Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей,
Матем. сб., 2001, том 192, номер 3, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 11:29:20

УДК 517.51

О. В. Бесов

Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей

В теореме вложения Соболева $W_p^s(G) \subset L_q(G)$ допустимые соотношения между параметрами гладкости и суммируемости определяются геометрическими свойствами области G . В работе эта теорема и соответствующие оценки слабого типа устанавливаются для областей с нерегулярной границей и в случае весовых пространств L_p, L_q .

Библиография: 15 названий.

Известная теорема вложения Соболева

$$W_p^s(G) \subset L_q(G), \quad s \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < q < \infty, \quad (1)$$

установлена С. Л. Соболевым в 1938 г. (см. [1]) для области $G \subset \mathbb{R}^n$ с условием конуса при $s - n/p + n/q \geq 0$. Последнее соотношение (определяющее максимально возможное значение q в теореме (1)) является и необходимым условием вложения. Результат С. Л. Соболева был перенесен на области более общего вида: области классов $J_{\frac{n-1}{n}}, I_{p, \frac{1}{p} - \frac{1}{n}}$ (В. Г. Мазья, 1960 г., 1975 г., см. [2]), области с условием Джона (Ю. Г. Решетняк [3], [4]), области с условием гибкого конуса (О. В. Бесов, 1983 г., см. [5]).

В случае области G с нерегулярной границей (например, имеющей вид внешнего пика в окрестности некоторой точки границы) вложение оказывается верным лишь при более сильных условиях, связывающих s, p, q и зависящих от геометрических свойств границы G . В. Г. Мазья выделил классы областей J_α (1960 г.), $I_{p, \alpha}$ (1975 г.), для которых установил соответственно при $p = 1$ и $p > 1$ теорему вложения (1) при $s = 1$ и максимально возможном $q (= 1/\alpha)$, см. [2]. Условия принадлежности области G классам $J_\alpha, I_{p, \alpha}$, формулируемые в терминах изопериметрических или емкостных неравенств, трудно проверяемы. И. Г. Глобенко в 1962 г. [6] для областей с условием вырожденного конуса (степенное вырождение) установил теорему вложения (1) с максимально возможным q при $s = 1$. Его доказательство при $s = 2, 3, \dots$ вызывает сомнение, см. работу Д. А. Лабутина [7], в которой приведено доказательство вложения (1) при $s \in \mathbb{N}$ с максимально возможным значением q для областей более общего вида, имеющих, в частности, внешние пики степенного типа. Ранее Смит и Стегенга [8] для области G с σ -условием Джона (σ -John domain), $\sigma > 1$, установили при $q = p$ ($s = 1$) неравенство Соболева–Пуанкаре. Хайлаш и Коскела [9] для области с σ -условием Джона ($\sigma \geq 1$)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00868), Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96047) и фонда INTAS (грант № 99-01080).

установили неравенство Соболева–Пуанкаре ($s = 1$) со значением q , близким к максимально возможному, а при $p = 1$ – с максимально возможным. Неравенство Соболева–Пуанкаре ($s = 1$) для области с σ -условием Джона ($\sigma > 1$) при $p > 1$ и максимально возможным q установили Килпелайнен и Малы [10] в качестве следствия из более общего результата в отношении геометрических свойств области G . В [9], [10] содержатся также обобщения на случай весовых L_p -, L_q -пространств (вес – степень расстояния до границы области).

Теорема вложения $W_p^1(G) \rightarrow L_q(G)$ с максимальным показателем q для гёльдеровых областей G установлена Д. А. Лабутиным [11]. Отметим еще работу Стредулинского [12], в которой упомянутые теоремы вложения В. Г. Мазы распространены на весовые пространства Соболева.

Автор признателен Д. А. Лабутину, привлечшему его внимание к работам [10], [13] и к вопросу обобщения результатов на случай производных порядка s выше первого.

В настоящей работе устанавливается теорема вложения (1) при $s \in \mathbb{N}$ для областей G некоторого класса и, в частности, для областей G с σ -условием Джона ($\sigma > 1$). При $s = 1$ предлагаемый метод позволяет несколько расширить (сравнительно с [10]) класс областей, для которых справедливо неравенство Соболева–Пуанкаре. Результаты обобщаются и на случаи вложений пространств с весовыми нормами с достаточно общими весами.

Везде далее $\delta \in (0, 1)$ достаточно мало; область $G \subset \mathbb{R}^n$; $G_\delta = \{x \in G : \text{dist}(x, \partial G) > \delta/2\}$; $v, w: G \rightarrow (0, \infty)$, $u: G_\delta \rightarrow (0, \infty)$; u, v, w локально суммируемы; для измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathbb{R}^n$ $|E|_w = \int_{E \cap G} w(x) dx$ и при $E \subset G$, $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_{p,E} = \|f|L_p(E)\|$, $\|f|L_{p,v}(E)\| = \|f v^{\frac{1}{p}}|L_p(E)\|$;

$$1 \leq p < q < \infty, \quad 1 \leq r \leq q, \quad s \in \mathbb{N}, \quad s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0. \quad (2)$$

Цель работы – нахождение условий справедливости для области G с нерегулярной границей оценки

$$\|f|L_{q,w}(G)\| \leq C \left[\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f|L_{p,v}(G)\| + \|f|L_{r,w}(G_\delta)\| \right] \quad (3)$$

или оценки слабого типа

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \left| \{x \in G : |f(x)| > \lambda\} \right|_w^{\frac{1}{q}} \leq C \left[\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f|L_{p,v}(G)\| + \|f|L_{r,u}(G_\delta)\| \right], \quad (4)$$

справедливых для всех функций f с конечной правой частью и с постоянной C , не зависящей от f .

§ 1. Основные результаты

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\rho(x) = \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G), \quad \rho_1(x) = \min\{\rho(x), 1\}, \quad B(x, R) = \{y : |y - x| < R\},$$

χ – характеристическая функция $B(0, 1)$, $1/p' = 1 - 1/p$, $\varepsilon > 0$,

$$a_+^{(\varepsilon)} = \begin{cases} a_+ & \text{при } a \neq 0, \\ \varepsilon & \text{при } a = 0, \end{cases} \quad a_-^{(\varepsilon)} = \begin{cases} a_- & \text{при } a \neq 0, \\ -\varepsilon & \text{при } a = 0, \end{cases}$$

$$Q(x, r) = x + [-r, r]^n, \quad M_w f(x) = \sup_{R>0} |G \cap B(x, R)|_w^{-1} \int_{G \cap B(x, R)} |f(y)| dy.$$

Заметим, что

$$|\rho_1(x) - \rho_1(y)| \leq |x - y| \quad (1.1)$$

и что при любом $\varepsilon \in (0, 1)$

$$(1 - \varepsilon)\rho_1(y) \leq (1 + \varepsilon)\rho_1(x) \text{ для } x, y \in G, \quad B(x, \varepsilon\rho_1(x)) \cap B(y, \varepsilon\rho_1(y)) \neq \emptyset. \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $\delta \in (0, 1)$, $R_0 > 0$, $C_0 \geq 1$ и каждой точке $x \in G$ поставлены в соответствие кусочно гладкий путь $\gamma = \gamma_x: [0, t_x] \rightarrow G$ и непрерывная кусочно гладкая функция $r_\gamma: [0, t_x] \rightarrow (0, \infty)$ со свойствами:

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma \subset B(x, R_0), \quad \rho(\gamma(t_x)) \geq \delta, \quad |\gamma'| \leq 1 \text{ п.в.}, \quad (1.3)$$

$$0 < r_\gamma(t) \leq \delta\rho_1(\gamma(t)), \quad |r'_\gamma(t)| = \left| \frac{d}{dt} r_\gamma(t) \right| \leq C_0 \text{ для п.в. } t \in (0, t_x], \quad r_\gamma(t_x) \geq \delta^2, \quad (1.4)$$

$$\delta r_\gamma(t') \leq r_\gamma(t'') \text{ при } B(\gamma(t'), \delta r_\gamma(t')) \cap B(\gamma(t''), \delta r_\gamma(t'')) \neq \emptyset, \quad t', t'' \in [0, t_x]. \quad (1.5)$$

Тогда будем писать $(G, \gamma, r_\gamma) \in \mathcal{G}(\delta, R_0, C_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В качестве $r_\gamma(t)$ можно взять, например, функцию, эквивалентную $\rho_1(\gamma(t))$. Покажем это. Обозначим через $\tilde{\rho}(x)$, $x \in G$, регуляризованное расстояние от x до $\mathbb{R}^n \setminus G$ (см. [14]). Функция $\tilde{\rho} \in C^\infty(G)$ и при некотором $N \geq 1$

$$\frac{1}{N}\rho(x) \leq \tilde{\rho}(x) \leq \rho(x), \quad |\text{grad } \tilde{\rho}| < N \quad (x \in G).$$

В случае ограниченной области G можно взять $r_\gamma(t) = \frac{1}{2}\tilde{\rho}(\gamma(t))$. В общем случае положим $\tilde{\rho}_1(x) = \varphi(\tilde{\rho}_1(x))$, где $\varphi \in C^\infty(0, \infty)$, $\varphi(t) = t$ при $0 < t < \frac{1}{2}$, $\varphi(t) = 1$ при $t \geq 2$, $\frac{1}{2} < \varphi(t) \leq 1$ при $\frac{1}{2} < t < 2$, φ не убывает на $(0, \infty)$. Ясно, что $\tilde{\rho}_1 \in C^\infty(G)$ и что при некотором $N_1 > 0$

$$\frac{1}{N_1}\rho_1(x) \leq \tilde{\rho}_1(x) \leq \rho_1(x), \quad |\text{grad } \tilde{\rho}_1| \leq N.$$

Учитывая (1.2), завершаем доказательство замечания 1.1.

