Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Индексное гипергеометрическое преобразование и имитация анализа ядер Березина на гиперболических пространствах, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 3, 83–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm552>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:08:31

УДК 519.46

Ю. А. Неретин

Индексное гипергеометрическое преобразование и имитация анализа ядер Березина на гиперболических пространствах

Индексное гипергеометрическое преобразование (известное также как преобразование Олевского или преобразование Якоби) обобщает сферическое преобразование в L^2 на симметрических пространствах ранга 1 (т.е. вещественных, комплексных и кватернионных пространствах Лобачевского). Цель настоящей статьи – получить свойства индексного гипергеометрического преобразования, имитирующие анализ ядер Березина на таких пространствах.

Обсуждается также задача о построении унитарного оператора, отождествляющего L^2 и пространство Березина. Задача приводит к некоторому интегральному выражению (Λ -функции), которое, по-видимому, не выражается с помощью конечного числа операций через стандартные спецфункции (лишь при некоторых выделенных значениях параметра сводится к так называемым функциям типа Вольterra). Исследуются свойства этого выражения. Показывается, что для некоторых серий симметрических пространств большого ранга этот же оператор унитарной эквивалентности записывается через определители, составленные из Λ -функций.

Библиография: 41 название.

Введение

0.1. Индексное гипергеометрическое преобразование Мелера–Г. Вейля–Титчмарша–М. Н. Олевского. Фиксируем $b, c > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование $J_{b,c}$, заданное формулой

$$\begin{aligned} g(s) &= J_{b,c} f(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(b+c)} \int_0^\infty f(x) {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где ${}_2F_1(\cdot)$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Обратный оператор $J_{b,c}^{-1}$ задается формулой

$$\begin{aligned} f(x) &= J_{b,c}^{-1} g(x) \\ &= \frac{1}{\pi \Gamma(b+c)} \int_0^\infty g(s) {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds. \end{aligned} \quad (0.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00303) и NWO (грант № 047-008-009).

Эта пара взаимно обратных преобразований была обнаружена Вейлем [1] в 1910 г.¹ Результат Вейля не привлек особого внимания, и снова эти преобразования появляются у Титчмарша [3] в 1946 г. и М. Н. Олевского [4] в 1949 г. Основной причиной интереса к преобразованию (0.1) в последующие годы было то, что сферические преобразования для всех некомпактных римановых симметрических пространств ранга 1 имеют вид (0.1) при подходящих значениях параметров b, c .

Подробнее о преобразовании (0.1) см. статьи Коорнвиндера и Фленстед-Йенсена [5]–[8], а также книги Якубовича, Лучко [9], Самко, Килбаса, Маричева [10] и том 5 таблиц Прудникова, Брычкова, Маричева [11]; обзор Коорнвиндера [7] содержит обширную библиографию.

О различных обобщениях см., например, работы Якубовича, Лучко [9] (преобразование Уимпа с G -функцией), Кулинка, Стокмана [12] (q -аналоги), Хекмана, Опдама [13]–[15] (многомерные аналоги).

- Для преобразования (0.1) в математической литературе используются термины
- индексное гипергеометрическое преобразование,
 - обобщенное преобразование Фурье,
 - преобразование Олевского,
 - преобразование Якоби,²
 - преобразование Фурье–Якоби.

0.2. Содержание работы. Пространство L^2 на некомпактном римановом симметрическом пространстве G/K допускает естественную деформацию, обнаруженную (в случае эрмитовых симметрических пространств) Березиным в [16], см. работы [17]–[24] и библиографию в [23]. При малом значении параметра деформации (или при большом значении нашего параметра θ , см. ниже п. 3.2) представления Березина группы G эквивалентны представлению G в $L^2(G/K)$.

Формула Планшереля для этой деформации в случае пространств ранга 1 была получена ван Дейком и Хилле в [19], а в общем случае – автором в [21]–[23].

Одной из целей работы было понять, как отзываются эти результаты на теории индексного гипергеометрического преобразования.

Второй целью было построение явного унитарного сплетающего оператора из пространства $L^2(G/K)$ в пространство Березина при большом значении параметра θ . Мы пытаемся что-либо понять об этом операторе, используя индексное преобразование.

Параграф 1 настоящей работы содержит предварительные сведения по индексному гипергеометрическому преобразованию.

В § 2 мы вычисляем образы операторов

$$f(x) \mapsto xf(x), \quad f(x) \mapsto x(x+1)\frac{d}{dx}f(x)$$

при индексном преобразовании. Оказывается, что эти операторы переходят в разностные операторы мнимого направления. Например, оператору умножения на x

¹Частный случай $b = 1/2, c = 1$ (преобразование Мелера–Фока) был обнаружен Меле-ром [2] в 1881 г.

²Термин введен Коорнвиндером по ассоциации с разложением в ряд по многочленам Якоби.

соответствует оператор

$$Pg(s) = \frac{(b-is)(c-is)}{(-2is)(1-2is)}(g(s+i) - g(s)) + \frac{(b+is)(c+is)}{(2is)(1+2is)}(g(s-i) - g(s)).$$

Хотя эти результаты очень просты, нам не удалось найти в литературе утверждения об операторе $x(x+1)\frac{d}{dx}f(x)$. Первое утверждение является очень частным случаем одной недавней теоремы Чередника [25].

В §3 мы даем краткий обзор по анализу ядер Березина на симметрических пространствах ранга 1. Этот раздел в дальнейшем имитируется на уровне индексного гипергеометрического преобразования.

