Общероссийский математический портал

А. И. Рубинштейн, О наилучшей сходимости, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 2, 119–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm546>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:42:05

УДК 517.518

А. И. Рубинштейн

О наилучшей сходимости

Изучается наилучшая сходимость по норме L_p рядов по различным полным ортонормальным системам функций.

Библиография: 24 названия.

Введение. В [1] С. Н. Бернштейн показал (результат получен в 1937 г.), что если

$$n_{k+1} = (2p_k + 1)n_k, \quad n_1, k, p_k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

то ряд Фурье непрерывной 2π -периодической функции $f(x)$, имеющий вид

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \rho_k \cos(n_k x + \varphi_k), \quad \rho_k > 0, \quad \varphi_k \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

наилучше сходится (термин введен в упомянутой работе) в $C[0, 2\pi]$, т.е.

$$\begin{aligned} E_n^{(\infty)}(f) &= \inf_{\{r_m \geq 0, \psi_m\}_{0 \leq m \leq n}} \left\| f(x) - \sum_{0 \leq m \leq n} r_m \cos(mx + \psi_m) \right\|_{\infty} \\ &= \left\| \sum_{k \geq \nu} \rho_k \cos(n_k x + \varphi_k) \right\|_{\infty}, \quad n_{\nu-1} \leq n < n_{\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad n_0 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Соотношения (3) означают следующее: тригонометрический полином наилучшего в $C[0, 2\pi]$ приближения функции $f(x)$ порядка не выше n есть соответствующая частичная сумма ряда Фурье этой функции. В [1] показано также, что если все $\varphi_k = 0$, т.е. в случае косинус-рядов с неотрицательными коэффициентами, справедливо и обратное утверждение: из (3) следует (1). Таким образом, для косинус-рядов с неотрицательными коэффициентами условие (1) необходимо и достаточно для наилучшей сходимости ряда Фурье непрерывной 2π -периодической функции в $C[0, 2\pi]$.

В [1] отмечено и различие в поведении в смысле наилучшей сходимости косинус- и синус-рядов: если $\varphi_k = \pm\pi/2$ и, следовательно, ряд (2) является синус-рядом с коэффициентами произвольных знаков, то для справедливости (3) достаточно, чтобы

$$n_{k+1} = q_k \cdot n_k, \quad 1 < q_k \in \mathbb{N}, \quad n_1 \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Доказательства в [1] основаны на использовании теоремы П. Л. Чебышёва об альтернансе (см., например, [2; гл. III, § 4]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00354).

Предлагаемая работа посвящена различным обобщениям и переносам на другие системы приведенного результата С. Н. Бернштейна.

Рассмотрим некоторые обобщения постановки задачи наилучшей сходимости. Пусть $\{y_n\}$ – базис сепарабельного пространства $\mathbf{B}$, в которое вложено банахово сепарабельное пространство $\mathbf{B}_1$, содержащее $\{y_n\}$. Можно ли указать необходимые и достаточные или только достаточные условия, наложенные на строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, чтобы для элементов $y \in \mathbf{B}_1$, разложение которых по базису $\{y_n\}$ в $\mathbf{B}$ имеет вид

$$y \stackrel{\mathbf{B}}{=} \sum c_k(y) y_{n_k},$$

это разложение наилучше сходилось по норме $\mathbf{B}_1$, т.е. чтобы

$$\inf_{\{a_m\}_{1 \leq m \leq n}} \left\| y - \sum_{1 \leq m \leq n} a_m y_m \right\|_{\mathbf{B}_1} = \left\| \sum_{k \geq \nu} c_k(y) y_{n_k} \right\|_{\mathbf{B}_1},$$

$$n_{\nu-1} \leq n < n_{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad n_0 = 1?$$

Как легко видеть, ответ на этот вопрос существенным образом зависит от базиса $\{y_n\}$ даже при фиксированных пространствах $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}_1$. Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{l}_2^N$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{l}_p^N$, $1 \leq p < 2$, т.е. рассматриваются разные нормы в конечномерном линейном пространстве $\mathbf{Y} = \{y = (c_1, \dots, c_N)\}$. Если выбрать в $\mathbf{B}$ базис из элементов $y_n = (\underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, \dots, 0)$, $1 \leq n \leq N$, и произвольный набор $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \leq N$ натуральных чисел, то

$$y_{n_{\nu_0}} = 0 \cdot y_{n_1} + \dots + 0 \cdot y_{n_{\nu_0-1}} + 1 \cdot y_{n_{\nu_0}}$$

и

$$\inf_{\{a_m\}_{1 \leq m \leq n_{\nu_0}-1}} \left\| y_{n_{\nu_0}} - \sum_{1 \leq m \leq n_{\nu_0}-1} a_m y_m \right\|_{\mathbf{B}_1} = \|y_{n_{\nu_0}} - 1 \cdot y_{n_{\nu_0}-1}\|_{\mathbf{B}_1} = 1,$$

так что уже “ряд” из одного элемента $y_{n_{\nu_0}}$ не является наилучше сходящимся в $\mathbf{B}_1 = \mathbf{l}_p^N$ (причем даже во всех $\mathbf{l}_p^N$, $p \geq 1$). Если же в $\mathbf{B} = \mathbf{l}_2^N$ взять канонический (ортонормальный) базис из элементов $y_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots, 0)$, $1 \leq n \leq N$,

то разложение по этому базису произвольного элемента $y \in \mathbf{B}_1 = \mathbf{l}_p^N$ наилучше сходится в $\mathbf{B}_1$ (даже при всех $p \geq 1$). Действительно, для $y = (c_1, \dots, c_N)$ имеем

$$y \stackrel{\mathbf{B}}{=} \sum_{1 \leq k \leq N} c_k y_k$$

и

$$\begin{aligned} \inf_{\{a_m\}_{1 \leq m \leq \nu-1}} \left\| y - \sum_{1 \leq m \leq \nu-1} a_m y_m \right\|_{\mathbf{B}_1} &= \left\| y - \sum_{1 \leq m \leq \nu-1} c_m y_m \right\|_{\mathbf{B}_1} \\ &= \left\| \sum_{\nu \leq k \leq N} c_k y_k \right\|_{\mathbf{B}_1} = \left(\sum_{\nu \leq k \leq N} |c_k|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Это простое наблюдение говорит о целесообразности рассмотрения в качестве **B** сепарабельных гильбертовых пространств, например $\mathbf{L}_2$, и изучать наилучшую сходимость разложений по ортонормальным базисам элементов из пространств $\mathbf{L}_p$, $p > 2$, вложенных в $\mathbf{L}_2$, по норме $\mathbf{L}_p$. Разумеется, иногда можно рассматривать и все $p \geq 1$. Однако ситуация конечномерного пространства и ортонормальных базисов в нем (ортогональных матриц соответствующего порядка) оказывается во многом модельной. Легко видеть, что иногда можно рассматривать и неортогональные базисы – например, в N -мерном координатном пространстве **Y** базис из элементов

$$\begin{aligned} y_1 &= (1, 0, \dots, 0), & y_2 &= (1, 1, 0, \dots, 0), \\ y_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots, 0), & y_4 &= (0, 0, 1, 1, 0, \dots, 0), \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что любой “ряд” вида

$$\sum_{1 \leq \nu \leq [(N+1)/2]} c_\nu y_{2\nu-1}$$

будет наилучше сходиться в $\mathbf{L}_p^N$, $1 \leq p < \infty$.

В данной работе все же рассматриваются ортогональные ряды из $\mathbf{L}_2$.

В [3] автор отметил, что условие (1) является достаточным для наилучшей сходимости ряда (2) в любом пространстве $\mathbf{L}_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p < \infty$, причем, очевидно, этот результат содержателен для $f(x) \in \mathbf{L}_2[0, 2\pi]$ с рядом Фурье вида (2) по теореме А. Зигмунда (см., например, [4]), в то время как для содержательности результатов [1] требуется абсолютная сходимость ряда (2), что следует из теоремы С. Сидона [5].

Если рассматривать синус-ряды вида (2) из $\mathbf{L}_2[0, 2\pi]$, т.е. считать все $\varphi_k = \pm\pi/2$, то наилучшая сходимость в любом $\mathbf{L}_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p < \infty$, гарантируется условием (4).

