на квадрате периодичности) и, во-вторых, симметричной относительно осей координат. Эта область имеет фрактальную границу, устроенную с помощью канторовских перегородок, расположенных симметрично по периметру квадрата периодичности. Согласно теореме 2.4 для этой области F лагранжиан $f_0(\xi)$ коэрцитивен, значит, усредненная задача (2.7) рассматривается в пространстве $H_0^1(\Omega)$ на конусе неотрицательных функций. То же самое об усредненной задаче (2.7) можно сказать в случае, когда F является дополнением к плотной кубической упаковке шаров одинакового радиуса в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, поскольку такая область F оказывается связной в $\mathbb{R}^d$.

В заключение § 2 отметим, что смешанная задача в перфорированной области Ω_ε с условием Синьорини на S_ε , похожая на краевую задачу (1.2), рассмотрена без подробного доказательства в заметке [14]. При этом сделаны существенно более сильные предположения относительно области F (например, предполагается дисперсность множества $\mathbb{R}^d \setminus F$, бóльшая гладкость границы S и др.), более точно: должны выполняться условия (В1)–(В3) из [15; гл. 1, § 4]. Объявленный в [14] метод обоснования процедуры усреднения для этой задачи (метод штрафа) отличен от вариационного метода, использованного в настоящей работе.

§ 3. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 3.1. *Пусть u^ε – минимизант задачи (1.1). Тогда*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u^\varepsilon|^2 + |u^\varepsilon|^2) dx \leq C \int_{\Omega} |g|^2 dx, \quad (3.1)$$

где константа C не зависит от ε .

Эта лемма может быть доказана стандартно с помощью неравенства Коши–Буняковского, если учесть, что

$$m_\varepsilon = J_\varepsilon(u^\varepsilon) \leq 0 = J_\varepsilon(0).$$

Все дальнейшее изложение в статье – вывод из равномерной по ε оценки (3.1) для минимизанта задачи (1.1) сходимостей, приведенных в теореме 2.2. При этом используется техника, развитая В. В. Жиковым. Далее в этом параграфе приводятся без доказательства две леммы, которые в той или иной форме и полностью фигурируют и доказаны в [6]–[10]: например, лемму 3.2 можно рассматривать как частный случай леммы 2.3 из [9], а лемму 3.3 – как частный случай леммы 3.2 из [9].

ЛЕММА 3.2. Пусть последовательность $u^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ удовлетворяет равномерным по ε оценкам

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx \leq \beta_0, \quad \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq \beta_1. \quad (3.2)$$

Тогда найдутся подпоследовательность (обозначаемая тем же символом u^ε) и функция u^0 такие, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi u^\varepsilon dx = \theta \int_{\Omega} \varphi u^0 dx \quad (3.3)$$

для любой $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, при этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |u^\varepsilon|^2 dx \geq \theta \int_{\Omega} |u^0|^2 dx, \quad (3.4)$$

где $\theta = |F \cap Q|$.

Функция u^0 из леммы 3.2, вообще говоря, не принадлежит пространству $H_0^1(\Omega)$. Следующая лемма уточняет ее гладкость и граничные свойства. Оказывается, принадлежность u^0 пространству $H_0^1(\Omega)$ зависит от достаточного запаса соленоидальных периодических векторных полей (см. определение ниже), а это, в свою очередь, определяется геометрией периодической области F .

Далее $L_{\text{per}}^p(Y)$ есть замыкание $C_{\text{per}}^\infty(Q)$ по норме $\left(\int_Y |u|^p dy\right)^{1/p}$, $p \geq 1$.

Условимся, что для $c(y) \in L_{\text{per}}^1(Y)$, $b(y) \in (L_{\text{per}}^1(Y))^d$ запись $c = \text{div } b$ означает по определению выполнение следующего интегрального тождества

$$\int_Y c \varphi dy = - \int_Y b \cdot \nabla \varphi dy, \quad b \cdot \nabla \varphi \equiv b_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i},$$

для любой функции $\varphi \in C_{\text{per}}^\infty(Q)$. И в частности, если $\text{div } b = 0$, то вектор b называем соленоидальным.