Параграф 4 содержит предварительные сведения о непрерывных двойственных многочленах Хана.

В §5 мы получаем серию нестандартных формул Планшереля. Точнее, мы показываем, что индексное преобразование является унитарным оператором из некоторого естественного пространства голоморфных функций в круге (или на полуплоскости) в пространство L^2 на полупрямой по некоторой мере. Этот параграф и является имитацией работ [19], [21] на уровне спецфункций одной переменной.

В §6 мы вводим функцию

$$\Lambda_{b,c}^a(x) = \frac{1}{\pi\Gamma(b+c)} \int_0^\infty \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(b-is)\Gamma(c+is)\Gamma(c-is)}{\Gamma(2is)\Gamma(-2is)} \times {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) ds.$$

Целью является построение упомянутого выше унитарного оператора из L^2 в пространство Березина. По-видимому, функция Λ не выражается явно через известные спецфункции (за исключением некоторых частных случаев, когда ответ выражается через редко употребляемые функции типа Вольтерра). Далее мы пытаемся дать ответ на неформальный вопрос о том, стоит ли считать Λ -функцию новой спецфункцией. Мы выводим ряд довольно забавных тождеств с Λ -функцией, а в §7 строим с помощью Λ -функции ортогональные базисы в L^2 на полупрямой.

В §8 мы без доказательства приводим решение задачи об явной унитарной эквивалентности между L^2 и деформацией Березина в случае симметрических пространств

$$U(p, q)/(U(p) \times U(q)).$$

Оказывается, что ответ выписывается через определитель, составленный из Λ -функций. Этот параграф объясняет цели введения Λ -функции.

0.3. Обозначения: $\mathbb{R}_+$ — полупрямая $x \geq 0$;

$${}_2F_1(a, b; c; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n$$

— гипергеометрическая функция Гаусса;

$${}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ c_1, \dots, c_q \end{matrix}; x \right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(c_1)_n \cdots (c_q)_n n!} x^n$$

— обобщенная гипергеометрическая функция.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Определение. Фиксируем $b, c > 0$. Пусть $f(x)$ — функция на полупрямой. Ее индексное гипергеометрическое преобразование $J_{b,c}f$ (мы также используем обозначение $[\widehat{f}]_{b,c}$) задается формулой

$$\begin{aligned} g(s) &= J_{b,c}f(s) = [\widehat{f}(s)]_{b,c} \\ &= \frac{1}{\Gamma(b+c)} \int_0^\infty f(x) {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Формула обращения для индексного гипергеометрического преобразования имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= J_{b,c}^{-1}g(x) \\ &= \frac{1}{\pi\Gamma(b+c)} \int_0^\infty g(s) {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Равносильное утверждение: оператор $J_{b,c}$ является унитарным оператором

$$L^2(\mathbb{R}_+, x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx) \rightarrow L^2\left(\mathbb{R}_+, \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 dx\right).$$

Запишем также условие унитарности (*формула Планшереля*) в явном виде:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty f_1(x) \overline{f_2(x)} x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [\widehat{f_1}(s)]_{b,c} \overline{[\widehat{f_2}(s)]_{b,c}} \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds. \end{aligned}$$

Свойства оператора $J_{b,c}$ в различных функциональных пространствах подробно изучались, см. обзор [7], а также [9].

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложенный Вейлем [1] вывод формулы обращения (1.2) довольно прост. Рассмотрим гипергеометрический дифференциальный оператор

$$D := x(x+1) \frac{d^2}{dx^2} + [(c+b) + (2b+1)x] \frac{d}{dx} + b^2$$

на $\mathbb{R}_+$. Функции ${}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x)$ — это в точности собственные функции оператора D . Для оператора D может быть явно написана резольвента (она же формула Грина) $R(\lambda) = (D - \lambda)^{-1}$ (см. работы Миллер-Лебедевой [26], [27]). Зная резольвенту, несложно уже получить спектральное разложение оператора по формуле

$$D = \frac{1}{2\pi i} \int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)] d\lambda.$$

Подробное обсуждение этого общего приема см. у Данфорда, Шварца [28]. В приложении к дифференциальным операторам (и, в частности, к гипергеометрическому оператору) этот метод излагается у Титчмарша [3].

О других выводах формулы обращения см. [4], [6]–[10].

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, верно равенство

$$[\widehat{Df}] = s^2 [\widehat{f}(s)].$$

1.2. Голоморфное продолжение в полосу.

ЛЕММА 1.1. Пусть f интегрируема на $\mathbb{R}_+$ и

$$f(x) = o(x^{-\alpha-\varepsilon}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда $[\widehat{f}(s)]_{b,c}$ голоморфна в полосе

$$|\operatorname{Im} s| < \alpha - b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из следующей асимптотики для гипергеометрической функции (см. [29; том 1, (2.3.2.9)]) при $x \rightarrow +\infty$:

$${}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) = \lambda_1 x^{-b+is} + \lambda_2 x^{-b-is} + O(x^{-b+is-1}) + O(x^{-b-is-1}),$$

где $2s \notin \mathbb{Z}$, а λ_1, λ_2 — некоторые константы (при $2s \in \mathbb{Z}$ появляется дополнительно множитель $\ln x$ при старшем слагаемом).

ЗАМЕЧАНИЕ. Достаточным условием вхождения непрерывной функции $f(x)$ в L^2 по мере $x^{b+c-1}(1+x)^{b-c}dx$ является убывание

$$f(x) = o(x^{-b-\varepsilon}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

и мы видим, что это условие обеспечивает существование аналитического продолжения в достаточно узкую полосу.