В силу непрерывности нормы $\mathbf{L}_p$ при $p \rightarrow \infty$ из результатов [3] следует достаточность для наилучшей сходимости в $\mathbf{C}[0, 2\pi]$ ряда (2) условия (1) и для синус-рядов – условия (4), если, разумеется, ряды абсолютно сходятся.

В отличие от критерия Чебышёва, использованного в [1], для доказательства утверждений [3] применяется критерий наилучшего приближения линейной комбинацией функций из произвольной линейно независимой системы, установленный для $\mathbf{L}_1$ С. М. Никольским в [6], а для $\mathbf{L}_p$, $p > 1$, – И. Зингером [7]:

$$\begin{aligned} \inf_{\{a_m\}} \left\| f(x) - \sum_{1 \leq m \leq n} a_m \psi_m(x) \right\|_{\mathbf{L}_p[a, b]} &= \left\| f(x) - \sum_{1 \leq m \leq n} c_m \psi_m(x) \right\|_{\mathbf{L}_p[a, b]} \\ \iff \int_a^b \left| f(x) - \sum_{1 \leq m \leq n} c_m \psi_m(x) \right|^{p-1} & \\ \times \left(\operatorname{sgn} \left(f(x) - \sum_{1 \leq m \leq n} c_m \psi_m(x) \right) \right) \psi_s(x) dx &= 0, \quad s = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как следить за знаком разности $f(x) - \sum_{1 \leq m \leq n} c_m \psi_m(x)$ достаточно проблематично, то очевидно особое место случая $p = 2\mu$, $\mu \in \mathbb{N}$, когда (5) принимает вид

$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_{1 \leq m \leq n} c_m \psi_m(x) \right)^{2\mu-1} \psi_s(x) dx = 0, \quad s = 1, \dots, n. \quad (6)$$

На этом пути автор в [8], [9] получил а) необходимые и достаточные, б) необходимые, в) достаточные условия наилучшей сходимости в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 2\pi]$ косинус-рядов с неотрицательными коэффициентами в терминах спектра этих рядов. Различие в поведении в смысле наилучшей сходимости косинус- и синус-рядов была отмечена еще в [1] С. Н. Бернштейном, равно как и неотрицательность коэффициентов как важный фактор. В [8] же установлено принципиальное отличие метрик $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 2\pi]$ и $\mathbf{L}_{2\mu-1}[0, 2\pi]$ при изучении наилучшей сходимости косинус-рядов с неотрицательными коэффициентами. Поэтому в данной работе исследуется наилучшая сходимость рядов по различным ортонормальным системам именно в $\mathbf{L}_{2\mu}$.

1. Наилучшая сходимость рядов по системе Уолша–Пэли. Рассмотрим ряды вида

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k W_{n_k}(x), \quad (7)$$

где $\{W_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, – система Уолша–Пэли (см. определение, например, в [10; гл. 1, § 1.1]).

В [11] автор показал, что при условии

$$2^{k-1} \leq n_k < 2^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

ряд (7) наилучше сходится в $\mathbf{L}_p[0, 1]$ при всех $p \in [1, \infty]$. Для $1 \leq p < \infty$ утверждение содержательно при $\{a_k\} \in \mathbf{l}_2$, а для $p = \infty$ – при $\{a_k\} \in \mathbf{l}_1$.

При доказательстве не применялся критерий Никольского–Зингера, а непосредственно устанавливалось, что в случае выполнения (8) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \inf_{\{\alpha_m\}} \left\| \sum_{0 \leq m \leq 2^{\nu-1}-1} \alpha_m W_m(x) + \sum_{\nu \leq k \leq N} a_k W_{n_k}(x) \right\|_p \\ &= \inf_{\{\alpha_m\}} \left\| \sum_{0 \leq m \leq 2^{\nu-1}-1} \alpha_m W_m(x) + \sum_{\nu \leq k \leq N} a_k W_{2^{k-1}}(x) \right\|_p \\ &= \left\| \sum_{\nu \leq k \leq N} a_k W_{2^{k-1}}(x) \right\|_p = \left\| \sum_{\nu \leq k \leq N} a_k W_{n_k}(x) \right\|_p. \end{aligned}$$

При этом существенное место в рассуждениях занимало то, что сумма

$$\sum_{\nu \leq k \leq N} a_k W_{2^{k-1}}(x)$$

имеет период $2^{-(\nu-1)}$ и симметрична относительно точки $2^{-\nu}$, а также многократно использовалось специальное отображение $[0, 1]$ в себя, сохраняющее меру и взаимно однозначное за исключением двоично-рациональных точек.

Отметим, что $(2\pi/n_\nu)$ -периодичность и симметрия относительно точки π/n_ν функции

$$f_{\nu,p}(x) = \left| \sum_{k \geq \nu} \rho_k \cos(n_k x + \varphi_k) \right|^{p-1} \left(\operatorname{sgn} \left(\sum_{k \geq \nu} \rho_k \cos(n_k x + \varphi_k) \right) \right)$$

при выполнении (1) использовались в [3] при доказательстве наилучшей сходимости в $\mathbf{L}_p[0, 2\pi]$ ряда (2).

Рассмотрим наилучшую сходимость ряда (7) в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, $\mu \in \mathbb{N}$. Как известно (см., например, [10; гл. 1, § 1.2]) для любых $l, m \in \mathbb{N}_0$ однозначно определяется $n \in \mathbb{N}_0$ такое, что

$$W_n(x) = W_l(x) \cdot W_m(x)$$

– система Уолша–Пэли мультипликативна. Следовательно, $\mathbb{N}_0$ оказывается абелевой группой с операцией $\dot{+}$ сложения, определяемой равенством

$$l \dot{+} m = n.$$

Достаточно просто установить следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. 1) Если возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел $\{n_k\}$ такова, что

$$n_{k_1} \dot{+} n_{k_2} \dot{+} \dots \dot{+} n_{k_{2\mu-1}} \geq n_{k_1} \quad (9)$$

при любых $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_{2\mu-1}$, $\mu \in \mathbb{N}$, то ряд Фурье–Уолша–Пэли вида (7) функции $f(x) \in \mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$ наилучше сходится в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$.

2) Если $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, и ряд (7) наилучше сходится в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, $\mu \in \mathbb{N}$, то справедливо (9).

Действительно, при $m = 0, 1, \dots, n_\nu - 1$ имеем в силу (9) и ортогональности системы Уолша–Пэли

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\sum_{\nu \leq k \leq N} a_k W_{n_k}(x) \right)^{2\mu-1} W_m(x) dx \\ &= \sum_{n_\nu \leq n_{k_1} \leq n_{k_2} \leq \dots \leq n_{k_{2\mu-1}} \leq n_N} \left(\prod_{1 \leq j \leq 2\mu-1} a_{k_j} \right) \\ & \quad \times \int_0^1 \left(\prod_{1 \leq j \leq 2\mu-1} W_{n_{k_j}}(x) \right) W_m(x) dx \\ &= \sum_{n_\nu \leq n_{k_1} \leq n_{k_2} \leq \dots \leq n_{k_{2\mu-1}} \leq n_N} \left(\prod_{1 \leq j \leq 2\mu-1} a_{k_j} \right) \\ & \quad \times \int_0^1 W_{n_{k_1} \dot{+} n_{k_2} \dot{+} \dots \dot{+} n_{k_{2\mu-1}}}(x) W_m(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Р. Пэли [12] доказал, что система Уолша–Пэли является базисом в $\mathbf{L}_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, так что в последней системе равенств можно перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$, откуда

$$\int_0^1 \left(\sum_{k \geq \nu} a_k W_{n_k}(x) \right)^{2\mu-1} W_m(x) dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n_\nu - 1, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

По критерию Никольского–Зингера ряд (7) наилучше сходится в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$.