Далее всюду для периодической функции $q(y)$

$$q_\varepsilon(x) = q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \langle q \rangle = \int_Y q(y) dy,$$

а для векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ пусть $\xi \cdot \eta = \xi_i \eta_i$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $z \in (L_{\text{per}}^2(Y))^d$, $\text{div } z = 0$, $\langle z \rangle = \zeta$. Пусть F является 2-связной на торе периодичности. Тогда функции u^ε , u^0 из леммы 3.2 обладают следующими свойствами:

$$\int_{\Omega} |\nabla u^0 \cdot \zeta|^2 dy \leq \beta_1 \langle |z|^2 \rangle; \quad (3.5)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi (\nabla u^\varepsilon \cdot z_\varepsilon) dx = \int_{\Omega} \varphi (\nabla u^0 \cdot \zeta) dx \quad (3.6)$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$;
 $u^0|_{\partial\Omega} = 0$ в том смысле, что

$$\int_{\Omega} u^0 (\nabla \varphi \cdot \zeta) dx = - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \zeta) \varphi dx \quad (3.7)$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Далее будет неоднократно использоваться хорошо известное свойство среднего значения периодической функции, а именно: если $q \in L^p_{\text{per}}(Q)$, $p \geq 1$, то

$$q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow \int_Q q(y) dy \quad \text{слабо в } L^p(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

§ 4. Доказательство основной теоремы

Следующая лемма 4.1 – частный случай общей леммы 3.3 из [9]. Но приведем эту лемму с доказательством, которое учитывает специфику рассматриваемой задачи.

ЛЕММА 4.1. Пусть периодическая область F и функции u^ε , u^0 удовлетворяют предположениям леммы 3.3. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f_0(\nabla u^0) dx. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\zeta \in \mathbb{E} = \mathbb{R}^k$ (см. §2). Тогда в силу положительной определенности матрицы a_0 на $\mathbb{E}$ найдется $\eta \in \mathbb{E}$, $\eta \neq 0$, такой, что $\zeta = a_0 \eta$.

Вектору η сопоставим зависящую от η функцию

$$z(y) = z_\eta(y) = a(y)(\eta + v_\eta(y)), \quad (4.2)$$

где $v = v_\eta(y)$ есть минимизант задачи (2.2) при $\xi = \eta$. Учитывая (2.5), видим, что

$$\langle z \rangle = a_0 \eta = \zeta. \quad (4.3)$$

Из (2.3) следует, что $\text{div } z = 0$. Таким образом, функция $z(y)$, определенная формулой (4.2), удовлетворяет предположениям леммы 3.3.

Пусть A – произвольная липшицева подобласть Ω и $\varphi \in C_0^\infty(A)$, $0 \leq \varphi \leq 1$. Тогда по неравенству Юнга

$$f_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) = \frac{1}{2} a_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \geq \varphi \left(\nabla u^\varepsilon \cdot z_\varepsilon(x) - \frac{1}{2} b_\varepsilon(x) z_\varepsilon(x) z_\varepsilon(x) \right),$$

где $b(y)$ – матрица, обратная к матрице $a(y)$, откуда интегрированием по области $A_\varepsilon = A \cap \Omega_\varepsilon$ с учетом формулы (4.2) получаем

$$\int_{A_\varepsilon} f_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) dx \geq \int_{A_\varepsilon} \varphi(\nabla u^\varepsilon \cdot z_\varepsilon) dx - \frac{1}{2} \int_{A_\varepsilon} \varphi a_\varepsilon \left(\eta + v_\eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \left(\eta + v_\eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) dx.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в последнем неравенстве. При этом в правой части его используем для второго слагаемого свойство среднего значения периодической функции (см. (3.8)), а для первого слагаемого используем свойство (3.6), а также (4.3), (2.5), (2.3). Тогда получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_\varepsilon} f_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) dx \geq \int_A \varphi \left(\nabla u^0 \cdot (a_0 \eta) - \frac{1}{2} a_0 \eta \eta \right) dx. \quad (4.4)$$