1.3. Преобразование Фурье. Для некоторых значений параметров b, c ядро ${}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x)$ является элементарной функцией. В частности (см. [29; том 1, (2.8.11), (2.8.12)]),

$${}_2F_1\left(is, -is; \frac{1}{2}; -x\right) = \cos(2s \operatorname{arcsch} \sqrt{x}), \quad (1.3)$$

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}+is, \frac{1}{2}-is; \frac{3}{2}; -x\right) = \frac{\sin(2s \operatorname{arcsch} \sqrt{x})}{2s\sqrt{x}}. \quad (1.4)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J_{0,1/2}f(s) &= \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^\infty f(x) \cos(2s \operatorname{arcsch} \sqrt{x}) x^{-1/2} (1+x)^{-1/2} dx, \\ J_{1/2,1}f(s) &= \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^\infty f(x) \frac{\sin(2s \operatorname{arcsch} \sqrt{x})}{2s\sqrt{x}} x^{1/2} (1+x)^{-1/2} dx. \end{aligned}$$

Замена переменной $x = \operatorname{sh}^2 y$ приводит эти интегралы к виду

$$J_{0,1/2}f(s) = \frac{2}{\Gamma(1/2)} \int_0^\infty f(\operatorname{sh}^2 y) \cos(2sy) dy,$$

$$J_{1/2,1}f(s) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^\infty f(\operatorname{sh}^2 y) \frac{\operatorname{sh} y \sin(2sy)}{2s} dy,$$

т. е. операторы $J_{0,1/2}$, $J_{1/2,1}$ отличаются соответственно от синус-преобразования Фурье и косинус-преобразования Фурье несущественной заменой переменной.

Отметим, что элементарными являются и все функции вида

$${}_2F_1\left(k + is, k - is; \frac{1}{2} + k + l; -x\right), \quad {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + k + is, \frac{1}{2} + k - is; \frac{3}{2} + k + l; -x\right)$$

при целых k, l . Они получаются из (1.3), (1.4) применением подходящих явно выпи-сываемых дифференциальных операторов (см. [29; том 1, 2.8, формулы (20), (22), (24), (27)]).

1.4. Сферические преобразования. Через $\mathbb{K}$ мы обозначим $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$. Через r мы обозначим размерность тела $\mathbb{K}$, через $\mathbb{K}^n$ — n -мерное пространство над $\mathbb{K}$ со стандартным скалярным произведением:

$$\langle z, u \rangle = \sum z_j \bar{u}_j.$$

Через $U(1, n; \mathbb{K})$ мы обозначим *псевдоунитарную группу* над $\mathbb{K}$, т. е. группу $(1 + n) \times (1 + n)$ -матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ над $\mathbb{K}$, удовлетворяющих условию

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Стандартные обозначения для групп $U(1, n; \mathbb{K})$ в случаях $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ соответственно: $O(1, n)$, $U(1, n)$, $Sp(1, n)$.

Через $B_n(\mathbb{K})$ мы обозначим шар $\langle z, z \rangle < 1$ в $\mathbb{K}^n$. Через S^{rn-1} мы обозначим сферу $\langle z, z \rangle = 1$. Группа $U(1, n; \mathbb{K})$ действует на $B_n(\mathbb{K})$ дробно-линейными преобразованиями

$$z \mapsto z^{[g]} := (a + zc)^{-1}(b + zd). \quad (1.5)$$

Стабилизатор K точки $0 \in B_n(\mathbb{K})$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad |a| = 1, \quad d \in U(n; \mathbb{K}). \quad (1.6)$$

Поэтому $B_n(\mathbb{K})$ есть однородное пространство:

$$B_n(\mathbb{K}) = U(1, n; \mathbb{K}) / (U(1; \mathbb{K}) \times U(n; \mathbb{K})).$$

Якобиан преобразования (1.5) равен

$$J(g; z) = |a + zc|^{-r(1+n)}.$$

Отметим простую формулу

$$1 - \langle z^{[g]}, u^{[g]} \rangle = (a + zc)^{-1} (1 - \langle z, u \rangle) \overline{(a + uc)}^{-1}.$$

Отсюда видно, что $U(1, n; \mathbb{K})$ -инвариантная мера на $B_n(\mathbb{K})$ имеет вид

$$dm(z) = (1 - \langle z, z \rangle)^{-(n+1)r/2} dz,$$

где через dz обозначена мера Лебега на $B_n(\mathbb{K})$.

Группа $U(1, n; \mathbb{K})$ действует в $L^2(B_n(\mathbb{K}), dm(z))$ заменами переменной

$$f(z) \mapsto f((a + zc)^{-1}(b + zd)). \quad (1.7)$$

Рассмотрим задачу о разложении $L^2(B_n(\mathbb{K}), dm(z))$ в прямой интеграл неприводимых представлений $U(1, n; \mathbb{K})$.

Пусть $s \in \mathbb{R}$. Представление T_s основной унитарной серии группы $U(1, n; \mathbb{K})$ реализуется в $L^2(S^{rn-1})$ и задается формулой

$$T_s \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(h) = f((a + hc)^{-1}(b + hd)) |a + hc|^{-(n+1)r/2+1+is}, \quad (1.8)$$

где $h \in S^{rn-1}$.

