Общероссийский математический портал

Ю. А. Коняев, О некоторых методах исследования устойчивости, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 3, 65–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:37:45

УДК 925.51

Ю. А. Коняев

О некоторых методах исследования устойчивости

В статье предложены различные алгоритмы исследования устойчивости (с использованием аппарата метода расщепления) некоторых классов неавтономных систем линейных и квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), что дополняет известные ранее результаты.

Каждый из предложенных алгоритмов можно считать (в некотором смысле) развитием классического метода нормальных форм, весьма эффективного при исследовании нелинейных систем, для анализа линейных и квазилинейных неавтономных систем ОДУ.

Библиография: 15 названий.

В настоящей статье изложены алгоритмы исследования устойчивости некоторых классов неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые дополняют известные ранее результаты [1]–[9] и являются в определенном смысле развитием классического метода нормальных форм [3] (при использовании аппарата метода расщепления [10]) для анализа линейных и квазилинейных неавтономных систем.

Установлена возможность преобразования линейных и квазилинейных регулярно возмущенных систем с T -периодической матрицей к системе с почти постоянной и диагональной матрицей [10], [11], т.е. доказан асимптотический аналог теоремы Флоке–Ляпунова [1], [2] о приводимости.

Для сингулярно возмущенных линейных и квазилинейных систем с T -периодической матрицей построена квазирегулярная асимптотика с описанием структуры погранслоя в замкнутой аналитической форме [12].

Изучаются линейные и квазилинейные системы с полиномиально-периодической матрицей, и показана возможность их приведения к аналогичным системам с почти диагональной матрицей [13], [14].

§ 1. Регулярно возмущенные системы с периодическими коэффициентами

Известно, что ряд задач механики и физики приводит к изучению квазилинейных (или линейных) систем с T -периодической матрицей:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t, \varepsilon)x + f(x, t), \quad x(0, \varepsilon) = x^0; \\ A(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)\varepsilon^k, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon^0 < 1, \quad f(0, t) \equiv 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ (грант № Е00-10-158).

где $A_k(t)$ – непрерывные T -периодические матрицы, а вектор-функция $f(x, t)$ непрерывна при $|x| < R$ и $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1.1. Система (1.1) в случае, когда матрица A_0 постоянна и ее спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ удовлетворяет условиям

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0k} - \lambda_{0j} \neq i2\pi q T^{-1} \quad (j \neq k; \ j, k = \overline{1, n}; \ q = 0, \pm 1, \dots), \quad (1.2)$$

может быть с помощью невырожденной при достаточно малых $|\varepsilon|$ T -периодической замены $x = S(t, \varepsilon)z$ преобразована к системе с почти постоянной диагональной матрицей:

$$\dot{z} = Q(t, \varepsilon)z + b(z, t, \varepsilon), \quad z(0, \varepsilon) = z^0; \quad (1.3)$$

$$Q(t, \varepsilon) = \Lambda(\varepsilon) + \varepsilon^{N+1}G(t, \varepsilon), \quad \Lambda(\varepsilon) = \sum_{k=0}^N \Lambda_k \varepsilon^k,$$

где матрицы Λ_k ($k = \overline{0, N}$) постоянны и диагональны, а матрица $G(t, \varepsilon)$ равномерно ограничена по норме при $t \geq 0$ (т.е. $\|G(t, \varepsilon)\| = O(1)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий (1.2) всегда существует невырожденная матрица S_0 такая, что замена

$$x = S_0 y \quad (S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 = \text{diag}\{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0n}\}) \quad (1.4)$$

преобразует систему (1.1) к виду:

$$\dot{y} = B(t, \varepsilon)y + h(y, t, \varepsilon), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad (1.5)$$

где

$$B(t, \varepsilon) = S_0^{-1} A(t, \varepsilon) S_0 = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \varepsilon^k, \quad B_0 = \Lambda_0.$$

Следующая невырожденная при достаточно малых $|\varepsilon|$ T -периодическая замена

$$y = \left(E + \sum_{k=1}^N H_k(t) \varepsilon^k \right) z \equiv H(t, \varepsilon) z \quad (1.6)$$

позволяет получить систему (1.3). При этом матрицы $H(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$ и $B(t, \varepsilon)$ связаны соотношением:

$$\dot{H} = B(t, \varepsilon)H - HQ(t, \varepsilon) \quad (1.7)$$

(это проверяется непосредственно).

Приравнявая в (1.7) коэффициенты при одинаковых степенях ε , мы получаем простые дифференциальные матричные уравнения для последовательного однозначного определения каждой из постоянных диагональных матриц Λ_k и T -периодических матриц $H_k(t)$ ($k = \overline{1, N}$):

$$\dot{H}_k = P_k(t) - \Lambda_k - \Lambda_0 H_k(t) - H_k(t) \Lambda_0; \quad (1.8)$$

$$P_1(t) = B_1(t), \quad P_k(t) = B_k(t) + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j(t) H_{k-j}(t) - H_{k-j}(t) \Lambda_j) \quad (k = \overline{2, N}).$$

Для произвольной квадратной матрицы A введем следующие обозначения:

$$A = \{a_{jk}\}_1^n; \quad \bar{A} = \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}; \quad \overline{\bar{A}} = A - \bar{A}.$$

Далее отметим, что каждое из уравнений (1.8) распадается на два матричных уравнения:

$$\dot{H}_k = \bar{P}_k(t) - \Lambda_k \quad (P_k(t) = \{p_{ijk}(t)\}), \quad (1.9)$$

$$\dot{\bar{H}}_k = \Lambda_0 \bar{H}_k(t) - \bar{H}_k(t) \Lambda_0 + \bar{P}_k(t) \quad (H_k(t) = \{h_{ijk}(t)\}), \quad (1.10)$$

при этом уравнение (1.9) имеет в классе C_T T -периодических функций единственное решение:

$$\bar{H}_k(t) = \int_0^t (\bar{P}_k(s) - \Lambda_k) ds \in C_T,$$

если положить

$$\Lambda_k = T^{-1} \int_0^T \bar{P}_k(s) ds \quad (k = \overline{1, N}).$$

Уравнение (1.10) распадается, в свою очередь, на скалярные дифференциальные уравнения вида:

$$\dot{h}_{ijk} = \sigma_{ij} h_{ijk} + p_{ijk}(t) \quad (i \neq j; i, j = \overline{1, n}; k = \overline{1, N}),$$

