Общероссийский математический портал

С. А. Зеленова, Коммутативные подалгебры кольца квантовых многочленов и тела квантовых лорановских рядов, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 3, 55–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm550>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:59:56

УДК 512.55

С. А. Зеленова

Коммутативные подалгебры кольца квантовых многочленов и тела квантовых лорановских рядов

В работе дается описание коммутативных подалгебр кольца квантовых многочленов и тела квантовых лорановских рядов над полем k произвольной характеристики.

Библиография: 3 названия.

Введение

Напомним, что в работе [1] для случая $n = 2$ показано, что в теле частных $k_q(X, Y)$ алгебры $\Lambda = k_q[X, Y]$ централизатор любого элемента, отличного от константы, коммутативен и потому является максимальным подполем в $k_q(X, Y)$. Идея доказательства восходит к [2]. В статье [3] эта ситуация обобщена на случай $n \geq 3$ в предположении, что поле k имеет нулевую характеристику. В настоящей работе ограничение на характеристику снимается и предлагается более простое доказательство. Кроме того, доказывается, что конечномерная подалгебра алгебры внутренних дифференцирований тела квантовых лорановских рядов абелева.

В работах [1], [3] поставлен вопрос об описании подполей в теле частных алгебры общих квантовых многочленов. Близкие проблемы затрагиваются в [4], [5]. В настоящей работе показано, что в алгебре квантовых многочленов размерность Крулля любой коммутативной подалгебры не выше единицы, и построена коммутативная подалгебра, не являющаяся чисто трансцендентным расширением k .

Автор выражает искреннюю благодарность В. А. Артамонову за постановку задачи и руководство работой.

§1. Основные определения

Пусть задана матрица $Q = (q_{ij}) \in \text{Mat}(n, k)$, где $n \geq 2$, со следующими свойствами: $q_{ii} = 1$, $q_{ij} = q_{ji}^{-1}$. Кроме того, будем предполагать выполнение свойства:

- (*) мультипараметры q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, независимы в мультипликативной группе k^* .

Кольцом квантовых многочленов над полем k будем называть ассоциативную алгебру

$$\Lambda = k_Q[X_1, \dots, X_n]$$

над k , порожденную n элементами $X_1, \dots, X_n$, с определяющими соотношениями:

$$X_i X_j = q_{ij} X_j X_i, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

В [3] предложена следующая конструкция тела квантовых лорановских рядов.

Обозначим через $\mathcal{Z}$ множество $\mathbb{Z}^n$ с дополнительным элементом ∞ . Продолжим покоординатное сложение из $\mathbb{Z}^n$ в $\mathcal{Z}$ посредством равенства $a + \infty = \infty$ для всех $a \in \mathcal{Z}$. Аналогично продолжим лексикографический порядок из $\mathbb{Z}^n$ в $\mathcal{Z}$ посредством неравенства $a < \infty$ для всех $a \in \mathbb{Z}^n$.

Для отображения $f: \mathcal{Z} \rightarrow k$ положим $\text{supp } f = \{a \in \mathbb{Z}^n : f(a) \neq 0\}$.

Множество $\mathcal{F}$ всех отображений $f: \mathcal{Z} \rightarrow k$ таких, что $\text{supp } f \cup \{\infty\}$ артиново подмножество $\mathcal{Z}$ и $f(\infty) = 0$, является телом относительно операций:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a),$$

$$(fg)(a) = \sum_{b+c=a} f(b)g(c) \left[\prod_{i < j} q_{ij}^{b_j c_i} \right],$$

где $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ и $c = (c_1, \dots, c_n)$ — элементы $\mathbb{Z}^n$ (см. [3]). Тело $\mathcal{F} = k_Q((X_1, \dots, X_n))$ будем называть *телом квантовых лорановских рядов* над полем k . Как отмечено в [3], тело частных $k_Q(X_1, \dots, X_n)$ кольца Λ вложено в $\mathcal{F}$.

Тело обычных лорановских рядов от одной переменной h над полем k обозначается через $k((h))$.

Определим нормы в кольце $\mathcal{F}$ и в кольце Λ .

Если $f \in \mathcal{F}$ — ненулевой элемент, а $(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$ — наименьший элемент в $\text{supp } f$, то $\|f\|_{\mathcal{F}} = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$. Если $f = 0$, то $\|f\|_{\mathcal{F}} = \infty$.