Рассмотрим оператор A из пространства $L^2(B_n(\mathbb{K}), dm(z))$ в пространство функций на $S^{rn-1} \times \mathbb{R}_+$, заданный формулой

$$Af(h, s) = \int_{B_n(\mathbb{K})} f(z) \frac{|1 - \langle z, h \rangle|^{-(n+1)r/2+1+is}}{|1 - \langle z, z \rangle|^{(n+1)r/4+1/2+is/2}} dz. \quad (1.9)$$

Если f преобразуется по формуле (1.7), то $G(h, s) := Af(h, s)$ преобразуется как

$$G(h, s) \mapsto G((a + hc)^{-1}(b + hd), s) |a + hc|^{-(n+1)r/2+1+is}. \quad (1.10)$$

Теперь мы хотим построить меру $d\nu$ (она называется *мерой Планшереля*) на $S^{rn-1} \times \mathbb{R}_+$ такую, что оператор A является унитарным оператором

$$L^2(B_n(\mathbb{K}), dm(z)) \rightarrow L^2(S^{rn-1} \times \mathbb{R}_+, d\nu)$$

(это и решит задачу разложения в прямой интеграл). Очевидно, множитель $|a + hc|$ (см. (1.8), (1.9)) равен единице, если матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ имеет вид (1.6). Следовательно, искомая мера $d\nu$ инвариантна относительно группы $U(n; \mathbb{K})$, а поэтому плотность искомой меры имеет вид

$$\sigma(s) ds dh.$$

Чтобы найти функцию $\sigma(s)$, мы рассмотрим всевозможные функции f на $B_n(\mathbb{K})$, зависящие лишь от радиуса $|z|$. Удобно ввести переменную

$$x = \frac{|z|^2}{1 - |z|^2}$$

и положить $f = f(x)$. Тогда соответствующая функция $G(h, s)$ зависит лишь от переменной s , и несложное вычисление дает формулу

$$G(s) = \text{const} \cdot \int_0^\infty f(x) {}_2F_1(b + is, b - is; b + c; -x) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx, \quad (1.11)$$

где

$$b = \frac{(n+1)r}{4} - \frac{1}{2}, \quad c = \frac{(n-1)r}{4} + \frac{1}{2}. \quad (1.12)$$

Это интегральное преобразование, определенное на $U(n; \mathbb{K})$ -инвариантных функциях на $V_n(\mathbb{K})$, называется *сферическим преобразованием*. Мы видим, что сферические преобразования являются частными случаями индексного гипергеометрического преобразования. Теперь формула обращения (1.2) дает следующую плотность меры Планшереля:

$$\sigma(s) = \left| \frac{\Gamma(b + is)\Gamma(c + is)}{\Gamma(2is)} \right|^2. \quad (1.13)$$

§ 2. Соответствие некоторых операторов

2.1. Оператор умножения на x .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть функция f на $\mathbb{R}^+$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$f(x) = o(x^{-b-1-\varepsilon}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.1)$$

Тогда

$$[\widehat{xf(x)}]_{b,c} = P[\widehat{f(x)}]_{b,c}, \quad (2.2)$$

где разностный оператор Pg задан формулой

$$Pg(s) = \frac{(b-is)(c-is)}{(-2is)(1-2is)} (g(s+i) - g(s)) + \frac{(b+is)(c+is)}{(2is)(1+2is)} (g(s-i) - g(s)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (2.1) обеспечивает существование голоморфного продолжения функции $\widehat{f}$ в полосу

$$\text{Im } s < 1 + \varepsilon.$$

Само равенство (2.2) равносильно следующему тождеству для гипергеометрических функций

$$\begin{aligned} & x {}_2F_1(b + is, b - is; b + c; -x) \\ &= \frac{(b-is)(c-is)}{(-2is)(1-2is)} {}_2F_1(b-1+is, b+1-is; b+c; -x) \\ &\quad - \left[\frac{(b-is)(c-is)}{(-2is)(1-2is)} + \frac{(b+is)(c+is)}{(2is)(1+2is)} \right] {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) \\ &\quad + \frac{(b+is)(c+is)}{(2is)(1+2is)} {}_2F_1(b+1+is, b-1-is; b+c; -x), \end{aligned}$$

которое, в свою очередь, равносильно следующему соотношению между ассоциированными гипергеометрическими функциями³:

$$\begin{aligned}
& -y {}_2F_1(p, q; r; y) \\
& = \frac{q(r-p)}{(q-p)(1+q-p)} {}_2F_1(p-1, q+1; r; y) \\
& \quad - \left[\frac{q(r-p)}{(q-p)(1+q-p)} + \frac{p(r-q)}{(p-q)(1+p-q)} \right] {}_2F_1(p, q; r; y) \\
& \quad + \frac{p(r-q)}{(p-q)(1+p-q)} {}_2F_1(p+1, q-1; r; y). \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Последнее равенство отсутствует в стандартных таблицах, но легко проверяется приравниванием коэффициентов тейлоровского разложения по y . Действительно,

$$\begin{aligned}
& {}_2F_1(p-1, q+1; r; y) - {}_2F_1(p, q; r; y) \\
& = \sum \left(\frac{(p-1)_k (q+1)_k}{(r)_k k!} - \frac{(p)_k (q)_k}{(r)_k k!} \right) y_k \\
& = \sum \frac{(p)_k (q)_k}{(r)_k k!} \left(\frac{(p-1)(q+k)}{(p+k-1)q} - 1 \right) y_k \\
& = \sum \frac{(p)_k (q)_k}{(r)_k k!} \cdot \frac{-k(1+q-p)}{q(p+k-1)} y_k.
\end{aligned}$$

Преобразуя таким же образом ${}_2F_1(p+1, q-1; r; y) - {}_2F_1(p, q; r; y)$, мы приводим правую часть (2.3) к виду

$$\sum \frac{(p)_k (q)_k}{(r)_k k!} \left(\frac{-k(r-p)}{(q-p)(p+k-1)} - \frac{-k(r-q)}{(p-q)(q+k-1)} \right) y_k,$$

а последнее уже равно левой части (2.3).