Пусть (9) не выполняется и

$$n_{k_1^0} \dot{+} n_{k_2^0} \dot{+} \dots \dot{+} n_{k_{2\mu-1}^0} = m < n_{k_1^0}.$$

Тогда для $N > k_{2\mu-1}^0$ и $a_k > 0$ при $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\sum_{k_1^0 \leq k \leq N} a_k W_{n_k}(x) \right)^{2\mu-1} W_m(x) dx \\ &= \sum_{n_{k_1} + n_{k_2} + \dots + n_{k_{2\mu-1}} = m} \left(\prod_{1 \leq j \leq 2\mu-1} a_{k_j} \right) \geq \prod_{1 \leq j \leq 2\mu-1} a_{k_j^0} > 0. \end{aligned}$$

Так как ряд (7) наилучше сходится в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, то он сходится в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$ в обычном смысле и в последних соотношениях можно перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$, откуда

$$\int_0^1 \left(\sum_{k \geq k_1^0} a_k W_{n_k}(x) \right)^{2\mu-1} W_m(x) dx \geq \prod_{1 \leq j \leq 2\mu-1} a_{k_j^0} > 0, \quad m < n_{k_1^0},$$

что по критерию Никольского–Зингера противоречит наилучшей сходимости (7) в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$. Противоречие доказывает справедливость (9).

Из утверждения 1 непосредственно вытекает следующий критерий наилучшей сходимости в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, $\mu \in \mathbb{N}$, ряда Уолша–Пэли с неотрицательными коэффициентами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Для наилучшей сходимости в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, $\mu \in \mathbb{N}$, ряда Фурье–Уолша–Пэли вида (7) функции $f(x) \in \mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$ необходимо и достаточно выполнение условия (9).*

Из приведенных утверждений при всей простоте их доказательств можно получить ряд небезынттересных, на наш взгляд, следствий.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если ряд вида (7) с неотрицательными коэффициентами наилучше сходится в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, $1 < \mu \in \mathbb{N}$, то он наилучше сходится и в $\mathbf{L}_{2\mu'}[0, 1]$, $\mu' < \mu$, $\mu' \in \mathbb{N}$.*

Разумеется, отсюда сразу следует, что если ряд (7) с неотрицательными коэффициентами не сходится наилучше в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, $1 < \mu \in \mathbb{N}$, то он не сходится наилучше и в $\mathbf{L}_{2\mu''}[0, 1]$, $\mu < \mu'' \in \mathbb{N}$.

Докажем это следствие. Так как $n \dot{+} n = 0$ при всяком $n \in \mathbb{N}_0$, то из (9) при $n_{k_{2\mu-2}} = n_{k_{2\mu-1}}$ следует

$$n_{k_1} \leq n_{k_1} \dot{+} n_{k_2} \dot{+} \dots \dot{+} n_{k_{2\mu-3}} \dot{+} n_{k_{2\mu-2}} \dot{+} n_{k_{2\mu-1}} = n_{k_1} \dot{+} n_{k_2} \dot{+} \dots \dot{+} n_{k_{2\mu-3}}$$

и по утверждению 1 ряд (7) наилучше сходится в $\mathbf{L}_{2(\mu-1)}[0, 1]$. За $(\mu - \mu')$ подобных шагов получим наилучшую сходимость (7) в $\mathbf{L}_{2\mu'}[0, 1]$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Ряд*

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} 4^{-2j} \sum_{\frac{1}{2}4^j \leq k \leq 4^j - 1} W_{2^{4j} + 2^k}(x) \quad (10)$$

наилучше сходится в любом $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, $\mu \in \mathbb{N}$, хотя множество чисел функций с ненулевыми коэффициентами из “пачек” $[2^\nu, 2^{\nu+1}]$ не является ограниченным.

Ряд (10) абсолютно сходится и, таким образом, сходится в любом $\mathbf{L}_p[0, 1]$, $p \in [1, \infty]$. При четном s имеем

$$\begin{aligned}\sigma &= (2^{4j_0} + 2^{k_1^{(0)}}) \dot{+} \dots \dot{+} (2^{4j_0} + 2^{k_s^{(0)}}) \\ &\quad \dot{+} (2^{4j_1} + 2^{k_1^{(1)}}) \dot{+} \dots \dot{+} (2^{4j_{2\mu-s-1}} + 2^{k_{2\mu-s-1}^{(1)}}) \\ &\geq 2^{4j_0+1} > 2^{4j_0} + 2^{k_1^{(0)}}\end{aligned}$$

в силу нечетности $(2\mu - s - 1)$ и того, что

$$(2^{4j_0} + 2^{k_1^{(0)}}) \dot{+} \dots \dot{+} (2^{4j_0} + 2^{k_s^{(0)}}) = 2^{k_1^{(0)}} \dot{+} \dots \dot{+} 2^{k_s^{(0)}} \leq 2^{k_1^{(0)}} + \dots + 2^{k_s^{(0)}} < 2^{4j_0+1},$$

а

$$(2^{4j_1} + 2^{k_1^{(1)}}) \dot{+} \dots \dot{+} (2^{4j_{2\mu-s-1}} + 2^{k_{2\mu-s-1}^{(1)}}) \geq 2^{4j_1} \geq 2^{4j_0+1}.$$

При нечетном s

$$\sigma \geq 2^{4j_0} \dot{+} (2^{k_1^{(0)}} \dot{+} \dots \dot{+} 2^{k_s^{(0)}}) \geq 2^{4j_0} + 2^{k_1^{(0)}}.$$

Следовательно, справедливо (9) и по утверждению 1 ряд (10) наилучше сходится в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$ при произвольном $\mu \in \mathbb{N}$.

Следствие 2 показывает, что достаточное условие (8) наилучшей сходимости при $p = 2\mu$ весьма далеко от необходимого.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Ряд*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} 3^{-k} (W_{2^{3k}}(x) + W_{2^{3k+1}}(x) + W_{2^{3k+2}-1}(x)) \quad (11)$$

не сходится наилучше ни в одном $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, $1 < \mu \in \mathbb{N}$, хотя в каждой "пачке" $[2^\nu, 2^{\nu+1})$ не более двух членов ряда.

Действительно, так как

$$2^{3k+2} - 1 = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{3k+1},$$

то

$$2^{3k} \dot{+} 2^{3k+1} \dot{+} (2^{3k+2} - 1) = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{3k-1} = 2^{3k} - 1 < 2^{3k}$$

и по утверждению 2 ряд (11) не сходится наилучше в $\mathbf{L}_4[0, 1]$. Тогда по следствию 1 этот ряд не сходится наилучше ни в одном $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, $2 \leq \mu \in \mathbb{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ряд (10) сходится наилучше и в $\mathbf{L}_\infty[0, 1]$, так как норма $\mathbf{L}_p$ непрерывна при $p \rightarrow \infty$ и в силу следствия 2. Ряд (11) не сходится наилучше в $\mathbf{L}_\infty[0, 1]$, что легко проверяется непосредственно.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любого $\lambda \in (1, 2)$ найдется $k(\lambda) \in \mathbb{N}$ такое, что ряд

$$3^{k(\lambda)} \sum_{k \geq k(\lambda)} 3^{-k} (W_{2^{3k}}(x) + W_{2^{3k+1}}(x) + W_{2^{3k+2}-1}(x)) \equiv \sum_{t \in \mathbb{N}_0} a_t W_{n_t}(x)$$

не сходится наилучше ни в одном $L_{2\mu}[0, 1]$, $1 < \mu \in \mathbb{N}$, и в $L_\infty[0, 1]$, хотя

$$\frac{n_{t+1}}{n_t} > \lambda$$

и в любом промежутке $[2^\nu, 2^{\nu+1})$ не более двух членов последовательности $\{n_t\}$.

Это следует сразу из того, что

$$\inf_t \frac{n_{t+1}}{n_t} = \inf_{k \geq k(\lambda)} \frac{2^{3k+2} - 1}{2^{3k+1}} = 2 - 2^{-(3k(\lambda)+1)}.$$

Из упоминавшегося выше результата автора [11] видно, что в следствии 4 нельзя брать $\lambda = 2$.

Следствия 2–4 показывают, что в терминах “густоты” или “разреженности” последовательности $\{n_k\}$ формулировать критерий наилучшей сходимости ряда Фурье–Уолша–Пэли вида (7) с неотрицательными коэффициентами в $L_p[0, 1]$, $p \neq 2$, нельзя.

Наиболее важным результатом, доказываемым с помощью утверждения 1, является

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если ряд Фурье–Уолша–Пэли вида (7) функции $f(x) \in L_{2\mu}[0, 1]$, $1 < \mu \in \mathbb{N}$, с неотрицательными коэффициентами не сходится наилучше в $L_{2\mu}[0, 1]$, то он не сходится наилучше и в любом $L_{2\mu'}[0, 1]$, $1 < \mu' < \mu$, $\mu' \in \mathbb{N}$.

