Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Донцов, Систолы на группах Гейзенберга с метриками Карно–Каратеодори,
Матем. сб., 2001, том 192, номер 3, 27–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:08:08

УДК 514.174.6

В. В. Донцов

Систолы на группах Гейзенберга с метриками Карно–Каратеодори

В работе изучаются систолические свойства нильмногообразий $\mathcal{N}^{2n+1}$, связанных с высшими группами Гейзенберга H_{2n+1} . Получены эффективные оценки систолических констант $\sigma(\mathcal{N}^{2n+1})$ как функций параметров, определяющих равномерную решетку на H_{2n+1} , в геометрии Карно–Каратеодори.

Библиография: 18 названий.

Введение

Одним из новых направлений в современной геометрии является изучение метрических пространств с внутренней метрикой. Начало исследований было положено А. Д. Александровым. Обзор по этой тематике можно найти в работе [1]. К метрическим пространствам с внутренней метрикой относятся римановы многообразия, финслеровы пространства, а также пространства с метриками Карно–Каратеодори (К–К). Среди последних особый интерес представляют нильмногообразия с метриками Карно–Каратеодори. Геометрия К–К находит применение во многих задачах механики, вариационных задачах, в вопросах оптимального управления. Интересной характеристикой геометрии К–К является систолическая константа. Фактически эта константа была введена для римановых поверхностей в работах Ч. Лёвнера и П. Пу в начале 50-х годов. Двадцать лет спустя М. Берже формализовал и пропагандировал идеи Ч. Лёвнера и П. Пу, дав общее определение систолических констант для римановых многообразий произвольной размерности. Изложение этих идей и большое количество ссылок можно найти в обзоре [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Систолой* (1-систолой) $\text{sys}(M^n, g)$ (компактного) риманова многообразия (M^n, g) называется длина кратчайшей негомотопной нулю замкнутой геодезической.

Систолическая константа σ определяется следующим образом:

$$\sigma(M^n) = \inf_g \frac{\text{vol}_g(M^n, g)}{(\text{sys}(M^n, g))^n}. \quad (1)$$

Это определение легко обобщается на пространство с внутренними метриками.

Пусть (X, d) – компактное метрическое пространство, в котором задана некоторая непрерывная кривая $\gamma(t): [0, 1] \rightarrow X$. Тогда определена длина кривой γ :

$$l_d(\gamma) = \sup_{x_1, \dots, x_m} \sum_{i=1}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}),$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01201).

где $x_1, \dots, x_m$ – произвольная последовательность точек кривой γ , занумерованных в порядке их расположения на кривой, а верхняя грань берется по всем таким последовательностям.

Метрика d называется *внутренней*, если для любых точек $x, y \in X$ выполняется равенство:

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} l_d(\gamma),$$

где нижняя грань берется по всем кривым γ , соединяющим x и y . *Кратчайшей* соединяющей x и y называется кривая, длина которой равна $d(x, y)$.

Если n – размерность по Хаусдорфу пространства X (см. [3]), то на X определена n -мерная мера Хаусдорфа $\mathcal{H}_d^n$, порожденная метрикой d . Пусть $\mathbf{d} = \mathbf{d}(n)$ – класс внутренних метрик хаусдорфовой размерности n и конечной n -мерной меры Хаусдорфа. Определим систолическую константу σ следующим образом:

$$\sigma(X) = \inf_{d \in \mathbf{d}} \frac{\mathcal{H}_d^n(X, d)}{(\text{sys}(X, d))^n}, \quad (2)$$

где $\text{sys}(X, d)$ есть по определению минимальная длина неомотопной нулю замкнутой петли на X .

В случае римановых многообразий определение (2) совпадает с определением (1).

На сегодняшний день точно вычислены систолические константы только в случаях тора $\mathbb{T}^2$ (Лёвнер), $\mathbb{R}P^2$ [4], бутылки Клейна $\mathbb{K}^2$ [5]. К сравнительно недавним результатам по систолической геометрии можно отнести работы М. Громова [6] и И. Бабенко [7]. М. Громов выделил класс *существенных* многообразий, который включает в себя замкнутые многообразия, допускающие метрику отрицательной кривизны, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{T}^n$ и некоторые другие, и доказал, что они имеют положительную систолическую константу. И. Бабенко доказал обратное утверждение, а также тот факт, что систолическая константа является гомотопическим инвариантом многообразия.

Вопросы систолической геометрии тесно связаны с задачей нахождения констант Эрмита в $\mathbb{R}^n$ [8]. А именно $\sigma^2(\mathbb{T}^n)$ совпадает с константой Эрмита для плоских торов $\mathbb{T}^n$.

В настоящей работе рассматриваются систолические константы однородной геометрии К–К на группах Гейзенберга.

Пусть H_{2n+1} – высшая группа Гейзенберга размерности $2n + 1$, $n = 1, 2, \dots$, которая является связной односвязной нильпотентной группой Ли, а G – равномерная дискретная подгруппа (решетка) в H_{2n+1} . Каждая решетка в H_{2n+1} с точностью до группового автоморфизма определяется некоторым набором натуральных параметров $G = G(k_1, \dots, k_n)$. Факторизацией H_{2n+1} по решеткам $G = G(k_1, \dots, k_n)$ мы получаем нильмногообразия, также зависящие от этого набора: $\mathcal{N}^{2n+1} = H_{2n+1}/G = \mathcal{N}^{2n+1}(k_1, \dots, k_n)$.

В качестве внутренних метрик рассматриваются левоинвариантные метрики К–К [9] на H_{2n+1} , индуцирующие метрики на $\mathcal{N}^{2n+1}$. Пусть $V_h, h \in H_{2n+1}$, – левоинвариантное поле $2n$ -мерных гиперплоскостей, гладко зависящих от h , такое, что векторное подпространство V_e , где e – единица группы H_{2n+1} , порождает

алгебру Ли $L = L(H_{2n+1})$ (такое поле называется *вполне неголономным рас-пределением* или *контактной структурой* на H_{2n+1}). На V_e задается норма

$$|\xi| = \left(\sum_{i,j=1}^{2n} g_{ij} \xi^i \xi^j \right)^{1/2}$$

посредством положительно определенной квадратичной формы (g_{ij}) , которая раз-носится левыми сдвигами в каждую точку пространства H_{2n+1} и задает левоин-вариантную норму на V_h . Кусочно непрерывно дифференцируемая кривая назы-вается *допустимой*, если она касается распределения в каждой своей точке. По теореме Рашевского–Чжоу [10], [11] любые две точки в (H_{2n+1}, V_h) соединимы до-пустимой кривой. Метрика К–К ρ определяется равенством:

$$\rho(e, h) := \inf_{\gamma \in D(e, h)} \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)} dt, \quad (3)$$

где $D(e, h)$ – класс допустимых кривых, соединяющих точки e и h в H_{2n+1} . По-скольку метрика ρ левоинвариантна, то аналогично определяется расстояние меж-ду любыми двумя точками.

Каждая метрика К–К ρ с точностью до автоморфизма H_{2n+1} зависит от набора параметров $\rho_\alpha = \rho(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Задавая норму на V_h как функцию $\mathcal{F} = \mathcal{F}(h)$, мы получаем бо-лее широкий класс метрик – метрики Карно–Каратеодори–Финслера. Этот класс исчерпывает все внутренние метрики на H_{2n+1} . Точнее, согласно [12] и [13] одно-родные многообразия с внутренней метрикой – это факторпространства H/G связ-ных групп Ли H по их компактным подгруппам G , снабженные некоторой левоин-вариантной метрикой Карно–Каратеодори–Финслера. Вопрос поиска $\sigma(\mathcal{N}^{2n+1})$ по всем внутренним метрикам пока остается открытым.

На H_{2n+1} определена ненулевая $(2n+2)$ -мерная мера Хаусдорфа $\mathcal{H}_\rho^{2n+2}$, по-рожденная метрикой ρ ; эта мера наряду с обычной $(2n+1)$ -мерной лебеговой ме-рой $\mathcal{L}^{2n+1}$ является мерой Хаара и поэтому отличается от последней на некото-рую универсальную мультипликативную константу μ_n , оценки которой приводятся в настоящей работе.

Поскольку группа автоморфизмов $\text{Aut } H_{2n+1}$ действует транзитивно на мно-жестве всех решеток, каждая из которых с точностью до автоморфизма определя-ется набором $(k_1, \dots, k_n)$, и на множестве всех метрик К–К ρ_α при фиксированном наборе параметров $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то мы получаем последовательность систо-лических констант $\sigma = \sigma(k_1, \dots, k_n)$, зависящих только от набора $(k_1, \dots, k_n)$. Основная цель настоящей работы состоит в изучении такой последовательности.

ТЕОРЕМА. *Систолическая константа нильмногообразия $\mathcal{N}^{2n+1} = H_{2n+1}/G$ с метрикой К–К ρ_α допускает оценки:*

$$\begin{aligned} 1) \quad n = 1: \quad \sigma(\mathcal{N}^3) &= \frac{11}{16\pi^2} \cdot \mu_1, \\ 2) \quad n > 1: \quad \frac{1}{(\alpha_{\max} \cdot \pi)^{n+1}} \mu_n &< \sigma(\mathcal{N}^{2n+1}, \rho_\alpha) < \frac{1}{(\alpha_{\min} \cdot 4/\sqrt{3})^{n+1}} \mu_n, \\ &\frac{\pi^2}{(n+1)} \leq \mu_n \leq \frac{\pi}{(n+1)\theta_n}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\theta_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{2n} \cdot \frac{\cos t}{t} \cdot \frac{\sin t - t \cos t}{t^2} dt, \quad (5)$$

$$\alpha_{\min} = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_{\max} = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю И. К. Бабенко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§ 1. Высшая группа Гейзенберга, координаты I рода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа, порожденная матрицами вида:

$$H_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n & c \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, a_i, b_i, c \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \right\}, \quad (6)$$

называется (*высшей*) *группой Гейзенберга* размерности $2n + 1$.

Группа H_{2n+1} является связной односвязной нильпотентной группой Ли.

Рассмотрим алгебру Ли $L(H_{2n+1})$ этой группы. Она порождается $2n + 1$ элементом:

$$\bar{e}_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_{n+i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

$$\bar{e}_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}$$

с соотношениями: $[\bar{e}_i, \bar{e}_{n+i}] = \bar{e}_{2n+1}$, $[\bar{e}_k, \bar{e}_j] = \bar{0}$, $|k - j| \neq n$, где $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор в алгебре $L(H_{2n+1})$.

Следуя Мальцеву [14], по формуле Кэмпбэлла–Хаусдорфа введем координаты I рода на алгебре $L(H_{2n+1})$, которая изоморфна $\mathbb{R}^{2n+1}$. В этих координатах групповая операция имеет вид:

$$h \cdot g = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{z}) = \left(x_1 + \bar{x}_1, \dots, x_n + \bar{x}_n, y_1 + \bar{y}_1, \dots, y_n + \bar{y}_n, z + \bar{z} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left| \begin{matrix} x_i & y_i \\ \bar{x}_i & \bar{y}_i \end{matrix} \right| \right), \quad (8)$$

а единица группы $e = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0)$. Группа H_{2n+1} является одномерным центральным расширением группы $\mathbb{R}$ посредством $\mathbb{R}^{2n}$, т.е. имеет место точная последовательность:

$$0 \rightarrow Z_{2n+1} \rightarrow H_{2n+1} \rightarrow H_{2n+1}/Z_{2n+1} \rightarrow 0,$$

где $Z_{2n+1} \simeq \mathbb{R}$ — центр группы H_{2n+1} .