2.2. Дифференцирование.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть f и f' непрерывны и удовлетворяют условиям убывания (2.2). Тогда

$$\left[\widehat{x(x+1) \frac{d}{dx} f} \right]_{b,c} = H[\widehat{f}]_{b,c}, \tag{2.4}$$

где разностный оператор H задан формулой

$$\begin{aligned}
Hg(s) &= \frac{(b-is)(b+1-is)(c-is)}{(-2is)(1-2is)} (g(s+i) - g(s)) \\
&+ \frac{(b+is)(b+1+is)(c+is)}{(+2is)(1+2is)} (g(s-i) - g(s)) - (b+c)g(s).
\end{aligned}$$

³ Для любых трех гипергеометрических функций ${}_2F_1(p, q; r; y)$, ${}_2F_1(p+k_1, q+l_1; r+m_1; y)$, ${}_2F_1(p+k_2, q+l_2; r+m_2; y)$ с целыми k_j, l_j, m_j существует линейная зависимость с полиномиальными по y коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \left\{ x(x+1) \frac{d}{dx} f(x) \right\} {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx \\
&= - \int_0^\infty f(x) \frac{d}{dx} \{ x^{b+c} (1+x)^{b-c+1} {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) \} dx \\
&= - \int_0^\infty f(x) \left\{ x(x+1) \frac{d}{dx} {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) \right. \\
&\quad \left. + ((2b+1)x + (b+c)) {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) \right\} x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx.
\end{aligned}$$

Теперь все сводится к проверке тождества

$$\begin{aligned}
& - \left\{ x(x+1) \frac{d}{dx} + (2b+1)x + (b+c) \right\} {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) \\
&= \frac{(b-is)(b+1-is)(c-is)}{(-2is)(1-2is)} {}_2F_1(b-1+is, b+1-is; b+c; -x) \\
&\quad - \left(\frac{(b-is)(b+1-is)(c-is)}{(-2is)(1-2is)} + \frac{(b+is)(b+1+is)(c+is)}{(2is)(1+2is)} - b-c \right) \\
&\quad \times {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) \\
&\quad + \frac{(b+is)(b+1+is)(c+is)}{(2is)(1+2is)} {}_2F_1(b+1+is, b-1-is; b+c; -x).
\end{aligned}$$

Оно, в свою очередь, является соотношением между ассоциированными функциями

$$\begin{aligned}
& - \left\{ x(x+1) \frac{d}{dx} + (p+q+1)x + r \right\} {}_2F_1(p, q; r; -x) \\
&= (x^2+x) \frac{pq}{r} {}_2F_1(p+1, q+1; r+1; -x) - (p+q+1)x {}_2F_1(p, q; r; -x) \\
&= \frac{q(q+1)(r-p)}{(1+q-p)(p-q)} ({}_2F_1(p-1, q+1; r; -x) - {}_2F_1(p, q; r; -x)) \\
&\quad + \frac{p(p+1)(r-q)}{(1+p-q)(q-p)} ({}_2F_1(p+1, q-1; r; -x) - {}_2F_1(p, q; r; -x)),
\end{aligned}$$

которое довольно легко проверяется приравниванием тейлоровских коэффициентов при x^k .

§ 3. Ядра Березина

Пространство L^2 на шаре $B_n(\mathbb{K})$, т.е. на симметрическом пространстве

$$U(1, n; \mathbb{K}) / (U(1, \mathbb{K}) \times U(n, \mathbb{K})),$$

допускает естественную деформацию, которая сейчас будет описана (подробнее см. [19] для симметрических пространств ранга 1 и [23] для симметрических пространств произвольного ранга). Основная цель настоящей работы состоит в имитации этой деформации на уровне спецфункций.

3.1. Положительно определенные ядра. Напомним определение положительно определенного ядра (подробное обсуждение и ссылки см. в [23]). Пусть X — множество. Функция $L(x, y)$ на $X \times X$ называется *положительно определенным ядром*, если $L(y, x) = \overline{L(x, y)}$ и для любых $x_1, \dots, x_k \in X$ матрица

$$\det \begin{pmatrix} L(x_1, x_1) & \dots & L(x_1, x_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L(x_k, x_1) & \dots & L(x_k, x_k) \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена.

Пусть L — положительно определенное ядро на множестве X . Тогда существует гильбертово пространство $H = H[L]$ и система векторов $v_x \in H$, нумеруемая точками $x \in X$, такая, что

- 1) линейная оболочка векторов v_x плотна в $H[L]$,
- 2) $\langle v_x, v_y \rangle = L(y, x)$.

Далее, каждому вектору $h \in H[L]$ мы поставим в соответствие функцию $f_h(x)$ на X по формуле

$$f_h(x) = \langle h, v_x \rangle.$$

Таким образом, пространство H реализуется как некоторое пространство функций на X , это пространство функций мы обозначим через $H^\circ[L]$. Очевидно, векторам $v_a \in H[L]$ соответствуют функции

$$\varphi_a(x) = L(x, a),$$

при этом для любой $f \in H^\circ[L]$ выполнено *воспроизводящее свойство*

$$\langle f, \varphi_a \rangle_{H^\circ[L]} = f(a). \quad (3.1)$$

Это тождество дает некоторое, не вполне конструктивное, описание скалярного произведения в $H^\circ[L]$. Говорят также, что L — *воспроизводящее ядро* пространства $H^\circ[L]$.