решение каждого из которых может быть представлено в виде

$$h_{ijk} = e^{\sigma_{ij}(t+T)} (1 - e^{\sigma_{ij}T})^{-1} \int_t^{t+T} e^{-\sigma_{ij}s} p_{ijk}(s) ds$$

и принадлежит классу C_T . Соотношение $\|G(t, \varepsilon)\| = O(1)$ проверяется непосредственно, что и завершает доказательство теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Теорему 1.1 можно рассматривать как асимптотический (и конструктивный в отличие от ранее известного [2]–[6]) аналог известной теоремы Флоке–Ляпунова о приводимости [1], [2], так как преобразования (1.4) и (1.6), приводящие исходную систему (1.1) к простейшему виду, имеют явные представления.

2) При наличии у матрицы A_0 кратных точек $\{\lambda_{0j}\}_1^p$ спектра, удовлетворяющих условиям:

$$\sigma_{jk} \neq i2\pi q T^{-1} \quad (j \neq k; j, k = \overline{1, p}; 1 \leq p \leq n; q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.11)$$

после замены вида (1.4) мы приходим к системе вида (1.5), где

$$B_0 = S_0^{-1} A_0 S_0 = J_0 = \text{diag}\{J_{01}, \dots, J_{0p}\}, \quad J_{0j} = \lambda_{0j} E + N_j,$$

N_j – некоторые нильпотентные матрицы ($j = \overline{1, p}$). С учетом структуры матрицы $B_0 = J_0$ можно построить замену (некоторый аналог “срезающего преобразования”; см., например, [10])

$$y = U(\varepsilon)v; \quad U(\varepsilon) = \text{diag}\{U_1(\varepsilon_1), \dots, U_p(\varepsilon_p)\}, \\ U_j(\varepsilon_j) = \text{diag}\{1, \varepsilon_j, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^{m_j-1}\}, \quad m_j = \dim J_{0j}, \quad \varepsilon_j^{m_j} = \varepsilon,$$

приводящую систему вида (1.5) к системе с почти диагональной матрицей:

$$\dot{v} = F(t, \eta)v + g(t, \eta) \quad \left(F(t, \eta) = \sum_{k=1}^{N_1} F_k(t)\eta^k \right); \quad (1.12) \\ v(0, \eta) = v^0 \quad (\eta = \text{НОД}_j(\varepsilon_j)).$$

Далее аналогично предыдущему (с учетом структуры матрицы J_0) для произвольной квадратной матрицы A введем обозначения:

$$A = \{A_{jk}\}_1^p, \quad \hat{A} = \text{diag}\{A_{11}, \dots, A_{pp}\}, \quad \hat{\hat{A}} = A - \hat{A}.$$

Невырожденная при достаточно малых $|\eta|$ T -периодическая замена

$$v = \left(E + \sum_{k=1}^{N_1} H_k(t)\eta^k \right) z$$

позволяет (как и выше) перейти от системы (1.12) к системе с почти постоянной блочно-диагональной матрицей вида:

$$\dot{z} = Q_1(t, \eta)z + b_1(z, t, \eta), \quad z(0, \eta) = z^0; \quad (1.13) \\ Q_1(t, \eta) = \Lambda_0 + \sum_{k=1}^{N_1} \hat{Q}_k(t)\eta^k + O(\eta^{N_1+1}), \quad b_1(0, t, \eta) \equiv 0.$$

Далее процесс расщепления системы (1.13) может быть продолжен с учетом результатов теоремы 1.1.

3) Ограничения вида (1.2) или (1.11) (на наличие резонансных соотношений) не являются существенными, и их можно убрать (при этом кратность некоторых точек спектра может измениться!), если на соответствующем шаге диагональную матрицу Λ_0 представить в виде:

$$\Lambda_0 = \overline{D}_0 + i\overline{C}_0,$$

где $\overline{C}_0 = \text{diag}\{2\pi m_1 T^{-1}, \dots, 2\pi m_p T^{-1}\}$, а спектр матрицы $\overline{D}_0$ уже удовлетворяет условиям вида (1.2), что позволяет после замены $y = \exp(i\overline{C}_0 t)z$ перейти к системе типа (1.3), для которой условия вида (1.2) уже имеют место.

4) Отметим также, что структура матрицы $Q(t, \varepsilon)$ позволяет сделать вывод об асимптотической устойчивости, устойчивости или неустойчивости (с учетом результатов, например, работы [15]) тривиального решения однородной системы вида (1.1).

ТЕОРЕМА 1.2. Если в условиях теоремы 1.1 спектр $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_1^n$ матрицы $\Lambda(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\varepsilon) \leq -\varepsilon^q \sigma_0 < 0 \quad (0 \leq q \leq N; \quad j = \overline{1, n}; \quad \varepsilon, \sigma_0 > 0)$$

и для достаточно гладкой функции $f(x, t)$ справедлива оценка

$$|f(x, t)| \leq C|x|^{1+\alpha} \quad (C, \alpha > 0; \quad t \geq 0),$$

то тривиальное решение задачи (1.1) асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из дифференциального неравенства для евклидовой нормы решения задачи (1.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d|z|^2}{dt} &= \operatorname{Re}(z^* \Lambda(\varepsilon) z) + O(\varepsilon^{N+1})|z|^2 + \operatorname{Re}(z^* b(z, t)) \\ &\leq -\varepsilon^q \sigma_1 |z|^2 + C_1 |z|^{2+\alpha} \leq -\varepsilon^q \sigma_2 |z|^2 \\ &\quad (C_1 > 0, \quad 0 < \sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_0). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1.2 является в некотором смысле обобщением теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению [1], [2] для неавтономных квазилинейных систем вида (1.1).

Рассмотрим несколько физических примеров.

ПРИМЕР 1. Уравнение Матье

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon_0 \cos t)x = 0, \quad (1.14)$$

где δ и ε_0 — некоторые параметры, является частным случаем уравнения Хилла $\ddot{x} + (\delta + \varepsilon_0 \varphi(t))x = 0$, описывающего при некоторых допущениях движение Луны [4].