Стандартная симплектическая структура в $\mathbb{R}^{2n} \simeq H_{2n+1}/Z_{2n+1}$, заданная матрицей I (см. ниже) и определяющая кососкалярное произведение в H_{2n+1}/Z_{2n+1} :

$$\{h^0, g^0\} = h^0 \cdot I \cdot g^0 = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)^T, \quad (9)$$

тесно связана с групповой операцией (8):

$$h \cdot g = \left(x_1 + \bar{x}_1, \dots, x_n + \bar{x}_n, y_1 + \bar{y}_1, \dots, y_n + \bar{y}_n, z + \bar{z} + \frac{1}{2} \cdot \{h^0, g^0\} \right) \quad (10)$$

или

$$[h, g] = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \{h^0, g^0\}), \quad (11)$$

где верхний индекс 0 означает, что $h^0 = h \pmod{Z_{2n+1}}$, а $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор в группе H_{2n+1} .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Координаты I рода $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ определяют стандартную евклидову метрику $ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx_i^2 + dy_i^2) + dz^2$ на H_{2n+1} , согласованную с симплектической структурой на H_{2n+1}/Z_{2n+1} . Таким образом, мы получаем на H_{2n+1} меру Лебега: $d\mathcal{L} = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n \wedge dz$, которая, как легко видеть, левоинвариантна.

§ 2. Автоморфизмы группы H_{2n+1}

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,2n+1}$ – некоторый автоморфизм алгебры $L(H_{2n+1})$, тогда из (7) получим:

$$a_{1\ 2n+1} = a_{2\ 2n+1} = \dots = a_{2n\ 2n+1} = 0, \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} a_{ki} & a_{k\ i+n} \\ a_{k+n\ i} & a_{k+n\ i+n} \end{vmatrix} = a_{2n+1\ 2n+1} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} a_{ki} & a_{kj} \\ a_{k+n\ i} & a_{k+n\ j} \end{vmatrix} = 0, \quad j \neq n+i, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 2, \dots, 2n. \quad (14)$$

Обозначим через A^* подматрицу в A , полученную удалением из A последней строки и последнего столбца, тогда равенства (13) и (14) можно записать следующим образом:

$$A^* \cdot I \cdot (A^*)^T = I \cdot \text{diag}(a_{2n+1\ 2n+1}, \dots, a_{2n+1\ 2n+1}), \quad (15)$$

где $\text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ обозначает диагональную матрицу размера $2n \times 2n$ с элементами $(p_1, \dots, p_n, p_1, \dots, p_n)$ на главной диагонали. Из этого равенства следует, что

$$\det A^* = a_{2n+1\ 2n+1}^n. \quad (16)$$

Итак, всякий автоморфизм алгебры $L(H_{2n+1})$ задается матрицей A , удовлетворяющей свойствам (12), (15), (16). Поскольку каждому элементу группы соответствует по крайней мере один элемент алгебры и операция в группе определяется через коммутационные соотношения в алгебре, то группа $\text{Aut } L(H_{2n+1})$ совпадает с группой $\text{Aut } H_{2n+1}$.

Заметим, что свойство (15) выполняется для любой симплектической матрицы $S \in \text{Sp}(2n)$, т.е.

$$\left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline * & 1 \end{array} \right) \in \text{Aut } H_{2n+1}. \quad (17)$$

§ 3. Равномерные решетки в H_{2n+1}

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [14]. Подгруппа G в группе Ли H называется *равномерной*, если факторпространство по ее замыканию $H/\overline{G}$ компактно.

Изучим равномерные дискретные подгруппы (решетки) в H_{2n+1} . Согласно [14] у каждой решетки G существует базис $g_1, \dots, g_{2n}, g_{2n+1} \in G$ такой, что:

- 1) $g_1, \dots, g_{2n+1}$ линейно независимы как векторы $\mathbb{R}^{2n+1} \simeq H_{2n+1}$;
- 2) $g = g_1^{s_1} \cdots g_{2n}^{s_{2n}} \cdot g_{2n+1}^{s_{2n+1}} \quad \forall g \in G$, где $s_i \in \mathbb{Z}$;
- 3) $\{g_i^{s_i} \cdots g_{2n+1}^{s_{2n+1}}\} =: G_i$ образуют нормальный делитель G , $i = 1, \dots, 2n+1$;
- 4) G_i/G_{i+1} – бесконечные циклические группы, $i = 1, \dots, 2n$.

Из этих свойств следует, что элемент $g_{2n+1} = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, c)$ для некоторого фиксированного $c \in \mathbb{R}$ принадлежит центру Z_{2n+1} . В силу нильпотентности G имеем: $[g_i, g_j] = g_{2n+1}^{k_{ij}}$, $k_{ij} \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i < j \leq 2n$, или

$$\{g_i^0, g_j^0\} = k_{ij}c, \quad (18)$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ – косокалярное произведение (см. (9)), а $[\cdot, \cdot]$ – групповой коммутатор.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. У всякой равномерной решетки G существует базис $f_1, \dots, f_{2n}, f_{2n+1} \in G$ такой, что:

$$\begin{aligned} [f_i, f_{n+i}] &= f_{2n+1}^{k_i}, & k_i \in \mathbb{Z}, & \quad i = 1, \dots, n, \\ [f_m, f_j] &= e, & m, j &= 1, \dots, 2n, \quad |m - j| \neq n. \end{aligned} \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторый базис $g_1, \dots, g_{2n}, g_{2n+1} \in G$ в принятых ранее обозначениях. Элемент g_{2n+1} принадлежит центру $Z(G)$ группы G , его оставим без изменения, положив $f_{2n+1} = g_{2n+1}$. Среди остальных базисных элементов найдем два, пусть ими будут g_1 и g_2 , таких, что $\{g_1^0, g_2^0\} = k_{12}c$ принимает наименьшее по модулю значение, и положим $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$, а $k_1 = k_{12}$. Поскольку $G^0 = G/Z(G)$ – абелева группа, то можно воспользоваться аддитивной записью групповой операции. Рассмотрим две подгруппы G_1^0 и G_2^0 в G^0 :

$$G_1^0 = \{s_1 \cdot g_1^0 + s_2 \cdot g_2^0, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{Z}\}, \quad G_2^0 = \{g^0 \in G^0 : \{g^0, h^0\} = 0 \quad \forall h^0 \in G_1^0\}.$$

Покажем, что $G^0 = G_1^0 \oplus G_2^0$.

Во-первых, G_1^0 и G_2^0 – абелевы группы и $G_1^0 \cap G_2^0 = \{e\}$; во-вторых, G_2^0 содержит $2n - 2$ линейно независимых элементов решетки G^0 , а именно:

$$\tilde{g}_i^0 = k_{2i}g_1^0 - k_{1i}g_2^0 + k_{12}g_i^0, \quad i = 3, \dots, 2n.$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{g}_i^0$, $i = 3, \dots, 2n$, линейно независимы и лежат в G_2^0 , так как $\{\tilde{g}_i^0, g_1^0\} = \{\tilde{g}_i^0, g_2^0\} = 0$. Пусть $W_1 = \{a_1g_1^0 + a_2g_2^0, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ и $W_2 = \{a_3\tilde{g}_3^0 + \dots + a_{2n}\tilde{g}_{2n}^0, \quad a_i \in \mathbb{R}\}$ – подпространства в $\mathbb{R}^{2n}$ размерностей 2 и $2n - 2$ соответственно.

Очевидно, что $\mathbb{R}^{2n} = W_1 \oplus W_2$; кроме того, $G_1^0 \subset W_1$, $G_2^0 \subset W_2$. Рассмотрим произвольный элемент $g^0 \in G^0$, тогда: $g^0 = w_1 \oplus w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Покажем, что в этом случае $w_1 \in G_1^0$, $w_2 \in G_2^0$.

Предположим, что $w_1 \notin G_1^0$, тогда, прибавив или отняв нужное число раз g_1^0 и g_2^0 из g^0 , получим новый элемент решетки G^0 , у которого первое прямое слагаемое $\tilde{w}_1$ попадет внутрь фундаментальной области решетки G_1^0 . Но это противоречит тому, что $\{g_1^0, g_2^0\}$ принимает минимальное значение. Итак, $w_1 \in G_1^0$. Рассмотрим $w_2 = g^0 - w_1$. Так как и g^0 , и w_1 лежат в G^0 , то и $w_2 \in G^0$; кроме того, $\{w_2, g_1\} = \{w_2, g_2\} = 0$, т.е. $w_2 \in G_2^0$.

Таким образом, $G^0 = G_1^0 \oplus G_2^0$. Продолжим проведенную выше процедуру для группы G_2^0 и т.д. На n -м шаге мы получим: $G^0 = G_1^0 \oplus G_2^0 \oplus \dots \oplus G_n^0$, причем G_i^0 порождаются двумя элементами f_i , f_{n+i} и $\{f_i^0, f_{n+i}^0\} = k_i c$. Итак, базис $f_1, \dots, f_{2n}, f_{2n+1}$ получен полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассмотрим G^0 , записав образующие решетки в новом базисе по столбцам в матричном виде:

$$G^0 \cdot I \cdot (G^0)^T = \text{diag}(ck_1, \dots, ck_n) \cdot I$$

(см. (15)), тогда

$$\det G = c \cdot ck_1 \dots ck_n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Назовем упорядоченный набор $(k_1, \dots, k_n)$ *характеристическим* набором решетки. Легко видеть, что для каждого такого набора существует равномерная решетка:

$$G(k_1, \dots, k_n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k_1 a_1 & \dots & k_n a_n & c \\ & 1 & & 0 & b_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & b_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, a_i, b_i, c \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n \right\}.$$

С другой стороны, этот набор однозначно характеризует решетку с точностью до автоморфизма. Точнее, имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Любые две решетки $G(k_1, \dots, k_n)$ и $\tilde{G}(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ переводятся друг в друга некоторым автоморфизмом $A \in \text{Aut } H_{2n+1}$ тогда и только тогда, когда наборы $(k_1, \dots, k_n)$ и $(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется равенство:

$$\left(\begin{array}{c|c} G^* & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline c_1 \dots c_{2n} & c \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A^* & \begin{smallmatrix} a_{1 \ 2n+1} \\ \vdots \\ a_{2n \ 2n+1} \end{smallmatrix} \\ \hline a_{2n+1 \ 1} \dots a_{2n+1 \ 2n} & a \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \tilde{G}^* & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline \tilde{c}_1 \dots \tilde{c}_{2n} & \tilde{c} \end{array} \right),$$

где $A \in \text{GL}(2n+1, \mathbb{R})$. Тогда

- 1) $\tilde{c} a_{1 \ 2n+1} = \tilde{c} a_{2 \ 2n+1} = \dots = \tilde{c} a_{2n \ 2n+1} = 0$,
- 2) $A^* \cdot \tilde{G}^* = G^*$,
- 3) $c = a \tilde{c}$.
- 4) $(a_{2n+1 \ 1}, \dots, a_{2n+1 \ 2n}) = (c_1 - \tilde{c}_1 a, \dots, c_{2n} - \tilde{c}_{2n} a) \cdot (\tilde{G}^*)^{-1}$.