Прежде чем доказывать это утверждение, извлечем из него несколько следствий.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если ряд Фурье–Уолша–Пэли с неотрицательными коэффициентами наилучше сходится в каком-то $L_{2\mu}[0, 1]$, $1 < \mu \in \mathbb{N}$, то он наилучше сходится во всех $L_{2\mu'}[0, 1]$, $\mu' \in \mathbb{N}$, которым принадлежит его сумма. В том числе он наилучше сходится в $L_\infty[0, 1]$, если сходится абсолютно.

Для $\mu' < \mu$ это следует из следствия 1, а для $\mu' > \mu$ — непосредственно из утверждения 3 и теоремы Пэли о базисности системы Уолша–Пэли. Наилучшая сходимость в $L_\infty[0, 1]$ абсолютно сходящегося ряда (7) следует из наилучшей сходимости во всех $L_{2\mu}[0, 1]$, $\mu \in \mathbb{N}$, и непрерывности L_p нормы при $p \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Лакунарный по Адамару ряд Фурье–Уолша–Пэли с неотрицательными коэффициентами сходится или не сходится наилучше во всех $L_{2\mu}[0, 1]$, $\mu \in \mathbb{N}$.

Так как сумма лакунарного ряда Фурье–Уолша–Пэли принадлежит всем $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ (см., например, [13]), то следствие 6 вытекает из следствия 5.

В работе В. Ф. Гапошкина [13] доказана сходимость во всех $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, рядов Фурье–Уолша–Пэли вида (7) для широкого класса последовательностей $\{n_k\}$. Для всех таких рядов с неотрицательными коэффициентами из следствия 5 вытекают утверждения, аналогичные следствию 6. В случае абсолютной сходимости (7) из указанных классов наилучшая сходимость в каком-либо $L_{2\mu}[0, 1]$, $1 < \mu \in \mathbb{N}$, влечет наилучшую сходимость и в $L_\infty[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3. По утверждению 2 если ряд Фурье–Уолша–Пэли вида (7) с неотрицательными коэффициентами не сходится наилучше в каком-либо $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, $1 < \mu \in \mathbb{N}$, то найдутся номера $n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_{2\mu-1}}$ такие, что

$$n_{k_1} \dot{+} n_{k_2} \dot{+} \dots \dot{+} n_{k_{2\mu-1}} < n_{k_1}. \quad (12)$$

Не ограничивая общности, можно считать

$$n_{k_1} < n_{k_2} < \dots < n_{k_{2\mu-1}}.$$

Если $k_i = k_{i+1}$, то $n_{k_i} \dot{+} n_{k_{i+1}} = 0$ и в левой части (12) число слагаемых уменьшается на два, так что ряд (7) не сходится наилучше уже в $\mathbf{L}_{2\mu-2}[0, 1]$. Также очевидно, что $2\mu - 2 > 2$, так как в $\mathbf{L}_2$ все ортогональные ряды сходятся наилучше. Если $k_1 = k_2 < k_3$, то

$$n_{k_1} \dot{+} n_{k_2} \dot{+} \dots \dot{+} n_{k_{2\mu-1}} = n_{k_3} \dot{+} \dots \dot{+} n_{k_{2\mu-1}} < n_{k_1} < n_{k_3}.$$

Все сказанное и делает обоснованным предположение о различии слагаемых в левой части (12). Для упрощения записи переобозначим $n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_{2\mu-1}}$ на $n_1, n_2, \dots, n_{2\mu-1}$, так что (12) перепишется в виде

$$n_1 \dot{+} n_2 \dot{+} \dots \dot{+} n_{2\mu-1} < n_1. \quad (13)$$

Пусть двоичное разложение числа n_j есть

$$n_j = 2^{m_1^{(j)}} + 2^{m_2^{(j)}} + \dots,$$

где целые $m_t^{(j)}$ удовлетворяют условиям

$$m_1^{(j)} > m_2^{(j)} > \dots \geq 0,$$

а $m_1^{(j-1)} < m_1^{(j)}$.

Допустим, “ряд”

$$\sum_{1 \leq k \leq 2\mu-1} a_k W_{n_k}(x), \quad (14)$$

где $a_j = a_{k_j} > 0$, который не сходится наилучше в $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, наилучше сходится в $\mathbf{L}_{2\mu'}[0, 1]$ с $1 < \mu' < \mu$. Достаточно очевидно, что или

$$m_1^{(2\mu-1)} = \dots = m_1^{(2\mu-2s)}, \quad (15)$$

т.е. в промежутке $[2^{m_1^{(2\mu-1)}}, 2^{m_1^{(2\mu-1)}+1})$ попадает четное число индексов из множества $\{n_1, \dots, n_{2\mu-1}\}$, или

$$m_1^{(1)} = m_2^{(1)} = \dots = m_{2\mu-1}^{(1)}. \quad (16)$$

Если бы

$$m_1^{(2\mu-1)} = \dots = m_1^{(2\mu-2s+1)}, \quad 1 \leq s < \mu,$$

то

$$n_{2\mu-2s+1} \dot{+} \dots \dot{+} n_{2\mu-1} = 2^{m_1^{(2\mu-1)}} + \dots$$

и

$$n_1 \dot{+} n_2 \dot{+} \dots \dot{+} n_{2\mu-1} = 2^{m_1^{(2\mu-1)}} + \dots > n_1,$$

что противоречит (13).

Если (16) выполняется, то для

$$n'_k = n_k - 2^{m_{2\mu-1}^{(1)}}, \quad k = 1, \dots, 2\mu - 1,$$

получим неравенство

$$n'_1 \dot{+} n'_2 \dot{+} \dots \dot{+} n'_{2\mu-1} < n'_1.$$

При таком положении рано или поздно ситуация (16) станет невозможной. Это случится при $2\mu - 1 > 2^t$, а $n''_{2\mu-1} < 2^{t+1}$. Таким образом, общий случай описывается соотношениями (15). При этом должно выполняться условие

$$[\log_2(n_j \dot{+} n_k)] \notin \{m_1^{(l)}, m_2^{(l)}, \dots\},$$

где $1 \leq l < j < k$, $j \geq 2\mu - 2s$, а $[b]$ — целая часть b . Следовательно,

$$n_l \dot{+} n_j \dot{+} n_k < n_l \quad (17)$$

и по утверждению 2 ряд (14) не сходится наилучше в $\mathbf{L}_4[0, 1]$, откуда по следствию 1 вытекает справедливость утверждения 3. Очевидная конечношаговая индукция показывает, что найдутся натуральные числа

$$m_1^{(1)} = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_\tau = 2\mu - 1, \quad \tau \geq 2,$$

для которых в каждом из промежутков

$$[2^{\lambda_2}, 2^{\lambda_2+1}), \dots, [2^{\lambda_\tau}, 2^{\lambda_\tau+1})$$

оказывается четное число элементов множества $\{n_1, \dots, n_{2\mu-1}\}$ и лишь в

$$[2^{\lambda_1}, 2^{\lambda_1+1}) = [2^{m_1^{(1)}}, 2^{m_1^{(1)}+1})$$

их нечетное число. При этом можно считать, что

$$[\log_2(n_j \dot{+} n_k)] \notin \{m_1^{(l)}, m_2^{(l)}, \dots\} \quad (18)$$

при $1 \leq l < j < k$ для $n_j, n_k \in [2^{\lambda_q}, 2^{\lambda_q+1})$, $q = 1, \dots, \tau$.

В противном случае, как и выше, имеет место (17) и ряд (14) не сходится наилучше в $\mathbf{L}_4[0, 1]$, откуда сразу следует справедливость утверждения 3.

Из (18) следует, что наибольший показатель в двоичном разложении числа $n_2 \dot{+} n_3 \dot{+} \dots \dot{+} n_{2\mu-1}$ не принадлежит множеству $\{m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, \dots\}$, откуда

$$n_1 \dot{+} n_2 \dot{+} \dots \dot{+} n_{2\mu-1} > n_1,$$

что противоречит предположению (13). Следовательно, предположение о наилучшей сходимости (14) в $\mathbf{L}_{2\mu'}[0, 1]$, $1 < \mu' < \mu$, ошибочно, что и завершает доказательство утверждения 3.