Из леммы 3.3 (см. (3.5) с $\zeta = a_0 \eta$) следует, что $\nabla u^0 \cdot (a_0 \eta) \in L^1(\Omega)$. Поэтому функцию φ в (4.4) можно опустить в силу произвольности этой функции. Получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_\varepsilon} f_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) dx \geq \int_A \nabla u^0 \cdot (a_0 \eta) dx - \frac{1}{2} \int_A a_0 \eta \eta dx. \quad (4.5)$$

Разбивая область Ω на подобласти $\{A_j\}$, достаточно гладкие, и рассматривая различные $\zeta \in \mathbb{E} = \mathbb{R}^k$, выводим из (4.5) суммированием по j неравенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) dx \geq \int_\Omega \nabla u^0 \cdot (a_0 v) dx - \frac{1}{2} \int_\Omega a_0 v v dx, \quad (4.6)$$

которое справедливо для любого кусочно постоянного вектора $v(x)$, значения которого лежат в $\mathbb{E} = \mathbb{R}^k = \{(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0)\}$ (см. § 2), $v|_{A_j} = \eta^j$ — постоянный вектор. Заметим, что множество таких векторов плотно в $(L^2(\Omega))^k$. А по лемме 3.3 (см. (3.5)) имеем $\frac{\partial u^0}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u^0}{\partial x_k} \in L^2(\Omega)$, т.е. $\nabla u^0 \cdot \zeta \in L^2(\Omega)$ для любого $\zeta \in \mathbb{E}$.

Поэтому можно считать, что (4.6) выполняется и для функции $v = \nabla u^0$. Но при $v = \nabla u^0$ неравенство (4.6) приобретает вид

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon(\nabla u^\varepsilon) dx \geq \frac{1}{2} \int_\Omega a_0 \nabla u^0 \nabla u^0 dx = \int_\Omega f_0(\nabla u^0) dx,$$

и, значит, (4.1) доказано.

ЛЕММА 4.2. Пусть функции u^ε , u^0 удовлетворяют предположениям леммы 3.2. Кроме того, пусть $u^\varepsilon|_{S_\varepsilon} \geq 0$. Тогда

$$u^0 \geq 0 \quad \text{н.в. в } \overline{\Omega}. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующей равномерной по ε при ε , достаточно малых ($\varepsilon < \varepsilon^0$), оценкой

$$\left| \Lambda \int_{\Omega_\varepsilon} uv dx - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} uv d\sigma \right| \leq C_1 \varepsilon (|\nabla u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} |v|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} + |u|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} |\nabla v|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}), \quad (4.8)$$

где $\Lambda = |S| |Y|^{-1}$, $u, v \in C^\infty(\Omega)$, при этом $uv \in C_0^\infty(\Omega)$, константа C_1 не зависит от ε и от функций u, v .

Похожая оценка (но полученная при более сильных предположениях на геометрию перфорированного пространства F) использовалась при усреднении двух различных задач в перфорированной области Ω_ε в [16], [17].

Для вывода (4.8) введем следующую вспомогательную задачу на ячейке периодичности Y :

$$\begin{cases} \Delta_y U(y) = \Lambda & \text{в } Y, \\ \frac{\partial}{\partial n_y} U(y) = 1 & \text{на } S, \\ U(y) & 1\text{-периодична,} \end{cases} \quad (4.9)$$

где n_y — вектор единичной внешней нормали на S .

Решение задачи (4.9) понимаем в обобщенном смысле, т.е. функция $U(y) \in H_{\text{per}}^1(Y)$ есть решение (4.9), если выполнено интегральное тождество

$$\int_Y \nabla_y U(y) \cdot \nabla_y \Phi dy - \int_S \Phi d\sigma_y = -\Lambda \int_Y \Phi dy \quad (4.10)$$

для любой функции $\Phi \in C_{\text{per}}^\infty(Q)$.