Из 1) следует, что $a_{i\,2n+1} = 0$, $i = 1, \dots, 2n$, так как $\tilde{c} \neq 0$. Из 3) и 4) вытекает, что a и $a_{2n+1\,j}$, $j = 1, \dots, 2n$, находятся однозначно, причем $a \neq 0$. Рассмотрим соотношение 2): $A^* = G^*(\tilde{G}^*)^{-1}$, тогда

$$\begin{aligned} A^* I(A^*)^T &= G^*(\tilde{G}^*)^{-1} I((\tilde{G}^*)^{-1})^T \cdot (G^*)^T \\ &= G^* \cdot I \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{\tilde{c}\tilde{k}_1}, \dots, \frac{1}{\tilde{c} \cdot \tilde{k}_n}\right) \cdot (G^*)^T \\ &= I \cdot \text{diag}(ck_1, \dots, ck_n) \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{\tilde{c} \cdot \tilde{k}_1}, \dots, \frac{1}{\tilde{c} \cdot \tilde{k}_n}\right) \\ &= I \text{diag}\left(\frac{ck_1}{\tilde{c}\tilde{k}_1}, \dots, \frac{ck_n}{\tilde{c}\tilde{k}_n}\right). \end{aligned}$$

Итак, если наборы $(k_1, \dots, k_n)$ и $(\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ совпадают, то получим равенство: $A^* I(A^*)^T = I \text{diag}(a, \dots, a)$, которое вместе с 1), 3), 4) определяет автоморфизм $A \in \text{Aut } H_{2n+1}$; если же наборы разные, то для A^* не выполняется (15) и A не является автоморфизмом H_{2n+1} .

Далее будем рассматривать решетки $G(k_1, \dots, k_n)$, удовлетворяющие условиям утверждения 1, с теми же обозначениями и дополнительным требованием: $\det G^* \cdot c = c^{n+1} \cdot k_1 \cdots k_n = 1$, т.е.

$$\begin{cases} c = \frac{1}{\sqrt[n+1]{k_1 \cdots k_n}}, \\ \det G^* = \sqrt[n+1]{k_1 \cdots k_n}. \end{cases} \quad (20)$$

§ 4. Контактные структуры на H_{2n+1}

Напомним некоторые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [15]. *Контактной структурой* на $(2n+1)$ -мерном многообразии M называется невырожденное поле касательных гиперплоскостей T_x , гладко зависящее от точки $x \in M$.

Такое поле в окрестности каждой точки $x \in M$ можно задать дифференциальной 1-формой ω_x , которая не обращается в нуль на векторах, трансверсальных плоскости поля.

Условие невырожденности имеет вид:

$$\underbrace{d\omega_x \wedge \cdots \wedge d\omega_x}_{n \text{ раз}} \wedge \omega_x \neq 0 \quad \forall x \in M. \quad (21)$$

Нечетномерные пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$ ($n \geq 1$) имеют естественные контактные структуры, порожденные групповой структурой соответствующей группы Гейзенберга $H_{2n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$. Действительно, любая левоинвариантная 1-форма α на H_{2n+1} , не обращающаяся в нуль на центре Z_{2n+1} , задает контактную структуру.

Пусть

$$\alpha_h = \sum_{i=1}^n (a_i(h) dx_i + b_i(h) dy_i) + c(h) dz,$$

где $h = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \in H_{2n+1}$; левоинвариантность α_h означает, что $\alpha_e \xi = \alpha_h h \xi \quad \forall \xi \in T_e H_{2n+1}$. Пусть $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n, \xi^{n+1}, \dots, \xi^{2n}, \eta)$, тогда

$$h\xi = \frac{d}{dt}(h \cdot \xi t) \Big|_{t=0} = \left(\xi^1, \dots, \xi^n, \xi^{n+1}, \dots, \xi^{2n}, \eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^{n+i} \\ x_i & y_i \end{vmatrix} \right),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha_e \xi &= \sum_{i=1}^n a_i(e) \xi^i + b_i(e) \xi^{n+i} + c(e) \eta \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(a_i(h) + \frac{1}{2} y_i c(h) \right) \xi^i + \left(b_i(h) - \frac{1}{2} x_i c(h) \right) \xi^{n+i} \right] + c(h) \eta = \alpha_h \cdot h \xi. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{cases} a_i(h) = a_i(e) - \frac{1}{2} y_i c(h), \\ b_i(h) = b_i(e) + \frac{1}{2} x_i c(h), \\ c(h) = c(e). \end{cases} \quad (22)$$

Из (22) следует, что $c(h) = c_0 \in \mathbb{R}$, причем $c_0 \neq 0$ в силу невырожденности α_h (см. (21)), $a_i = a_i(y_i)$, $b_i = b_i(x_i)$, т.е.

$$\alpha_h = \sum_{i=1}^n (a_i(y_i) dx_i + b_i(x_i) dy_i) + c_0 dz.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Гиперплоскость V_h называется *контактной* в точке $h \in H_{2n+1}$, если $\alpha_h(V_h) = 0$.

Рассмотрим 1-форму ω_h , для которой $a_i(e) = b_i(e) = 0$, $c_0 = 1$:

$$\omega_h = \frac{1}{2} y_1 dx_1 - \frac{1}{2} x_1 dy_1 + \dots + \frac{1}{2} y_n dx_n - \frac{1}{2} x_n dy_n + dz.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Всякая левоинвариантная невырожденная 1-форма α_h в H_{2n+1} некоторым автоморфизмом $A \in \text{Aut } H_{2n+1}$ приводится к форме ω_h .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\alpha_e = \sum_{i=1}^n (a_i dx_i + b_i dy_i) + c_0 dz$, $0 \neq a_i, b_i, c_0 \in \mathbb{R}$; $\omega_e = dz$ и, значит, $V_e = V_e(e_1, \dots, e_{2n})$, где $e_1, \dots, e_{2n+1}$ — стандартный базис в $L(H_{2n+1})$, является контактной гиперплоскостью для формы ω_e , т.е. $\omega_e(V_e) = 0$. Рассмотрим преобразование A :

$$(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{2n+1}) = (e_1, \dots, e_{2n+1}) \times \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ -\frac{a_1}{c} & \dots & -\frac{a_n}{c} & -\frac{b_1}{c} & \dots & -\frac{b_n}{c} & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\alpha_e(V_e(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{2n})) = 0$, $A \in \text{Aut } H_{2n+1}$ и задает искомый автоморфизм между α_e и ω_e . В силу левоинвариантности этих форм A будет автоморфизмом между α_h и $\omega_h \forall h \in H_{2n+1}$.

Контактную структуру в H_{2n+1} , заданную 1-формой ω_h , назовем *стандартной* и обозначим через (H_{2n+1}, ω) . С этого момента V_h будет обозначать контактную плоскость, соответствующую ω_h .

§ 5. Метрика Карно–Каратеодори в (H_{2n+1}, ω)

Пусть $\gamma(t): [0, 1] \rightarrow H_{2n+1}$ – кусочно дифференцируемый путь, соединяющий единицу группы $e = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0)$ с некоторым элементом $h = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \in H_{2n+1}$: $\gamma(0) = e, \gamma(1) = h$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Кривая $\gamma(t)$ называется *допустимой* в (H_{2n+1}, ω) , если в каждый момент времени t она касается контактной гиперплоскости $V_{\gamma(t)}$, т.е. $\dot{\gamma}(t) \in V_{\gamma(t)}$.

По теореме Рашевского–Чжоу [10], [11] любые две точки в (H_{2n+1}, ω) соединимы допустимой кривой.

В $V_h \simeq \mathbb{R}^{2n}$ определен класс *стандартных* евклидовых метрик $(g_{ij}(h))$, которые в V_e имеют вид

$$(g_{ij}(e)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (dx_i^2 + dy_i^2) \quad (23)$$

и задаются набором $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$. Определим длину допустимой кривой $\gamma(t)$

$$|\gamma| := \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)} dt \quad (24)$$

и левоинвариантную метрику в (H_{2n+1}, ω)

$$\tilde{\rho}(e, h) := \inf_{\gamma \in D(e, h)} |\gamma|,$$

где $D(e, h)$ – класс допустимых кривых, соединяющих точки e и h в H_{2n+1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Метрика $\tilde{\rho}$ называется *метрикой Карно–Каратеодори*¹ (К–К) на (H_{2n+1}, ω) .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Метрика $\tilde{\rho}$ связана с $g_{ij}(e)$, т.е. при выборе другой положительной определенной квадратичной формы в единице группы метрика также изменится.

Метрику К–К, полученную из (23), назовем *стандартной* и будем в дальнейшем обозначать через ρ_α , где, как и ранее, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. В случае $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$ соответствующую метрику К–К будем называть *канонической* и обозначать просто через ρ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Произвольная метрика К–К связана со стандартной посредством некоторого автоморфизма H_{2n+1} .

¹Описание метрик К–К в H_3 можно найти в работах [9], [16]–[18].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись автоморфизмами вида (17), любую положительно определенную квадратичную форму можно привести к диагональному виду.

Метрику К–К можно получить иным способом. Для этого представим $h = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ в виде произведения

$$h = \prod_i h_i, \quad h_i = (x_1^i, \dots, x_n^i, y_1^i, \dots, y_n^i, 0),$$

причем $h_i \in V_e$, поэтому $|h_i| = (\sum_{j=1}^n \alpha_j ((x_j^i)^2 + (y_j^i)^2))^{1/2}$.

Зададим левоинвариантную метрику: $\rho(e, h) := \inf_{\Pi} \sum_i |h_i|$, где Π – всевозможные представления элемента h в виде произведений h_i .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Метрики К–К ρ и $\tilde{\rho}$ эквивалентны.

Доказательство будет приведено ниже.

Кривая $\gamma(t)$, на которой реализуется метрика К–К ρ (в дальнейшем будем ее называть *кратчайшей*), имеет простое геометрическое описание.

Заметим, что, умножая очередной элемент $h_{i-1} \cdots h_1$ на h_i , имеем:

$$\begin{aligned} h_i \cdot h_{i-1} \cdots h_1 = & \left(x_1^i + \sum_{s=1}^{i-1} x_1^s, \dots, x_n^i + \sum_{s=1}^{i-1} x_n^s, y_1^i + \sum_{s=1}^{i-1} y_1^s, \dots, y_n^i + \sum_{s=1}^{i-1} y_n^s, \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{i-1} \left\{ h_s^0, \sum_{j=1}^{s-1} h_j^0 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ h_i^0, \sum_{j=1}^{i-1} h_j^0 \right\} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\{ \cdot, \cdot \}$ – кососкалярное произведение (см. (9)). Поскольку $h = \prod_i h_i$, то задачу нахождения кратчайшей можно сформулировать следующим образом:

среди всех кусочно гладких кривых в $\mathbb{R}^{2n}$, соединяющих начальную точку $e^0 = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$ с конечной $h^0 = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, требуется найти кривую наименьшей длины так, чтобы сумма площадей, заемаемых проекцией радиус-вектора на плоскости (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, при движении вдоль кривой из начальной точки в конечную, равнялась наперед заданной величине z .