Очевидны свойства этого нормирования:

$$\|fg\|_{\mathcal{F}} = \|f\|_{\mathcal{F}} + \|g\|_{\mathcal{F}}, \quad \|f + g\|_{\mathcal{F}} \geq \min(\|f\|_{\mathcal{F}}, \|g\|_{\mathcal{F}})$$

для всех $f, g \in \mathcal{F}$.

Если $f \in \Lambda$ — ненулевой многочлен со старшим относительно лексикографического порядка одночленом

$$\alpha X_1^{l_1} \dots X_n^{l_n}, \quad \alpha \in k^*, \quad l_1, \dots, l_n \geq 0,$$

то $\|f\|_{\Lambda} = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$. Если $f = 0$, то $\|f\|_{\Lambda} = \infty$.

Свойства этого нормирования таковы:

$$\|fg\|_{\Lambda} = \|f\|_{\Lambda} + \|g\|_{\Lambda}, \quad \|f + g\|_{\Lambda} \leq \max(\|f\|_{\Lambda}, \|g\|_{\Lambda})$$

для всех $f, g \in \Lambda$.

Кроме того, будет использоваться следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть

$$h = \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}, \quad g = \nu X_1^{s_1} \dots X_n^{s_n},$$

где $\lambda, \nu \in k^*$. Предположим, что

$$\|h\| = (m_1, \dots, m_n) > 0, \quad \|g\| = (s_1, \dots, s_n) > 0.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $hg = gh$;
2. существуют такие натуральные числа r, t , что $r\|h\| = t\|g\|$.

Под нормой в предложении 1.1 может пониматься как норма $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$, так и норма $\|\cdot\|_{\Lambda}$, поскольку для мономов h и g эти нормы совпадают. Доказательство следует из свойства $(\star)$ (см. [3]).

§ 2. Случай тела квантовых лорановских рядов

Рассмотрим кольцо квантовых лорановских рядов

$$\mathcal{F} = k_Q((X_1, \dots, X_n)).$$

Зафиксируем произвольный отличный от константы элемент f кольца $\mathcal{F}$. Пусть $\|f\|_{\mathcal{F}} = l(t_1, \dots, t_n)$, где $l \in \mathbb{Z}$ и наибольший общий делитель чисел $t_1, \dots, t_n$ равен единице. В силу предложения 1.1 всякий коммутирующий с f элемент имеет норму, пропорциональную $(t_1, \dots, t_n)$.

Верно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Пусть существует коммутирующий с f элемент h , $\|h\|_{\mathcal{F}} = d(t_1, t_2, \dots, t_n)$, такой, что любой элемент g , коммутирующий с f , имеет норму $\|g\|_{\mathcal{F}} = md(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Тогда произвольный элемент, коммутирующий с f , лежит в $k((h))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g — произвольный элемент, коммутирующий с f , тогда $\|g\|_{\mathcal{F}} = md(t_1, t_2, \dots, t_n)$, т.е. $g = a_0 h^m + r_0$. Здесь $\|r_0\|_{\mathcal{F}} > \|g\|_{\mathcal{F}}$. Не трудно заметить, что f и r_0 коммутируют: $[f, r_0] = [f, r_0] + a_0[f, h^m] = [f, g] = 0$, поэтому $\|r_0\|_{\mathcal{F}} = m_1 d(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где $m_1 > m$.

Рассуждая далее аналогичным образом, получаем:

$$\begin{aligned} r_0 &= a_1 h^{m_1} + r_1, & \|r_1\|_{\mathcal{F}} &> \|r_0\|_{\mathcal{F}}, \\ &\dots, \\ r_t &= a_{t+1} h^{m_{t+1}} + r_{t+1}, & \|r_{t+1}\|_{\mathcal{F}} &> \|r_t\|_{\mathcal{F}}, \\ &\dots \end{aligned}$$

То есть $g = \sum_{i=0}^{\infty} a_i h^{m_i}$ (здесь $m_0 = m$).

Придерживаясь прежних предположений, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.2. *Централизатор элемента f коммутативен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M}$ — множество целых a , для которых существует g , коммутирующий с f , $\|g\|_{\mathcal{F}} = a(t_1, \dots, t_n)$.