Утверждение 3 делает достаточно вероятной гипотезу, что ряд Фурье–Уолша–Пэли с неотрицательными коэффициентами или сходится наилучше во всех $\mathbf{L}_p[0, 1]$, которым принадлежит его сумма, или не сходится наилучше во всех таких $\mathbf{L}_p[0, 1]$ при $p \neq 2$.

Из доказанного следует, что в смысле наилучшей сходимости тригонометрические ряды и ряды Уолша–Пэли принципиально отличаются.

2. Наилучшая сходимость рядов по системе Хаара. Еще одной классической полной ортонормальной системой является система Хаара (определение и свойства см., например, в [14; гл. III, § 1]). Начнем изучение наилучшей сходимости рядов Хаара с рассмотрения следующего простого примера, который позволит сформулировать разные виды задачи о наилучшей сходимости.

Пусть

$$h(x) = \chi_1(x) + \chi_2(x) + \chi_6(x).$$

Легко видеть, что

$$h(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{2} & \text{при } 0 < x < \frac{1}{4}, \\ 1 - \sqrt{2} & \text{при } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{при } \frac{1}{2} < x < \frac{5}{8}, \\ -3 & \text{при } \frac{5}{8} < x < \frac{3}{4}, \\ -1 & \text{при } \frac{3}{4} < x < 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_0^1 |h(x)|^{p-1} (\operatorname{sgn} h(x)) \chi_0(x) dx &= \frac{1}{4} ((\sqrt{2} + 1)^{p-1} - (\sqrt{2} - 1)^{p-1}) - \frac{1}{8} (1 + 3^{p-1}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } p = 2, p = 4, \\ \sqrt{2} - \frac{5}{4} & \text{при } p = 3, \\ -10 & \text{при } p = 6, \\ a_p \neq 0 & \text{при } p = 2\mu - 1, p = 2\mu > 6 \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^1 |h(x) - \chi_1(x)|^{p-1} (\operatorname{sgn}(h(x) - \chi_1(x))) \chi_j(x) dx &= 0 \quad \text{при } j = 0, 1, \quad p \geq 1, \\ \int_0^1 |h(x) - \chi_1(x) - \chi_2(x)|^{p-1} \\ &\quad \times (\operatorname{sgn}(h(x) - \chi_1(x) - \chi_2(x))) \chi_j(x) dx = 0 \quad \text{при } j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

Таким образом, по критерию Никольского–Зингера “ряд” Фурье–Хаара функции $h(x)$ сходится наилучше в $\mathbf{L}_4[0, 1]$ и, естественно, в $\mathbf{L}_2[0, 1]$, но не сходится наилучше в $\mathbf{L}_3[0, 1]$ и вообще во всех $\mathbf{L}_{2\mu-1}[0, 1]$, $\mu \in \mathbb{N}$, и $\mathbf{L}_{2\mu}[0, 1]$, $3 \leq \mu \in \mathbb{N}$. Чуть более детальные подсчеты показывают, что этот “ряд” не сходится наилучше ни в одном $\mathbf{L}_p[0, 1]$ при $p \neq 2, 4$.

Приведенный пример показывает, что для рядов Хаара нет утверждений, аналогичных утверждениям 2 и 3, установленным для рядов Уолша. Непосредственным подсчетом легко установить, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\chi_1(x) + A \cdot \chi_2(x) + B \chi_6(x))^3 \chi_0(x) dx &= 3(A^2 - B^2), \\ \int_0^1 (A \chi_2(x) + B \chi_6(x))^3 \chi_j(x) dx &= 0 \quad \text{при } j = 0, 1, \\ \int_0^1 (B \chi_6(x))^3 \chi_j(x) dx &= 0 \quad \text{при } j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \end{aligned}$$

так что для наилучшей сходимости в $L_4[0, 1]$ “ряда”

$$\chi_1(x) + A\chi_2(x) + B\chi_6(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы $B = \pm A$.

Последний пример делает осмысленными различные постановки задачи наилучшей сходимости: широкой – для фиксированного ряда, приводящей к исследованию соотношений между его коэффициентами, и узкой – для рядов с произвольными коэффициентами по фиксированной подсистеме системы Хаара, т.е. задаче на “спектр наилучшей сходимости”.

По второй из этих задач можно установить следующий просто доказываемый результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. 1) Если для возрастающей последовательности номеров $\{n_k\}$ при любых $k < j$ выполнены условия

$$\text{mes}(\{x \in [0, 1] : \chi_{n_k}(x) \neq 0\} \cap \{x \in [0, 1] : \chi_{n_j}(x) \neq 0\}) = 0, \quad (19)$$

то ряд Хаара вида

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \chi_{n_k}(x) \quad (20)$$

наилучше сходится во всех $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, которым принадлежит его сумма.

2) Если ряд (20) наилучше сходится в каком-либо $L_p[0, 1]$ при $p \in (1, 2) \cup (2, \infty]$ для всякой финитной последовательности коэффициентов $\{a_k\}$, то (19) выполняется для любых $k < j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с доказательства пункта 2). Пусть ряд (20) наилучше сходится в каком-то $L_p[0, 1]$, где $p \in (1, 2) \cup (2, \infty]$ при любой финитной последовательности $\{a_k\}$, однако для хотя бы одной пары натуральных чисел $k < j$ не выполнено условие (19). По сказанному при любом λ наилучше сходится “ряд”

$$h(x) = \|\chi_{n_k}(x)\|_\infty^{-1} \cdot \chi_{n_k}(x) + \lambda \|\chi_{n_j}(x)\|_\infty^{-1} \cdot \chi_{n_j}(x)$$

в $L_p[0, 1]$, но не выполнено (19), откуда

$$\{x \in [0, 1] : \chi_{n_j}(x) \neq 0\} \subset \{x \in [0, 1] : \chi_{n_k}(x) \neq 0\}.$$

При $0 < \lambda < 1$ и $p = \infty$

$$\text{или} \quad \begin{cases} \sup_x h(x) = 1 + \lambda, \\ \inf_x h(x) = -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sup_x h(x) = 1, \\ \inf_x h(x) = -1 - \lambda, \end{cases}$$

откуда видно, что наилучшее приближение $h(x)$ с помощью функции $C \cdot \chi_0(x) \equiv C$ в $L_\infty[0, 1]$ достигается при $C = \lambda/2$ или $C = -\lambda/2$, что противоречит наилучшей сходимости указанного “ряда” в $L_\infty[0, 1]$.

Так как

$$m = \text{mes}\{x \in [0, 1] : \chi_{n_j}(x) \neq 0\} = 2^{-s} \{x \in [0, 1] : \chi_{n_k}(x) \neq 0\},$$

где $1 \leq s = s(k, j) \in \mathbb{N}$, то при $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ и достаточно малых $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |h(x)|^{p-1} (\operatorname{sgn} h(x)) \chi_0(x) dx \\ &= \frac{m}{2} ((1+\lambda)^{p-1} + (1-\lambda)^{p-1}) + \left(\frac{2^s m}{2} - m \right) - \frac{2^s m}{2} \\ &= m \left(\frac{(1+\lambda)^{p-1} + (1-\lambda)^{p-1}}{2} - 1 \right) \\ &= m \left(\frac{(p-1)(p-2)}{2} \lambda^2 + O(\lambda^3) \right) \neq 0, \end{aligned}$$

так что наилучшее приближение $h(x)$ с помощью $C \cdot \chi_0(x) \equiv C$ в $\mathbf{L}_p[0, 1]$ по критерию Никольского–Зингера не достигается при $C = 0$, и, следовательно, ряд для $h(x)$ не сходится в указанном пространстве наилучше. Этим доказывается пункт 2) утверждения 4.