Итак, мы получаем следующую вариационную задачу:

$$\begin{cases} \int_0^\varepsilon \sqrt{\alpha_1 (\dot{x}_1^2(t) + \dot{y}_1^2(t)) + \dots + \alpha_n (\dot{x}_n^2(t) + \dot{y}_n^2(t))} dt \rightarrow \inf, \\ \dot{z}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i(t) & y_i(t) \\ \dot{x}_i(t) & \dot{y}_i(t) \end{vmatrix}, \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} x_i(0) &= y_i(0) = z_i(0) = 0, \\ x_i(\varepsilon) &= x_i, \quad y_i(\varepsilon) = y_i, \quad z(\varepsilon) = z, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (26')$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа при условии, что выбрана натуральная параметризация, приводят к системе:

$$\begin{cases} \alpha_i \ddot{x}_i(t) = 2\lambda \dot{y}_i(t), \\ \alpha_i \ddot{y}_i(t) = -2\lambda \dot{x}_i(t), \\ \dot{z}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i(t) & y_i(t) \\ \dot{x}_i(t) & \dot{y}_i(t) \end{vmatrix}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (27)$$

где λ – множитель Лагранжа. Рассмотрим два случая

1. Пусть $\lambda = 0$, тогда, решая систему (27) с начальными условиями (26'), получаем:

$$\begin{cases} x_i(t) = \frac{x_i}{\varepsilon} t, \\ y_i(t) = \frac{y_i}{\varepsilon} t, \\ z(t) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \varepsilon. \quad (28)$$

Эта система совместна при условии, что $z = 0$, т.е. $h = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, 0)$, и описывает прямолинейный отрезок, соединяющий e с h , при этом

$$\rho(e, h) := \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i^2 + y_i^2) \right)^{1/2}$$

есть обычная евклидова длина вектора h . Если $z \neq 0$, требуется рассмотреть второй случай.

2. Пусть $\lambda \neq 0$, тогда решения системы (27) с начальными условиями (26') примут вид:

$$\begin{cases} x_i(t) = -a_i + a_i \cos \frac{2\lambda}{\alpha_i} t + b_i \sin \frac{2\lambda}{\alpha_i} t, \\ y_i(t) = -b_i + b_i \cos \frac{2\lambda}{\alpha_i} t - a_i \sin \frac{2\lambda}{\alpha_i} t, \\ z(t) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 + b_i^2}{2} \left(\frac{2\lambda t}{\alpha_i} - \sin \frac{2\lambda t}{\alpha_i} \right), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n. \quad (29)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} l_i &:= \sqrt{x_i^2(\varepsilon) + y_i^2(\varepsilon)} = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad R_i := \sqrt{a_i^2 + b_i^2} = \frac{l_i}{2} \sin \frac{\lambda \varepsilon}{\alpha_i}, \\ z_i &:= \frac{1}{2} R_i^2 \left(\frac{2\lambda \varepsilon}{\alpha_i} - \sin \frac{2\lambda \varepsilon}{\alpha_i} \right), \quad \theta_i := \frac{2\lambda \varepsilon}{\alpha_i}, \quad \varepsilon_i := R_i \theta_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Перепишем эти равенства в виде систем:

$$\begin{cases} l_i = 2R_i \sin \frac{\theta_i}{2}, \\ z_i = \frac{R_i^2}{2} (\theta_i - \sin \theta_i), \\ \varepsilon_i = R_i \theta_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (30)$$

Система (30) в плоскости (x_i, y_i) описывает решение задачи Дидоны: здесь ε_i — длина дуги кругового сектора радиуса R_i , стягиваемого хордой l_i , площади z_i . Выразим θ_i , $i = 2, \dots, n$, через θ_1 , воспользовавшись равенствами:

$$\alpha_1 \theta_1 = \alpha_2 \theta_2 = \dots = \alpha_n \theta_n = 2\lambda\varepsilon. \quad (31)$$

Тогда из второго уравнения системы (26) и из систем (30) получим:

$$\frac{l_1^2}{4 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} (\theta_1 - \sin \theta_1) + \sum_{i=2}^n \frac{l_n^2}{4 \sin^2 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \cdot \frac{\theta_1}{2} \right)} \left(\theta_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_i} - \sin \frac{\alpha_1}{\alpha_i} \theta_1 \right) = 2z. \quad (32)$$

Из этого равенства можно найти θ_1 , а значит, все θ_i и ε_i , $i = 1, \dots, n$. Условие того, что выбрана натуральная параметризация, вместе с (5) приводит к равенству:

$$1 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (\dot{x}_i^2(\varepsilon) + \dot{y}_i^2(\varepsilon)) \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{R_i^2 \theta_i^2}{\varepsilon^2} \right)^{1/2}.$$

Искомая величина ε будет равна:

$$\varepsilon = \sqrt{\alpha_1 \varepsilon_1^2 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n^2}. \quad (33)$$

Особый интерес представляет случай, когда $\alpha_i = 1$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $\theta_i = \theta$, $i = 1, \dots, n$, поэтому все длины l_i , площади z_i и соответственно длины дуг ε_i пропорциональны, т. е.

$$\frac{z_i}{l_i^2} = \frac{\theta - \sin \theta}{8 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{z}{l^2}, \quad \frac{\varepsilon_i}{l_i} = \frac{\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\varepsilon}{l},$$

где $l = \sqrt{\sum_{i=1}^n ((x_i)^2 + (y_i)^2)}$. Системы (30) теперь можно записать в виде одной системы:

$$\begin{cases} l = 2R \sin \frac{\theta}{2}, \\ z = \frac{R^2}{2} (\theta - \sin \theta), \\ \varepsilon = R\theta, \end{cases} \quad (34)$$

решая которую мы найдем искомую величину ε .

Итак, системы (28), (29) описывают экстремали, соединяющие e с h . В силу существования кратчайших (теорема Рашевского–Чжоу) и единственности решения экстремальной задачи в каждом из перечисленных случаев найденные решения и будут искомыми кратчайшими. В силу левоинвариантности метрики аналогично описываются кратчайшие, соединяющие произвольные элементы группы H_{2n+1} .

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Для стандартной метрики K - K ρ_α имеют место оценки:

$$\sqrt{\alpha_{\min}} \cdot \rho(e, h) \leq \rho_\alpha(e, h) \leq \sqrt{\alpha_{\max}} \cdot \rho(e, h), \quad (35)$$

где

$$\alpha_{\max} = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_{\min} = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \\ h = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, используя введенные ранее обозначения, определения расстояния от единицы e группы до $h = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ в канонической метрике ρ и стандартной ρ_α .

Если $z = 0$, то $\rho(e, h) = l = \sqrt{l_1^2 + \dots + l_n^2}$, а $\rho_\alpha(e, h) = \sqrt{\alpha_1 l_1^2 + \dots + \alpha_n l_n^2}$; в этом случае оценки (35) справедливы.

Если $l = 0$, то $\rho(e, h) = 2\sqrt{\pi|z|}$, а $\rho_\alpha(e, h) = 2\sqrt{\pi|z|\alpha_{\min}}$. Тогда

$$\sqrt{\alpha_{\min}} \cdot \rho = \rho_\alpha.$$

Заметим, что в этом случае неравенство (35) также справедливо.

При $l \neq 0, z \neq 0$: $\rho(e, h) = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2}$, а $\rho_\alpha(e, h) = \sqrt{\alpha_1 \varepsilon_1^2 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n^2}$, где, как и ранее, ε_i есть длина дуги кругового сектора с хордой $l_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ площади z_i в плоскости (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, при этом $z = z_1 + \dots + z_n$. Заметим, что параметры z_i для метрик ρ и ρ_α разные.

а) *Оценка снизу.* Пусть $\rho_\alpha(e, h) = \varepsilon_\alpha = \sqrt{\alpha_1 \varepsilon_1^2 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n^2}$. Рассмотрим гомотеии в плоскостях (x_i, y_i) с коэффициентом $\sqrt{\alpha_{\min}}$; тогда элемент h перейдет в элемент $h_\alpha = (\sqrt{\alpha_{\min}}x_1, \dots, \sqrt{\alpha_{\min}}x_n, \sqrt{\alpha_{\min}}y_1, \dots, \sqrt{\alpha_{\min}}y_n, \sum_{i=1}^n \alpha_{\min} z_i)$, l_i перейдут в $\sqrt{\alpha_{\min}}l_i$, z_i — в $\alpha_{\min} z_i$, ε_i — в $\sqrt{\alpha_{\min}}\varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим $\rho(e, h_\alpha)$. Поскольку на $\rho(e, h_\alpha)$ достигается нижняя грань по всем расстояниям K-K, то

$$\begin{aligned} \rho(e, h_\alpha) &\leq \sqrt{(\sqrt{\alpha_{\min}}\varepsilon_1)^2 + \dots + (\sqrt{\alpha_{\min}}\varepsilon_n)^2} \\ &\leq \sqrt{(\sqrt{\alpha_1}\varepsilon_1)^2 + \dots + (\sqrt{\alpha_n}\varepsilon_n)^2} = \rho_\alpha(e, h). \end{aligned}$$

В свою очередь, $\rho(e, h_\alpha) = \sqrt{\alpha_{\min}} \cdot \rho(e, h)$. Из этих равенств получим требуемую оценку.

б) *Оценка сверху.* Рассмотрим $\rho(e, h) = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2}$. Тогда, очевидно,

$$\rho_\alpha(e, h) \leq \sqrt{\alpha_1 \varepsilon_1^2 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n^2} \leq \sqrt{\alpha_{\max}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2} = \sqrt{\alpha_{\max}} \cdot \rho(e, h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 5 проведем для стандартных метрик ρ_α и $\tilde{\rho}_\alpha$ (далее в этом доказательстве индексы опустим), которое легко обобщается на случай произвольных метрик.