Если g_1 и g_2 коммутируют с f , то, очевидно, $g_1 g_2$ и $g_1^{-1} g_2$ также коммутируют с f , поэтому множество $\mathcal{M}$ является подгруппой в $\mathbb{Z}$, а значит, изоморфно $d\mathbb{Z}$ для некоторого целого d . То есть существует элемент h кольца $\mathcal{F}$, коммутирующий с f , отвечающий условию утверждения 2.1. Поэтому произвольный элемент, коммутирующий с f , лежит в $k((h))$, а значит, в силу коммутативности $k((h))$ централизатор элемента f коммутативен.

Частный случай этой теоремы для $n = 2$ был доказан в [1]. Случай произвольного n и поля нулевой характеристики был рассмотрен в [3].

В теореме 2.2 доказано вложение $C_f \subseteq k((h))$. Обратное вложение $k((h)) \subseteq C_f$ очевидно, т.е. централизатор произвольного элемента тела $\mathcal{F}$ изоморфен $k((h))$ — телу лорановских рядов над полем k . Отсюда следует основное утверждение § 2:

ТЕОРЕМА 2.3. *Произвольная коммутативная подалгебра тела $\mathcal{F}$ изоморфна некоторой подалгебре тела $k((h))$.*

Покажем еще одно применение теоремы 2.2.

Можно рассмотреть алгебру Ли $\mathcal{F}^{(-)}$, определив на теле $\mathcal{F}$ операцию $a \circ b = [a, b]$. Верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть L – конечномерная подалгебра Ли алгебры Ли $\mathcal{F}^{(-)}$. Тогда L абелева.*

Докажем сначала вспомогательные утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Пусть для элементов u, v тела $\mathcal{F}$ верно равенство $uv - vu = \lambda v$, где $\lambda \in k$; тогда $\lambda = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай поля простой характеристики. Пусть $\text{char } k = p$. Верно соотношение:

$$[u, v^m] = m\lambda v^m.$$

Докажем его по индукции. При $m = 1$ данное соотношение превращается в исходное равенство. Пусть оно верно для m . Докажем, что оно верно для $m + 1$:

$$\begin{aligned} [u, v^{m+1}] &= uv^{m+1} - v^{m+1}u = (v^m u + m\lambda v^m)v - v^{m+1}u \\ &= v^m(vu + \lambda v) + m\lambda v^{m+1} - v^{m+1}u = (m+1)\lambda v^{m+1}. \end{aligned}$$

Так как $p = 0$ как элемент поля k , то верно равенство $[u, v^p] = 0$, поэтому u лежит в централизаторе элемента v^p . В силу теоремы 2.2 централизатор элемента v^p коммутативен, т.е. $[u, v] = 0$.

Пусть теперь характеристика поля k равна нулю. В статье [3], в частности, доказано, что для всякого элемента $u \in \mathcal{F}$ с нормой $\|u\|_{\mathcal{F}} = k(t_1, \dots, t_n)$, где наибольший общий делитель чисел $t_1, \dots, t_n$ равен единице, существует такой элемент h , что $[u, h] = 0$ и $\|h\|_{\mathcal{F}} = (t_1, \dots, t_n)$.

Без ограничения общности можно считать, что $\|u\|_{\mathcal{F}} = k(t_1, \dots, t_n) \neq 0$. Если $\|u, v\|_{\mathcal{F}} = \|uv\|_{\mathcal{F}} = \|u\|_{\mathcal{F}} + \|v\|_{\mathcal{F}} = \|v\|_{\mathcal{F}}$, то $\|u\|_{\mathcal{F}} = 0$, что неверно. Поэтому $\|v\|_{\mathcal{F}} = m(t_1, \dots, t_n)$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$, т.е. можно представить v в виде $v = \alpha_0 h^m + v_1$, где $\|v_1\|_{\mathcal{F}} > \|v\|_{\mathcal{F}}$. Для v_1 верно равенство $[u, v_1] = \lambda v$. Пусть младшие мономы u и v_1 не коммутируют, тогда $\|[u, v_1]\|_{\mathcal{F}} = \|uv_1\|_{\mathcal{F}} = \|u\|_{\mathcal{F}} + \|v_1\|_{\mathcal{F}} = \|v\|_{\mathcal{F}}$ и, значит, $\|v_1\|_{\mathcal{F}} = (m-k)(t_1, \dots, t_n)$ – противоречие, т.е. младшие мономы u и v_1 коммутируют и v_1 можно представить в виде $v_1 = \alpha_1 h^{m_1} + v_2$, где $\|v_2\|_{\mathcal{F}} > \|v_1\|_{\mathcal{F}}$. Рассуждая далее аналогичным образом, получаем:

$$\begin{aligned} v_2 &= \alpha_2 h^{m_2} + v_3, & \|v_3\|_{\mathcal{F}} &> \|v_2\|_{\mathcal{F}}, \\ &\dots, \\ v_i &= \alpha_i h^{m_i} + v_{i+1}, & \|v_{i+1}\|_{\mathcal{F}} &> \|v_i\|_{\mathcal{F}}, \\ &\dots, \end{aligned}$$

причем $[u, v_i] = \lambda v$ для любого $i \in \mathbb{N}$. То есть $v = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i h^{m_i}$ (здесь $m_0 = m$). Вспоминая, что $[u, h] = 0$, получаем $[u, v] = 0$.

Напомним, что оператор внутреннего дифференцирования $\text{ad } u$ элементу x сопоставляет элемент $ux - xu$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *В условиях теоремы 2.4 для всякого элемента u алгебры L оператор $\text{ad } u$ нильпотентен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем элемент u . В силу теоремы Гамильтона–Кэли существует такой многочлен $f(t) \in k[t]$, что $f(\text{ad } u)|_L = 0$. Можно считать, что f – минимальный аннулирующий для $\text{ad } u$ на L многочлен.

Без ограничения общности можно предположить, что поле k алгебраически замкнуто, тогда $f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_m)$. Для произвольного элемента v обозначим

$$w_i = (\text{ad } u - \lambda_1) \cdots (\text{ad } u - \lambda_{i-1})(\text{ad } u - \lambda_{i+1}) \cdots (\text{ad } u - \lambda_m)v,$$

тогда $(\text{ad } u - \lambda_i)w_i = 0$, т.е. $uw_i - w_iu = (\text{ad } u)w_i = \lambda_i w_i$. В силу предложения 2.5 $\lambda_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, m$, поэтому $(\text{ad } u)^m|_L = 0$.

Перейдем к доказательству самой теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Так как в силу предложения 2.6 все операторы $\text{ad } u$ нильпотентны, то по теореме Энгеля существует такой ненулевой элемент $v \in L$, что $(\text{ad } u)v = uv - vu = 0$ для любого $u \in L$. Это означает, что L целиком лежит в централизаторе v , который по теореме 2.2 коммутативен, поэтому $[a, b] = 0$ для произвольных элементов a и b алгебры L , т.е. L абелева.

§ 3. Случай кольца квантовых многочленов

Пусть k – поле. Рассмотрим кольцо квантовых многочленов

$$\Lambda = k_Q[X_1, \dots, X_n].$$

Зафиксируем произвольный отличный от константы элемент f кольца Λ . Пусть $\|f\|_\Lambda = l(t_1, \dots, t_n)$, где наибольший общий делитель чисел $t_1, \dots, t_n$ равен единице. В силу предложения 1.1 всякий коммутирующий с f элемент имеет норму, пропорциональную $(t_1, \dots, t_n)$.

Верно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Существуют элементы $h_1, \dots, h_i, \dots$ кольца Λ такие, что для всех $i \in \mathbb{N}$:*

- а) $\|h_i\|_\Lambda = i(t_1, \dots, t_n)$;
- б) $[f, h_i] = r_i$, где r_i – элементы кольца Λ , для которых выполнено одно из условий:
 - (i) $\|r_i\|_\Lambda = d(t_1, \dots, t_n)$ для некоторого неотрицательного целого d ;
 - (ii) норма $\|r_i\|_\Lambda = (s_1, \dots, s_n)$ такова, что $s_j < lt_j$ для некоторого $j = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем строить элементы h_i следующим образом. Для данного i положим $h_i^{(0)} = X_1^{it_1} \cdots X_n^{it_n}$. Пусть $\|[f, h_i^{(0)}]\|_\Lambda = (s_1, \dots, s_n)$. Если коммутатор $[f, h_i^{(0)}]$ удовлетворяет (i) или (ii), то положим $h_i = h_i^{(0)}$. Если же он не удовлетворяет ни (i), ни (ii), то для любого $j = 1, \dots, n$ верно $s_j \geq lt_j$, и поэтому $h_i^{(1)} = h_i^{(0)} + \alpha_1 X_1^{s_1 - lt_1} \cdots X_n^{s_n - lt_n}$ является элементом кольца Λ .