Константа Λ в (4.9) подобрана так, что задача (4.9) имеет решение, единственное с точностью до константы, в силу леммы Лакса–Мильграма. Здесь мы используем неравенства (2.8), (2.9), которые по предположению (см. §2) выполняются в пространстве $H^1(Y)$.

Из тождества (4.10), справедливого для периодических функций, стандартным образом выводится тождество для функции $U_\varepsilon(x) = U(x/\varepsilon)$ при достаточно малых ε :

$$\varepsilon^{-2} \int_{\Omega_\varepsilon} \Lambda \Phi dx - \varepsilon^{-1} \int_{S_\varepsilon} \Phi d\sigma_x = -\varepsilon^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla_y U) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla_x \Phi dx \quad (4.11)$$

с произвольной $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Умножим (4.11) на ε^2 и положим в (4.11) $\Phi = uv \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда оценка (4.8) без труда выводится из (4.11), если оценить правую часть (4.11), используя неравенство Коши–Буняковского и следующую равномерную по ε оценку:

$$\int_{\Omega_\varepsilon \cap \text{supp } \Phi} \left| (\nabla_y U) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx \leq C_2 |U|_{H^1(Y)}^2, \quad C_2 = \text{const}(\Omega),$$

верную для ε , достаточно малых.

Воспользуемся оценкой (4.8) при $u = u^\varepsilon$, $v = \varphi$, где u^ε удовлетворяет предположениям леммы 4.2, а φ — произвольная функция такая, что $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi \geq 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда в силу (4.8)

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \varphi dx = \varepsilon \Lambda^{-1} \int_{S_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi d\sigma + r_\varepsilon, \quad (4.12)$$

$$\text{где } r_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (4.13)$$

благодаря оценке (3.2).

В силу выбора функций u^ε , φ имеем: $u^\varepsilon \varphi|_{S_\varepsilon} \geq 0$. Поэтому из (4.12) следует неравенство

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \varphi dx \geq r_\varepsilon.$$

Перейдем в нем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда получим с учетом (3.3) и (4.13) неравенство

$$\int_{\Omega} u^0 \varphi dx \geq 0,$$

и, значит, ввиду произвольности функции φ свойство (4.7) действительно выполняется.

ЛЕММА 4.3. *Имеет место неравенство*

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} m_{\varepsilon} \leq m_0. \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма доказывается по той же схеме, что и аналогичная лемма 3.4 из [9]. Но приходится повторять эту схему подробно из-за необходимости следить за тем, чтобы минимизация проходила по допустимым функциям из K_{ε} и K , когда мы рассматриваем m_{ε} и m_0 соответственно.

Выберем произвольное δ и для него найдем $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ такую, что

$$J(u) \leq m_0 + \delta. \quad (4.15)$$

Далее выберем кусочно постоянный вектор h так, чтобы выполнялись неравенства:

$$\text{п.в. в } \Omega |f_{\varepsilon}(\nabla u) - f_{\varepsilon}(h)| \leq \tau, \quad |f_0(\nabla u) - f_0(h)| \leq \tau, \quad (4.16)$$

где $\tau = \delta |\Omega|^{-1}$.

Пусть u_0 – минимизант задачи (2.6). Тогда $\overline{\Omega}$ разбивается на два подмножества: открытое множество $\Omega_+ = \{x \in \overline{\Omega} : u_0(x) > 0\}$ и замкнутое множество $\Omega_0 = \{x \in \overline{\Omega} : u_0(x) = 0\}$, где неравенство и равенство в задании множеств Ω_+ , Ω_0 понимаем в смысле $H^1(\Omega)$ (см. [1; гл. II, § 6]).