Области неустойчивости тривиального решения уравнения (1.14) на плоскости параметров δ и ε_0 определяются обычно с помощью аппарата рядов Фурье и определителей Хилла бесконечного порядка и строятся на диаграмме Айнса–Стретта [4].

Покажем возможность нахождения этих областей с помощью более простого алгоритма, описанного выше. Обозначив $\delta = \alpha^2$, преобразуем уравнение (1.14) в систему:

$$\dot{y} = (A_0 + \varepsilon_0 A_1(t))y \equiv A(t, \varepsilon_0)y, \quad (1.15)$$

где $y = (x, \dot{x})^T$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cos t,$$

которая после замены вида (1.6) может быть приведена к виду:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\Lambda_0 + \varepsilon B_1(t))z \equiv B(t, \varepsilon)z \quad \left(\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2\alpha} \right); \\ \Lambda_0 &= i\alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = i \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cos t, \quad S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\alpha & i\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В силу теоремы 1.1 система (1.16) в нерезонансном случае ($\sigma_{jk} \neq i2\pi nT^{-1}$) приводится к системе, матрица которой A_0 имеет простой спектр ($\lambda_{01,2} = \pm i\alpha$), и может быть с любой точностью преобразована к системе вида (1.3) с почти постоянной диагональной матрицей. При наличии резонансных соотношений, т.е. при $\alpha = n/2$ ($\sigma_{jk} = \pm 2i\alpha$), исходное уравнение (1.14) после дополнительных преобразований приводится к другой системе.

При $n = 0$ после обозначения $\delta = \varepsilon_0^2 \beta$ ($\varepsilon_0 = \nu^2$) уравнение (1.14) может быть записано в виде системы

$$\dot{y} = (\nu B_1(t) + \nu^3 B_3)y;$$

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos t & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

которая с учетом замены $y = (E + \sum_{k=1}^3 H_k(t)\nu^k)z$ преобразуется к виду:

$$\dot{z} = (\nu C_1 + \nu^3 C_3 + o(\nu^3))z, \quad (1.17)$$

где

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -(\beta + 1/2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Область неустойчивости тривиального решения системы (1.17) (и эквивалентного ему уравнения (1.14)) после анализа характеристического уравнения

$$|\nu C_1 + \nu^3 C_3 - \lambda| = 0 \quad \left(\lambda^2 = -\nu^2(1 + 2\nu^2) \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \right)$$

определяется в этом случае неравенствами:

$$\beta + \frac{1}{2} < 0, \quad \delta < -\frac{\varepsilon_0^2}{2}. \quad (1.18)$$

В случае $n = 1$ после обозначения $\alpha = 1/2 + \varepsilon_0\beta$ и замены $z = \exp(\Lambda_0 t)v$ уравнение (1.16) приводится к виду:

$$\dot{v} = i\varepsilon P(t)v,$$

$$P(t) = \beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -\exp(-it) \\ \exp(-it) & 1 \end{pmatrix} \cos t,$$

и после преобразования $v = (E + \varepsilon H_1(t))w$ в итоге имеем:

$$\dot{w} = (\varepsilon C_1 + o(\varepsilon))w, \quad C_1 = i \begin{pmatrix} -\beta & -1/2 \\ 1/2 & \beta \end{pmatrix}.$$

Анализ характеристического уравнения $|C_1 - \lambda E| = 0$ ($\lambda^2 = 1/4 - \beta^2$) позволяет записать неравенства

$$\beta^2 < \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon_0 < \delta < \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon_0, \quad (1.19)$$

определяющие область неустойчивости при $n = 1$.

При $n = 2$, положив $\alpha = 1 + \varepsilon_0^2 \beta$, после аналогичных замен приходим к системе:

$$\dot{y} = (\varepsilon^2 C_2 + o(\varepsilon^2))y, \quad C_2 = i \begin{pmatrix} -\beta + 1/3 & 1/2 \\ -1/2 & \beta - 1/3 \end{pmatrix}.$$

Структура “усеченного характеристического уравнения” $|C_2 - \lambda E| = 0$ позволяет и в случае $n = 2$ определить границы области неустойчивости:

$$1 - \frac{1}{12}\varepsilon_0^2 < \delta < 1 + \frac{5}{12}\varepsilon_0^2. \quad (1.20)$$

Полученные области неустойчивости (1.18), (1.19) и (1.20) совпадают с описанными ранее [4].

ПРИМЕР 2. Система двух связанных осцилляторов [5]

$$\begin{cases} \ddot{x} + a^2 x = 2\varepsilon y \sin t, \\ \ddot{y} + b^2 y = 2\varepsilon x \cos t \end{cases} \quad (1.21)$$

$(a, b \in \mathbb{R}; a \neq b; ab \neq 0; |a \pm b| \neq 1)$

после обозначений $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = y, x_4 = \dot{y}, z_{1,2} = x_2 \pm iax_1, z_{3,4} = x_4 \pm ibx_3$ может быть приведена к системе четвертого порядка:

$$\dot{z} = (\Lambda_0 + \varepsilon A_1(t))z \quad (z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T),$$

где $\Lambda_0 = \text{diag}\{ia, -ia, ib, -ib\}$,

$$A_1(t) = i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & b^{-1}C \sin t \\ a^{-1}C \cos t & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

и (следуя новому алгоритму) после замены $z = (E + \sum_{k=1}^2 H_k(t)\varepsilon^k)v$ преобразуется к более простому виду:

$$\dot{v} = \left(\sum_{k=0}^2 \Lambda_k \varepsilon^k + o(\varepsilon^2) \right) v, \quad (1.22)$$

где $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = \text{diag}\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}$,

$$\nu_1 = \nu_2 = -\nu_3 = -\nu_4 = \frac{1}{2\pi ab} \left(\frac{1}{1 - (a+b)^2} - \frac{1}{1 - (a-b)^2} \right).$$

Структура спектра матриц Λ_k ($k = \overline{0, 2}$) позволяет сделать вывод о неустойчивости тривиального решения системы (1.22) и эквивалентной ей системы (1.21) при любых вещественных параметрах a и b в случае, когда $a \neq b, ab \neq 0, |a \pm b| \neq 1$.