Так как $[f, h_i^{(0)}]$ не удовлетворяет (i), то $\alpha_1 X_1^{s_1 - lt_1} \dots X_n^{s_n - lt_n}$ не коммутирует со старшим одночленом f , т.е. можно найти такое α_1 , что $\|[f, h_i^{(1)}]\|_\Lambda < \|[f, h_i^{(0)}]\|_\Lambda$.

Далее повторяем наше рассуждение для коммутатора $[f, h_i^{(1)}]$.

Цепочка $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}, \dots$ когда-нибудь оборвется, так как при каждом шаге норма коммутатора $[f, h_i^{(j)}]$ уменьшается, а число возможных значений для нее конечно.

Итак, искомая система элементов построена.

Положим $h_0 = 1$. Пусть g — элемент кольца Λ , коммутирующий с f . Тогда $\|g\|_\Lambda = m(t_1, \dots, t_n)$ для некоторого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Элемент g является линейной комбинацией элементов $h_0, h_1, \dots, h_m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно представить многочлен g в виде $g = \beta_m h_m + g_1$, где $\|g_1\|_\Lambda < \|g\|_\Lambda$.

Распишем коммутатор f и g :

$$0 = [f, g] = [f, \beta_m h_m] + [f, g_1] = \beta_m r_m + [f, g_1].$$

Предположим, что старший моном многочлена g_1 не коммутирует со старшим мономом f . Тогда $(p_1, \dots, p_n) = \|[f, g_1]\|_\Lambda = \|f\|_\Lambda + \|g_1\|_\Lambda$, т.е. $p_j \geq lt_j$ для всех $j = 1, \dots, n$, а значит, многочлен $[f, g_1]$ не удовлетворяет условию (ii). Далее, очевидно, не существует такого $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $(p_1, \dots, p_n) = d(t_1, \dots, t_n)$. Следовательно, $[f, g_1]$ не удовлетворяет и условию (i).

С другой стороны, $[f, g_1] = -\beta_m r_m$, поэтому в силу утверждения 3.1 для нормы коммутатора $[f, g_1]$ должно выполняться либо (i), либо (ii). Полученное противоречие означает, что $\|g_1\|_\Lambda = m_1(t_1, \dots, t_n)$, т.е. g_1 можно представить в виде $g_1 = \beta_{m_1} h_{m_1} + g_2$, где $\|g_2\|_\Lambda < \|g_1\|_\Lambda$.

Так как произвольная линейная комбинация r_i , так же как сами r_i , удовлетворяет либо свойству (i), либо свойству (ii), то аналогичные рассуждения можно провести для g_2 . Действуя подобным образом и дальше, получаем:

$$\begin{aligned} g_2 &= \beta_{m_2} h_{m_2} + g_3, & \|g_3\|_\Lambda &< \|g_2\|_\Lambda, & m_2 < m_1, \\ &\dots, \\ g_j &= \beta_{m_j} h_{m_j} + g_{j+1}, & \|g_{j+1}\|_\Lambda &< \|g_j\|_\Lambda, & m_j < m_{j-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $m > m_1 > \dots > m_j$, т.е. $0 < m_j < m - j + 1$, для некоторого j получим $g_j = \text{const.}$

Итак, $g = \sum_{i=0}^m \beta_i h_i$.

Теперь легко доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть элементы f и g кольца Λ коммутируют. Тогда существует ненулевой многочлен $F(x, y) \in k[x, y]$ такой, что $F(f, g) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем придерживаться прежних обозначений.

Так как f и g коммутируют, то любой многочлен вида $f^i g^j$ также коммутирует с f . Поэтому в силу утверждений 3.1 и 3.2 $f^i g^j$ является линейной комбинацией многочленов $h_0, h_1, \dots, h_{il+jm}$.