Можно считать, что функции u , h , выбранные ранее, таковы, что они нулевые на Ω_0 , при этом $u > 0$ на Ω_+ .

Пусть $\{A_j\}$ – подобласти Ω_+ , на которых h – постоянный вектор. Будем предполагать, что A_j достаточно гладкие.

Пусть $h|_{A_j} = \xi^j$. Рассмотрим для $\xi = \xi^j$ задачу (2.1) и возьмем $v_j(y) \in C_{\text{per}}^{\infty}(Q)$ такую, что

$$\int_Y f(y, \xi^j + \nabla_y v_j(y)) dy \geq f_0(\xi^j) + \tau. \quad (4.17)$$

Поскольку $v_j(y)$ определяется с точностью до константы, то выберем эту константу так, чтобы добиться $v_j(y) \geq 0$.

Построим функцию

$$\overline{u}^{\varepsilon}(x) = u(x) + \varepsilon \sum_j \varphi_j v_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (4.18)$$

$$\text{где } \varphi_j \in C_0^{\infty}(A_j), \quad 0 \leq \varphi_j \leq 1, \quad (4.19)$$

и более точный выбор φ_j укажем позже.

Для $A_j^\varepsilon = A_j \cap \Omega_\varepsilon$ имеем

$$J_j^\varepsilon \equiv \int_{A_j^\varepsilon} f_\varepsilon(\nabla \bar{u}^\varepsilon) dx = \int_{A_j^\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u + \varphi_j(\nabla_y v_j)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_x \varphi_j\right) dx.$$

Оценивая J_j^ε сверху, одновременно переходим к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом используем следующие соображения: сначала липшицевость по ξ лагранжиана $f(y, \xi)$ и первую оценку из (4.16), далее выпуклость лагранжиана $f(y, \xi)$ и второе свойство φ_j из (4.19) и, наконец, свойство среднего значения периодической функции (см. (3.8)). В результате получаем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J_j^\varepsilon &\leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A_j^\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi^j + \varphi_j(\nabla_y v_j)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx + |A_j| \tau \\ &\leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{A_j^\varepsilon} \varphi_j f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi^j + \nabla_y v_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{A_j^\varepsilon} (1 - \varphi_j) f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi^j\right) dx \right) + |A_j| \tau \\ &\leq \int_Y f(y, \xi^j + \nabla_y v_j(y)) dy \int_{A_j} \varphi_j dx \\ &\quad + \int_{A_j} (1 - \varphi_j) dx \int_Y f(y, \xi^j) dy + |A_j| \tau. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду (4.17) вытекает неравенство

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J_j^\varepsilon \leq (f_0(\xi^j) + 3\tau)|A_j|, \quad (4.20)$$

если φ_j подобраны так, что

$$\left(\int_Y f(y, \xi^j + \nabla_y v_j(y)) dy + \int_Y f(y, \xi^j) dy \right) \int_{A_j} (1 - \varphi_j) dx \leq \tau |A_j|.$$

Суммируя оценки (4.20) по всем j и используя специфику функций $\bar{u}^\varepsilon$, h , u , получаем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} f_\varepsilon(\nabla \bar{u}^\varepsilon) dx &\leq \sum_j \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} J_j^\varepsilon \leq \sum_j (f_0(\xi^j) + 3\tau)|A_j| \\ &= \int_{\Omega_+} f_0(h) dx + 3\delta \leq \int_{\Omega} f_0(\nabla u) dx + 4\delta, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где на последнем этапе мы воспользовались липшицевостью лагранжиана $f_0(\xi)$ и второй оценкой из (4.16).