Пусть $\gamma(t)$, $t \in [0, \varepsilon]$, и $\tilde{\gamma}(t)$, $t \in [0, \tilde{\varepsilon}]$, — кратчайшие, соединяющие e с h , для метрик ρ и $\tilde{\rho}$ соответственно, а t — натуральный параметр. Покажем, что $\gamma(t)$ является допустимой кривой в смысле определения 6. Из формул (28), (29) найдем касательный вектор к кривой $\gamma(t)$ в первом и втором случаях. Требуется показать, что $\dot{\gamma}(t) \in V_{\gamma(t)}$. Для этого перенесем полученный вектор обратным левым сдвигом в единицу группы, тогда

$$\xi = \frac{d}{d\tau}(\gamma^{-1}(\tau) \cdot \tau \dot{\gamma}(\tau)) \Big|_{\tau=0} = \left(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n, \dot{z} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i \end{vmatrix} \right).$$

Это равенство показывает, что при левых сдвигах первые $2n$ координат переносимого вектора не меняются, значит, информацию о том, будет ли вектор принадлежать данному распределению, содержит последняя координата. Поэтому

$\dot{\gamma}(t) \in V_{\gamma(t)}$ равносильно $\xi^{2n+1} = 0$ или $\dot{z} = \sum_{i=1}^n (x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i)$, но последнее равенство задается в условиях вариационной задачи (26)–(26'). Итак, $\gamma(t)$ является допустимой кривой в смысле определения 6, причем

$$\int_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^i(t) \right)^{1/2} dt = \varepsilon.$$

Таким образом, $\tilde{\rho}(e, h) \leq \rho(e, h)$, так как нижняя грань в определении 7 достигается на кривой $\tilde{\gamma}$, которая может быть короче γ . Теперь докажем обратное неравенство.

Заметим, что длина касательного к допустимой кривой вектора $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1})$ равна $|\xi| = (\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \xi^i)^{1/2}$, значит, $\tilde{\rho}(e, h)$ есть обычная длина проекции $\tilde{\gamma}_{\text{pr}}(t)$ кривой $\tilde{\gamma}(t)$ на $\mathbb{R}^{2n}$ вдоль центра (оси z) с метрикой (g_{ij}) вида (23), т.е. $\tilde{\rho}(e, h) = |\tilde{\gamma}_{\text{pr}}| = \tilde{\varepsilon}$ (здесь и далее модуль $|\cdot|$ будет обозначать евклидову длину). Возьмем на отрезке $[0, \tilde{\varepsilon}]$ упорядоченный набор, состоящий из m точек $t_1, \dots, t_m$, так, чтобы $|t_i, t_{i+1}| = \tilde{\varepsilon}/m$. Рассмотрим векторы $\bar{h}_i = (\tilde{\gamma}_{\text{pr}}(t_i), \tilde{\gamma}_{\text{pr}}(t_{i+1}))$, образующие ломаную в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ к кривой $\tilde{\gamma}_{\text{pr}}$. По определению $\tilde{\rho}(e, h)$ будет пределом суммы длин этих векторов при $m \rightarrow \infty$. Теперь из точки e последовательным умножением на h_i , $i = 1, \dots, m$, мы доберемся до некоторой точки $\bar{h} = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \bar{z})$, у которой последняя координата $\bar{z}$, возможно, отличается от z . Оценим $|z - \bar{z}|$. При перемещении в допустимом направлении $\bar{h}_i$ последняя координата меняется в пределах $\tilde{\varepsilon}^2/m^2$ (удвоенная максимальная площадь треугольника, порожденного векторами $\bar{h}_i, \bar{h}_{i-1}$). Таким образом, $|z - \bar{z}| \leq \tilde{\varepsilon}^2/m$. Имеем:

$$\varepsilon \leq \rho(e, h) \leq \rho(e, \bar{h}) + \rho(\bar{h}, h) \leq \sum_{i=1}^m |h_i| + 2\sqrt{\pi\alpha_k} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\sqrt{m}}, \quad \alpha_k = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $m \rightarrow \infty$: $\varepsilon \leq \tilde{\rho}(e, h) + 0$, т.е. $\rho(e, h) \leq \tilde{\rho}(e, h)$. Итак, $\tilde{\rho}(e, h) = \rho(e, h)$.

§ 6. Свойства ε -кривой К–К в канонической метрике ρ

Сопоставим каждому элементу $h = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \in H_{2n+1}$ элемент $\hat{h} = (\sqrt{(x_1^2 + y_1^2) + \dots + (x_n^2 + y_n^2)}, |z|)$ на плоскости (l, z) , который будем называть *образом* h , и *длину* h : $\rho(h) := \rho(e, h)$. Элементы одинаковой длины ε в канонической метрике К–К образуют кривую на плоскости (l, z) , которую будем называть ε -*кривой* К–К и обозначать через Γ_ε . Ее график приведен на рис. 1, а уравнение имеет вид:

$$\Gamma_\varepsilon(t) = \begin{cases} l(t) = \frac{2\varepsilon}{t} \sin \frac{t}{2}, \\ z(t) = \frac{\varepsilon^2}{2t^2} (t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (36)$$

Система (36) получена из (34).

Свойства ε -кривых К–К $\Gamma_\varepsilon(t)$.

1) При $t = 0$: $z(0) = 0, l(0) = \varepsilon$.

Рис. 1

- 2) При $t = \pi$: $z(\pi) = z_{\max} = \varepsilon^2/(2\pi)$, $l(\pi) = 2\varepsilon/\pi$.
- 3) При $t = 2\pi$: $z(2\pi) = \varepsilon^2/(4\pi)$, $l(2\pi) = 0$.
- 4) Функция $z = z(l)$ возрастает на интервале $(0, 2\varepsilon/\pi)$ и убывает на интервале $(2\varepsilon/\pi, \varepsilon)$.
- 5) Обозначим через $\Phi(\Gamma_\varepsilon) := \{(l, z) : 0 \leq l < l(t), 0 \leq z < z(t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$ область, лежащую под кривой Γ_ε , тогда:
 - а) $\rho(h) = \varepsilon \iff \widehat{h} \in \Gamma_\varepsilon$;
 - б) $\rho(h) < \varepsilon \iff \widehat{h} \in \Phi(\Gamma_\varepsilon)$;
 - в) $\rho(h_1) < \rho(h_2) \iff \Gamma_{\varepsilon_1} \subset \Phi(\Gamma_{\varepsilon_2})$.
- 6) Через произвольную точку (l, z) проходит единственная кривая Γ_ε , причем

$$\varepsilon = l \cdot \frac{t/2}{\sin t/2}, \quad (37)$$

где t — единственный корень уравнения $\frac{1 - \cos t}{t - \sin t} = \frac{l^2}{4z}$.

Доказательство этих свойств можно найти в работе [18].

§ 7. Меры Хаусдорфа в (H_{2n+1}, ρ)

Пусть $X \subset H_{2n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$ — некоторое множество. Рассмотрим всевозможные покрытия $\mathcal{P}_\delta(X)$ множества X счетными семействами $\{\mathcal{U}^\delta\}_\alpha \subset \mathcal{P}_\delta(X)$, $0 < \text{diam}_\rho(\mathcal{U}_\alpha^\delta) \leq \delta$, непустых подмножеств пространства H_{2n+1} с метрикой К–К ρ .

Следуя Федереру [3], определим левоинвариантную m -мерную меру Хаусдорфа $\mathcal{H}_\rho^m$:

$$\mathcal{H}_\rho^m(X) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{P}(X)} \sum_{\alpha} \frac{v_m}{2^m} (\text{diam}_\rho(\mathcal{U}_\alpha^\delta))^m, \quad (38)$$

где v_m — объем шара единичного радиуса в $\mathbb{R}^m$.

Аналогично определяется m -мерная сферическая мера $\mathcal{R}_\rho^m$, если в качестве $\{\mathcal{U}^\delta\}_\alpha$, $0 < \text{diam}_\rho(\mathcal{U}_\alpha^\delta) \leq \delta$, покрывающих некоторое множество X , берутся семейства всех замкнутых шаров в H_{2n+1} , а далее применяется конструкция (38).

Мера Хаусдорфа и сферическая мера связаны соотношениями

$$\frac{1}{2^m} \mathcal{R}_\rho^m \leq \mathcal{H}_\rho^m \leq \mathcal{R}_\rho^m, \quad (39)$$

которые вполне очевидны, поскольку семейство всех непустых подмножеств содержит семейство всех замкнутых шаров. С другой стороны, всякое множество конечного диаметра d содержится в шаре диаметра $2d$. Ниже мы получим более точную нижнюю оценку меры Хаусдорфа, воспользовавшись неравенством Эйленберга [3].

Пусть $\emptyset \neq X \subset (H_{2n+1}, \rho)$, тогда $\mathcal{H}_\rho^{2n+2}(X) \neq 0$ и $\mathcal{L}^{2n+1}(X) \neq 0$ (см. замечание 2). Поскольку и мера Хаусдорфа, и мера Лебега являются мерами Хаара на H_{2n+1} , они отличаются друг от друга на некоторую универсальную мультипликативную константу μ_n :

$$\mathcal{H}_\rho^{2n+2} = \mu_n \cdot \mathcal{L}^{2n+1}. \quad (40)$$

Рис. 2

Проведем оценки константы μ_n .

Оценка сверху. Сосчитаем лебегову меру шара $\mathcal{B}_\varepsilon(e)$ радиуса ε в канонической метрике ρ в H_{2n+1} с центром в единице группы (сфера единичного радиуса в метрике К–К на H_3 приведена на рис. 2):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{2n+1}(\mathcal{B}_\varepsilon) &:= v_{2n} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\varepsilon}{s} \sin \frac{s}{2} \right)^{2n} \cdot \varepsilon^2 \cdot \frac{2 \sin s - s - s \cos s}{2s^3} ds \\ &= \varepsilon^{2n+2} \cdot v_{2n} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos s)^{n-1}}{s^{2n-2}} \cdot \frac{2 \sin s \cdot (1 - \cos s) - s \sin^2 s}{2s^5} ds \\ &= \varepsilon^{2n+2} \cdot v_{2n} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} t \cdot \cos t}{t^{2n}} \cdot \frac{\sin t - t \cos t}{t^3} dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\theta_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{2n} \cdot \frac{\cos t}{t} \cdot \frac{\sin t - t \cos t}{t^2} dt. \quad (41)$$

Поскольку функция $g(t) = (\sin t - t \cos t)/t^3$ монотонна на интервале $0 \leq t \leq \pi$, то $\max_{0 \leq t \leq \pi} g(t) = g(0) = 1/3$, $\min_{0 \leq t \leq \pi} g(t) = g(\pi) = 1/\pi^2$ и θ_n допускает оценку:

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} t \cdot \cos t}{t^{2n}} dt < \theta_n < \frac{1}{6} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} t \cdot \cos t}{t^{2n}} dt. \quad (42)$$

Итак, $\mathcal{L}^{2n+1}(\mathcal{B}_\varepsilon) = \varepsilon^{2n+2} v_{2n} \theta_n$.