ПРИМЕР 3. Новый метод также оказался эффективным при решении задачи о нахождении области устойчивости (в пространстве физических параметров) стационарных вращений идеально проводящего симметричного твердого тела в переменном магнитном поле [11], что имеет приложение в теории гироскопов. После некоторых упрощений (подробности см. в [11]) уравнение движения указанного тела с неподвижным центром масс может быть записано в линеаризованной форме:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A_0 + \varepsilon A_1(t))x, \\ A_0 &= \Lambda_0 = \begin{pmatrix} i\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} -p(t) & r(t) \\ p(t) & r(t) \end{pmatrix}, \\ p(t) &= (1 - \chi)\Omega \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} i\omega(\xi - 1) \sin 2\omega t, \\ r(t) &= p(t) - \Omega \sin^2 \omega t, \\ \chi &= \frac{I_1}{I_3}, \quad \xi = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha_1 H_0^2}{L},\end{aligned}\tag{1.23}$$

где Ω – частота нутационных колебаний тела, ω – частота магнитного поля, I_k – моменты инерции тела относительно его осей ($k = 1, 2, 3$), ξ – величина, определяемая поляризуемостью тела относительно его осей, ε – безразмерный малый параметр. После замен вида (1.6) в нерезонансном случае ($\Omega \neq 2\omega$) система (1.23) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (\Lambda_0 + \omega \Lambda_1 + o(\varepsilon))y, \\ \Lambda_0 &= A_0, \quad \Lambda_1 = \frac{\Omega}{2I_3} \begin{pmatrix} I_1 - I_3 & 0 \\ 0 & -I_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Анализ системы (1.24) позволяет сделать вывод об асимптотической устойчивости стационарных движений симметричного идеально проводящего твердого тела со сплюснутым эллипсоидом инерции ($I_3 > I_1$) при отсутствии резонансов и достаточно малых $|\varepsilon|$, а также о неустойчивости указанных движений для тела с вытянутым эллипсоидом инерции ($I_3 < I_1$). Резонансные явления в системе (1.23) возникают, когда частота нутационных колебаний тела оказывается близкой к удвоенной частоте колебаний магнитного поля, т.е. при $\Omega = 2\omega + \varepsilon\beta$ (малый параметр β обычно называют расстройкой). При этом после замены $x = \exp(\Lambda_0 t)v$ система (1.23) принимает вид: $\dot{v} = \varepsilon Q(t)v$, где

$$Q(t) = \begin{pmatrix} -p(t) + i\beta & -r(t) \exp(-2i\omega t) \\ p(t) \exp(2i\omega t) & r(t) \end{pmatrix},$$

и далее после преобразований вида (1.6) мы имеем систему с почти постоянной матрицей:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= (\varepsilon C_1 + o(\varepsilon))z, \\ C_1 &= \begin{pmatrix} (1 - \chi)\omega + i\beta & \frac{1}{4}\omega(1 - \chi - \xi) \\ -\frac{1}{4}(1 - 2\chi + \xi)\omega & -\chi\omega \end{pmatrix},\end{aligned}$$

что позволяет после анализа корней “усеченного характеристического уравнения” найти область устойчивости стационарных движений идеально проводящего симметричного твердого тела вблизи резонанса:

$$\left(\frac{\chi - 1/2}{\sqrt{\frac{4+\zeta}{4(3+\zeta)}}} \right)^2 + \left(\frac{\xi}{\sqrt{4+\zeta}} \right)^2 < 1 \quad \left(\zeta = \frac{4\beta^2}{\omega^2} \right). \quad (1.25)$$

Область, определяемая неравенством (1.25), представляет собой эллипс на плоскости χ и ξ , зависящий от параметра ζ . Полуось эллипса в сечении $\xi = 0$ монотонно убывает с увеличением расстройки β и асимптотически стремится к значению $1/2$ при $\beta \rightarrow +\infty$. В сечении $\chi = 1/2$ полуоси эллипса неограниченно возрастают с ростом β и при достаточно больших значениях β ограничения на соотношения коэффициентов поляризуемости в этом случае будут отсутствовать. Таким образом, при больших значениях β область устойчивости вблизи резонанса ($\Omega = 2\omega + \varepsilon\beta$) переходит в область устойчивости, найденную в нерезонансном случае, когда эллипсоид инерции сжат ($I_1 < I_3$, $\chi < 1$), и коэффициенты поляризуемости могут принимать произвольные значения (т.е. ξ – любое).

§ 2. Исследование сингулярно возмущенных систем с периодическими коэффициентами

Рассмотрим сингулярно возмущенные начальные задачи:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= A(t, \varepsilon)x + \varepsilon b(x, t), \quad x(0, \varepsilon) = x^0; \\ A(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \varepsilon^k, \quad b(0, t) \equiv 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, матричный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \varepsilon^k$ сходится абсолютно и равномерно при $t \geq 0$ и $|\varepsilon| \leq \varepsilon^0$, $b(x, t)$ и $A_k(t)$ – достаточно гладкие T -периодические по t функции. Такие задачи исследовались на полуоси $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ в линейном случае ($b(x, t) = b(t)$) и ранее (см., например, [12]). Сингулярность в данном случае означает, что решение предельной ($\varepsilon = 0$) задачи (2.1) может, вообще говоря, не удовлетворять начальным условиям, что приводит при достаточно малых $\varepsilon > 0$ к появлению в решении так называемого “пограничного слоя” (имеющего экспоненциальный характер), структура которого на конечном отрезке $[0, a]$ определяется спектром матрицы $A_0(t)$. При решении этой же задачи на полуоси $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ структура погранслоя заметно усложняется [12].