Из определения (4.18) видно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} |\bar{u}^\varepsilon|^2 dx = \theta \int_{\Omega} |u|^2 dx, \quad (4.22)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} g \bar{u}^\varepsilon dx = \theta \int_{\Omega} g u dx. \quad (4.23)$$

Заметим, что $\bar{u}^\varepsilon$ – допустимая функция для функционала J_ε для достаточно малых ε (см. выбор функций u, φ_j, v_j). Поэтому из (4.21)–(4.23), (4.15) вытекает:

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} m_\varepsilon \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\bar{u}^\varepsilon) \leq J(u) + 4\delta \leq m_0 + 5\delta,$$

откуда в силу произвольности δ выводится (4.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Пусть u^ε – минимизант исходной задачи (1.1), найдем $\tilde{u}^\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega) \cap K_\varepsilon$ такую, что

$$J_\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon) \leq m_\varepsilon + \varepsilon.$$

Последовательность $\tilde{u}^\varepsilon$ удовлетворяет оценке (3.2), тогда на основании лемм 3.2, 4.1, 4.2 предельная в смысле (3.3) функция этой последовательности u^0 такова, что

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} (m_\varepsilon + \varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon) \geq J(u^0), \quad (4.24)$$

$$J(u^0) \geq \inf_K J(u) = m_0 = J(u_0), \quad (4.25)$$

где u_0 – минимизант задачи (2.7). С учетом (4.14) оценки (4.24) и (4.25) возможны, если в них всюду выполняются строгие равенства. Поэтому $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_\varepsilon = m_0$, а также $u^0 = u_0$. И, значит, все сходимости из формулировки теоремы 2.2 действительно имеют место.

§5. Некоторые обобщения

1. Возвращаясь к постановке задачи в §1, заметим, что можно рассматривать функционалы с лагранжианом $f(y, \xi)$, 1-периодическим по y , но не обязательно квадратическим по ξ . А именно, пусть $f(y, \xi)$ выпуклый по $\xi \in \mathbb{R}^d$ и удовлетворяет степенной оценке:

$$\alpha|\xi|^p \leq f(y, \xi) \leq \alpha^{-1}|\xi|^p + 1, \quad p > 1, \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Кроме того, пусть $f(y, 0) \equiv 0$. Например, можно взять $f(y, \xi) \equiv |\xi|^p$.

В этом случае полагаем

$$J_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} (f_\varepsilon(\nabla u) + |u|^p - gu) dx, \quad \text{где } g \in L^{p'}, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad (5.1)$$

$$K_\varepsilon = \{u \in C_0^\infty(\Omega) : u|_{S_\varepsilon} \geq 0\}. \quad (5.2)$$

Тогда в предположении (5.1), (5.2) задача на отыскание

$$m_\varepsilon = \inf_{u \in K_\varepsilon} J_\varepsilon(u) \quad (5.3)$$

имеет решение. Кроме того, после перехода к замыканию K_ε по $W^{1,p}$ -норме можно рассматривать минимизант этой задачи и он единственный. Задача (5.3) эквивалентна краевой задаче Синьорини с нелинейными операторами в области Ω_ε и на границе S_ε . Такая задача рассматривалась, например, в [18; гл. 2, §8, п. 8.4].

Задача (5.3) допускает усреднение, и его можно обосновать так же, как это делалось для задачи (1.1): с помощью техники из [6]–[10], а также модифицированной леммы 4.2 (в оценке (4.8) в правой части вместо L^2 -норм функций $u, \nabla u$ появятся их L^p -нормы).

2. В задаче (1.1) можно изменить конус K_ε . Для $h \in H_0^1(\Omega)$ определим

$$K_\varepsilon = \{u \in V^\varepsilon : (u - h)|_{S_\varepsilon} \geq 0 \text{ п.в.}\}, \quad (5.4)$$

если $h \leq 0$ п.в. в Ω , или

$$K_\varepsilon = \{u \in V^\varepsilon : (u - h)|_{S_\varepsilon} \leq 0 \text{ п.в.}\}, \quad (5.5)$$

если $h \geq 0$ п.в. в Ω .

Тогда задача (1.1) на конусе K_ε вида (5.4) или (5.5) эквивалентна краевой задаче Синьорини с неоднородным условием Дирихле в системе граничных условий на S_ε .