Далее найдем соотношение между лебеговой и сферической мерами на H_{2n+1} . Для этого покроем $\mathcal{B}_1(e)$ шарами радиуса $\varepsilon_i < \varepsilon < 1$ в метрике К–К следующим образом: зафиксируем $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и замостим $\mathcal{B}_1(e)$ непересекающимися шарами радиуса ε_1 , полученными из шара $\mathcal{B}_{\varepsilon_1}(e)$ левыми сдвигами. Далее зафиксируем $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и замостим оставшуюся свободной часть $\mathcal{B}_1(e)$ непересекающимися шарами радиуса ε_2 , полученными из шара $\mathcal{B}_{\varepsilon_2}(e)$ левыми сдвигами, и т. д. Тогда

$$\mathcal{R}_\rho^{2n+2}(\mathcal{B}_1(e)) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\varepsilon_i} \frac{v_{2n+2}}{2^{2n+2}} (2\varepsilon_i)^{2n+2}.$$

Так как $\mathcal{L}^{2n+1}(\mathcal{B}_{\varepsilon_i}) = \varepsilon_i^{2n+2} v_{2n} \theta_n$, то

$$\mathcal{H}_\rho^{2n+2}(\mathcal{B}_1(e)) = \frac{v_{2n+2} \cdot 2^{2n+2}}{v_{2n} \theta_n \cdot 2^{2n+2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum \mathcal{L}^{2n+1}(\mathcal{B}_{\varepsilon_i}) = \frac{v_{2n+2}}{v_{2n} \theta_n} \cdot \mathcal{L}^{2n+1}(\mathcal{B}_1(e)),$$

где суммы берутся по всем шарам.

Таким образом, $\mathcal{H}_\rho^{2n+2} = \frac{\pi}{(n+1)\theta_n} \cdot \mathcal{L}^{2n+1}$. Воспользовавшись неравенствами (39), получим оценку:

$$\mathcal{H}_\rho^{2n+2} \leq \frac{\pi}{(n+1)\theta_n} \cdot \mathcal{L}^{2n+1}. \quad (43)$$

Оценка снизу. Рассмотрим в H_{2n+1} цилиндр $X = B(e, 1) \times I$, основанием которого является евклидов шар $B(e, 1) \in H_{2n+1}/Z_{2n+1}$ единичного радиуса, а $I \in Z_{2n+1}$ — отрезок длины $|I| = 1/v_{2n}$ по оси z .

Пусть $P: (H_{2n+1}, \rho) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, |\cdot|)$ — отображение метрических пространств, $P: (l, z) \rightarrow l$, где $l = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in B(e, 1)$, а $z \in I$. Проверим, что P является отображением с константой Липшица $\text{Lip } P = 1$.

Если $g_1 = (l_1, z)$ и $g_2 = (l_2, z)$, $g_1, g_2 \in \partial X$ и диаметрально противоположны, то $|P(g_1) - P(g_2)| = |l_1 - l_2| = \rho(g_1, g_2) = 2$, в остальных случаях $|P(g_1) - P(g_2)| < \rho(P(g_1), P(g_2)) \leq \rho(g_1, g_2)$ (см. §6).

По неравенству Эйленберга [3] имеем:

$$\int_{B(e, 1)} \mathcal{H}_\rho^2(X \cap P^{-1}(t)) d\mathcal{H}_\rho^{2n}(t) \leq (\text{Lip } P)^{2n} \frac{v_2 v_{2n}}{v_{2n+2}} \cdot \mathcal{H}_\rho^{2n+2}(X), \quad (44)$$

где $t \in B(e, 1)$, а введенный интеграл есть интеграл Лебега.

Тогда $X \cap P^{-1}(t) = I \forall t \in B(e, 1)$ есть отрезок евклидовой длины $|I| = 1/v_{2n}$. Покажем, что $\mathcal{H}_\rho^2(I) = \pi^2/v_{2n}$. Для этого разобьем отрезок I на m частей I_k , $k = 1, \dots, m$, $|I_k| = \delta$, причем длина каждого в метрике К-К ρ будет равна $\rho(I_k) = 2\sqrt{\pi\delta}$ (см. §6). Таким образом,

$$\mathcal{H}_\rho^2(I) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{v_2}{4} (2\sqrt{\pi\delta})^2 m = \frac{\pi^2}{v_{2n}},$$

поскольку $|I| = m\delta = 1/v_{2n}$.

Рассмотрим левую часть неравенства (44):

$$\int_{B(e, 1)} d\mathcal{H}_\rho^{2n}(t) = \mathcal{L}^{2n}(B(e, 1)) = v_{2n},$$

поскольку на $\mathbb{R}^{2n}$ мера Хаусдорфа совпадает с мерой Лебега [3]. Итак, из (44) получим:

$$\frac{\pi^2 v_{2n}}{v_{2n}} \leq \frac{v_2 v_{2n}}{v_{2n+2}} \cdot \mathcal{H}_\rho^{2n+2}(X),$$

т. е.

$$\mathcal{H}_\rho^{2n+2}(X) \geq \frac{\pi^2}{n+1}. \quad (45)$$

Окончательно из (43) и (45) получим оценки

$$\frac{\pi^2}{n+1} \leq \mu_n \leq \frac{\pi}{(n+1)\theta_n}, \quad (46)$$

где θ_n находится из равенства (41).

§ 8. Систолы в H_{2n+1}

Пусть $G \subset H_{2n+1}$ – равномерная решетка.² Введем некоторые обозначения:
 $\mathcal{H}_\rho^{2n+2}(G) := \mathcal{H}_\rho^{2n+2}(V_G)$, где V_G – фундаментальная область решетки $G = (f_1, \dots, f_{2n+1})$;

Ω – класс метрик Карно–Каратеодори, каждая из которых связана как с выбором контактной структуры (т.е. ω), так и с выбором квадратичной формы на V_e (см. §§ 4, 5).

Определим систолу решетки:

$$\text{sys}(G, \rho) := \inf_{\substack{g \in G \\ g \neq e}} \rho(e, g), \quad \rho \in \Omega. \quad (47)$$

Рассмотрим $(2n + 1)$ -мерное нильногообразие: $\mathcal{N}^{2n+1} = H_{2n+1}/G$. Метрика К–К ρ на H_{2n+1} факторизацией по G индуцирует метрику на $\mathcal{N}^{2n+1}$. Некоторой замкнутой кривой на $\mathcal{N}^{2n+1}$ будет соответствовать некоторая кривая на H_{2n+1} . В силу левоинвариантности метрики ρ начало этой кривой можно перенести в единицу группы $e \in G$, тогда конец этой кривой попадает на решетку G . Таким образом, определение систолы решетки (47) совпадает с определением систолы многообразия $\mathcal{N}^{2n+1}$ (см. определение 1).

Определим систолическую константу решетки G :

$$\sigma(G) := \inf_{\rho \in \Omega} \frac{\mathcal{H}_\rho^{2n+2}(G)}{(\text{sys}(G, \rho))^{2n+2}},$$

которая в силу приведенных выше рассуждений совпадает с систолической константой нильногообразия $\sigma(\mathcal{N}^{2n+1})$ (см. (2)) с индуцированной метрикой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $G_1 = \delta_t G$, где $\delta_t: H_{2n+1} \rightarrow H_{2n+1}$ – автоморфизм вида:

$$\delta_t = \begin{pmatrix} t & 0 & & & \\ 0 & t & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & t & 0 \\ & & & 0 & t \\ & & & & & t^{2n} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R};$$

тогда $\sigma(G_1) = \sigma(G)$.

Доказательство состоит в простой проверке.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Так как $\delta_t \in \text{Aut } H_{2n+1}$, то характеристические наборы G_1 и G совпадают. Поэтому систолическую константу σ достаточно искать среди решеток с единичной по мере Лебега фундаментальной областью, т.е. среди решеток вида (20).

Каждая решетка G задается своим характеристическим набором $(k_1, \dots, k_n)$ с точностью до автоморфизма группы H_{2n+1} . С другой стороны, каждая метрика К–К из множества Ω связана со стандартной некоторым автоморфизмом H_{2n+1} .

² Для G будем использовать обозначения утверждения 1.

Поскольку группа $\text{Aut } H_{2n+1}$ действует транзитивно на множестве Ω и на множестве всех решеток $G = G(k_1, \dots, k_n)$, то нахождение $\sigma(G)$ сводится к поиску максимальной систолы в стандартной метрике К–К ρ_α (см. §5) для фиксированного набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, в классе всех равномерных решеток с данным характеристическим набором $(k_1, \dots, k_n)$.

ТЕОРЕМА. *Систолическая константа нильмногообразия $\mathcal{N}^{2n+1}$ с метрикой К–К ρ_α допускает оценки:*

$$\begin{aligned} 1) \quad n = 1: \quad & \sigma(\mathcal{N}_3) = 11\mu_1/(16\pi^2), \\ 2) \quad n > 1: \quad & \mu_n/(\alpha_{\max} \cdot \pi)^{n+1} < \sigma(\mathcal{N}_{2n+1}, \rho_\alpha) < \mu_n/(\alpha_{\min} \cdot 4/\sqrt{3})^{n+1}, \end{aligned} \quad (48)$$

где μ_n удовлетворяет (46).

Доказательству предположим несколько замечаний и утверждений.

ЗАМЕЧАНИЕ 7 (см. §6). Для сравнения длин $\rho(h_1)$ и $\rho(h_2)$ двух элементов $h_1, h_2 \in H_{2n+1}$ (см. §7) мы рассматриваем их образы $\hat{h}_1$ и $\hat{h}_2$ в плоскости (l, z) , через один из них, например через $\hat{h}_1$, проводим кривую Γ_{ε_1} , и если $\hat{h}_2 \in \Phi(\Gamma_{\varepsilon_1})$, то $\rho(h_2) > \rho(h_1)$, в противном случае $\rho(h_2) \leq \rho(h_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если $\varepsilon = \rho(g)$, $g \notin Z(G)$, – систола решетки G вида (20), то для $\hat{g} = (l, z)$ имеет место неравенство: $z \leq \frac{1}{2}c$. В противном случае, домножая g на f_{2n+1} в подходящей степени, мы получаем элемент g_1 , причем $\hat{g}_1 = (l_1, z_1)$, $z_1 < z$, поэтому $\hat{g}_1 \in \Phi(\Gamma_\varepsilon)$, т.е. $\rho(g_1) < \rho(g)$, что противоречит определению систолы решетки.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Метрика К–К инвариантна относительно вращений в плоскостях (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, и отражений относительно гиперплоскости $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. Это следует из решения вариационной задачи (§5). Поэтому можно считать, что для данной решетки G вида (20) $c > 0$.

Рис. 3

Рассмотрим Γ_ε , где $\varepsilon = \sqrt{\pi c}$ (см. рис. 3), прямые $z_1(l)$ и $z_2(l)$, проходящие через точки $(0, c/4)$, $(2\sqrt{c}/\sqrt{\pi}, c/2)$ и $(2\sqrt{c}/\sqrt{\pi}, c/2)$, $(\sqrt{\pi c}, 0)$ соответственно,

$$z_1(l): z = \frac{\sqrt{\pi c}}{8}l + \frac{1}{4}c, \quad z_2(l): z = -\frac{\sqrt{\pi c}}{2(\pi-2)}l + \frac{\pi c}{2(\pi-2)},$$

и три области M_1, M_2, M_3 :

$$\begin{aligned} M_3 &= \left\{ (l, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < l \leq \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{\pi}}, z_1(l) \leq z \leq \frac{1}{2}c \right\}, \\ M_2 &= \left\{ (l, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{\pi}} < l \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}, z_1(l) \leq z \leq \frac{1}{2}c \right\}, \\ M_1 &= \left\{ (l, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} < l \leq \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}, z_1(l) \leq z \leq \frac{1}{2}c \right\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Прямые $z_1(l)$ при $0 \leq l < 2\sqrt{c}/\sqrt{\pi}$ и $z_2(l)$ при $2\sqrt{c}/\sqrt{\pi} < l \leq \sqrt{\pi c}$ лежат в области $\Phi(\Gamma_\varepsilon)$.