Если (19) имеет место, то

$$\left| \sum_{k \geq \nu} a_k \chi_{n_k}(x) \right|^{p-1} \left(\operatorname{sgn} \left(\sum_{k \geq \nu} a_k \chi_{n_k}(x) \right) \right) = \sum_{k \geq \nu} |a_k|^{p-1} (\operatorname{sgn} a_k) \|\chi_{n_k}\|_\infty^{p-2} \cdot \chi_{n_k}(x)$$

и при $j = 0, 1, \dots, n_\nu - 1$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k \geq \nu} a_k \chi_{n_k}(x) \right|^{p-1} \left(\operatorname{sgn} \left(\sum_{k \geq \nu} a_k \chi_{n_k}(x) \right) \right) \chi_j(x) dx = 0.$$

По критерию Никольского–Зингера при $1 < p < \infty$ ряд (20) наилучше сходится в $\mathbf{L}_p[0, 1]$, если его сумма принадлежит этому пространству.

При выполнении (19) наилучшая сходимость в $\mathbf{L}_1[0, 1]$ и $\mathbf{L}_\infty[0, 1]$ ряда (20), если его сумма принадлежит указанным пространствам соответственно, легко следует из того, что эта сумма симметрична на любом двоичном интервале относительно его середины, когда на этом интервале $|\chi_{n_k}(x)| \equiv C_k > 0$.

Таким образом, пункт 1) и все утверждение 4 доказаны.

3. О наилучшей сходимости рядов по системам многочленов. К классическим ортогональным системам относятся системы многочленов Якоби (см., например, [15; гл. VII, § 1]) – системы $\{P_n(x; \alpha, \beta)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ алгебраических многочленов степени n , ортогональных с весом

$$\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1, \quad x \in (-1, +1).$$

Для самой известной из этого множества систем – системы $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ многочленов П. Л. Чебышёва первого рода, для которой вес есть $\omega(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, ответ получается редукцией к случаю косинус-рядов.

Нетрудно понять, что для весового пространства $\mathbf{L}_{p,\omega}[a, b]$ критерий Никольского–Зингера примет вид

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left| f(x) - \sum_{1 \leq k \leq l-1} c_k \varphi_k(x) \right|^{p-1} \\ & \times \left(\operatorname{sgn} \left(f(x) - \sum_{1 \leq k \leq l-1} c_k \varphi_k(x) \right) \right) \varphi_m(x) \omega(x) dx = 0, \quad m = 1, \dots, l-1. \end{aligned} \quad (21)$$

Условие (21) – критерий того, что многочлен $\sum_{1 \leq k \leq l-1} c_k \varphi_k(x)$ среди всех многочленов вида $\sum_{1 \leq k \leq l-1} \alpha_k \varphi_k(x)$ дает наилучшее по норме

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \omega(x) > 0,$$

приближение функции $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \varphi_k(x)$. Доказательство этого можно провести практически повторением рассуждений И. Зингера [7], а для наиболее употребительного в данной работе случая $p = 2\mu$, $\mu \in \mathbb{N}$, – дифференцированием по α_k выражения

$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_{1 \leq k \leq l-1} \alpha_k \varphi_k(x) \right)^{2\mu} \omega(x) dx$$

и последующим приравниванием производных нулю.

Если ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k T_{n_k}(x) \quad (22)$$

наилучше сходится в $\mathbf{L}_{p,\omega}[-1, +1]$, $1 \leq p < \infty$, $\omega = \omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, то

$$\int_{-1}^1 \left| \sum_{k \geq \nu} a_k T_{n_k}(x) \right|^{p-1} \left(\operatorname{sgn} \left(\sum_{k \geq \nu} a_k T_{n_k}(x) \right) \right) T_m(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx = 0 \quad (23)$$

при $m = 0, 1, \dots, n_\nu - 1$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Разумеется, и из (23) следует наилучшая сходимость ряда (22) в $\mathbf{L}_{p,\omega}[-1, +1]$.

Если в (23) произвести замену $x = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, то в силу равенств $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ получим

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k \geq \nu} a_k \cos n_k \theta \right|^{p-1} \left(\operatorname{sgn} \left(\sum_{k \geq \nu} a_k \cos n_k \theta \right) \right) \cos m \theta d\theta = 0$$

– критерий наилучшей сходимости в $\mathbf{L}_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p < \infty$, ряда

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cos n_k \theta. \quad (24)$$

Отсюда сразу следуют результаты [3], [8], [9] относительно спектра наилучшей сходимости ряда Чебышёва (22). Как уже было сказано, замена $x = \cos \theta$ превращает ряд (22) в (24), а так как очевидным образом

$$\left\| \sum_{k \geq \nu} a_k T_{n_k}(x) \right\|_{\mathbf{C}[-1, +1]} = \left\| \sum_{k \geq \nu} a_k \cos n_k \theta \right\|_{\mathbf{C}[0, 2\pi]},$$

то и результаты [1] о спектре наилучше сходящихся косинус-рядов переносятся на ряды Чебышёва.

Совершенно иная картина для рядов по системе $\{U_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ полиномов Чебышёва второго рода, ортогональных на $[-1, +1]$ с весом $(1 - x^2)^{1/2}$. Так как (см. [15; гл. III, § 6])

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{(1 - x^2)^{1/2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in (-1, +1),$$

то ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} b_k U_{n_k}(x)$$

наилучше сходится в $\mathbf{L}_{p,\omega}[-1, +1]$, $1 \leq p < \infty$, с $\omega(x) = (1 - x^2)^{1/2}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left| \sum_{k \geq \nu} b_k U_{n_k}(x) \right|^{p-1} \left(\operatorname{sgn} \left(\sum_{k \geq \nu} b_k U_{n_k}(x) \right) \right) (1 - x^2)^{1/2} U_m(x) dx \\ &= \int_0^\pi \left| \sum_{k \geq \nu} b_k \sin(n_k + 1)\theta \right|^{p-1} \left(\operatorname{sgn} \left(\sum_{k \geq \nu} b_k \sin(n_k + 1)\theta \right) \right) \frac{\sin(m+1)\theta}{(\sin \theta)^{p-2}} d\theta = 0, \\ & m = 0, 1, \dots, n_\nu - 1, \quad \nu \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Рассмотрим “ряд”, состоящий из одного слагаемого $U_2(x)$. Для этого ряда условие наилучшей сходимости принимает вид

$$\int_0^\pi \frac{|\sin 3\theta|^{p-1} (\operatorname{sgn}(\sin 3\theta))}{(\sin \theta)^{p-2}} \sin(m+1)\theta d\theta = 0, \quad m = 0, 1.$$

При $m = 0$ отсюда следует соотношение

$$\int_0^\pi \frac{|\sin 3\theta|^{p-1} (\operatorname{sgn}(\sin 3\theta))}{(\sin \theta)^{p-3}} d\theta = 0,$$

которое нетрудно переписать в виде

$$\int_0^{\pi/6} (\sin 3\theta)^{p-1} \left(\sin^{3-p} \theta + \sin^{3-p} \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) - \sin^{3-p} \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) \right) d\theta = 0.$$

Но это равенство не выполняется очевидным образом при $p = 1$ и $p = 3$, а при $p > 3$ положительность левой части непосредственно следует из неравенства при $0 \leq \theta \leq \pi/6$

$$0 < \sin^{3-p} \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) < \sin^{3-p} \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right).$$

Разумеется, любой ряд с коэффициентами из $\mathbf{I}_2$ наилучше сходится в $\mathbf{L}_{2,\omega}[-1, +1]$.

Так как наилучшее приближение постоянной для $U_2(x) = 4x^2 - 1$ дается не нулем, а единицей, то “ряд” $U_2(x)$ не сходится наилучше и в $\mathbf{L}_\infty[-1, +1]$. Аналогично обстоит дело и для любого “ряда” вида $U_n(x)$. Вместе с тем “ряды” $\cos(nx + \varphi)$, $W_n(x)$ или $\chi_n(x)$ наилучше сходятся в $\mathbf{L}_p$ для любых $1 \leq p \leq \infty$. Для $\cos(nx + \varphi)$ это отмечено в [16; гл. II, п. 2.9.33], для $W_n(x)$ следует из [11], а для $\chi_n(x)$ — из утверждения 4.