Укажем сначала простое условие, связывающее r , q , u , w , которое будем считать выполненным для $(G, \gamma, r_\gamma) \in \mathcal{G}(\delta, R_0, C_0)$:

$$\sup_{z \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_{G_\delta \cap Q(z, \frac{1}{2} + R_0 + \delta)} u(x)^{-\frac{r'}{r}} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \left(\int_{G \cap Q(z, \frac{1}{2})} w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (1.6)$$

Связь между r , q , v , w и геометрическими свойствами области G будет иметь более сложный вид.

ЛЕММА 1. Пусть $(G, \gamma, r) \in \mathcal{G}(\delta, R_0, C_0)$ и выполнены условия: (2), (1.6),

$$\sup_{x \in G} \sup_{R > 0} \rho_1(x)^{(s-n)_+^{(\varepsilon)}} \left(\int_{B(x, \delta \rho_1(x)) \setminus B(x, R)} |y - x|^{(s-n)_-^{(\varepsilon)} p'} v(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \times |B(x, R)|_w^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad (1.7)$$

$$\sup_{x \in G} \sup_{R > 0} \left[\int_0^{t_x} (t + r_\gamma(0))^{(s-1)p'} r_\gamma(t)^{\frac{1-n}{p} p'} V_R(\gamma, r_\gamma(t), t)^{p'} dt \right]^{\frac{1}{p'}} |B(x, R)|_w^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad (1.8)$$

где

$$V_R(\gamma, r_\gamma(t), t) = r_\gamma(t)^{-\frac{n}{p'}} \left[\int_{G \setminus B(x, R)} \chi \left(\frac{y - \gamma(t)}{r_\gamma(t)} \right) v(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right]^{\frac{1}{p'}}. \quad (1.9)$$

Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для почти всех $x \in G$

$$|f(x)| \leq C \left[M_w \left(\sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f|^p v \right) (x) \right]^{\frac{1}{q}} \left\| \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f| v^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_p(G)}^{1-\frac{p}{q}} + C \|f\|_{L_1(G_\delta \cap B(x, R_0 + \delta))} \quad (1.10)$$

для любой функции f с конечной правой частью.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. При $p = 1, p' = \infty$ условие (1.8) понимается как

$$\sup_{x \in G} \sup_{R > 0} \sup_{0 \leq t \leq t_x} (t + r_\gamma(0))^{s-1} r_\gamma(t)^{1-n} \times \sup \{v(y)^{-1} : y \in G \setminus B(x, R), |y - \gamma(t)| < r_\gamma(t)\} |B(x, R)|_w^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

ТЕОРЕМА 1. В условиях леммы 1 существует постоянная $C > 0$, при которой имеет место неравенство (4).

ТЕОРЕМА 2. В условиях леммы 1 при $p < \tilde{q} < q$ или при $s = 1$ и $\tilde{q} = q$ существует постоянная $C > 0$ такая, что имеет место неравенство

$$\|f\|_{L_{\tilde{q}, w}(G)} \leq C \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_{p, v}(G)} + C \|f\|_{L_{r, u}(G_\delta)} \quad (1.11)$$

для всех функций f с конечной правой частью.

При этом условие (1.1) можно ослабить, заменив в нем q на $\tilde{q}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. При $\sigma \geq 1$ область $G \subset \mathbb{R}$ назовем областью с условием гибкого σ -конуса, если при некоторых $t^* > 0, \varkappa > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь $\gamma: [0, t^*] \rightarrow G, \gamma(0) = x, |\gamma'| \leq 1$ почти всюду, такой, что $\rho(\gamma(t)) \geq \varkappa t^\sigma$ при $0 < t \leq t^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 [8]. При $\sigma \geq 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *областью с σ -условием Джона* (σ -John domain), если существуют точка $x^{(0)} \in G$ и постоянная $\varkappa > 0$ такие, что для любой точки $x \in G$ найдется спрямляемая кривая $\gamma: [0, l_x] \rightarrow G$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(l_x) = x^{(0)}$, параметризованная с помощью длины дуги и такая, что

$$\rho(\gamma(t)) \geq \varkappa t^\sigma \quad \text{при } 0 < t < l_x.$$

Заметим, что область с σ -условием Джона является также областью с условием гибкого σ -конуса.

В случае весовых функций $v(x) = \rho_1(x)^a$, $w(x) = \rho_1(x)^b$ справедливы следующие две теоремы об оценке

$$\|\rho_1^{\frac{b}{q}} f\|_{L_q(G)} \leq C \sum_{|\alpha|=s} \|\rho_1^{\frac{a}{p}} D^\alpha f\|_{L_p(G)} + C \|f\|_{L_r(G_\delta)} \quad (1.12)$$

для всех функций f с конечной правой частью.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для области G с условием гибкого σ -конуса ($\sigma \geq 1$) выполнены условия (2) при $s = 1$ и условия

$$\begin{aligned} a \in (-\infty, \infty), \quad b \geq 0, \quad 1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0, \quad 1 - \frac{n+a}{p} + \frac{n+b}{q} \geq 0, \\ 1 - \frac{\sigma(n-1) + 1 + \sigma a}{p} + \frac{n+b}{q} \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда имеет место неравенство (1.12) при $s = 1$ с некоторыми C , $\delta > 0$, не зависящими от f .

ТЕОРЕМА 4. Пусть для области G с условием гибкого σ -конуса ($\sigma \geq 1$) при $s \in \mathbb{N}$, $p > 1$ выполнены условия (2), $a \in (-\infty, \infty)$, $b \geq 0$. Пусть также выполнены условия:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0; \\ \text{ii)} \quad s - \frac{n+a}{p} + \frac{n+b}{q} > 0; \\ \text{iii)} \quad s - \frac{\sigma(n-1+a) + 1}{p} + \frac{n+b}{q} \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда имеет место неравенство (1.12) при некоторых C , $\delta > 0$, не зависящих от f .

При этом в случаях $a \geq 1 - n$ или $\sigma = 1$ условие ii) может быть снято, а в случае $a = -\frac{\sigma-1}{\sigma}(n-1)$, $b = 0$ условие i) может быть снято.

Д. А. Лабутиным [15] показано, что в невесовом случае ($a = b = 0$) показатель q в теоремах 3, 4 для области G с σ -условием Джона нельзя увеличить.

ТЕОРЕМА 5. Пусть при $1 \leq p, q < \infty$, $1 \leq p_1 < q_1 < q < \infty$, $w = 1$ выполнены условия леммы 1, а также условия (1.7), (1.8), в которых p, q заменены соответственно на p_1, q_1 .

Тогда существует постоянная $C > 0$, при которой имеет место неравенство (3) с $w = 1$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $(G, \gamma, r) \in \mathcal{G}(\delta, R_0, C_0)$ и выполнены условия (2), (1.6) и

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} (\xi_j + \eta_j) < \infty,$$

где $j_0 \in \mathbb{Z}$ определено соотношением $2^{-j_0-1} < R_0 + \delta \leq 2^{-j_0}$,

$$\begin{aligned} \xi_j &= \sup_{x \in G} \rho_1(x)^{(s-n)_+^{(\varepsilon)}} \left(\int_{B(x, \delta \rho_1(x)) \setminus B(x, 2^{-j})} |y-x|^{(s-n)_-^{(\varepsilon)} p' v(y)^{-\frac{p'}{p}}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\quad \times |B(x, 2^{-j+1})|_w^{\frac{1}{q}} \quad (\varepsilon > 0), \\ \eta_j &= \sup_{x \in G} \left(\int_0^{t_x} (t+r_\gamma(0))^{(s-1)p'} r_\gamma(t)^{\frac{1-n}{p} p'} V_{2^{-j}}(\gamma, r_\gamma(t), t)^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} |B(x, 2^{-j+1})|_w^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Тогда существует постоянная $C > 0$, при которой справедливо неравенство (3).

§ 2. Интегральные представления функций и поточечные оценки

Построим сначала интегральное представление функции через первые производные по гибкому конусу, обобщающее соответствующее интегральное представление функции через первые производные из [5; п. 7.3]. Пусть $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \omega \subset \left[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, $\int \omega(u) du = 1$, $\widehat{\omega}(u) = u\omega'(u)$, функции $\tau: [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}$, $r: [0, t^*] \rightarrow [0, \infty)$ непрерывны, $r(0) = 0$, $r(t) > 0$ при $t > 0$. В точке t дифференцируемости функций τ , r имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r(t)} \omega \left(\frac{v - \tau(t)}{r(t)} \right) \right] &= -\frac{r'(t)}{r(t)^2} \left[\omega \left(\frac{v - \tau(t)}{r(t)} \right) + \frac{v - \tau(t)}{r(t)} \omega' \left(\frac{v - \tau(t)}{r(t)} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\tau'(t)}{r(t)^2} \omega' \left(\frac{v - \tau(t)}{r(t)} \right) = -\frac{r'(t)}{r(t)^2} \widehat{\omega} \left(\frac{v - \tau(t)}{r(t)} \right) - \frac{\tau'(t)}{r(t)^2} \omega' \left(\frac{v - \tau(t)}{r(t)} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{r'(t)}{r(t)} \widehat{\omega} \left(\frac{v - \tau(t)}{r(t)} \right) + \frac{\tau'(t)}{r(t)} \omega \left(\frac{v - \tau(t)}{r(t)} \right) \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial v} k \left(\frac{v - \tau(t)}{r(t)}, \frac{r'(t)}{r(t)}, \frac{\tau'(t)}{r(t)} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

При этом

$$|k(\eta, a, b)| \leq C(|a| + |b|)(|\omega(\eta)| + |\omega'(\eta)|). \quad (2.2)$$

Пусть теперь $x \in G$, $\gamma: [0, t_x] \rightarrow G$ — кусочно гладкий путь со свойствами (1.2), $r: [0, t] \rightarrow [0, \infty)$ — кусочно гладкая функция,

$$r(0) = 0, \quad 0 < r(t) \leq \frac{1}{2} \rho(\gamma(t)), \quad |r'(t)| \leq C_0 \quad \text{при } t \in (0, t_x], \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} f_t(x) &= r(t)^{-n} \int \prod_{j=1}^n \omega \left(\frac{y_j - (\gamma_j(t) - x_j)}{r(t)} \right) f(x+y) dy \\ &= r(t)^{-n} \int \Omega \left(\frac{y - \gamma(t)}{r(t)} \right) f(y) dy. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Представим функцию f в точке x в виде

$$f(x) = - \int_0^{t_x} \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) dt + f_{t_x}(x). \quad (2.5)$$