3.2. Ядра Березина. Ядро Березина $L_\theta(z, u)$ на $B_n(\mathbb{K})$ определяется формулой

$$L_\theta(z, u) = |1 - \langle z, u \rangle|^{-\theta}. \quad (3.2)$$

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ядро $L_\theta(z, u)$ положительно определено для всех $\theta \geq 0$, а в случае $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ — при $\theta \geq 2$. Группа $U(1, n; \mathbb{K})$ действует в $H^\circ(L_\theta)$ унитарными операторами по формуле

$$T_\theta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(z) = f((a + zc)^{-1}(b + zd)) |a + zc|^{-\theta}.$$

3.3. Другой вариант определения. Рассмотрим ядро на $B_n(\mathbb{K})$, заданное формулой

$$M_\theta(z, u) = \frac{(1 - \langle z, z \rangle)^{\theta/2} (1 - \langle u, u \rangle)^{\theta/2}}{|1 - \langle z, u \rangle|^\theta}.$$

Рассмотрим связанные с этим ядром пространства $H(M_\theta)$, $H^\circ(M_\theta)$. Группа $U(1, n; \mathbb{K})$ действует в пространстве $H^\circ[M_\theta]$ заменами переменной по формуле

$$R_\theta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(z) = f((a + zc)^{-1}(b + zd)). \quad (3.3)$$

Легко видеть, что конструкции пп. 3.2 и 3.3 равносильны. Канонический унитарный $U(1, n; \mathbb{K})$ -сплетающий оператор $H^\circ[L_\theta] \rightarrow H^\circ[M_\theta]$ — это просто оператор умножения на функцию $(1 - \langle z, z \rangle)^{\theta/2}$.

3.4. Более материальное описание пространства $H^\circ(L_\theta)$. Большой разницы между случаями $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ нет, мы в качестве основного примера будем рассматривать $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Дадим более конструктивное описание пространства $H^\circ(L_\theta)$ в этом случае (с дополнительным ограничением $\theta > n$).

Для этого рассмотрим пространство V_θ голоморфных функций в шаре $B_n(\mathbb{C})$ со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_{V_\theta} = \frac{\Gamma(\theta)}{\pi^n \Gamma(\theta - n)} \int_{B_n(\mathbb{C})} f(z) \overline{g(z)} (1 - \langle z, z \rangle)^{\theta - n - 1} dz.$$

Универсальная накрывающая группа группы $U(1, n) = U(1, n; \mathbb{C})$ действует в пространстве V_θ унитарными операторами по формуле

$$\mathcal{U}_\theta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(z) = f((a + zc)^{-1}(b + zd)) (a + zc)^{-\theta}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для целого θ семейство операторов $\mathcal{U}_\theta$ задает линейное представление группы $U(1, n)$. Если θ не является целым числом, то

$$(a + zc)^{-\theta} = (1 + zca^{-1})^{-\theta} e^{-\theta(\ln a + 2\pi ki)}.$$

Легко показать, что $\langle ca^{-1}, ca^{-1} \rangle < 1$, значит, $(1 + zca^{-1})^{-\theta}$ канонически определено при $\langle z, z \rangle < 1$. Поэтому оператор $\mathcal{U}_\theta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ определен с точностью до множителя $e^{2\pi ki\theta}$, и в случае нецелого θ мы получаем проективное представление группы $U(1, n)$ или, что то же самое, линейное представление ее универсальной накрывающей.

Несложное вычисление (с интегралом Дирихле, см., например, [30; 1.8]) показывает, что функции $z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ образуют ортогональный базис и

$$\|z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}\|^2 = \frac{k_1! \dots k_n!}{(\theta)_{k_1 + \dots + k_n}}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_a(z) := \left(1 - \sum z_j \bar{a}_j\right)^{-\theta} = \sum_{k_1, \dots, k_n} \frac{(\theta)_{k_1 + \dots + k_n} \bar{a}_1^{k_1} \dots \bar{a}_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}. \quad (3.5)$$

Из равенств (3.4), (3.5) вытекает, что для любой функции $f(z)$, голоморфной в шаре, выполнено

$$\langle f, \varphi_a \rangle_{V_\theta} = f(a).$$

Итак, пространство V_θ определяется воспроизводящим ядром

$$K(z, u) = (1 - \langle z, u \rangle)^{-\theta}.$$

Далее мы замечаем, что функция, голоморфная в $B_n(\mathbb{C})$, однозначно определяется своим ограничением на $B_n(\mathbb{R})$, поэтому мы можем рассматривать пространство V_θ как некоторое пространство функций на $B_n(\mathbb{R})$. Это пространство функций как раз и определяется ядром Березина L_θ на $B_n(\mathbb{R})$.

Еще раз подчеркнем, что в пространстве $H^\circ[L_\theta]$ на $B_n(\mathbb{R})$ действует группа $U(1, n)$, бóльшая, чем $O(1, n)^4$, подробнее см. [23].