Для системы $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ многочленов Лежандра, ортогональных на $[-1, +1]$ с единичным весом, очевидно, что наилучшее приближение с помощью постоянной в $\mathbf{L}_\infty[-1, +1]$ уже для “ряда” $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ дается не нулем, а $\frac{1}{4}$. Таким образом, этот “ряд” не сходится наилучше в $\mathbf{L}_\infty[-1, +1]$, а по непрерывности нормы $\mathbf{L}_p$ при $p \rightarrow \infty$ — и при достаточно больших p в $\mathbf{L}_p[-1, +1]$. Скорее всего,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |P_2(x)|^{p-1} (\operatorname{sgn} P_2(x)) dx \\ &= 2 \left(- \int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}(1 - 3x^2) \right)^{p-1} dx + \int_{1/\sqrt{3}}^1 \left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right)^{p-1} dx \right) = 0 \end{aligned}$$

лишь при $p = 2$, т.е. “ряд” $P_2(x)$ наилучше сходится только в $\mathbf{L}_2[-1, +1]$.

Все сказанное выше говорит о том, что среди систем многочленов Якоби многочлены Чебышёва первого рода занимают особое место в смысле наилучшей сходимости рядов по ним. Если ограничиться изучением наилучшей сходимости рядов Якоби лишь в $\mathbf{L}_{2\mu,\omega}[-1, +1]$, $1 < \mu \in \mathbb{N}$, то необходимо рассматривать интегралы вида

$$\int_{-1}^1 \left(\sum_{k \geq \nu} a_k P_{n_k}(x; \alpha, \beta) \right)^{2\mu-1} P_m(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx$$

при $m = 0, 1, \dots, n_\nu - 1$. Это, в свою очередь, требует изучения разложений вида

$$P_i(x; \alpha, \beta) P_j(x; \alpha, \beta) = \sum_{0 \leq s \leq i+j} \gamma_s(i, j; \alpha, \beta) P_s(x; \alpha, \beta). \quad (25)$$

В [17] указаны соотношения между α и β , при которых коэффициенты $\gamma_s(i, j; \alpha, \beta)$ в (25) неотрицательны. Если есть

$$\gamma_s(i, i; \alpha, \beta) > 0, \quad 1 \leq s \leq 2i - 1,$$

то можно показать, что “ряд” $P_i(x; \alpha, \beta)$ из одного слагаемого не сходится наилучше в $\mathbf{L}_{4,\omega}[-1, +1]$ (да и в любом $\mathbf{L}_{2\mu,\omega}[-1, +1]$). Скорее всего, $\gamma_s(i, i; \alpha, \beta) = 0$, $1 \leq s \leq 2i - 1$, только при $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, т.е. для полиномов Чебышёва первого рода. Тогда только для этой системы полиномов Якоби (с учетом соотношений между α и β из [17]) существуют наилучше сходящиеся ряды.

4. Наилучшая сходимость рядов по системам характеров. Как известно, систему Уолша–Пэли можно рассматривать как систему понтрягинских характеров прямой топологической счетной суммы двоичных циклических групп $\mathbf{Z}_2$, т.е. множества $\mathbf{G}$ последовательностей из нулей и единиц $x = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ с групповой операцией $+$ покоординатного сложения по модулю два и топологией, задаваемой системой подгрупп $\mathbf{U}_n$ элементов вида $(0, \dots, 0, \varepsilon_{n+1}, \dots)$. Соответствующие определения можно найти в монографии Л. С. Понтрягина [18]. Эту группу можно взаимно однозначно с точностью до счетного множества отобразить на $[0, 1]$, что позволяет рассматривать систему Уолша–Пэли и на группе, и на отрезке (см. [19]).

Обобщением системы Уолша–Пэли является класс полных ортонормальных систем функций – систем характеров нульмерных групп (см. [20], [21; гл. III, п. 1–5]). Топология нульмерной компактной абелевой группы $\mathbf{G}$ задается системой подгрупп – окрестностей нуля

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}_0 \supset \mathbf{U}_1 \supset \dots \supset \mathbf{U}_n \supset \dots, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbf{U}_n = \{0\},$$

где 0 – нейтральный (нулевой) элемент группы $\mathbf{G}$, а факторгруппы $\mathbf{U}_{n-1}/\mathbf{U}_n$ имеют конечный простой порядок p_n . Группа $\mathbf{G}$, как показал Л. С. Понтрягин, обладает счетной системой характеров $\mathbf{X} = \{\chi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $x \in \mathbf{G}$, – комплекснозначных функций на $\mathbf{G}$, равных по модулю единице и образующих абелеву группу относительно операции поточечного умножения, причем

$$\mathbf{X}_0 = \{\chi_0(x) \equiv 1\} \subset \mathbf{X}_1 \subset \dots \subset \mathbf{X}_n \subset \dots, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbf{X}_n = \mathbf{X},$$

где $\mathbf{X}_n$ — подгруппа $\mathbf{X}$, состоящая из аннуляторов $\mathbf{U}_n$, т.е. таких характеров χ , для которых

$$\chi(x) = 1 \quad \text{при } x \in \mathbf{U}_n \text{ и } \chi \in \mathbf{X}_n.$$

Группы $\mathbf{X}_n$ также конечны и их порядки равны числам

$$m_n = p_n \cdot m_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m_0 = 1.$$

Если присвоить номер m_{n-1} произвольному характеру из $\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}$, причем считать $\chi_0(x) \equiv 1$, то для любого натурального k , единственным образом представленного в виде

$$k = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot m_{n-1}, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, p_n - 1\}$$

(в действительности сумма в последнем выражении конечна), определим

$$\chi_k(x) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (\chi_{m_{n-1}}(x))^{a_n}.$$

Так как

$$(\chi_{m_{n-1}}(x))^{p_n} \equiv 1 = \chi_0(x),$$

то для

$$\chi_{\perp k}(x) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (\chi_{m_{n-1}}(x))^{p_n - a_n}$$

справедливы соотношения

$$\chi_k(x) \cdot \chi_{\perp k}(x) = \chi_0(x), \quad \chi_{\perp k}(x) = \overline{\chi_k(x)}$$

(черта — знак комплексного сопряжения).

Положим

$$\mathbb{N}_n = \begin{cases} \{m_{n-1}, \dots, \frac{1}{2}(m_{n-1} + m_n) - 1\} & \text{при } m_n - m_{n-1} = 2s, \\ \{m_{n-1}, \dots, \frac{1}{2}(m_{n-1} + m_n - 1)\} & \text{при } m_n - m_{n-1} = 2s - 1 \end{cases}$$

и $\tilde{\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}_n$.

Будем рассматривать наиболее интересный случай, когда все p_n — нечетные числа, так что в определении $\mathbb{N}_n$ осуществляется лишь первая ситуация.

Если $c_{\perp k} = \bar{c}_k$ для $k \in \tilde{\mathbb{N}}$, то частичные суммы ряда

$$c_0 \chi_0(x) + \sum_{k \in \tilde{\mathbb{N}}} (c_k \chi_k(x) + c_{\perp k} \chi_{\perp k}(x)), \quad \bar{c}_0 = c_0, \quad (26)$$

действительны, а сам ряд является рядом по переставленной системе $\mathbf{X}$, причем перестановки происходят внутри “пачек” $\mathbf{X}_n \setminus \mathbf{X}_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Описанная процедура является калькой с ситуации перехода от системы $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — системы характеров одномерного тора, к системе косинусов.

В [21] описано построение меры Лебега–Хаара на группе $\mathbf{G}$ и интеграла по этой мере. К. Ватари [22] для случая $\sup_n p_n < \infty$ и Во-сан Янг [23] в общей ситуации

показали, что система характеров $\mathbf{X}$ является базисом в $\mathbf{L}_p(\mathbf{G})$, $1 < p < \infty$. Доказательство использует оценку типа Р. Пэли [12]

$$\left\| \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{m_n \leq k \leq m_{n+1}-1} c_k \chi_k(x) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbf{L}_p(\mathbf{G})} \sim \|f\|_{\mathbf{L}_p(\mathbf{G})}, \quad c_k = c_k(f),$$

откуда аналогично [14; гл. 4, §5] нетрудно установить базисность в $\mathbf{L}_p(\mathbf{G})$, $1 < p < \infty$, переставленной системы $\tilde{\mathbf{X}} = \{\chi_k; \chi_{\perp k}\}_{k \in \tilde{\mathbb{N}}}$.

Если не желать вдаваться в подробности подобных рассуждений, то можно считать ряд (26) абсолютно сходящимся.