В силу (2.1) и интегрирования по частям имеем при $0 < t \leq t_x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) &= \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial}{\partial y_i} k\left(\frac{y_i - \gamma_i(t)}{r(t)}, \frac{r'(t)}{r(t)}, \frac{\gamma'_i(t)}{r(t)}\right) \prod_{j \neq i} \frac{1}{r(t)} \omega\left(\frac{y_j - \gamma_j(t)}{r(t)}\right) f(y) dy \\ &= - \sum_{i=1}^n r(t)^{1-n} \int k\left(\frac{y_i - \gamma_i(t)}{r(t)}, \frac{r'(t)}{r(t)}, \frac{\gamma'_i(t)}{r(t)}\right) \prod_{j \neq i} \omega\left(\frac{y_j - \gamma_j(t)}{r(t)}\right) D_i f(y) dy. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отсюда в силу (2.2) и ограниченности $|r'|, |\gamma'|$ получаем оценку

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) \right| \leq C r(t)^{-n} \int \chi\left(\frac{y - \gamma(t)}{r(t)}\right) \sum_{i=1}^n |D_i f(y)| dy. \quad (2.7)$$

Из (2.5), (2.7) следует, что

$$|f(x)| \leq C \int_0^{t_x} r(t)^{-n} \int_{|y - \gamma(t)| < r(t)} \sum_{i=1}^n |D_i f(y)| dy dt + |f_{t_x}(x)|. \quad (2.8)$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $x \in G$, $\gamma: [0, t_x] \rightarrow G$ — кусочно гладкий путь со свойствами (1.2), $r: [0, t_x] \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно гладкая функция со свойствами (2.3). Тогда

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq C \int_0^{t_x} t^{s-1} r(t)^{-n} \int_{|y - \gamma(t)| < r(t)} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(y)| dy dt \\ &\quad + C \int_{|y - \gamma(t_x)| < r(t_x)} |f(y)| dy, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где C не зависит от f, x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала, что в условиях леммы

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq C \int_0^{t_x} t^{s-1} r(t)^{-n} \int_{|y - \gamma(t)| < r(t)} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(y)| dy dt \\ &\quad + C \sum_{|\alpha| \leq s-1} |(D^\alpha f)_{t_x}(x)|, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где C не зависит от f, x . При $s = 1$ оценка (2.10) совпадает с (2.8). Предположим, что $s \geq 2$ и что оценка (2.10) верна с $s - 1$ вместо s . Зафиксируем в ее подынтегральном выражении t, y ($|y - \gamma(t)| < r(t)$). Воспользуемся для оценки $D^\beta f(y)$ с

$|\beta| = s - 1$ оценкой (2.8), в которой в качестве пути возьмем $\gamma_t : [0, u^*] \rightarrow G$, где $u^* = r(t) + t_x - t$,

$$\gamma_t(u) = \begin{cases} y + (\gamma(t) - y) \frac{u}{u_*} = y + \frac{\gamma(t) - y}{|\gamma(t) - y|} u & \text{при } 0 \leq u \leq u_* = |y - \gamma(t)|, \\ \gamma(t) & \text{при } u_* \leq u \leq r(t), \\ \gamma(t + u - r(t)) & \text{при } r(t) \leq u \leq u^*. \end{cases}$$

Построим непрерывную кусочно гладкую функцию $r_t : [0, u^*] \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$r_t(u) = \begin{cases} u & \text{при } 0 < u \leq r(t), \\ r(t + u - r(t)) & \text{при } r(t) \leq u \leq u^*. \end{cases}$$

Тогда $\left| \frac{d}{du} r_t(u) \right| \leq C_0$, $r_t(u) \leq C_0 u$, $r_t(u^*) \geq \delta$.

Применяя оценку (2.8), имеем

$$|D^\beta f(y)| \leq C_1 \int_0^{u^*} r_t(u)^{-n} \int_{|z - \gamma_t(u)| \leq r_t(u)} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z)| dz du + |(D^\beta f)_{u^*}(y)|.$$

Подставляя r_t , $\gamma_t(u)$ из их определений, имеем отсюда

$$\begin{aligned} |D^\beta f(y)| &\leq C_2 \left(\int_0^{r(t)} u^{-n} + \int_{r(t)}^{u^*} r_t(u)^{-n} \right) \\ &\quad \times \int_{|z - \gamma_t(u)| \leq r_t(u)} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z)| dz du + |(D^\beta f)_{t_x}(x)| \\ &\leq C_2 \int_{|z - \gamma(t)| < r(t)} \int_{\frac{1}{2}|z - y|}^{r(t)} u^{-n} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z)| du dz \\ &\quad + C_2 \int_{[r(t), r(t) + t_x - t]} r(t + u - r(t))^{-n} \\ &\quad \times \int_{|z - \gamma(t + u - r(t))| < r(t + u - r(t))} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z)| dz du + |(D^\beta f)_{t_x}(x)|. \end{aligned}$$

После сдвигов по u имеем

$$\begin{aligned} |D^\beta f(y)| &\leq C_3 \int_{|z - \gamma(t)| < r(t)} |z - y|^{1-n} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z)| dz \\ &\quad + C_2 \int_t^{t_x} r(v)^{-n} \int_{|z - \gamma(v)| < r(v)} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z)| dz dv + |(D^\beta f)_{t_x}(x)|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{|y - \gamma(t)| < r(t)} |D^\beta f(y)| dy &\leq C_4 r(t) \int_{|z - \gamma(t)| < r(t)} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z)| dz \\ &\quad + C_4 r(t)^n \int_t^{t_x} r(u)^{-n} \int_{|z - \gamma(u)| < r(u)} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z)| dz du \\ &\quad + C_4 r(t)^n |(D^\beta f)_{t_x}(x)|. \end{aligned}$$

Подставляя последнюю оценку в неравенство (2.10), написанное для $s-1$ вместо s , получаем

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq C \int_0^{t_x} t^{s-2} r(t)^{1-n} \int_{|z-\gamma(t)| < r(t)} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z)| dz dt \\ &\quad + C \int_0^{t_x} t^{s-2} \int_t^{t_x} r(u)^{-n} \int_{|z-\gamma(u)| < r(u)} \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(z)| dz du dt \\ &\quad + C \sum_{|\alpha| \leq s-1} |(D^\alpha f)_{t_x}(x)|. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования во втором слагаемом и вычисляя интеграл по t , получаем оценку (2.10).

Оценим слагаемые $(D^\alpha f)_{t_x}(x)$, $|\alpha| \leq s-1$, из правой части (2.10). Используя определение (2.4) и применяя при $0 < |\alpha| \leq s-1$ интегрирование по частям, получаем, что

$$|(D^\alpha f)_{t_x}(x)| \leq C_\alpha \int_G \chi\left(\frac{y-\gamma(t_x)}{r(t_x)}\right) |f(y)| dy, \quad |\alpha| \leq s-1.$$

Отсюда и из (2.10) получаем оценку (2.9), чем и завершается доказательство леммы 2.1.

ЛЕММА 2.2. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $x \in G$, $\gamma: [0, t_x] \rightarrow G$ — кусочно гладкий путь со свойствами (1.2), $r_\gamma: [0, t_x] \rightarrow (0, \infty)$ — кусочно гладкая функция со свойствами (1.4). Тогда

$$|f(x)| \leq C A_1 \left(\sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f| \right)(x) + C A_2 \left(\sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f| \right)(x) + C A_3 f(x), \quad (2.11)$$

где

$$A_1 g(x) = \int_0^{r_\gamma(0)} t^{s-1-n} \int_{|y-x| < t} g(y) dy dt, \quad (2.12)$$

$$A_2 g(x) = \int_0^{t_x} (t + r_\gamma(0))^{s-1} r_\gamma(t)^{-n} \int_{|y-\gamma(t)| < r_\gamma(t)} g(y) dy dt, \quad (2.13)$$

$$A_3 f(x) = \int_{|y-\gamma(t_x)| < r_\gamma(t_x)} |f(y)| dy. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in G$. По данному пути γ со свойствами (1.2) построим путь

$$\gamma_0(t) = \begin{cases} \gamma(0) & \text{при } 0 \leq t \leq r_\gamma(0), \\ \gamma(t - r_\gamma(0)) & \text{при } r_\gamma(0) \leq t \leq t_x + r_\gamma(0). \end{cases}$$

Свяжем с путем γ_0 кусочно гладкую функцию

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq r_\gamma(0), \\ r_\gamma(t - r_\gamma(0)) & \text{при } r_\gamma(0) \leq t < t_x + r_\gamma(0). \end{cases}$$

Подставив γ_0 (вместо γ) и $r(t)$ в (2.9), получим (2.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Разбив отрезок $[0, t_x]$ интегрирования в (2.13) на два точкой $l_x = \min\left\{t_x, \frac{1}{2C_0}r_\gamma(0)\right\}$, где $C_0 > 1$ то же, что в (1.3), легко получим оценку

$$A_2g(x) \leq C_1A_{2,1}g(x) + C_1A_{2,2}g(x) \quad (g \geq 0),$$

где

$$A_{2,1}g(x) = r_\gamma(0)^{s-1-n} \int_{|y-x| < 2r_\gamma(0)} g(y) dy,$$

$$A_{2,2}g(x) = \int_{l_x}^{t_x} t^{s-1} r_\gamma(t)^{-n} \int_{|y-\gamma(t)| < r_\gamma(t)} g(y) dy dt.$$

Тогда оценку (2.11) можно заменить на аналогичную оценку $|f(x)|$ с помощью операторов $A_1, A_{2,1}, A_{2,2}, A_3$. При последующих оценках этих операторов лишь оценка $A_{2,2}$ требует учета специфики области G .