Оценим количество многочленов $f^i g^j$ таких, что $il + jm \leq M$ для некоторого натурального M .

Пусть $l \leq m$. Если $im + jm \leq M$, то $il + jm \leq im + jm \leq M$, поэтому количество пар (i, j) , для которых $il + jm \leq M$, не меньше, чем количество пар (i, j) , для которых $im + jm \leq M$.

Последнее, очевидно, равно

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{M/m} \frac{M}{m} - i + 1 &= \left(\frac{M}{m} + 1 \right)^2 - \sum_{i=0}^{M/m} i \\ &= \left(\frac{M}{m} + 1 \right)^2 - \frac{(\frac{M}{m} + 1) \frac{M}{m}}{2} \\ &= \frac{(\frac{M}{m} + 2)(\frac{M}{m} + 1)}{2} = \frac{(M + 2m)(M + m)}{2m^2}. \end{aligned}$$

Положим $M = 2m^2$, тогда количество пар (i, j) таких, что $il + jm \leq M$, не меньше чем

$$\frac{(M + 2m)(M + m)}{2m^2} = (m + 1)(2m + 1) = 2m^2 + 3m + 1 > 2m^2 + 2 = M + 2.$$

Рассмотрим систему $\{f^i g^j\}$, где $il + jm \leq M$, $M = 2m^2$. Каждый из многочленов $f^i g^j$ является линейной комбинацией $M + 1$ элемента $h_0, \dots, h_M$, а количество таких многочленов не меньше $M + 2$, т.е. система $\{f^i g^j\}$ линейно зависима и

$$\sum_{\substack{i,j=0 \\ il+jm \leq M}} \gamma_{ij} f^i g^j = 0$$

для некоторых не равных одновременно нулю $\gamma_{ij} \in k$.

Очевидно, многочлен

$$F(x, y) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ il+jm \leq M}} \gamma_{ij} x^i y^j$$

удовлетворяет условию теоремы.

Теперь сформулируем основное утверждение §3.

ТЕОРЕМА 3.4. *Всякая коммутативная подалгебра алгебры Λ изоморфна некоторой подалгебре тела $k((h))$ и имеет степень трансцендентности над полем k не больше единицы.*

Доказательство вытекает из теоремы 2.3 и теоремы 3.3.

§ 4. Пример коммутативной подалгебры

Пусть f, g – коммутирующие элементы Λ . Как было доказано в предыдущем параграфе, f и g алгебраически зависимы. Верно ли, что алгебра $k[f, g]$ изоморфна $k[x]$?

Оказывается, в общем случае это неверно.

Рассмотрим кольцо $k_Q[X, Y]$. Пусть закон коммутирования переменных такой: $YX = qXY$. Обозначим $u = q^2$. Рассмотрим многочлены:

$$\begin{aligned} f &= X^2Y^2(Y^4 + \alpha_1Y^2 + \alpha_2), \\ g &= X^3Y^3(Y^6 + \beta_1Y^4 + \beta_2Y^2 + \beta_3), \end{aligned}$$

где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (u+1)L, \quad \alpha_2 = \frac{u^3L^2}{(u^2-u+1)^2}, \\ \beta_1 &= \frac{(u^2+u+1)L}{u}, \quad \beta_2 = \frac{(u^2+u+1)L^2}{u^2-u+1}, \quad \beta_3 = \frac{u^3L^3}{(u^2-u+1)^3}, \end{aligned}$$

здесь L – произвольный ненулевой элемент k .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Многочлены f и g коммутируют.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим коммутатор:

$$\begin{aligned} [f, g] &= fg - gf = X^2Y^2(Y^4 + \alpha_1Y^2 + \alpha_2)X^3Y^3(Y^6 + \beta_1Y^4 + \beta_2Y^2 + \beta_3) \\ &\quad - X^3Y^3(Y^6 + \beta_1Y^4 + \beta_2Y^2 + \beta_3)X^2Y^2(Y^4 + \alpha_1Y^2 + \alpha_2) \\ &= u^3X^5Y^5p(Y). \end{aligned}$$