Если $c_{\perp k} = c_k \geq 0$, $k \in \tilde{\mathbb{N}}$, то ряд (26) примет вид

$$\rho_0 \varphi_0(x) + \sum_{k \in \tilde{\mathbb{N}}} \rho_k \varphi_k(x),$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2}(\chi_k(x) + \chi_{\perp k}(x)), \quad \rho_k = 2c_k, \quad k \neq 0, \quad \rho_0 = c_0,$$

аналогичный косинус-ряду с неотрицательными коэффициентами.

Рассмотрим вопрос о наилучшей сходимости в $\mathbf{L}_p(\mathbf{G})$ ряда

$$\sum_{n_k \in \tilde{\mathbb{N}}} \rho_k \varphi_{n_k}(x). \quad (27)$$

По критерию Никольского–Зингера ряд (27) наилучше сходится в $\mathbf{L}_p(\mathbf{G})$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbf{G}} \left| \sum_{k \geq \nu, n_k \in \tilde{\mathbb{N}}} \rho_k \varphi_{n_k}(x) \right|^{p-1} \left(\operatorname{sgn} \left(\sum_{k \geq \nu, n_k \in \tilde{\mathbb{N}}} \rho_k \varphi_{n_k}(x) \right) \right) \varphi_m(x) dx = 0$$

для $m \in [0, n_\nu) \cap \tilde{\mathbb{N}}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Если ограничиться случаем $p = 2\mu$, $1 < \mu \in \mathbb{N}$, то следует проверять равенства

$$\int_{\mathbf{G}} \left(\sum_{k \geq \nu, n_k \in \tilde{\mathbb{N}}} \rho_k \varphi_{n_k}(x) \right)^{2\mu-1} \varphi_m(x) dx = 0, \quad m \in [0, n_\nu) \cap \tilde{\mathbb{N}}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Это равносильно проверке при $m \in [0, n_\nu) \cap \tilde{\mathbb{N}}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ условий

$$\int_{\mathbf{G}} \left(\sum_{\nu \leq k \leq N, n_k \in \tilde{\mathbb{N}}} \rho_k (\chi_{n_k}(x) + \chi_{\perp n_k}(x)) \right)^{2\mu-1} \chi_m(x) dx = 0. \quad (28)$$

Система характеров $\mathbf{X}$ мультипликативна, т.е.

$$\chi_k(x) \cdot \chi_l(x) = \chi_n(x),$$

так что в $\mathbb{N}_0$ можно ввести операцию сложения $\dot{+}$ по правилу $k \dot{+} l = n$, превращающую это множество в абелеву группу, как это было в случае системы Уолша–Пэли.

Подобно тому, как было проделано в работе [8] для косинус-рядов и в данной работе для рядов Уолша–Пэли, при $\rho_k \geq 0$ условия (28) оказываются равносильными несовместности всех систем

$$\begin{cases} (s_\nu^+ + s_\nu^-) + \dots + (s_N^+ + s_N^-) = 2\mu - 1, & s_k^\pm \in \mathbb{N}_0, \\ (s_\nu^+ \cdot n_\nu + s_\nu^- \cdot (-n_\nu)) + \dots + (s_N^+ \cdot n_N + s_N^- \cdot (-n_N)) = m, \end{cases} \quad (29)$$

где $m \in [0, n_\nu) \cap \tilde{\mathbb{N}}$, $\nu \in \mathbb{N}$; $s \cdot n = \underbrace{n + n + \dots + n}_s$.

Для ρ_k произвольных знаков (29) достаточно для выполнения (28), т.е. для наилучшей сходимости ряда (27) в $\mathbf{L}_{2\mu}(\mathbf{G})$, $\mu \in \mathbb{N}$. Отметим, что (29) – полный аналог условия (9) наилучшей сходимости ряда Уолша–Пэли.

Пусть все p_n , $n \in \mathbb{N}$, нечетны (это наиболее интересный случай). Если

$$p_s = \min_n p_n \leq 2\mu - 1,$$

то “ряд”, состоящий из одного слагаемого $\varphi_{m_{s-1}}(x)$, не сходится наилучше в $\mathbf{L}_{2\mu}(\mathbf{G})$. Действительно, положим

$$n_\nu = m_{s-1}, \quad s_\nu^+ = p_s + \frac{2\mu - 1 - p_s}{2}, \quad s_\nu^- = \frac{2\mu - 1 - p_s}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} s_\nu^+ + s_\nu^- &= 2\mu - 1, \\ s_\nu^+ \cdot n_\nu + s_\nu^- \cdot (-n_\nu) &= p_s \cdot n_\nu + \frac{2\mu - 1 - p_s}{2} (n_\nu + (-n_\nu)) \\ &= p_s \cdot m_{s-1} + 0 = \underbrace{m_{s-1} + \dots + m_{s-1}}_{p_s} = 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$1 = (\chi_{m_{s-1}}(x))^{p_s} = \chi_{m_{s-1} + \dots + m_{s-1}}(x) = \chi_0(x)$$

и необходимое для наилучшей сходимости “ряда” $\varphi_{m_{s-1}}(x)$ условие (29) не выполнено.

Очевидно, при $\min_n p_n > 2\mu - 1$ легко указать ряды, для которых (29) выполнено и которые, следовательно, наилучше сходятся в $\mathbf{L}_{2\mu}(\mathbf{G})$, $1 < \mu \in \mathbb{N}$. Разумеется, коэффициенты таких рядов вида (27) неотрицательны.

Из сказанного следует, что в смысле наилучшей сходимости в $\mathbf{L}_p(\mathbf{G})$ ряды по системам характеров нульмерных групп отличаются от рядов Уолша–Пэли.

В данной работе рассматривались только сепарабельные пространства. Одна несепарабельная ситуация рассматривалась автором в [24].

Список литературы

1. *Бернштейн С. Н.* О периодических функциях, для которых наилучше сходящимся рядом является ряд Фурье // Сочинения. Т. II. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 178–183.
2. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
3. *Рубинштейн А. И.* О наилучше сходящихся рядах // Докл. расширенных заседаний семинара ИПМ им. И. Н. Векуа. Т. 1. № 2. Тбилиси, 1985. С. 114–117.
4. *Zygmund A.* On the convergence of lacunary trigonometric series // Fund. Math. 1930. V. 16. P. 90–107.
5. *Szidon S.* Ein Satz über die absolute Konvergenz von Fourier-Reihen in denen Sehr viele Glieder fehlen // Math. Ann. 1926. V. 96. P. 418–419.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10. С. 207–256.
7. *Zinger I.* Caractérisation des éléments d'approximation dans un espace de Banach quelconque // Acta Math. Szeged. 1956. V. 17. № 3–4. P. 181–194.
8. *Рубинштейн А. И.* О наилучше сходящихся в $L_p[0, 2\pi]$ рядах // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 6. С. 100–108.
9. *Рубинштейн А. И.* Специальные ряды по тригонометрической и мультипликативным системам // Дис. . . докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1996.
10. *Голубов Б. И., Скворцов В. А., Ефимов А. В.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. М.: Наука, 1987.
11. *Рубинштейн А. И.* О модулях непрерывности и наилучших приближениях в L_p функций, представимых лакунарными рядами Уолша // Изв. вузов. Сер. матем. 1983. № 5. С. 61–68.
12. *Paley R.* A remarkable system of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc. 1932. V. 34. P. 241–279.
13. *Гапошкин В. Ф.* Лакунарные ряды и независимые функции // УМН. 1966. Т. 21. № 6. С. 3–82.
14. *Кашич Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
15. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976.
16. *Гиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
17. *Gasper G.* Linearisation of the product of Jacobi polynomials, II // Canad. J. Math. 1970. V. 22. № 3. P. 582–593.
18. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Гостехиздат, 1954.
19. *Балашов Л. А., Рубинштейн А. И.* Ряды по системе Уолша и их обобщения // Итоги науки. Матем. анализ. 1970. М.: ВИНТИ, 1971. С. 147–202.
20. *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортогональных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. С. 363–400.
21. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: Элм, 1981.
22. *Watari C.* On generalized Walsh–Fourier series, I // Proc. Japan Acad. 1957. V. 73. № 8. P. 435–438.
23. *Young W.-S.* Mean convergence of generalized Walsh–Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 311–320.
24. *Rubinshtein A. I.* On the best convergence of trigonometric integrals // Anal. Math. 1996. V. 22. P. 199–212.