§3. Исправление гибкого конуса представления

Можно сказать, что оценка (2.11) основана на представлении функции $f(x)$ по “усеченному гибкому конусу”

$$(\gamma, r_\gamma) := \bigcup_{0 \leq t \leq t_x} B(\gamma(t), r_\gamma(t)) \subset G, \quad (3.1)$$

построенному по пути γ . Для дальнейших оценок $|f(x)|$ в качестве усеченного гибкого конуса представления будет избран некоторый правильный усеченный гибкий конус $(\hat{\gamma}, r_{\hat{\gamma}})$, полученный исправлением (γ, r_γ) . Способ исправления по существу совпадает с описанным в [10] способом исправления червя (a worm). Путь $\hat{\gamma}$ будет представлять собой вписанную в γ ломаную, построенную следующим образом.

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$. Возьмем в качестве последовательных вершин $\hat{\gamma}$ точки $\gamma(t_i)$,

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t_x, \quad (3.2)$$

где значения t_i выберем следующим образом. Положим $t_0 = 0$. Пусть $t_1, \dots, t_{i-1}$ уже выбраны. Если $t_{i-1} = t_x$, то положим $m = i - 1$, $t_m = t_x$ и построение закончено. Если $t_{i-1} < t_x$, то положим

$$t_i = \sup\{t \in (t_{i-1}, t_x] : B(\gamma(t), \varepsilon r_\gamma(t)) \cap B(\gamma(t_{i-1}), \varepsilon r_\gamma(t_{i-1})) \neq \emptyset\}.$$

Легко видеть, что число шагов m конечно. Можно сказать, что построена “нить бус” из B_i , где $B_i = B(\gamma(t_i), \varepsilon r_\gamma(t_i))$ ($i = 1, 2, \dots, m$). При этом выполняются свойства:

- (i) $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $0 \leq i, j \leq m - 1, i \neq j$,
- (ii) $\overline{B}_{i-1} \cap \overline{B}_i \neq \emptyset$ ($i = 1, 2, \dots, m$),
- (iii) $\delta r_\gamma(t_i) \leq r_\gamma(t_j)$ при $|\gamma(t_i) - \gamma(t_j)| \leq 2\varepsilon r_\gamma(t_i) + 2\varepsilon r_\gamma(t_j)$,
- (iv) $B(\gamma(t_i), r_\gamma(t_i)) \subset G$ при $i = 0, 1, \dots, m$.

Через $\hat{\gamma}: [0, \tau_x] \rightarrow G$ обозначим путь, состоящий из отрезков, последовательно соединяющих центры шаров B_i , и параметризованный с помощью переменной длины дуги, отсчитываемой от $x = \gamma(0) = \hat{\gamma}(0)$. Пусть при этом $\{\tau_i\}_0^m$ – значения параметров последовательных вершин $\hat{\gamma}$, так что

$$\hat{\gamma}(\tau_i) = \gamma(t_i), \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = \tau_x.$$

Через $r_{\hat{\gamma}}: [0, \tau_x] \rightarrow (0, \infty)$ обозначим непрерывную функцию, принимающую значения $r_{\hat{\gamma}}(\tau_i) = \varepsilon r_{\gamma}(t_i)$ ($i = 0, 1, \dots, m$) и линейную на каждом отрезке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$.

Построенный усеченный гибкий конус $(\hat{\gamma}, r_{\hat{\gamma}})$ будем называть ε -исправлением (γ, r_{γ}) , а также ε -исправленным. Он является ε -правильным в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$. Усеченный гибкий конус (γ, r_{γ}) назовем ε -правильным, если $\gamma: [0, t_x] \rightarrow G$ – ломаная со свойствами (1.3), $r_{\gamma}: [0, t_x] \rightarrow (0, \infty)$ – кусочно гладкая функция со свойствами (1.4), (1.5) и при некотором разбиении $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t_x$ отрезка $[0, t_x]$ $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ – отрезки для всех $i = 1, 2, \dots, m$, а шары $B_i = B(\gamma(t_i), r_{\gamma}(t_i))$ обладают свойствами (i)–(iv).

Пусть

$$J(y) = \{j : j \in \{0, 1, \dots, m\}, y \in B(\gamma(t_j), 2r_{\gamma}(t_j))\}, \quad y \in G.$$

В силу свойств (i), (iii) $B_j \cap B_k = \emptyset$ при $j \neq k$, $r_{\gamma}(t_j) \geq \delta r_{\gamma}(t_i)$ при $j \in J(y)$. Отсюда следует, что существует число $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\text{card } J(y) \leq N(\delta) \quad \text{при } y \in G. \quad (3.3)$$

Последнее соотношение показывает, что “кратность самопересечения” правильно-го усеченного гибкого конуса ограничена числом, не зависящим от конуса.

ЛЕММА 3.1. Пусть $(G, \gamma, r_{\gamma}) \in \mathcal{G}(\delta, R_0, C_0)$ и выполнено условие (1.8).

Пусть $0 < \varepsilon \leq \frac{\delta^2}{3 + 2\delta}$, $(\hat{\gamma}, r_{\hat{\gamma}})$ – ε -исправление (γ, r_{γ}) .

Тогда существует постоянная $\hat{C}_0 = \hat{C}_0(\varepsilon) > 0$ такая, что $(G, \hat{\gamma}, r_{\hat{\gamma}}) \in \mathcal{G}(\varepsilon\delta, R_0, \hat{C}_0)$ и условие (1.8) выполняется после замены в нем γ на $\hat{\gamma}$, r_{γ} на $r_{\hat{\gamma}}$, C_0 на $\hat{C}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим левую часть (1.8) для $\hat{\gamma}$ через левую часть (1.8) для γ . Достаточно, очевидно, ограничиться сравнением левых частей (1.8) для сужений $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ и $\hat{\gamma}|_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}$. Разберем лишь случай $i \leq m - 1$, так как случай $i = m$ рассматривается аналогично. Очевидно,

$$\tau_i - \tau_{i-1} \leq t_i - t_{i-1}. \quad (3.4)$$

Пусть $\tau_{i-1} \leq \tau \leq \tau_i$, $t_{i-1} \leq t \leq t_{i-1} + \tau_i - \tau_{i-1}$. Тогда в силу (1.5) $r_{\hat{\gamma}}(\tau) \leq \frac{1}{\delta} r_{\hat{\gamma}}(\tau_{i-1})$,

$$\begin{aligned} \tau_i - \tau_{i-1} &= r_{\hat{\gamma}}(\tau_{i-1}) + r_{\hat{\gamma}}(\tau_i) = \varepsilon r_{\gamma}(t_{i-1}) + \varepsilon r_{\gamma}(t_i) \leq \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) r_{\gamma}(t_{i-1}) \\ &= \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) r_{\hat{\gamma}}(\tau_{i-1}) \leq r_{\gamma}(t_{i-1}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} V_R(\hat{\gamma}, r_{\hat{\gamma}}(\tau), \tau) &\leq C_1 V_R(\hat{\gamma}, r_{\hat{\gamma}}(\tau) + \tau - \tau_{i-1}, \tau_{i-1}) \\ &\leq C_2 V_R\left(\hat{\gamma}, \left(1 + \frac{2}{\delta}\right) r_{\hat{\gamma}}(\tau_{i-1}), \tau_{i-1}\right) = C_2 V_R\left(\gamma, \left(1 + \frac{2}{\delta}\right) \varepsilon r_{\gamma}(t_{i-1}), t_{i-1}\right) \\ &\leq C_3 V_R\left(\gamma, \left(1 + \frac{2}{\delta}\right) \varepsilon r_{\gamma}(t_{i-1}) + t - t_{i-1}, t\right) \\ &\leq C_4 V_R\left(\gamma, \left(2 + \frac{3}{\delta}\right) \varepsilon r_{\gamma}(t_{i-1}), t\right) \leq C_5 V_R\left(\gamma, \left(2 + \frac{3}{\delta}\right) \varepsilon r_{\gamma}(t), t\right) \\ &\leq C_6 \varepsilon^{-\frac{n}{p'}} V_R(\gamma, r_{\gamma}(t), t). \end{aligned}$$

Отсюда при $p > 1$ ($p' < \infty$) имеем

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\tau + r_{\hat{\gamma}}(0))^{(s-1)p'} r_{\hat{\gamma}}(\tau)^{\frac{1-n}{p} p'} V_R(\hat{\gamma}, r_{\hat{\gamma}}(\tau), \tau)^{p'} d\tau \right\}^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \left\{ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\tau + \varepsilon r_{\gamma}(0))^{(s-1)p'} d\tau \right\}^{\frac{1}{p'}} \\ &\quad \times \min\{r_{\gamma}(t)^{\frac{1-n}{p}} V_R(\gamma, r_{\gamma}(t), t) : t_{i-1} \leq t \leq t_{i-1} + \tau_i - \tau_{i-1}\} \\ &\leq C_{\varepsilon} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t + r_{\gamma}(0))^{(s-1)p'} r_{\gamma}(t)^{\frac{1-n}{p} p'} V_R(\gamma, r_{\gamma}(t), t)^{p'} dt \right\}^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Учитывая (3.4), получаем утверждение леммы при $p > 1$. При $p = 1$ рассуждения аналогичны.

ЛЕММА 3.2. Пусть $(G, \gamma, r_{\gamma}) \in \mathcal{G}(\delta, R_0, C_0)$, $\gamma: [0, t_x] \rightarrow G$, (γ, r) — правильный усеченный гибкий конус.