Если имеются две функции $h_i \in H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2$, такие, что

$$h_1 \leq 0 \leq h_2 \text{ п.в. в } \Omega,$$

то можно рассмотреть в задаче (1.1) K_ε как пересечение двух конусов типа (5.4), (5.5), т.е.

$$K_\varepsilon = \{u \in V_\varepsilon : h_1 \leq u \leq h_2 \text{ п.в. на } S_\varepsilon\}. \quad (5.6)$$

Задача (1.1), если в ней рассматривается конус K_ε одного из трех перечисленных типов (5.4)–(5.6), имеет, притом единственное, решение, и она допускает усреднение в смысле теоремы 2.2. Например, усредненной задачей в случае (5.6) является задача с двойным препятствием (верхним и нижним) в области Ω , задаваемым функциями h_1 , h_2 , с новым усредненным лагранжианом $f_0(\xi)$ вида (2.1). Если для определенности перфорированное пространство F связно в $\mathbb{R}^d$, то усредненным конусом будет множество

$$K = \{u \in H_0^1(\Omega) : h_1 \leq u \leq h_2 \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

В заключение отметим работу [19], где, в частности, изучалось усреднение поля перемещений в упругом трехмерном теле с периодически расположенными трещинами, на берегах которых ставится условие взаимного непроникновения, а это краевое условие можно отнести к типу граничных условий Синьорини. Процедуры усреднения для системы уравнений теории упругости из [19] и для скалярной задачи (1.2) оказываются сильно отличающимися друг от друга. Их неодинаковость объясняется тем, что разный эффект дают скалярный и векторный варианты граничных условий Синьорини, а также и различной геометрией перфорированного пространства, связанного с той или иной задачей. По этим же причинам совсем не такой, как в двух рассмотренных уже задачах с крайвыми условиями типа неравенств, будет процедура усреднения в задаче о малых деформациях в упругом теле с абсолютно твердыми включениями (например, для наглядности шаровыми), у которых нет жесткого сцепления с упругой средой, и, значит, допускаются односторонние перемещения упругой среды на границе включений. Но это уже предмет подробного рассмотрения отдельной статьи.

Список литературы

1. *Киндерлерер Д., Стампакия Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
2. *Гловински Г. Г., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1978.
3. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
4. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
5. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
6. *Жиков В. В.* Об усреднении в перфорированных случайных областях общего вида // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 1. С. 41–58.
7. *Жиков В. В.* Об усреднении нелинейных вариационных задач в перфорированных областях // Доклады РАН. 1995. Т. 345. № 2. С. 156–160.
8. *Жиков В. В.* Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 3–40.
9. *Жиков В. В.* К технике усреднения вариационных задач // Функциональный анализ. 1999. Т. 33. № 1. С. 14–29.
10. *Жиков В. В., Рычаго М. Е.* Усреднение нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 1. С. 69–88.
11. *Экланд Н., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
12. *Acerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G., Percivale D.* An extension theorem for connected sets and homogenization in general periodic domains // Nonlinear Anal. 1992. V. 18. № 5. P. 481–496.
13. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
14. *Иосифьян Г. А.* Об усреднении некоторых краевых задач с нелинейными граничными условиями в перфорированных областях // УМН. 1996. Т. 51. № 5. С. 233–234.
15. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
16. *Пастухова С. Е.* Метод компенсированной компактности Тартара в усреднении спектра смешанной задачи для эллиптического уравнения в перфорированной области с третьим краевым условием // Матем. сб. 1995. Т. 185. № 4. С. 127–144.
17. *Пастухова С. Е.* О погрешности усреднения для задачи Стеклова в перфорированной области // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 6. С. 1042–1054.
18. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
19. *Пастухова С. Е.* Об усреднении одного вариационного неравенства для упругого тела с периодически расположенными трещинами // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 2. С. 149–164.

Московский институт радиотехники, электроники
и автоматики (технический университет)

Поступила в редакцию
24.04.2000