Для исследования устойчивости тривиального решения задачи (2.1) мы воспользуемся алгоритмом метода расщепления, элементы которого были изложены выше. Пусть матрица $A_0(t)$ имеет стабильный на полуоси спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$, удовлетворяющий условиям:

$$\sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0 \quad (j \neq k; j, k = \overline{1, n}; t \geq 0). \quad (2.2)$$

При этом замена

$$x = S_0(t)y \quad (S_0^{-1}(t)A_0(t)S_0(t) \equiv \Lambda_0(t) = \text{diag}\{\lambda_{01}(t), \dots, \lambda_{0n}(t)\})$$

приводит задачу (2.1) к виду:

$$\varepsilon \dot{y} = B(t, \varepsilon)y + \varepsilon f(y, t), \quad y(0, \varepsilon) = y^0 \quad \left(B(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \varepsilon^k \right),$$

что позволяет с помощью невырожденного при достаточно малых $|\varepsilon|$ преобразования

$$y = H(t, \varepsilon)z \quad \left(H(t, \varepsilon) = E + \sum_{k=1}^N \overline{\overline{H}}_k(t) \varepsilon^k \right)$$

перейти к анализу системы с почти диагональной матрицей:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z} &= Q(t, \varepsilon)z + \varepsilon h(z, t, \varepsilon), \quad z(0, \varepsilon) = z^0, \\ Q(t, \varepsilon) &= \Lambda(t, \varepsilon) + \varepsilon^{N+1}G(t, \varepsilon), \quad \|G(t, \varepsilon)\| = O(1) \quad (t \geq 0), \\ \Lambda(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^N \Lambda_k(t) \varepsilon^k = \text{diag}\{\lambda_1(t, \varepsilon), \dots, \lambda_n(t, \varepsilon)\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где матрицы $H(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon)$ и $B(t, \varepsilon)$ связаны соотношением:

$$\varepsilon \dot{H} = B(t, \varepsilon)H - HQ(t, \varepsilon). \quad (2.4)$$

Это дает возможность (приравнявая в (2.4) коэффициенты при одинаковых степенях ε) получить простые алгебраические матричные уравнения для последовательного однозначного определения (в классе T -периодических функций) диагональных $\Lambda_k(t)$ и “бездиагональных” $\overline{\overline{H}}_k(t)$ ($k = \overline{1, N}$) матриц (аргументы опущены):

$$\begin{aligned} \Lambda_0 \overline{\overline{H}}_k - \overline{\overline{H}}_k \Lambda_0 &= \Lambda_k - P_k, \quad P_1 = B_1, \\ P_k &= B_k + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j \overline{\overline{H}}_{k-j} - \overline{\overline{H}}_{k-j} \Lambda_j) - \dot{\overline{\overline{H}}}_{k-1} \quad (k = \overline{2, N}), \\ \Lambda_0 \overline{\overline{H}}_k - \overline{\overline{H}}_k \Lambda_0 &= -\overline{\overline{P}}_k \quad (P_k = \{p_{ijk}\}, \overline{\overline{H}}_k = \{h_{ijk}\}); \end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned} \Lambda_k(t) &= \overline{\overline{P}}_k(t) \in C_T \quad (k = \overline{1, N}); \\ h_{ijk}(t) &= -\sigma_{ij}^{-1}(t)p_{ijk}(t) \in C_T \quad (i \neq j; i, j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Структура матрицы $\Lambda(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \Lambda_k(t) \varepsilon^k$ системы (2.3) позволяет сформулировать следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2.1. *При сделанных выше предположениях и при условии, что спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ матрицы $A_0(t)$ удовлетворяет неравенствам $\text{Re } \lambda_{0j}(t) \leq 0$ ($j = \overline{1, n}$; $t \in \mathbb{R}^+$), существует единственное ограниченное при $\varepsilon \rightarrow +0$*

решение однородной ($b(x, t) \equiv 0$) линейной начальной задачи (2.1), которое может быть записано в квазирегулярной форме:

$$x = S_0(t) \left(\sum_{k=0}^N P_k(t) \varepsilon^k \right) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \sum_{k=0}^N \Lambda_k(s) \varepsilon^k ds \right) C + O(\varepsilon^{N+1}),$$

где сумма $\sum'$ содержит только неограниченные при $t \rightarrow +\infty$ интегралы.

Доказательство приведено в работе [12] и из-за его громоздкости нами опускается.

ТЕОРЕМА 2.2. Если для спектра $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ матрицы $A_0(t)$ выполнены условия (2.2), спектр $\{\lambda_j(t, \varepsilon)\}_1^n$ матрицы $\Lambda(t, \varepsilon)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_j(t, \varepsilon) &\leq \varepsilon^q (-\delta + \varphi(t)) \\ \left(0 \leq q \leq N, \quad N \geq 1; \quad \delta > 0; \quad \int_0^t \varphi(s) ds \leq \text{const}; \quad t \geq 0 \right) \end{aligned}$$

и для достаточно гладкой векторной функции $b(x, t)$ справедливо неравенство

$$|b(x, t)| \leq C|x|^{1+\alpha} \quad (\alpha, C > 0; \quad t \geq 0),$$

то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ тривиальное решение квазилинейной задачи (2.3) и эквивалентной ей задачи (2.1) асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом результатов работы [15] запишем дифференциальное неравенство для нормы решения задачи (2.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d|z|^2}{dt} &= \varepsilon^{-1} \operatorname{Re}(z^* Q(t, \varepsilon) z) + \operatorname{Re}(z^* h(z, t, \varepsilon)) \\ &\leq ((-\delta + \varphi(t)) \varepsilon^{q-1} + O(\varepsilon^N)) |z|^2 + C_1 |z|^{2+\alpha} \\ &\leq ((-\delta_1 + \varphi(t)) \varepsilon^{q-1} + C_1 |z|^\alpha) |z|^2 \leq (-\delta_2 + \varphi(t)) \varepsilon^{q-1} |z|^2 \\ &\quad (C_1 > 0, \quad \delta > \delta_1 > \delta_2 > 0), \end{aligned}$$

откуда следует оценка

$$|z(t)| \leq |z^0| \exp \left(\varepsilon^{q-1} \int_0^t (-\delta_2 + \varphi(s)) ds \right) \leq C_2 |z^0| \exp(-\delta_2 \varepsilon^{q-1} t) \quad (C_2 > 0),$$

что и завершает доказательство теоремы 2.2.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) При наличии у матрицы $A_0(t)$ тождественно кратных точек спектра имеют место некоторые аналоги теорем 2.1 и 2.2, для реализации которых следует воспользоваться “срезающим” преобразованием (с одновременным введением соответствующих дробных степеней малого параметра ε [10]).