Тогда существуют числа $\tilde{C} \geq 1$, $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ такие, что

$$I(y) = \int_0^{t_x} \frac{1}{r_{\gamma}(t)} \chi\left(\frac{y - \gamma(t)}{\varepsilon_0 r_{\gamma}(t)}\right) dt \leq \tilde{C}, \quad (3.6)$$

где $\tilde{C}$, ε_0 не зависят от γ и y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.3)

$$\begin{aligned} I(y) &\leq \sum_{j \in J(y)} \frac{1}{\min\{r_{\gamma}(t_{j-1}), r_{\gamma}(t_j)\}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \\ &\leq \sum_{j \in J(y)} \frac{\max\{r_{\gamma}(t_{j-1}), r_{\gamma}(t_j)\}}{\min\{r_{\gamma}(t_{j-1}), r_{\gamma}(t_j)\}} \leq N \frac{2}{\delta} \leq \tilde{C}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Оценки для операторов A_1, A_2, A_3

Рассмотрим операторы A_1, A_2, A_3 из (2.12)–(2.14).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Будем писать $(G, \gamma, r_\gamma) \in \mathcal{G}_0(\delta, R_0, C_0)$, если $(G, \gamma, r_\gamma) \in \mathcal{G}(\delta, R_0, C_0)$ (см. определение 1.1) и при этом все усеченные гибкие конусы (γ, r_γ) являются δ -правильными.

В § 4 будем считать, что $(G, \gamma, r_\gamma) \in \mathcal{G}_0(\delta, R_0, C_0)$. Этим обеспечивается получение желаемой оценки для оператора A_2 .

Оценим сначала $A_3 f(x)$, считая $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$. Учитывая (1.1), при $|y - \gamma(t_x)| < r_\gamma(t_x) \leq \delta \rho_1(\gamma(t_x))$ имеем

$$\begin{aligned} |\rho_1(y) - \rho_1(\gamma(t_x))| &< \delta \rho_1(\gamma(t_x)), \quad \rho_1(y) > (1 - \delta) \rho_1(\gamma(t_x)) > (1 - \delta) \delta \geq \frac{\delta}{2}, \\ |y - x| &\leq |y - \gamma(t_x)| + |\gamma(t_x) - \gamma(0)| \leq \delta \rho_1(\gamma(t_x)) + R_0 \leq \delta + R_0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$A_3 f(x) \leq \bar{A}_3 f(x) = \int_{G_\delta} \chi\left(\frac{y-x}{R_0+\delta}\right) |f(y)| dy. \quad (4.1)$$

ЛЕММА 4.1. Пусть выполнено условие (1.6).

Тогда при некотором $C > 0$

$$\|A_3 f\|_{L_{q,w}(G)} \leq \|\bar{A}_3 f\|_{L_{q,w}(G)} \leq C \|f\|_{L_{r,u}(G)} \quad \forall f \in L_{r,u}(G_\delta). \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя неравенство Гёльдера и пользуясь условием (1.1), получаем

$$\begin{aligned} &\int_{G \cap Q(z, \frac{1}{2})} (\bar{A}_3 f(x))^q w(x) dx \\ &\leq \sup_{x \in G \cap Q(z, \frac{1}{2})} \left(\int_{G_\delta} \chi\left(\frac{y-x}{R_0+\delta}\right) |f(y)| dy \right)^q \int_{G \cap Q(z, \frac{1}{2})} w(x) dx \\ &\leq \left(\int_{G_\delta \cap Q(z, \frac{1}{2} + R_0 + \delta)} |f(y)|^r u(y) dy \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\quad \times \left(\int_{G_\delta \cap Q(z, \frac{1}{2} + R_0 + \delta)} u(y)^{-\frac{r'}{r}} dy \right)^{\frac{q}{r'}} \int_{G \cap Q(z, \frac{1}{2})} w(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая конечность кратности покрытия $\{Q(z, \frac{1}{2} + R_0 + \delta)\}$, имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_G (A_3 f(x))^q w(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{G \cap Q(z, \frac{1}{2})} (A_3 f)^q w dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_{G \cap Q(z, \frac{1}{2})} (A_3 f)^q w dx \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C_1 \left\{ \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{G_\delta \cap Q(z, \frac{1}{2} + R_0 + \delta)} |f|^r u dy \right\}^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_{G_\delta} |f|^r u dy \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Будем говорить, что оператор A имеет *сильный тип* $(p, v; q, w)$, где $1 \leq p \leq q < \infty$, $v, w: G \rightarrow (0, \infty)$ – весовые функции, если

$$\|Af \mid L_{q,w}(G)\| \leq C \|f \mid L_{p,v}(G)\| \quad \forall f \in L_{p,v}(G),$$

и что A имеет *слабый тип* $(p, v; q, w)$, если

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \left| \{x \in G : |Af(x)| > \lambda\} \right|_w^{\frac{1}{q}} \leq C \|f \mid L_{p,v}(G)\| \quad \forall f \in L_{p,v}(G).$$

Последние две оценки будем называть соответственно *оценками сильного и слабого типа* $(p, v; q, w)$. В дальнейшем мы используем интерполяционную теорему Марцинкевича, позволяющую получать оценки сильного типа с помощью соответствующих оценок слабого типа.

Запишем операторы A_i в виде

$$A_i f(x) = \int_G k_i(x, y) f(y) dy \quad (i = 1, 2). \quad (4.3)$$

Воспользуемся результатами работ [13], [16], [17], содержащих весовые оценки слабого и сильного типов для операторов вида

$$Kf(x) = \int_G k(x, y) f(y) dy, \quad x \in G, \quad (4.4)$$

где $k: G \times G \rightarrow \mathbb{R}^1$ – измеримая неотрицательная функция. Положим

$$k(x, y, R) = \left[1 - \chi\left(\frac{x-y}{R}\right) \right] k(x, y).$$

При $1 \leq p < q < \infty$ и весовых функциях v, w рассмотрим следующую характеристику ядра k [13], [16], [17]:

$$\|kv^{-\frac{1}{p}}\|_{p,q,w} = \sup_{x \in G} \sup_{R > 0} \|k(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-\frac{1}{p}} \mid L_{p'}(G)\| |B(x, R)|_w^{\frac{1}{q}}. \quad (4.5)$$

ТЕОРЕМА А [17]. Пусть $1 \leq p < q < \infty$, $v, w: G \rightarrow (0, \infty)$ – весовые функции, K – оператор из (4.4) с ядром k . Тогда

$$|Kf(x)| \leq 8 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)^{-\frac{p}{q}} \|kv^{-\frac{1}{p}}\|_{p,q,w} \|fv^{\frac{1}{p}} \mid L_p(G)\|^{1-\frac{p}{q}} M_w(|f|^p v)(x)^{\frac{1}{q}}.$$

СЛЕДСТВИЕ [13], [16], [17]. В условиях теоремы А

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^q |\{x \in G : |Kf(x)| > \lambda\}|_w \leq 8^q \theta_n^q \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-p} \|kv^{-\frac{1}{p}}\|_{p,q,w}^q \|fv^{\frac{1}{p}}\|_{L_p(G)}^q, \quad (4.6)$$

где θ_n — некоторая постоянная, зависящая лишь от размерности n .

Теорема А установлена в [17] на основании рассуждений из [13], [16], приводящих к утверждению следствия для $G = \mathbb{R}^n$.

Установим оценки для ядер k_i из (4.3) операторов A_i (см. (2.11)–(2.14)). В дальнейшем будем считать, что $s - n/p + n/q \geq 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} |k(x, y, R)| &= \left[1 - \chi\left(\frac{y-x}{R}\right)\right] \int_0^{r_\gamma(0)} t^{s-1-n} \chi\left(\frac{y-x}{t}\right) dt \\ &\leq C \chi_{B(x, \delta r_\gamma(0)) \setminus B(x, R)}(y) \cdot \begin{cases} |y-x|^{s-n} & \text{при } s < n, \\ \ln \frac{r_\gamma(0)}{|y-x|} & \text{при } s = n, \\ r_\gamma(0)^{s-n} & \text{при } s > n. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\|k_1(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-\frac{1}{p}}\|_{L_{p'}(G)} \\ &\leq C_s \cdot \begin{cases} r_\gamma(0)^{(s-n)_+} \\ \times \left(\int_{B(x, r_\gamma(0)) \setminus B(x, R)} |y-x|^{(s-n)_- p'} v(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{при } s \neq n, \\ \left(\int_{B(x, r_\gamma(0)) \setminus B(x, R)} \ln^{p'} \frac{r_\gamma(0)}{|y-x|} v(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{при } s = n. \end{cases} \quad (4.7) \end{aligned}$$

Загрубив (при $s = n$) последнюю оценку ради упрощения ее вида, при произвольном $\varepsilon \in (0, n/p' + n/q]$ имеем

$$\begin{aligned} &\|k_1(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-\frac{1}{p}}\|_{L_{p'}(G)} \leq C_{s,\varepsilon} r_\gamma(0)^{(s-n)_+^{(\varepsilon)}} \\ &\times \left(\int_{B(x, r_\gamma(0)) \setminus B(x, R)} |y-x|^{(s-n)_-^{(\varepsilon)} p'} v(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Оценки (4.7), (4.8) упрощаются в случае, когда вес v удовлетворяет следующему условию: существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что

$$c_1 v(x) \leq v(y) \leq c_2 v(x) \quad \text{при } |y-x| \leq \delta \rho_1(x), \quad x \in G. \quad (4.9)$$

При выполнении (4.9) из (4.8) следует, что

$$\begin{aligned} &\|k_1(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-\frac{1}{p}}\|_{L_{p'}(G)} \\ &\leq C_{s,\varepsilon} v(x)^{-\frac{1}{p}} r_\gamma(0)^{(s-n)_+^{(\varepsilon)}} \left(\int_{R < |z| \leq r_\gamma(0)} |z|^{(s-n)_-^{(\varepsilon)} p'} dz \right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned}$$

откуда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \|k_1(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-\frac{1}{p}} \mid L_{p'}(G)\| \\ & \leq C_{s,\varepsilon} \chi\left(\frac{R}{r_\gamma(0)}\right) v(x)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{r_\gamma(0)}{R}\right)^{\left(s-\frac{n}{p}\right)_+^{(\varepsilon)}} R^{s-\frac{n}{p}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