3.5. Формула Планшереля. Отметим, что группа $U(1, n; \mathbb{K})$ действует в пространствах $L^2(B_n(\mathbb{K}))$ и во всех пространствах $H^\circ(M_\theta)$ по одной и той же формуле (1.7), (3.3). Рассмотрим следующий оператор, с точностью до функционального множителя совпадающий с оператором (1.9):

$$\begin{aligned} R_\theta f(h, s) &= \frac{1}{\Gamma(b+c)|\Gamma(\theta-b+is)|^2} \\ &\times \int_{B_n(\mathbb{K})} f(z) \frac{|1 - \langle z, h \rangle|^{-(n+1)r/2+1+is}}{|1 - \langle z, z \rangle|^{(n+1)r/4+1/2+is/2}} dz. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда, как показано у ван Дейка и Хилле [19], при $\theta > b = (n+1)r/4 - 1/2$ оператор R_θ является унитарным оператором

$$H^\circ(M_\theta) \rightarrow L^2(S^{r^n-1} \times \mathbb{R}_+, \tau(s) dh ds),$$

где dh – мера Лебега на сфере, а

$$\tau(s) = \frac{1}{\Gamma(\theta)\Gamma(\theta-b+c)} \left| \frac{\Gamma(\theta-b+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2. \quad (3.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если мы уберем выражение $|\Gamma^2(\theta-b+is)|^2$ из знаменателя в (3.6), то в (3.7) это же выражение переместится в знаменатель; нормировка (3.6) по ряду причин более удобна.

В § 5 мы получим теорему 5.3, имитирующую формулу Планшереля (3.7) на уровне индексного преобразования; теорема ван Дейка и Хилле является частным случаем теоремы 5.3.

⁴В случае комплексного шара аналогичной надгруппой является $U(1, n) \times U(1, n)$, а в случае кватернионного – соответственно $U(2, 2n)$.

3.6. Радиальные части пространств Березина. Как и в п. 3.4, мы для определенности остановимся на случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Рассмотрим пространство голоморфных функций V_θ , определенное в п. 3.4, и в нем подпространство $V_\theta^{O(n)}$ (*радиальное пространство Березина*), состоящее из $O(n)$ -инвариантных функций.

Понятно, что элементы пространства $V_\theta^{O(n)}$ имеют вид

$$g(z_1^2 + \dots + z_n^2) = \sum c_p (z_1^2 + \dots + z_n^2)^p.$$

Поэтому $V_\theta^{O(n)}$ можно рассматривать как пространство голоморфных функций от переменной

$$u = z_1^2 + \dots + z_n^2,$$

лежащей в круге $|u| < 1$.

ЛЕММА 3.1. *Векторы u^p образуют ортогональный базис в пространстве $V_\theta^{O(n)}$, причем*

$$\|u^p\|^2 = \frac{p! (n/2)_p}{(\theta/2)_p (\theta/2 + 1/2)_p}. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что векторы u^p попарно ортогональны, поэтому нам достаточно вычислить $\|u^p\|^2$. Используя соотношения ортогональности (3.4), получаем

$$\begin{aligned} \|u^p\|^2 &= \|(z_1^2 + \dots + z_n^2)^p\|^2 = \sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0, \sum k_j = p} \left(\frac{p!}{k_1! \dots k_n!} \right)^2 \|z_1^{2k_1} \dots z_n^{2k_n}\|^2 \\ &= \sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0, \sum k_j = p} \left(\frac{p!}{k_1! \dots k_n!} \right)^2 \frac{2k_1! \dots 2k_n!}{(\theta)_{2p}}. \end{aligned}$$

Нам достаточно вычислить

$$\sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0, \sum k_j = p} \frac{2k_1! \dots 2k_n!}{(k_1! \dots k_n!)^2}. \quad (3.9)$$

Обозначим слагаемое этой суммы через $A_{k_1, \dots, k_n}$. Рассмотрим производящую функцию

$$\begin{aligned} h(y_1, \dots, y_n) &:= \sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0} A_{k_1, \dots, k_n} y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} \\ &= \prod_{m=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k!}{k! k!} y_m^k = \prod_{m=1}^n (1 - 4y_m)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Выражение (3.9) есть коэффициент при y^p в равенстве

$$h(y, \dots, y) = (1 - 4y)^{-n/2},$$

и это дает искомый результат.

Пространства, имитирующие $V_\theta^{O(n)}$, введены ниже в п. 5.1.

3.7. Задача Эрстеда. Пусть b, c по-прежнему задаются формулами (1.12). При $\theta > b$ представление $U(1, n; \mathbb{K})$ в $H^\circ[L_\theta]$ эквивалентно представлению в $L^2(B_n(\mathbb{K}))$. Естественно возникает следующий вопрос:

можно ли написать явно унитарный сплетающий оператор

$$S: L^2(B_n(\mathbb{K})) \rightarrow H^\circ[L_\theta] ?$$

Легко написать общий вид такого оператора. А именно S есть произведение трех операторов

$$S = \text{const} \cdot R_\theta^{-1} M A,$$

где A задан формулой (1.9), R_θ задан формулой (3.6), а оператор

$$M: L^2\left(\mathbb{R}_+, \left|\frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2\right) \rightarrow L^2\left(\mathbb{R}_+, \left|\frac{\Gamma(\theta-b+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2\right)$$

есть оператор деления на функцию $\psi(s)$, удовлетворяющую условию

$$|\psi(s)| = |\Gamma(\theta - b + is)|.$$

ЛЕММА 3.2. *Оператор S задается формулой*

$$Sf(z) = \int_{B_n(\mathbb{K})} \Lambda\left(\frac{|z-u|^2}{(1-|z|^2)(1-|u|^2)}\right) f(u) dm(u),$$