2) Теорема 2.2 сохраняет справедливость и в критических случаях, когда некоторые или все точки спектра $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$ предельной матрицы $A_0(t)$ лежат на мнимой оси или касаются ее (при этом $1 \leq q \leq N$).

Для иллюстрации рассмотрим квазилинейное уравнение колебаний электрического заряда $q(t)$ на пластинах конденсатора в контуре с переменной емкостью $C(t)$ при наличии нелинейной э.д.с.:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + qC^{-1}(t) = f(t)q^2, \quad q(0) = q^0. \quad (2.5)$$

Здесь L и R – индуктивность и сопротивление, $q^2 f(t)$ – нелинейная э.д.с., $C(t) > 0$ и $f(t)$ – достаточно гладкие T -периодические функции.

Введем малый параметр ε следующим образом:

$$L = \varepsilon^2 L_0, \quad R = \varepsilon^2 R_0, \quad f(t) = \varepsilon f_0(t),$$

после чего задача (2.5) может быть записана в сингулярно возмущенной векторной форме:

$$\varepsilon \dot{y} = (A_0(t) + \varepsilon A_1(t))y + \varepsilon h(y, t), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad (2.6)$$

где $y = (q, \varepsilon \dot{q})^T$, $h(y, t) = (0, f_0(t)L_0^{-1}q^2)^T$,

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\beta_0 \end{pmatrix},$$

$$\omega^2(t) = \frac{1}{L_0 C(t)}, \quad 2\beta_0 = \frac{R_0}{L_0}$$

(так как предельный оператор $A_0(t)$ имеет чисто мнимый спектр, то здесь мы получили критический случай).

Задача (2.6) после невырожденной при достаточно малых $\varepsilon > 0$ замены

$$y = S_0(t)(E + \varepsilon \overline{\overline{H}}_1(t))z,$$

$$S_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\omega(t) & i\omega(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{H}}_1(t) = \frac{\beta(t)}{2i\omega(t)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \beta_0 + \frac{\dot{\omega}}{2\omega},$$

по описанному выше алгоритму преобразуется к виду:

$$\varepsilon \dot{z} = (\Lambda_0(t) + \varepsilon \Lambda_1(t) + o(\varepsilon))z + \varepsilon b(z, t, \varepsilon), \quad z(0, \varepsilon) = z^0;$$

$$\Lambda_0(t) = i\omega(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1(t) = -\beta(t)E, \quad \Lambda(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^1 \Lambda_k(t)\varepsilon^k.$$

Так как в данном случае спектр $\{\lambda_j(t, \varepsilon)\}_1^2$ матрицы $\Lambda(t, \varepsilon)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\operatorname{Re} \lambda_j(t, \varepsilon) \leq -\beta_0 - \frac{\dot{\omega}}{2\omega},$$

$$\beta_0 > 0, \quad \int_0^t \frac{\dot{\omega}(s)}{2\omega(s)} ds = \frac{1}{2}(\ln \omega(t) - \ln \omega(0)) \leq C,$$

и для функции $b(z, t, \varepsilon)$ справедливо неравенство $|b(z, t, \varepsilon)| \leq C|z|^2$, то в силу теоремы 2.2 тривиальное решение задачи (2.5) будет асимптотически устойчивым.

§3. Анализ дифференциальных уравнений с полиномиально-периодическими коэффициентами

Предложенный выше алгоритм оказался весьма полезным и при исследовании линейных и квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиально-периодической (в частности полиномиальной, см., например, [2], [8]) матрицей:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + f(x, t), \quad x(0) = x^0; \\ A(t) &= t^m \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)t^{-k}, \quad m \geq 1, \quad f(0, t) \equiv 0, \quad t \geq t_0 > 1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $f(x, t)$ и $A_k(t)$ ($k \geq 0$) — достаточно гладкие T -периодические функции. Отметим, что к указанным системам (при постоянных матрицах A_k) сводится большой класс уравнений гипергеометрического типа:

$$p(t)\ddot{x} + q(t)\dot{x} + \lambda x = 0, \quad (3.2)$$

где $q(t)$ и $p(t)$ — полиномы не выше первой и второй степени соответственно, λ — некоторый постоянный параметр. К уравнениям указанного вида относятся, например, уравнение Эйри: $\ddot{x} + tx = 0$, уравнение Бесселя: $t^2\ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - \nu^2)x = 0$, уравнение Эрмита: $\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2\nu x = 0$ и многие другие.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если матрица $A_0(t)$ имеет простой спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^n$, удовлетворяющий условиям*

$$\sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0 \quad (j \neq k; \ j, k = \overline{1, n}; \ t \geq t_0),$$

то существует невырожденная при достаточно больших $t_0 > 1$ замена:

$$\begin{aligned} x &= S_0(t)H(t)z; \\ H(t) &= E + \sum_{k=1}^{m+1} \overline{\overline{H}}_k(t)t^{-k}, \\ S_0^{-1}(t)A_0(t)S_0(t) &\equiv \Lambda_0(t) = \text{diag}\{\lambda_{01}(t), \dots, \lambda_{0n}(t)\}, \end{aligned}$$

преобразующая систему (3.1) к системе с почти диагональной матрицей:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\Lambda(t) + t^{-2}F(t))z + b(z, t), \quad z(t_0) = z^0; \\ \Lambda(t) &= t^m \sum_{k=0}^{m+1} \Lambda_k(t)t^{-k} = \text{diag}\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где диагональные $\Lambda_k(t)$ и “бездиагональные” $\overline{\overline{H}}_k(t)$ ($k = \overline{1, m+1}$) матрицы однозначно определяются в ходе доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы всегда существует невырожденная достаточно гладкая T -периодическая замена $x = S_0(t)y$, приводящая систему (3.1) к виду:

$$\dot{y} = B(t)y + h(y, t), \quad y(t_0) = y^0;$$

$$B(t) = t^m \sum_{k=0}^{m+1} B_k(t)t^{-k}, \quad B_0(t) = \Lambda_0(t),$$

которая после еще одной невырожденной при достаточно больших $t_0 > 1$ замены

$$y = H(t)z, \quad H(t) = E + \sum_{k=1}^{m+1} \overline{\overline{H}}_k(t)t^{-k},$$