При изучении оператора A_2 в неявной форме будем использовать соображения из замечания 2.1. Напомним, что оператор A_2 построен по правильным усеченным гибким конусам (γ, r_γ) . Для ядра k_2 справедлива при $1 \leq p < \infty$ оценка

$$\begin{aligned} & \|k_2(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-\frac{1}{p}} \mid L_{p'}(G)\| \\ & \leq C_0^{\frac{1}{p}} \|(\cdot + r_\gamma(0))^{s-1} r_\gamma(0)^{\frac{1-n}{p}} V_{p,R}(x, \cdot) \mid L_{p'}((0, t_x])\|, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} V_{p,R}(x, t) &= r_\gamma(t)^{-\frac{n}{p'}} \|v^{-\frac{1}{p}} \mid L_{p'}(B(\gamma(t), r_\gamma(t)) \setminus B(x, R))\| \\ &= r_\gamma(t)^{-\frac{n}{p'}} (|B(\gamma(t), r_\gamma(t)) \setminus B(x, R)|_{v^{-\frac{p'}{p}}})^{\frac{1}{p'}} \\ &= C_1 \left(\frac{|B(\gamma(t), r_\gamma(t)) \setminus B(x, R)|_{v^{-\frac{p'}{p}}}}{|B(\gamma(t), r_\gamma(t))|_1} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

В самом деле, применяя в случае $p > 1$ неравенство Гёльдера по t и затем лемму 3.2, имеем

$$\begin{aligned} & \|k_2(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-\frac{1}{p}} \mid L_{p'}(G)\|^{p'} \\ &= \int_{G \setminus B(x, R)} \left[\int_0^{t_x} (t + r_\gamma(0))^{s-1} r_\gamma(t)^{-n} \chi\left(\frac{y - \gamma(t)}{r_\gamma(t)}\right) dt \right]^{p'} v(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \\ &\leq \int_{G \setminus B(x, R)} \left[\int_0^{t_x} (t + r_\gamma(0))^{(s-1)p'} r_\gamma(t)^{\left(\frac{1}{p}-n\right)p'} \chi\left(\frac{y - \gamma(t)}{r_\gamma(t)}\right) dt \right] \\ &\quad \times \left[\int_0^{t_x} r_\gamma(t)^{-1} \chi\left(\frac{y - \gamma(t)}{r_\gamma(t)}\right) dt \right]^{\frac{p'}{p}} v(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \\ &\leq C_0^{\frac{p'}{p}} \int_{G \setminus B(x, R)} \int_0^{t_x} (t + r_\gamma(0))^{(s-1)p'} r_\gamma(t)^{\left(\frac{1}{p}-n\right)p'} \\ &\quad \times \chi\left(\frac{y - \gamma(t)}{r_\gamma(t)}\right) dt v(y)^{-\frac{p'}{p}} dy, \end{aligned}$$

откуда и следует (4.11).

При выполнении условия (4.9) из (4.10) имеем

$$\begin{aligned} & \|k_2(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-\frac{1}{p}} \mid L_{p'}(G)\| \\ & \leq C_1 \left\| \chi \left(\frac{R}{|\gamma(t) - \gamma(0)| + r_\gamma(t)} \right) (\cdot + r_\gamma(0))^{s-1} r_\gamma(\cdot)^{\frac{1-n}{p}} v(\gamma(\cdot))^{-\frac{1}{p}} \mid L_{p'}((0, t_x]) \right\|. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь учтено, что при $y \in B(\gamma(t), r_\gamma(t)) \setminus B(x, R)$

$$R < |y - x| \leq |y - \gamma(t)| + |\gamma(t) - \gamma(0)| \leq |\gamma(t) - \gamma(0)| + r_\gamma(t).$$

ЛЕММА 4.2. Пусть $1 \leq p \leq \tilde{q} < q < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $s - n/p + n/q \geq 0$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $v, w: G \rightarrow (0, \infty)$ – весовые функции.

Пусть выполнено условие (1.7) или в случае веса v со свойством (4.9) условие

$$\sup_{x \in G} \sup_{R > 0} \chi \left(\frac{R}{r_\gamma(0)} \right) v(x)^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{r_\gamma(0)}{R} \right)^{\left(s - \frac{n}{p}\right)_+^{(\varepsilon)}} R^{s - \frac{n}{p}} |G \cap B(x, R)|_w^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (4.14)$$

Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой функции $f \in L_{p,v}(G)$

- i) $|A_1 f(x)| \leq C \|f v^{\frac{1}{p}} \mid L_p(G)\|^{1 - \frac{p}{q}} M_w(|f|^p v)(x)^{\frac{p}{q}}$,
- ii) $\sup_{\lambda > 0} \lambda \left| \left\{ x \in G : |A_1 f(x)| > \lambda \right\} \right|_w^{\frac{1}{q}} \leq C \|f v^{\frac{1}{p}} \mid L_p(G)\|$,
- iii) $\|A_1 f \mid L_{\tilde{q},w}(G)\| \leq C N^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q}} \|f \mid L_{p,v}(G)\|$,

где $N = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |G \cap B(x, 1)|_w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.7) или (4.14) следует конечность $\|k_1 v^{-\frac{1}{p}}\|_{p,q,w}$ в силу оценок (4.8) или (4.10). Тогда утверждения i), ii) вытекают из теоремы А и следствия из нее.

Установим iii). Пусть $Q_z = z + (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $z \in \mathbb{Z}$. Заметим, что

$$A_1 f(x) = A_1 f_z(x) \quad \text{при } x \in Q_z, \quad \text{где } f_z(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in z + \left(-\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2\delta}\right), \\ 0 & \text{при } x \notin z + \left(-\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2\delta}\right). \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|A_1 f \mid L_{\tilde{q},w}(G)\| &= \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \|A_1 f \mid L_{\tilde{q},w}(G \cap Q_z)\|^{\tilde{q}} \right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} \\ &\leq \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \|A_1 f \mid L_{\tilde{q},w}(G \cap Q_z)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \|A_1 f_z \mid L_{\tilde{q},w}(G \cap Q_z)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В случае $|G \cap Q_z|_w > 0$

$$\|A_1 f_z \mid L_{\tilde{q},w}(G \cap Q_z)\|^{\tilde{q}} = \tilde{q} \int_0^\infty \lambda^{\tilde{q}-1} \left| \left\{ x : x \in G \cap Q_z, |A_1 f_z(x)| > \lambda \right\} \right|_w d\lambda.$$

Выбирая $\lambda_0 = C \|f_z v^{\frac{1}{p}} \mid L_p(G)\| |G \cap Q_z|_w^{-\frac{1}{q}}$ и используя утверждение ii), имеем

$$\begin{aligned} \|A_1 f_z \mid L_{\tilde{q},w}(G \cap Q_z)\|^{\tilde{q}} &\leq \tilde{q} \int_0^{\lambda_0} \lambda^{\tilde{q}-1} |G \cap Q_z|_w d\lambda + \tilde{q} \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{\tilde{q}-1-q} \lambda_0^q |G \cap Q_z|_w d\lambda \\ &= |G \cap Q_z|_w \lambda_0^{\tilde{q}} \left(1 + \frac{\tilde{q}}{q - \tilde{q}}\right) \\ &= \frac{q}{q - \tilde{q}} C^{\tilde{q}} N^{\tilde{q}} |G \cap Q_z|_w^{1 - \frac{\tilde{q}}{q}} \|f_z v^{\frac{1}{p}} \mid L_p(G)\|^{\tilde{q}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.15) получаем, что

$$\|A_1 f \mid L_{\tilde{q},w}(G)\| \leq C_1 N^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\tilde{q}}} \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \|f_z v^{\frac{1}{p}} \mid L_p(G)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 N^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\tilde{q}}} \|f v^{\frac{1}{p}} \mid L_p(G)\|.$$

Из леммы 4.2 в случае $v(x) = \rho_1(x)^a$, $w(x) = \rho_1(x)^b$ вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < q < \infty$, $s - n/p + n/q \geq 0$, $v(x) = \rho_1(x)^a$, $w(x) = \rho_1(x)^b$, $a \in (-\infty, \infty)$, $b \geq 0$.

Тогда при $r_\gamma(t) = \delta \rho_1(\gamma(t))$ выполняются утверждения i), ii) леммы 4.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.1) при $|y - x| \leq \delta \rho_1(x)$

$$|\rho_1(y) - \rho_1(x)| \leq |y - x| \leq \delta \rho_1(x),$$

так что

$$(1 - \delta) \rho_1(x) \leq \rho_1(y) \leq (1 + \delta) \rho_1(x)$$

и условие (4.9) выполнено.

Для выполнения условия (4.14) достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \sup_{x \in G} \sup_{0 < R \leq \delta \rho_1(x)} \rho_1(x)^{-\frac{a}{p}} \left(\frac{\rho_1(x)}{R} \right)^{\left(s - \frac{n}{p}\right)_+^{(\varepsilon)}} R^{s - \frac{n}{p}} \rho_1(x)^{\frac{b}{q}} R^{\frac{n}{q}} \\ \leq C \sup_{x \in G} \rho_1(x)^{-\frac{a}{p} + s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} + \frac{b}{q}} \leq C_1, \end{aligned}$$

что в условиях следствия имеет место. Остается воспользоваться леммой 4.2.