Выпишем многочлен $p(Y)$:

$$\begin{aligned} p(Y) &= (u^6Y^4 + \alpha_1u^3Y^2 + \alpha_2)(Y^6 + \beta_1Y^4 + \beta_2Y^2 + \beta_3) \\ &\quad - (u^6Y^6 + \beta_1u^4Y^4 + \beta_2u^2Y^2 + \beta_3)(Y^4 + \alpha_1Y^2 + \alpha_2) \\ &= (u^6Y^{10} + (\alpha_1u^3 + \beta_1u^6)Y^8 + (\beta_2u^6 + \alpha_1\beta_1u^3 + \alpha_2)Y^6 \\ &\quad + (\beta_3u^6 + \alpha_1\beta_2u^3 + \alpha_2\beta_1)Y^4 + (\alpha_1\beta_3u^3 + \alpha_2\beta_2)Y^2 + \alpha_2\beta_3) \\ &\quad - (u^6Y^{10} + (\alpha_1u^6 + \beta_1u^4)Y^8 + (\beta_2u^2 + \alpha_1\beta_1u^4 + \alpha_2u^6)Y^6 \\ &\quad + (\beta_3 + \alpha_1\beta_2u^2 + \alpha_2\beta_1u^4)Y^4 + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2u^2)Y^2 + \alpha_2\beta_3) \\ &= (\alpha_1(u^3 - u^6) + \beta_1(u^6 - u^4))Y^8 \\ &\quad + (\beta_2(u^6 - u^2) + \alpha_1\beta_1(u^3 - u^4) + \alpha_2(1 - u^6))Y^6 \\ &\quad + (\beta_3(u^6 - 1) + \alpha_1\beta_2(u^3 - u^2) + \alpha_2\beta_1(1 - u^4))Y^4 \\ &\quad + (\alpha_1\beta_3(u^3 - 1) + \alpha_2\beta_2(1 - u^2))Y^2. \end{aligned}$$

Найдем коэффициенты при степенях Y .

При Y^8 :

$$\begin{aligned} & \alpha_1(u^3 - u^6) + \beta_1(u^6 - u^4) \\ &= (u+1)L(u^3 - u^6) + \frac{(u^2 + u + 1)(u^6 - u^4)L}{u} \\ &= -u^3(u+1)(u^3 - 1)L + u^3(u+1)(u-1)(u^2 + u + 1)L = 0. \end{aligned}$$

При Y^6 :

$$\begin{aligned} & \beta_2(u^6 - u^2) + \alpha_1\beta_1(u^3 - u^4) + \alpha_2(1 - u^6) \\ &= \frac{(u^2 + u + 1)(u^6 - u^2)L^2}{u^2 - u + 1} + \frac{(u+1)(u^3 - u^4)(u^2 + u + 1)L^2}{u} + \frac{u^3(1 - u^6)L^2}{(u^2 - u + 1)^2} \\ &= L^2 \left(\frac{u^2(u^2 + u + 1)(u^4 - 1 - u(u^2 - 1))}{u^2 - u + 1} - u^2(u+1)(u-1)(u^2 + u + 1) \right) \\ &= L^2 \left(\frac{u^2(u^2 + u + 1)(u^2 - u + 1)(u^2 - 1)}{u^2 - u + 1} - u^2(u^2 - 1)(u^2 + u + 1) \right) = 0. \end{aligned}$$

При Y^4 :

$$\begin{aligned} & \beta_3(u^6 - 1) + \alpha_1\beta_2(u^3 - u^2) + \alpha_2\beta_1(1 - u^4) \\ &= \frac{u^3(u^6 - 1)L^3}{(u^2 - u + 1)^3} + \frac{(u^2 + u + 1)(u+1)(u^3 - u^2)L^3}{u^2 - u + 1} + \frac{u^3(u^2 + u + 1)(1 - u^4)L^3}{u(u^2 - u + 1)^2} \\ &= \frac{u^2(u^2 + u + 1)(u^2 - 1)L^3}{u^2 - u + 1} \cdot \left(\frac{u}{u^2 - u + 1} + 1 - \frac{u^2 + 1}{u^2 - u + 1} \right) = 0. \end{aligned}$$

При Y^2 :

$$\alpha_1\beta_3(u^3 - 1) + \alpha_2\beta_2(1 - u^2) = \frac{u^3(u+1)(u^3 - 1)L^4}{(u^2 - u + 1)^3} + \frac{u^3(1 - u^2)(u^2 + u + 1)L^4}{(u^2 - u + 1)^3} = 0.$$

Итак, данные многочлены коммутируют.