Доказательство приведено в работе [18].

ЛЕММА 2. Пусть $\hat{g}_1 = (l_1, z_1)$, $\hat{g}_2 = (l_2, z_2) \in M_1$, где $g_1, g_2 \in G$, $[g_1, g_2] = e$. Тогда существует $g_3 \in G$ такой, что $\hat{g}_3 \in \Phi(\Gamma_\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_3 = g_1 \cdot g_2^{-1}$, тогда $\hat{g}_3 = (\sqrt{l_1^2 + l_2^2}, |z_1 - z_2|)$, значит,

$$0 < \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \leq \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{\pi}}, \quad |z_1 - z_2| \leq \frac{1}{2}c - \frac{\sqrt{\pi c}}{8} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{4}c = \frac{1}{8}c,$$

но

$$z_2 \left(\frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{\pi}} \right) = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{2(\pi - 2)}c > \frac{1}{8}c$$

по лемме 1, т.е. $\hat{g}_3 \in \Phi(\Gamma_\varepsilon)$.

ЛЕММА 3. Если $\hat{g} = (l, z) \in M_2$, где $g \in G$, то существует $g_1 \in G$ такой, что $\rho(g_1) < \sqrt{\pi c}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_1 = g^2 \cdot f_{2n+1}^{-1}$, тогда $\hat{g}_1 = (2l, 1 - 2z)$, при этом справедливы неравенства:

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \leq 2l < \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}, \quad 0 \leq 1 - 2z < \frac{1}{2}c - \frac{\sqrt{\pi c}}{4}l < \frac{\sqrt{\pi c}}{8} \cdot 2l + \frac{1}{4}c,$$

т.е. $l > \sqrt{c}/(2\sqrt{\pi})$, и по лемме 1 $\hat{g}_1 \in \Phi(\Gamma_\varepsilon)$.

ЛЕММА 4. Если $\hat{g} \in M_3$, $g \in G$, то существует $g_1 \in G$ такой, что $\rho(g_1) < \sqrt{\pi c}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_1 = g^2$, тогда либо $\widehat{g}_1 \in \Phi(\Gamma_\varepsilon)$ и все доказано, либо $\widehat{g}_1 \in M_2$ и лемма 3 завершает доказательство.

Рассмотрим произвольную решетку $G(k_1, \dots, k_n)$ единичного объема с образующими $f_1, \dots, f_{2n+1}$, удовлетворяющими условиям (19). Пусть образы $\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_{2n+1}$ имеют вид: $\widehat{f}_i = (a_i, |c_i|)$, $\widehat{f}_{n+i} = (b_i, |c_{n+i}|)$, $i = 1, \dots, n$, $\widehat{f}_{2n+1} = (0, |c|)$; воспользовавшись (20) и замечанием 8, будем считать, что $|c_i| \leq \frac{1}{2}|c|$, $\det(f_1^0, \dots, f_{2n}^0) = \sqrt[n+1]{k_1 \cdots k_n}$, $c = 1/\sqrt[n+1]{k_1 \cdots k_n}$. Введем обозначение: $k = k_1 \cdots k_n$, выберем базис решетки G таким образом, чтобы

- 1) $a_i \leq b_i \leq u_i$, $i = 1, \dots, n$, где u_i — длина третьей стороны треугольника (a_i, b_i, u_i) , образованного векторами f_i^0 и f_{n+i}^0 ,
- 2) $0 < \beta_i = \widehat{(f_i^0, f_{n+i}^0)} \leq \pi/2$ (см. рис. 4).

Рис. 4

По теоремам синусов и косинусов в треугольнике (a_i, b_i, u_i) и учитывая, что $\sin \beta_i \leq 1$, имеем систему

$$\begin{cases} b_i^2 \leq a_i^2/4 + k_i^2 \cdot c^2/a_i^2, \\ b_i^2 \geq a_i^2, \\ b_i \geq k_i \cdot c/a_i. \end{cases} \quad (49)$$

Система (49) выделяет область допустимых значений для a_i и b_i (см. рис. 5).

Рис. 5

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. В классе решеток $G(1, 1, k_3, \dots, k_n)$ единичного объема максимальная систола в канонической метрике K - K ρ допускает оценки:

$$\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt[4]{3}} < \text{sys } G(1, 1, k_3, \dots, k_n) < \sqrt{\pi c}. \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим f_1 и $f_2 \in G$, причем $\hat{f}_1 = (a_1, |c_1|)$, $\hat{f}_2 = (a_2, |c_2|)$. В силу (49) и утверждения 1 имеют место неравенства:

$$a_i \leq \frac{\sqrt{2k_i c}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt[4]{3}} < \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}, \quad i = 1, 2.$$

Это означает, что $\hat{f}_i \in \Phi(\Gamma_\varepsilon) \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3$, где $\varepsilon = \sqrt{\pi c}$. По леммам 2–4 всегда существует $g \in G$ такой, что $\hat{g} \in \Phi(\Gamma_\varepsilon)$, поэтому систола решетки G оценивается сверху величиной ε . Для оценки снизу найдем систолу представленной ниже решетки $\tilde{G}$:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt[4]{3}}, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \\ f_{n+1} &= \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}, 0, \dots, 0, \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{c}}{\sqrt{2}}, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \\ &\dots\dots\dots \\ f_n &= \left(0, 0, \dots, \frac{\sqrt{2k_n c}}{\sqrt[4]{3}}, 0, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \\ f_{2n} &= \left(0, 0, \dots, \frac{\sqrt{k_n c}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}, 0, \dots, \frac{\sqrt{k_n c}\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}, \frac{c}{2} \right), \\ f_{2n+1} &= (0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, c). \end{aligned}$$

Простой проверкой убеждаемся, что наименьшую длину имеет элемент

$$g = f_1 \cdot f_2^{-1} = \left(\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt[4]{3}}, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0 \right), \quad \hat{g} = \left(\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt[4]{3}}, 0 \right),$$

т.е. $\rho(g) = 2\sqrt{c}/\sqrt[4]{3}$ (см. свойства Γ_ε), и оценка снизу получена.

СЛЕДСТВИЕ 1. $\max_{(1,1,k_3,\dots,k_n)} \text{sys } G(1, 1, k_3, \dots, k_n) = \text{sys } G(1, 1, \dots, 1)$, причем

$$\frac{2}{\sqrt[4]{3}} < \text{sys } G(1, \dots, 1) < \sqrt{\pi}. \quad (51)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. В классе решеток $G(1, k_2, \dots, k_n)$, $k_2 > 1$, единичного объема в канонической метрике K - K ρ максимальную систолу $\text{sys } G$ имеет решетка вида:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\sqrt{c}, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \\ f_2 &= \left(0, \frac{\sqrt{2k_2c}}{\sqrt[4]{3}}, \dots, 0, 0, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \\ f_{n+1} &= \left(0, 0, \dots, 0, \sqrt{c}, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \\ f_{n+2} &= \left(0, \frac{\sqrt{k_2c}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}, \dots, 0, \frac{\sqrt{k_2c}\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \\ &\dots\dots\dots \\ f_n &= \left(0, 0, \dots, \frac{\sqrt{2k_nc}}{\sqrt[4]{3}}, 0, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \\ f_{2n} &= \left(0, 0, \dots, \frac{\sqrt{k_nc}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}, 0, \dots, \frac{\sqrt{k_nc}\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}, \frac{c}{2} \right), \\ f_{2n+1} &= (0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, c), \end{aligned}$$

при этом $\text{sys } G = \frac{t_0/2}{\sin(t_0/2)} \cdot \sqrt{c}$, где t_0 – единственный корень уравнения $\frac{1}{2} = \frac{1 - \cos t}{t - \sin t}$, и реализуется на элементе f_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва докажем, что $\text{sys } G = \rho(f_1)$. Рассмотрим $\hat{f}_1 = (\sqrt{c}, c/2)$, $\hat{f}_i = (\sqrt{2k_ic}/\sqrt[4]{3}, c/2)$. По формулам (37) имеем: $\rho(f_1) < \rho(f_i)$, $i = 2, \dots, n$, $i \neq n+1$, причем $\rho(f_1) = \varepsilon_0 \sqrt{c}$, где $\varepsilon_0 = 1.78$ с точностью до второго знака после запятой, см. [18]. Ближайшими к f_1 элементами будут: $g_1 = f_1 \cdot f_2^{-1}$, $g_2 = f_1^2 \cdot f_{2n+1}^{-1}$, $g_3 = f_1 \cdot f_{n+1}^{-1}$, причем

$$\hat{g}_1 = \left(\left(\frac{\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}} c \right)^{1/2}, 0 \right), \quad \hat{g}_2 = (2\sqrt{c}, 0), \quad \hat{g}_3 = \left(\sqrt{2c}, \frac{c}{2} \right);$$

тогда по формулам (37) получим $\rho(g_2) > \rho(g_1) = 1.82\sqrt{c} > \varepsilon_0 \sqrt{c}$, кроме того, $\rho(g_3) > \rho(f_1)$. Итак, систола реализуется на элементе f_1 .

При $n = 1$, см. [18], экстремальная решетка (содержащая максимальную систолу) имеет вид:

$$\left\{ f_1 = \left(\sqrt{c}, 0, \frac{c}{2} \right), f_2 = \left(0, \sqrt{c}, \frac{c}{2} \right), f_3 = (0, 0, c), \sqrt{c} = 1 \right\}.$$

Для произвольного n при надлежащем выборе образующих f_i , $i = 2, \dots, 2n$, $i \neq n+1$, доказательство повторяется дословно. При этом, как и при $n = 1$, максимальная систола реализуется на подрешетке:

$$\left\{ f_1 = \left(\sqrt{c}, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), f_{n+1} = \left(0, 0, \dots, 0, \sqrt{c}, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \right. \\ \left. f_{2n+1} = (0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, c) \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Представленная экстремальная решетка G в данном классе $(1, k_2, \dots, k_n)$ не единственная.