ЛЕММА 4.3. Пусть $1 \leq p \leq \tilde{q} < q < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $s - n/p + n/q \geq 0$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $v, w: G \rightarrow (0, \infty)$ – весовые функции и выполняется условие (1.8) или в случае веса v со свойством (4.9) условие

$$\begin{aligned} \sup_{x \in G} \sup_{R > 0} \left\{ \int_0^{t_x} \chi \left(\frac{R}{|\gamma(t) - \gamma(0)| + r_\gamma(t)} \right) (t + r_\gamma(0))^{(s-1)p'} \right. \\ \left. \times r_\gamma(t)^{\frac{1-n}{p} p'} v(\gamma(t))^{-\frac{p'}{p}} dt \right\}^{\frac{1}{p'}} |B(x, R)|_w^{\frac{1}{q}} < \infty. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой функции $f \in L_{p,v}(G)$

- i) $|A_2 f(x)| \leq C \|f v^{\frac{1}{p}} \mid L_p(G)\|^{1 - \frac{p}{q}} M_w(|f|^p v)(x)^{\frac{p}{q}}$,
- ii) $\sup_{\lambda > 0} \lambda \left| \{x \in G : |A_2 f(x)| > \lambda\} \right|_w^{\frac{1}{q}} \leq C N \|f v^{\frac{1}{p}} \mid L_p(G)\| \quad \forall f \in L_{p,v}(G)$,
- iii) $\|A_2 f \mid L_{\tilde{q},w}(G)\| \leq C N^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\tilde{q}}} \|f \mid L_{p,v}(G)\|$,

где $N = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |G \cap B(x, 1)|_w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.8) или (4.16) следует конечность $\|k_2 v^{-\frac{1}{p}}\|_{p,q,w}$ в силу оценок (4.11), (4.13). Тогда утверждения i), ii) вытекают из теоремы А и следствия из нее.

Утверждение iii) устанавливается так же, как утверждение iii) леммы 4.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть G – область с условием гибкого σ -конуса ($\sigma \geq 1$), $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < q < \infty$, $v(x) = \rho_1(x)^a$, $w(x) = \rho_1(x)^b$, $a \in (-\infty, \infty)$, $b \geq 0$,

$$s - \frac{n+a}{p} + \frac{n+b}{q} \geq 0, \quad s - \frac{\sigma(n-1)+1+\sigma a}{p} + \frac{n+b}{q} \geq 0.$$

Тогда выполняются утверждения i), ii) леммы 4.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $v(x) = \rho_1(x)^a$ удовлетворяет условию (4.9), достаточно показать, что выполняется условие (4.16) при $t_x = t^*$, $2r_\gamma(t) = \tilde{\rho}_1(\gamma(t)) \geq \kappa t^\sigma$ ($t \in (0, t^*]$).

Для этого достаточно показать, что

$$\sup_{x \in G} \sup_{R > 0} [I_1(x, R) + I_2(x, R)] < \infty, \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(x, R) &= \left\{ \int_0^{\tau_x} \chi\left(\frac{R}{3\rho_1(x)}\right) \rho_1(x)^{\left(s-1+\frac{1-n-a}{p}\right)p'} dt \right\}^{\frac{1}{p'}} (\rho_1(x) + R)^{\frac{b}{q}} R^{\frac{n}{q}}, \\ I_2(x, R) &= \left\{ \int_{\tau_x}^{t^*} \chi\left(\frac{R}{3C_0 t}\right) t^{(s-1)p'} t^{\sigma \frac{1-n-a}{p} p'} dt \right\}^{\frac{1}{p'}} (\rho_1(x) + R)^{\frac{b}{q}} R^{\frac{n}{q}}, \\ \tau_x &= \min\left\{t^*, \frac{1}{C_0} \rho_1(x)\right\}, \end{aligned}$$

C_0 взято из (1.4). Но

$$I_1(x, R) \leq C_1 \chi\left(\frac{R}{3\rho_1(x)}\right) \rho_1(x)^{s-\frac{n+a}{p}+\frac{n+b}{q}} \leq C_1 < \infty,$$

$$I_2(x, R) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{C_0} \rho_1(x) \geq t^*,$$

а при $\tau_x = \frac{1}{C_0} \rho_1(x) < t^*$ имеем следующее.

$$\text{В случае } s - \frac{\sigma(n-1)+1+\sigma a}{p} < 0$$

$$I_2(x, R) \leq C \chi\left(\frac{R}{3C_0 t^*}\right) (\rho_1(x) + R)^{s-\frac{\sigma(n-1)+1+\sigma a}{p}+\frac{b}{q}} R^{\frac{n}{q}} \leq C_1.$$

$$\text{В случае } s - \frac{\sigma(n-1)+1+\sigma a}{p} > 0$$

$$I_2(x, R) \leq C \chi\left(\frac{R}{3C_0 t^*}\right) (t^*)^{s-\frac{\sigma(n-1)+1+\sigma a}{p}+\frac{n+b}{q}} \leq C_2.$$

$$\text{В случае } s - \frac{\sigma(n-1)+1+\sigma a}{p} = 0$$

$$I_2(x, R) \leq C \chi\left(\frac{R}{3C_0 t^*}\right) \left(\ln \frac{3C_0 t^*}{R}\right)^{\frac{1}{p'}} (t^*)^{\frac{b}{q}} R^{\frac{n}{q}} \leq C_3.$$

Из оценок, полученных для $I_1(x, R)$, $I_2(x, R)$, вытекает (4.17) и утверждение следствия.

ТЕОРЕМА В. Пусть $1 \leq p, q < \infty$, $1 \leq p_1 < q_1 < \infty$, $1/p_0 = 1/p_1 - 1/q_1 + 1/q$, $v, w: G \rightarrow (0, \infty)$ – весовые функции, K – оператор (4.4) с ядром k .

Тогда для $x \in G$

$$|Kf(x)| < 2 \cdot 4^{\frac{p_0}{q}} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)^{-\frac{p_0}{q}} \|kv^{-\frac{1}{p}}\|_{p,q,w}^{1-\frac{p}{q}} \cdot \|kv^{-\frac{1}{p}}\|_{p_1,q_1,w}^{\frac{p_1}{q_1}} \times \|fv^{\frac{1}{p}}\|_{L_p(G)}^{p_0(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} (M_w(|f|^{p_1}v^{\frac{p_1}{p}})(x))^{\frac{p_0}{p_1q}}. \quad (4.18)$$

Если же при $w = 1$ дополнительно $q_1 < q$, $\|kv^{-\frac{1}{p}}\|_{p,q,1} < \infty$, $\|kv^{-\frac{1}{p}}\|_{p_1,q_1,1} < \infty$, то существует постоянная $C > 0$, при которой

$$\|Kf\|_{L_q(G)} < C\|f\|_{L_{p,v}(G)}. \quad (4.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (4.18) в случае $p_0 = p$ приведена в [17]. В общем случае доказательство то же. Для доказательства (4.19) возведем в степень q обе части неравенства (4.18) и проинтегрируем по G . Учитывая, что $r_0 = p_0/p_1 > 1$, и используя ограниченность максимального оператора M_1 в $L_{r_0}(G)$, получаем (4.19).

ТЕОРЕМА С. Пусть $1 \leq p < q < \infty$, $v, w: G \rightarrow (0, \infty)$ – весовые функции, K – оператор (4.4) с ядром k .

Пусть $\sum_{-\infty}^{\infty} \zeta_j < \infty$, где

$$\zeta_j = \sup_{x \in G} \|k(x, \cdot, 2^{-j-1})v(\cdot)^{-\frac{1}{p}}\|_{L_{p'}(G)} \|G \cap B(x, 2^{-j})\|_w^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда существует постоянная $C > 0$, при которой имеет место неравенство

$$\|Kf\|_{L_{q,w}(G)} \leq C\|f\|_{L_{p,v}(G)}$$

для всех функций f с конечной правой частью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно, очевидно, считать $v = 1$. Положим

$$g_R(x) = \frac{1}{|G \cap B(x, R)|_w} \int_{G \cap B(x, R)} |g(y)| dy.$$

Представляя интеграл в (4.4) в виде суммы ряда интегралов по $G \cap (B(x, 2^{-j}) \setminus B(x, 2^{-j-1}))$ и применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} |Kf(x)| &\leq \sum_{-\infty}^{\infty} \|k(x, \cdot) \|_{L_{p'}(G \setminus B(x, 2^{-j-1}))} \|f\|_{L_p(G \cap B(x, 2^{-j}))} \\ &\leq \sum_{-\infty}^{\infty} \zeta_j |G \cap B(x, 2^{-j})|_w^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{L_p(G)}^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_{L_p(G \cap B(x, 2^{-j}))}^{\frac{p}{q}} \\ &= \|f\|_{L_p(G)}^{1-\frac{p}{q}} \sum_{-\infty}^{\infty} \zeta_j (|f|^p)_{2^{-j}}(x)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

С помощью неравенства Гёльдера для последовательностей получаем отсюда оценку

$$|Kf(x)|^q \leq C \|f\|_{L_p(G)}^{q-p} \sum_{-\infty}^{\infty} \zeta_j(|f|^p)_{2^{-j}}(x),$$

откуда

$$\|Kf\|_{L_{q,w}(G)}^q \leq C \|f\|_{L_p(G)}^{q-p} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \zeta_j \right)^q \sup_j \|(|f|^p)_{2^{-j}}\|_{L_1(G)}.$$

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно воспользоваться следующей леммой.

ЛЕММА 4.4. *Существует постоянная $C > 0$, при которой*

$$\|g_R\|_{L_{1,w}(G)} \leq C \|g\|_{L_1(G)} \quad (4.20)$$

для всех открытых множеств $G \subset \mathbb{R}^n$, всех $R > 0$ и всех $g \in L_1(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что G – ограниченное множество. Доказательство (4.20) для неограниченного множества G следует из (4.20) для $G \cap B(x, N)$ (в качестве G) с помощью предельного перехода при $N \rightarrow \infty$. Введем

$$E_m = \{x \in G : 2^{-m} < g_R(x) \leq 2^{-m+1}\}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда g_R – ограниченная функция. Тогда при некотором $m_1 \in \mathbb{Z}$ $E_{m_1} \neq \emptyset$, $E_j = \emptyset$ при $j < m_1$.

Построим последовательность $\{B_k\}$ шаров $B_k = B(x^{(k)}, R)$ следующим образом. Возьмем $x^{(1)} \in E_{m_1}$. Если $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ уже выбраны, выберем $x^{(k+1)} \in G \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq k} B_j$, $x^{(k+1)} \in E_{m_{k+1}}$, где $m_{k+1} = \min\{s : s \geq m_1, E_s \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq k} B_j \neq \emptyset\}$.