приводит нас к задаче (3.3). При этом матрицы $H(t)$, $B(t)$ и $Q(t) = \Lambda(t) + O(t^{-2})$ связаны соотношением:

$$\dot{H} = B(t)H - HQ(t). \quad (3.4)$$

Приравнявая в (3.4) коэффициенты при одинаковых степенях t , мы имеем возможность записать простые алгебраические матричные уравнения для последовательного однозначного определения диагональных $\Lambda_k(t)$ и “бездиагональных” $\overline{\overline{H}}_k(t)$ ($k = \overline{1, m+1}$) матриц (аргументы опущены):

$$\Lambda_0 \overline{\overline{H}}_k - \overline{\overline{H}}_k \Lambda_0 = \Lambda_k - P_k, \quad P_1 = B_1,$$

$$P_k = B_k + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j \overline{\overline{H}}_{k-j} - \overline{\overline{H}}_{k-j} \Lambda_j) - \dot{\overline{\overline{H}}}_{k-m};$$

$$\overline{\overline{H}}_k(t) = \{h_{ijk}(t)\}, \quad P_k(t) = \{p_{ijk}(t)\}, \quad \dot{\overline{\overline{H}}}_s = 0 \quad (s \leq 0),$$

при этом

$$\Lambda_k(t) = \overline{P}_k(t); \quad h_{ijk}(t) = -p_{ijk}(t)\sigma_{ij}^{-1}(t) \quad (i \neq j; i, j = \overline{1, n}; t \geq t_0),$$

что и завершает доказательство теоремы 3.1.

Представление (3.3) позволяет (с учетом результатов работы [15]) выяснить характер устойчивости тривиального решения задачи (3.3) и эквивалентной ей задачи (3.1) и построить асимптотическое представление решения задачи (3.1) при $t \rightarrow +\infty$. Например, перейдя от уравнения Бесселя

$$t^2 \ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - \nu^2)x = 0$$

к эквивалентной системе первого порядка

$$\dot{z} = A(t)z;$$

$$A(t) = \sum_{k=0}^2 A_k t^{-k}, \quad z = (x, \dot{x})^T,$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu^2 & 0 \end{pmatrix},$$

можно представить его решение (с учетом теоремы 3.1) в виде

$$\begin{aligned} z &= S_0 \left(E + \sum_{k=1}^N \overline{\overline{H}}_k t^{-k} + O(t^{-N-1}) \right) \exp \left(\int_{t_0}^t \sum_{k=0}^N \Lambda_k t^{-k} dt \right) C, \\ S_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = -\frac{1}{2}E, \\ \Lambda_2 &= \delta_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{H}}_1 = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{H}}_2 = b_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \delta_2 &= \frac{4\nu^2 + 1}{8i}, \quad b_2 = \frac{2\nu^2 + 1}{8}, \end{aligned}$$

что позволяет (с точностью до постоянного множителя) записать асимптотическое представление (при $t \rightarrow +\infty$) функций Ханкеля первого и второго рода

$$H_\nu^{(1,2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 \pm \frac{i}{4t} + \frac{b_2}{t^2} + O(t^{-3}) \right) e^{\mp i(t - \delta_2 t^{-1})}$$

и функции Бесселя $J_\nu(t) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(t) + H_\nu^{(2)}(t)]$.

Аналогичным образом, записав уравнение Эрмита

$$\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2\nu x = 0$$

в матричной форме

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\Lambda_0 t + B_1)z, \\ \Lambda_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\nu & 0 \end{pmatrix}, \quad z = (x, \dot{x})^T, \end{aligned}$$

получим асимптотику решения системы

$$\begin{aligned} z &= \left(E + \sum_{k=1}^3 \overline{\overline{H}}_k t^{-k} + O(t^{-4}) \right) \exp \left(\frac{1}{2} \Lambda_0 t^2 + \Lambda_2 \ln t \right) C, \\ \Lambda_1 &= 0, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & -\nu \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = 0, \quad \overline{\overline{H}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \nu & 0 \end{pmatrix}, \\ \overline{\overline{H}}_2 &= 0, \quad \overline{\overline{H}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4}(\nu - 1) \\ -\frac{1}{2}\nu(\nu + 1) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

и решения самого уравнения Эрмита

$$x = C_1(1 + O(t^{-4}))t^\nu + C_2 \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{4t^3} + O(t^{-4}) \right) t^{-\nu} e^{t^2}.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Если в условиях теоремы 3.1 спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ матрицы $\Lambda(t) = t^m \sum_{k=0}^{m+1} \Lambda_k(t) t^{-k}$ удовлетворяет условиям:

$$\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq \delta(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad a(t) = \int_{t_0}^t \delta(s) ds \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow +\infty,$$

то тривиальное решение линейной однородной ($f \equiv 0$) системы (3.3) и эквивалентной ей однородной системы (3.1) асимптотически устойчиво, при $a(t) \leq C$ ($t \geq 0$) – устойчиво, а в случае $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \geq \delta(t)$, $a(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$, – неустойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО асимптотической устойчивости (или устойчивости) следует из дифференциального неравенства [15]:

$$\frac{1}{2} \frac{d|z|^2}{dt} = \operatorname{Re}(z^* \Lambda(t) z) + O(t^{-2})|z|^2 \leq (\delta(t) + O(t^{-2}))|z|^2,$$

при этом имеет место соотношение

$$|z(t)| \leq |z^0| \exp\left(\int_{t_0}^t (\delta(s) + O(s^{-2})) ds\right).$$

Доказательство неустойчивости вытекает из аналогичного обратного неравенства:

$$\frac{1}{2} \frac{d|z|^2}{dt} \geq (\delta(t) + O(t^{-2}))|z|^2$$

и соответствующей ему оценки

$$|z(t)| \geq |z^0| \exp\left(\int_{t_0}^t (\delta(s) + O(s^{-2})) ds\right).$$

Теорема 3.2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях теоремы 3.1 спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ матрицы $\Lambda(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq -\delta < 0 \quad (j = \overline{1, n}; t \geq t_0),$$

то тривиальное решение линейной однородной задачи (3.3) и соответствующей однородной задачи (3.1) асимптотически устойчиво, при $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq 0$ ($j = \overline{1, n}; t \geq t_0$) – устойчиво, а в случае $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \geq \delta > 0$ ($j = \overline{1, n}; t \geq t_0$) – неустойчиво.