СЛЕДСТВИЕ 2.

$$\max_{\substack{(1, k_2, \dots, k_n) \\ k_2 > 1}} \text{sys } G(1, k_2, \dots, k_n) = \text{sys } G(1, 2, \dots, 2) = \varepsilon_0 \cdot 2^{-\frac{n-1}{2n+2}},$$

где $\varepsilon_0 = 1.78$ с точностью до второго знака после запятой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. В классе решеток $G(k_1, k_2, \dots, k_n)$, $k_1 = 2, \dots, 10$, единичного объема в канонической метрике K - K ρ максимальную систолу $\text{sys } G(k)$ имеют решетки вида:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\frac{\sqrt{2k_1c}}{\sqrt[4]{3}}, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \\ f_{n+1} &= \left(\frac{\sqrt{k_1c}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}, 0, \dots, 0, \frac{\sqrt{k_1c}\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \\ &\dots\dots\dots \\ f_n &= \left(0, 0, \dots, \frac{\sqrt{2k_nc}}{\sqrt[4]{3}}, 0, \dots, 0, \frac{c}{2} \right), \\ f_{2n} &= \left(0, 0, \dots, \frac{\sqrt{k_nc}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}, 0, \dots, \frac{\sqrt{k_nc}\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}, \frac{c}{2} \right) \\ f_{2n+1} &= (0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, c), \end{aligned} \tag{52}$$

при этом $\text{sys } G(k) = \frac{t_{k_1}/2}{\sin(t_{k_1}/2)} \cdot \frac{\sqrt{2k_1c}}{\sqrt[4]{3}}$, где t_{k_1} – единственный корень уравнения $\frac{k_1}{\sqrt{3}} = \frac{1 - \cos t}{t - \sin t}$, $k_1 = 2, \dots, 10$, и реализуется на элементе f_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одномерном случае экстремальная решетка имеет вид (см. [18]):

$$\left\{ f_1 = \left(\frac{\sqrt{2kc}}{\sqrt[4]{3}}, 0, \frac{c}{2} \right), f_2 = \left(\frac{\sqrt{kc}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}, \frac{\sqrt{kc}\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}, \frac{c}{2} \right), f_3 = (0, 0, c) \right\}, \quad k = 2, \dots, 10.$$

В многомерном случае доказательство аналогичное, при этом максимальная систола реализуется на подрешетке: $\{f_1, f_{n+1}, f_{2n+1}\} \subset G$ при надлежащем выборе элементов $f_i, i = 2, \dots, 2n, i \neq n+1$. Остается проверить, что $\text{sys } G = \rho(f_1)$. Имеем: $\hat{f}_1 = (\sqrt{2k_1c}/\sqrt[4]{3}, c/2)$. Ближайшие к нему элементы: $g_1 = f_1 \cdot f_2^{-1}$, $g_2 = f_2$, $g_3 = f_1^2 \cdot f_{2n+1}^{-1}$, $g_4 = f_{2n+1}$, причем

$$\hat{g}_1 = \left(\left(\frac{2k_1 + 2k_2}{\sqrt{3}} c \right)^{1/2}, 0 \right), \quad \hat{g}_2 = \left(\frac{\sqrt{2k_2c}}{\sqrt[4]{3}}, \frac{c}{2} \right), \quad \hat{g}_3 = \left(\frac{2\sqrt{k_1c}}{\sqrt[4]{3}}, 0 \right), \quad \hat{g}_4 = (0, c).$$

Тогда очевидно, что $\rho(g_1) > \rho(g_3)$ и $\rho(g_2) > \rho(f_1)$. Остается проверить, что $\rho(g_3) > \rho(f_1)$ и $\rho(g_4) > \rho(f_1)$. Проверка этих неравенств проводится отдельно для каждого $k_1 = 2, \dots, 10$ по формулам (37). Результаты вычислений приведены в таблице 1 с точностью до второго знака после запятой.

ТАБЛИЦА 1

k_1	$\rho(g_3) = \frac{2\sqrt{k_1 c}}{\sqrt[4]{3}}$	$\rho(g_4) = 2\sqrt{\pi c}$	$\rho(f_1) = \frac{\varepsilon_{k_1} \sqrt{2k_1 c}}{\sqrt[4]{3}}$	$\varepsilon_{k_1} = \frac{t_{k_1}/2}{\sin t_{k_1}/2}$	t_{k_1}
2	$2.15\sqrt{c}$	$3.54\sqrt{c}$	$1.87\sqrt{c}$	1.23	2.18
3	$2.63\sqrt{c}$	$3.54\sqrt{c}$	$2.07\sqrt{c}$	1.11	1.58
4	$3.04\sqrt{c}$	$3.54\sqrt{c}$	$2.30\sqrt{c}$	1.07	1.23
5	$3.40\sqrt{c}$	$3.54\sqrt{c}$	$2.50\sqrt{c}$	1.04	1.00
6	$3.72\sqrt{c}$	$3.54\sqrt{c}$	$2.71\sqrt{c}$	1.03	0.85
7	$4.02\sqrt{c}$	$3.54\sqrt{c}$	$2.90\sqrt{c}$	1.02	0.73
8	$4.30\sqrt{c}$	$3.54\sqrt{c}$	$3.10\sqrt{c}$	1.02	0.64
9	$4.56\sqrt{c}$	$3.54\sqrt{c}$	$3.26\sqrt{c}$	1.01	0.57
10	$4.81\sqrt{c}$	$3.54\sqrt{c}$	$3.43\sqrt{c}$	1.01	0.52

Здесь t_{k_1} – корень уравнения $\frac{k_1}{\sqrt{3}} = \frac{1 - \cos t}{t - \sin t}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.

$$\max_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ k_1 > 1}} \text{sys } G(k_1, \dots, k_n) = \text{sys } G(k_1, \dots, k_1) = \varepsilon_{k_1} \cdot \frac{\sqrt{2k_1}}{\sqrt[4]{3}} \cdot k_1^{-\frac{n}{2n+2}}, \quad (53)$$

где $k_1 = 2, \dots, 10$.

Значения ε_{k_1} приведены в таблице 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. В классе решеток $G(k_1, \dots, k_n)$, $k_1 > 10$, единичного объема в канонической метрике К–К ρ максимальная систола имеет вид $\text{sys } G(k) = 2\sqrt{\pi c}$ и реализуется на элементе f_{2n+1} решетки вида (52) (см. утверждение 10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично случаю $n = 1$ сравниваем $\rho(f_1)$ и $\rho(f_{2n+1})$. Имеем: $\hat{f}_1 = (\sqrt{2k_1 c}/\sqrt[4]{3}, c/2)$, $\hat{f}_{2n+1} = (0, c)$. По формулам (37), учитывая, что $k_1 > 10$, получаем $\rho(f_1) > \rho(f_{2n+1})$. Дословно повторяя доказательство утверждения 8, можно показать, что $\rho(f_1) < \rho(g) \forall g \in G, g \neq f_{2n+1}$. Поэтому систола реализуется на элементе f_{2n+1} . Вопрос о максимальной этой систолы решается автоматически в силу того, что элемент f_{2n+1} присутствует в каждой решетке.

СЛЕДСТВИЕ 4.

$$\max_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \\ k_1 > 10}} \text{sys } G(k_1, \dots, k_n) = 2\sqrt{\pi} \cdot 11^{-\frac{n}{2n+2}}. \quad (54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Воспользовавшись следствиями 1–4, найдем минимальное значение систолической константы в канонической метрике ρ по всем значениям $k = k_1 \cdots k_n$. Данные приведены в таблице 2. Для каждого n выберем минимальное значение. Воспользовавшись оценками (35) стандартной метрики К–К ρ_α через каноническую метрику К–К ρ , получим оценки (48).

ТАБЛИЦА 2

$k = k_1 \cdots k_n$	$\sigma(k_1, \dots, k_n) / \mu_n$	ε_{k_1}	$\min_{(k_1, \dots, k_n)} (\sigma / \mu_n)$
$k \geq 1, k_1 = k_2 = 1$	$\frac{k}{\pi^{n+1}} < \frac{\sigma(k)}{\mu_n} < \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{n+1} \cdot k$	—	$\frac{1}{\pi^{n+1}} < \frac{\sigma(k)}{\mu_n} < \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{n+1}$
$k \geq 2^{n-1}, k_1 = 1$	$\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)^{2n+2} \cdot k$	—	$\frac{1}{4} \cdot (0.63)^{n+1}$
$k \geq 2^n, k_1 = 2$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)^{2n+2} \cdot k$	1.23	$\frac{1}{2} \cdot (0.57)^{n+1}$
$k \geq 3^n, k_1 = 3$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_3}\right)^{2n+2} \cdot k$	1.11	$\frac{1}{3} \cdot (0.70)^{n+1}$
$k \geq 4^n, k_1 = 4$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_4}\right)^{2n+2} \cdot k$	1.07	$\frac{1}{4} \cdot (0.76)^{n+1}$
$k \geq 5^n, k_1 = 5$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_5}\right)^{2n+2} \cdot k$	1.04	$\frac{1}{5} \cdot (0.80)^{n+1}$
$k \geq 6^n, k_1 = 6$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_6}\right)^{2n+2} \cdot k$	1.03	$\frac{1}{6} \cdot (0.82)^{n+1}$
$k \geq 7^n, k_1 = 7$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{14}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_7}\right)^{2n+2} \cdot k$	1.02	$\frac{1}{7} \cdot (0.83)^{n+1}$
$k \geq 8^n, k_1 = 8$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_8}\right)^{2n+2} \cdot k$	1.02	$\frac{1}{8} \cdot (0.83)^{n+1}$
$k \geq 9^n, k_1 = 9$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_9}\right)^{2n+2} \cdot k$	1.01	$\frac{1}{9} \cdot (0.85)^{n+1}$
$k \geq 10^n, k_1 = 10$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{20}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_{10}}\right)^{2n+2} \cdot k$	1.01	$\frac{1}{10} \cdot (0.85)^{n+1}$
$k \geq 11^n, k_1 = 11$	$\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{n+1} \cdot k$	—	$\frac{1}{11} \cdot (0.88)^{n+1}$

Значения оснований в последнем столбце приведены с точностью до второго знака после запятой.

Список литературы

1. Александров А. Д., Берестовский В. Н., Николаев И. Г. Обобщенные римановы пространства // УМН. 1986. Т. 41. № 3. С. 8–11.
2. Berger M. Systoles et applications selon Gromov // Séminaire N. Bourbaki. Exposé № 771. Astérisque. 1993. V. 216. P. 279–310.
3. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
4. Pu P. M. Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds // Pacific J. Math. 1952. V. 2. P. 55–71.
5. Bavard C. Inégalités isosystoliques conformes pour la bouteille de Klein // Geom. Dedicata. 1988. V. 27. № 3. P. 349–355.
6. Gromov M. Filling Riemannian manifolds // J. Differential Geom. 1983. V. 18. № 1. P. 1–147.
7. Бабенко И. К. Асимптотические инварианты гладких многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 4. С. 707–751.

8. Роджерс К. Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
9. Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1987. С. 5–221.
10. Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. записки пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-матем. наук. 1938. № 2. С. 83–94.
11. Chow W. L. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung // Math. Ann. 1939. V. 117. P. 98–105.
12. Берестовский В. Н. Однородные многообразия с внутренней метрикой. I // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. № 6. С. 17–29.
13. Берестовский В. Н. Однородные многообразия с внутренней метрикой. II // Сиб. матем. журн. 1989. Т. 30. № 2. С. 14–28.
14. Мальцев Л. И. Об одном классе однородных пространств // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13. № 1. С. 9–32.
15. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
16. Бабенко И. К. Замкнутые геодезические, асимптотический объем и характеристики группового роста // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 675–711.
17. Берестовский В. Н. Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметрики плоскости Минковского // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 1. С. 3–11.
18. Донцов В. В. Систолы равномерных решеток на группе Гейзенберга с метриками Карно–Каратеодори // Фундам. и прикл. матем. 2000. Т. 6. № 2. С. 401–432.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
01.06.2000