Если бы алгебра $k[f, g]$ была изоморфна $k[x]$, то существовал бы такой элемент h кольца Λ , что f и g являлись бы многочленами от h .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. *Не существует многочлена h такого, что f и g являются многочленами от h .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть такой h существует, и пусть $X^{l_1}Y^{l_2}$ — его старший моном. Если $f = P_n(h)$ и $g = P_m(h)$, то $(2, 6) = n(l_1, l_2)$ и $(3, 9) = m(l_1, l_2)$. Поэтому $n = 2$ и $m = 3$, а старший моном h равен XY^3 .

Покажем, что можно считать f пропорциональным h^2 .

Второй по старшинству моном h равен XY , так как произведение его со старшим мономом равно X^2Y^4 (бóльшим оно быть не может, потому что ни с чем не сокращается).

Итак, $h = \gamma_3XY^3 + \gamma_1XY + \dots$. Если кроме $(\gamma_1XY)^2$ никакие мономы из h не дают в произведении X^2Y^2 , то можно рассмотреть $h' = \gamma_3XY^3 + \gamma_1XY$. Квадрат этого многочлена будет пропорционален f .

Если же какие-то мономы кроме $(\gamma_1 XY)^2$ дают в произведении $X^2 Y^2$, то, очевидно, это старший моном и моном $X^i Y^j$, меньший XY . Уравнение

$$\|X^i Y^j \cdot XY^3\| = \|X^2 Y^2\|$$

дает $i = 1$ и $j = -1$, что невозможно.

Итак, можно считать, что $f = Ch^2$, $C = \text{const} \in k$, причем мы мимоходом выяснили, что h имеет вид: $h = \gamma_3 XY^3 + \gamma_1 XY = \gamma XY(Y^2 + \mu)$.

Посчитаем квадрат h :

$$\begin{aligned} h^2 &= \gamma XY(Y^2 + \mu)\gamma XY(Y^2 + \mu) = \gamma^2 q X^2 Y^2 (uY^2 + \mu)(Y^2 + \mu) \\ &= \gamma^2 q X^2 Y^2 (uY^4 + \mu(u+1)Y^2 + \mu^2) \\ &= \gamma^2 q^3 X^2 Y^2 \left(Y^4 + \frac{\mu(u+1)}{u} Y^2 + \frac{\mu^2}{u} \right). \end{aligned}$$

Теперь приравняем к f :

$$\begin{aligned} f &= X^2 Y^2 \left(Y^4 + (u+1)LY^2 + \frac{u^3 L^2}{(u^2 - u + 1)^2} \right) \\ &= C\gamma^2 q^3 X^2 Y^2 \left(Y^4 + \frac{\mu(u+1)}{u} Y^2 + \frac{\mu^2}{u} \right). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$L = \frac{\mu}{u}, \quad \frac{u^3 L^2}{(u^2 - u + 1)^2} = \frac{\mu^2}{u}.$$

Из последнего уравнения получаем: $u^2 = (u^2 - u + 1)^2$, тогда $u^2 = -1$ или $u = 1$, чего не может быть, так как в силу свойства $(\star)$ q не является корнем из единицы в k^* .

Итак, утверждение доказано.

Таким образом, для указанных многочленов f и g алгебра $k[f, g]$ не изоморфна алгебре $k[x]$, т.е. она не является чисто трансцендентным расширением k .

Список литературы

1. *Artamonov V. A., Cohn P. M.* The skew field of rational functions on the quantum plane // J. Math. Sci. 1999. V. 93. №6. P. 824–829.
2. *Cohn P. M.* Centralisateurs dans les corps libres // Séries formelles en variables non commutatives et applications. Actes 5-ieme Ecole de Printemps d'Informatique Théorique. Vieux-Boucau les Bains, 1977, 1978. P. 45–54.
3. *Артамонов В. А.* Тело квантовых рациональных функций // УМН. 1999. Т. 54. №4. С. 151–152.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: sophia_zelenova@yahoo.com

Поступила в редакцию
17.05.2000