В силу ограниченности G процесс оборвется после некоторого шага, и требуемая (конечная) последовательность построена.

Положив $D_k = (G \cap B_k) \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq k-1} B_j$ при $1 \leq k \leq N$, отметим, что $D_j \cap D_k = \emptyset$ при $j \neq k$, $G = \bigcup_{1 \leq k \leq N} D_k$,

$$g_R(x) \leq 2g_R(x^{(k)}) \quad \text{при } x \in D_k.$$

Поэтому

$$\int_G g_R(x) dw \leq \sum_{k=1}^N 2 \int_{D_k} g_R(x^{(k)}) dw \leq 2 \sum_{k=1}^N \int_{G \cap B_k} |g(y)| dy.$$

Но кратность пересечения $\{B_k\}_1^N$ не превосходит, очевидно, некоторого числа $\varkappa_n$, зависящего лишь от размерности n . Поэтому из последней цепочки неравенств получаем (4.20) с $C = 2\varkappa_n$ при условии, что функция g_R ограничена.

Пусть теперь g_R неограничена. Тогда с помощью приведенных рассуждений можно показать, что

$$\|g_R\|_{L_{1,w}(G^{(T)})} \leq 2\varkappa_n \|g\|_{L_1(G)}, \quad \text{где } T > 0, \quad G^{(T)} = \{x \in G : g_R(x) < T\}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $T \rightarrow \infty$, получаем (4.20). Лемма доказана.

§ 5. Доказательство основных результатов

В силу леммы 3.1 везде в § 5 будем считать, что $(G, \gamma, r_\gamma) \in \mathcal{G}_0(\delta, R_0, C_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Воспользуемся оценкой (2.11). Первые два слагаемых ее правой части оцениваются с помощью утверждений i) соответственно лемм 4.2, 4.3, а третье слагаемое – с помощью леммы 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 следует в силу (2.11) из утверждений ii) лемм 4.2, 4.3 и леммы 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 в случае $p < \tilde{q} < q$ следует в силу (2.11) из утверждений iii) лемм 4.2, 4.3 и леммы 4.1.

В случае $s = 1$, $p < \tilde{q} = q$ применим метод срезки функции по уровням (truncated method), предложенный В. Г. Мазьей при оценке интеграла, содержащего емкость (1964 г., см. [2; п. 2.3.1]). Этот метод использовался в [10] для получения оценки сильного типа из оценки слабого типа. Здесь мы применяем иной вариант рассуждений, который также основан на учете распределения значений функции по уровням. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\text{supp } \varphi \subset (\frac{1}{2}, 2)$, $\varphi_k(t) = \varphi(2^{-k}t)$, $\sum_{k=-\infty}^\infty \varphi_k(t) = 1$ при $t > 0$. Пусть $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ имеет обобщенные по Соболеву производные первого порядка и конечна правая часть (3) при $s = 1$. Положим $f_k(x) = \varphi(2^{-k}|f(x)|)f(x)$. Тогда $f(x) = \sum_{k=-\infty}^\infty f_k(x)$, причем для каждого $x \in G$ не более двух членов ряда отличны от нуля.

Заметим также, что

$$D_i f_k(x) = \varphi'(2^{-k}|f(x)|)2^{-k}(\text{sgn } f(x))f(x)D_i f(x) + \varphi(2^{-k}|f(x)|)D_i f(x).$$

Положим

$$E_k = \{x \in G : |f(x)| > 2^k\}, \quad E_k^* = \{x \in G : |f_k(x)| > 2^{k-2}\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I^q &= \int_G |f(x)|^q w(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{E_k \setminus E_{k+1}} |f(x)|^q w(x) dx \\ &= \sum_k \int_{E_k \setminus E_{k+1}} |f_k(x) + f_{k+1}(x)|^q w(x) dx \\ &\leq \sum_k 2^{(k+1)q} |\{x \in G : |f_k(x) + f_{k+1}(x)| > 2^k\}|_w \\ &\leq \sum_k 2^{(k+1)q} (|E_k^*|_w + |E_{k+1}^*|_w) = 2^{2q}(2^q + 1) \sum_k 2^{(k-2)q} |E_k^*|_w. \end{aligned}$$

Используя теорему 1 (ее оценку (4) при $s = 1$), имеем отсюда

$$\begin{aligned} I^q &\leq C \sum_k \left(\sum_{i=1}^n \|D_i f_k\|_{L_{p,v}(G)} + \|f_k\|_{L_{r,u}(G_\delta)} \right)^q \\ &\leq C_1 \sum_{i=1}^n \left(\sum_k \|D_i f_k\|_{L_{p,v}(G)} \right)^{\frac{q}{p}} + C_1 \left(\sum_k \|f_k\|_{L_{r,u}(G_\delta)} \right)^{\frac{q}{r}} \\ &\leq C_2 \sum_{i=1}^n \|D_i f\|_{L_{p,v}(G)}^q + C_2 \|f\|_{L_{r,u}(G_\delta)}^q, \end{aligned}$$

и доказательство теоремы в случае $s = 1$ завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Теорема 3 представляет собой частный случай теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В силу оценки (2.11) достаточно убедиться в ограниченности операторов $A_1, A_2: L_{p, \rho_1^a}(G) \rightarrow L_{q, \rho_1^b}(G)$ (оператор A_3 ограничен в силу леммы 4.1). В силу следствий 4.1, 4.2 справедливы оценки слабого типа:

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in G : |A_j g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{q}} \Big|_{\rho_1^b} \leq C \|\rho_1^{\frac{a}{p}} g\|_{L_p(G)} \quad (j = 1, 2).$$

Условия теоремы выполняются также при замене в них пары (p, q) на каждую из пар $(p_0, q_0), (p_1, q_1)$, где $1 < p_0 < p < p_1 < q_1 < \infty, p_0 < q_0 < q < q_1 < \infty$ (p_0, p_1 близки к p , а q_0, q_1 близки к q) и

$$\frac{1}{2p_0} + \frac{1}{2p_1} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{2q_0} + \frac{1}{2q_1} = \frac{1}{q}.$$

Тогда в силу интерполяционной теоремы Марцинкевича существует $C > 0$ такое, что

$$\|\rho_1^{\frac{b}{q}} A_j f\|_{L_q(G)} \leq C \|\rho_1^{\frac{a}{p}} f\|_{L_p(G)} \quad (j = 1, 2)$$

для всех f с конечной правой частью. Этим доказана основная часть теоремы 4.

Пусть $\sigma = 1$ или $a \geq 1 - n$. Тогда доказательство основной части теоремы сохраняется при замене строгого неравенства в ii) на нестрогое. При этом само (нестрогое) неравенство ii) является следствием iii) и может быть опущено.

В случае $a \geq 1 - n, b = 0$ доказательство основной части теоремы сохраняется при замене строгого неравенства i) на нестрогое, а само (нестрогое) неравенство i) является следствием неравенства iii) и может быть опущено. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5 сводится в силу (2.11) к доказательству ограниченности операторов $A_1, A_2: L_{p, v}(G) \rightarrow L_q(G), A_3: L_{r, u}(G_\delta) \rightarrow L_q(G)$. Ограниченность последнего установлена в лемме 4.1. Ограниченность операторов A_1, A_2 вытекает из теоремы В.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6 сводится в силу (2.11) к доказательству ограниченности операторов $A_1, A_2: L_{p, v}(G) \rightarrow L_{q, w}(G), A_3: L_{r, u}(G_\delta) \rightarrow L_{q, w}(G)$. Ограниченность последнего установлена в лемме 4.1. Ограниченность операторов A_1, A_2 , которые можно считать построенными по правильным усеченным гибким конусам, вытекает из теоремы С, условия которой выполняются в силу оценок (4.8) (для A_1), (4.11) (для A_2).

Результаты этой работы, относящиеся к случаю весов $v = \rho_1^a, w = \rho_1^b, u = 1$, были доложены на семинаре Института математики университета г. Йены (Германия) в октябре 1999 г. Формулировка основных результатов приведена в [18].

Список литературы

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
2. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
3. *Решетняк Ю. Г.* Интегральные представления функций в областях с негладкой границей // Сиб. матем. журн. 1980. Т. 21. № 6. С. 108–116.

4. Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
5. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
6. Глобенко И. Г. Некоторые вопросы теории вложения для областей с особенностями на границе // Матем. сб. 1962. Т. 57. № 2. С. 201–224.
7. Лабутин Д. А. Интегральное представление функций и вложение пространств Соболева на областях с нулевыми углами // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 2. С. 201–219.
8. Smith W., Stegenga D. A. Holder domains and Poincaré domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 319. P. 67–100.
9. Hajlasz P., Koskela P. Isoperimetric inequalities and imbedding theorems in irregular domains // J. London Math. Soc. (2). 1998. V. 58. № 185. P. 425–450.
10. Kilpeläinen T., Malý J. Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries // Z. Anal. Anwendungen. 2000. V. 19. № 2. P. 369–380.
11. Лабутин Д. А. Вложение пространств Соболева на гёльдеровых областях // Труды МИАН. 1999. Т. 227. С. 170–179.
12. Stredulinsky E. W. Weighted inequalities and degenerate elliptic partial differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1984. (Lecture Notes in Math. V. 1074.)
13. Кокилашвили В. М., Габидзашвили М. А. О весовых неравенствах для анизотропных потенциалов и целых функций // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 6. С. 1304–1306.
14. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
15. Лабутин Д. А. Неудлучшаемость неравенств Соболева для класса нерегулярных областей // Труды МИАН. 2001. Т. 232. С. 218–222.
16. Габидзашвили М. А. Весовые неравенства для анизотропных потенциалов // Труды Тбилисского матем. института. 1986. Т. 82. С. 25–36.
17. Бесов О. В. Вложения пространств дифференцируемых функций переменной гладкости // Труды МИАН. 1997. Т. 214. С. 25–58.
18. Бесов О. В. Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 2. С. 131–134.