ТЕОРЕМА 3.3. Если в условиях теоремы 3.1 существует q ($0 \leq q \leq m$), при котором спектр $\{\lambda_{kj}(t)\}_1^n$ матриц $\Lambda_k(t)$ ($k = \overline{0, m+1}$) удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_{qj}(t) &\leq -\delta + \varphi(t), & \operatorname{Re} \lambda_{pj}(t) &\leq 0 \quad (p = \overline{0, q-1}, t \geq t_0), \\ \delta &> 0, & \int_{t_0}^t \varphi(s) ds &\leq C, \quad t \geq t_0, \end{aligned}$$

и при этом векторная функция $f(x, t)$ является достаточно гладкой и удовлетворяет неравенству:

$$|f(x, t)| \leq C|x|^{1+\alpha} \quad (C, \alpha > 0, t \geq t_0),$$

то тривиальное решение квазилинейной начальной задачи (3.3) и эквивалентной ей задачи (3.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство следует из дифференциального неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d|z|^2}{dt} &\leq \operatorname{Re}(z^* \Lambda_q(t) z) t^{m-q} + C_1 |z|^2 t^{m-q-1} + \operatorname{Re}(z^* b(z, t)) \\ &\leq (-\delta_1 + \varphi(t)) t^{m-q} |z|^2 + C_2 |z|^{2+\alpha} \\ &\leq (-\delta_2 + \varphi(t)) t^{m-q} |z|^2 \quad (\delta \geq \delta_1 \geq \delta_2 > 0) \end{aligned}$$

и соответствующей оценки

$$|z(t)| \leq |z^0| \exp \left(\int_{t_0}^t (-\delta_2 + \varphi(s)) s^{m-q} ds \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При наличии у матрицы $A_0(t)$ тождественно кратных точек спектра следует (как и выше) воспользоваться “срезающим преобразованием”.

С помощью предложенного алгоритма исследуем на устойчивость малые колебания оси гироскопа (на стадии его разгона) с переменным кинетическим моментом при наличии позиционных сил [13], которые (при некоторых допущениях) описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + (h+t)\dot{\beta} + k_{11}\alpha + k_{12}\beta = 0, \\ \ddot{\beta} - (h+t)\dot{\alpha} + k_{21}\alpha + k_{22}\beta = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

где α и β — углы отклонения гироскопа от некоторого невозмущенного положения, h определяется начальным значением вектора кинетического момента, слагаемые $k_{11}\alpha + k_{12}\beta$ и $k_{21}\alpha + k_{22}\beta$ описывают действие позиционных сил. После обозначений

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \dot{\alpha}, \quad x_4 = \dot{\beta}, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$$

система (3.5) может быть записана в векторной форме

$$\dot{x} = (A_0 t + A_1)x, \quad (3.6)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & E \\ -K & hR \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся теоремами 3.1 и 3.2 с учетом того, что все точки спектра матрицы A_0 лежат на мнимой оси ($\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm i$), что соответствует критическому случаю. Тогда невырожденная при достаточно больших $t_0 > 1$ замена

$$\begin{aligned} x &= S_0(E + H_1 t^{-1} + H_2 t^{-2})y, \\ S_0 &= \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_0 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

преобразует систему (3.6) к почти диагональному виду:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (\Lambda_0 t + \Lambda_1 + Q_2 t^{-1} + O(t^{-2}))y, \\ \Lambda_0 &= S_0^{-1} A_0 S_0 = \text{diag}\{0, 0, i, -i\}, \quad \Lambda_1 = h\Lambda_0, \\ Q_2 &= \begin{pmatrix} Q_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{Q}_{22} \end{pmatrix}, \quad Q_{21} = \begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \\ -k_{11} & -k_{12} \end{pmatrix}, \\ \overline{Q}_{22} &= \frac{1}{2} \text{diag}\{((k_{12} - k_{21}) + i(k_{11} + k_{22})), ((k_{12} - k_{21}) - i(k_{11} + k_{22}))\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Представление (3.7) позволяет сделать вывод о том, что в данном случае (с учетом спектра матриц Λ_0 , Λ_1 и Q_2) малые колебания оси гироскопа будут устойчивы только при выполнении соотношений:

$$k_{12} = k_{21}, \quad k_{11}k_{22} \geq k_{12}k_{21}.$$

Список литературы

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1935.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
3. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа. М.: Наука, 1979.
4. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987.
5. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971.
6. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
7. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
8. *Морозов В. М., Каленова В. И.* Оценивание и управление в нестационарных линейных системах. М.: Изд-во МГУ, 1988.
9. *Магницкий Н. А.* Асимптотические методы анализа нестационарных управляемых систем. М.: Наука, 1992.
10. *Коняев Ю. А.* Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений // Матем. сб. 1993. Т. 184. №12. С. 133–144.
11. *Коняев Ю. А., Мартыненко Ю. Г.* Об устойчивости стационарных вращений симметричного твердого тела в переменном магнитном поле // Прикл. матем. и мех. 1987. Т. 51. №3. С. 375–381.
12. *Коняев Ю. А., Федоров Ю. С.* Асимптотический анализ некоторых классов сингулярно возмущенных задач на полуоси // Матем. заметки. 1987. Т. 62. №1. С. 494–501.
13. *Коняев Ю. А., Мартыненко Ю. Г.* Исследование устойчивости неавтономных систем дифференциальных уравнений квазиполиномиального типа // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 34. №10. С. 1427–1429.
14. *Коняев Ю. А.* Асимптотика решений дифференциальных уравнений с полиномиально-периодическими коэффициентами // Вестн. МЭИ. 1996. №6. С. 79–88.
15. *Коняев Ю. А.* Достаточные условия устойчивости решений некоторых классов ОДУ в критических случаях // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №4. С. 709–712.

Российский университет дружбы народов, Москва

Поступила в редакцию
25.08.1999 и 22.05.2000