где dm — инвариантная мера на шаре, а

$$\Lambda(x) = \text{const} \cdot \int_0^\infty \overline{\psi(s)} \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) ds. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию, равную единице, из пространства V_θ . Ее прообраз относительно оператора S легко вычисляется и задается формулой (3.10), где $x = |z|^2/(1-|z|^2)$. В силу воспроизводящего свойства для любого элемента $g \in V_\theta$ выполнено $\langle g, 1 \rangle = g(0)$. В силу унитарности оператора S для любой функции $f \in L^2$ выполнено

$$Sf(0) = \int_{B_n(\mathbb{K})} \Lambda\left(\frac{|z|^2}{1-|z|^2}\right) dm(z).$$

Теперь ядро оператора S восстанавливается из соображений инвариантности.

Встает вопрос о том, можно ли подобрать $\psi(s)$ так, чтобы интеграл (3.10) можно было явно вычислить. Многолетние попытки автора сделать это были безуспешны, мы склонны думать, что это невозможно. По-видимому, из всех возможных функций ψ простейший вариант

$$\psi(s) = \Gamma(\theta - b - is)$$

является наилучшим.

В §6 мы пытаемся понять, следует ли полученный интеграл вида (3.10) считать новой спецфункцией.

Есть “метафизический” довод, заставляющий автора склоняться к положительному ответу на этот вопрос. Пусть, например, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Тогда в пространстве V_θ действует группа $U(1, n)$, бóльшая, чем группа $O(1, n)$, действующая в $L^2(B_n(\mathbb{R}))$. отождествляя L^2 с V_θ , мы “заставляем” действовать группу $U(1, n)$ и в $L^2(B_n(\mathbb{R}))$. Естественно думать, что увеличение группы симметрий должно повлечь нетривиальный анализ на уровне спецфункций.

Другое обстоятельство, кажущееся автору приятным, – то, что для трех серий полупростых групп $O(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{C})$, $U(p, q)$ соответствующая Λ -функция выражается как определитель, составленный из Λ -функций, связанных с пространствами ранга 1, см. §8.

§4. Многочлены Хана: предварительные сведения

4.1. Определение. Пусть $a, b, c > 0$. Непрерывные двойственные многочлены Хана (см. [30], [31]) определяются формулой

$$S_n(s^2; a, b, c) = (a+b)_n (a+c)_n {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, a+is, a-is \\ a+b, a+c \end{matrix}; 1 \right].$$

Очевидно, выражение $S_n(s^2; a, b, c)$ не меняется при перестановке параметров b, c . Из формулы Куммера (см. [30; следствие 3.3.5])

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma \\ \delta, \varepsilon \end{matrix}; 1 \right] = \frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(\delta + \varepsilon - \alpha - \beta - \gamma)}{\Gamma(\varepsilon - \alpha)\Gamma(\delta + \varepsilon - \beta - \gamma)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \alpha, \delta - \beta, \delta - \gamma \\ \delta, \delta + \varepsilon - \beta - \gamma \end{matrix}; 1 \right]$$

вытекает, что $S_n(s^2; a, b, c)$ не меняется при произвольных перестановках a, b, c .

4.2. Соотношения ортогональности. Многочлены Хана являются ортогональным базисом в L^2 на полупрямой с весом

$$\left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2,$$

при этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 S_n(s^2; a, b, c) S_m(s^2; a, b, c) dx \\ = \Gamma(a+b+n)\Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c+n)n! \delta_{m,n}. \end{aligned}$$

4.3. Разностные уравнения. Определим разностный оператор

$$\mathcal{L}y(s) = B(s)y(s+i) - (B(s) + D(s))y(s) + D(s)y(s-i), \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} B(s) &= \frac{(a-is)(b-is)(c-is)}{(-2is)(1-2is)}, \\ D(s) &= \frac{(a+is)(b+is)(c+is)}{(+2is)(1+2is)}. \end{aligned}$$

Многочлены Хана суть собственные функции этого оператора, а именно

$$\mathcal{L}S_n(s^2; a, b, c) = n \cdot S_n(s^2; a, b, c). \quad (4.2)$$

4.4. Индексное преобразование и многочлены Хана.

ЛЕММА 4.1. Образ функции $(1+x)^{-a-b}$ при преобразовании $J_{b,c}$ равен

$$\frac{\Gamma(a-is)\Gamma(a+is)}{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма сводится к табличному интегралу [32; 7.51.10].

ЛЕММА 4.2. Образ функции

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^n (1+x)^{-a-b}$$

при преобразовании $J_{b,c}$ равен

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(a-is)\Gamma(a+is)}{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, a+is, a-is \\ a+b, a+c \end{matrix}; 1 \right] \\ &= \frac{|\Gamma(a+is)|^2}{\Gamma(a+b+n)\Gamma(a+c+n)} S_n(s^2; a, b, c). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно вычислить образ функции

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n (1+x)^{-a-b} &= \left(\frac{1+x-1}{x+1}\right)^n (1+x)^{-a-b} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} (1+x)^{-a-c-n+k}. \end{aligned}$$

Но образы функций $(1+x)^{-a-c-n+k}$ нами уже вычислены.

§ 5. Нестандартные формулы Планшереля

5.1. Пространства $H_{b,c}^a$. Пусть положительные числа a, b, c удовлетворяют условиям

$$a > b, \quad a > c, \quad 2a > 1. \quad (5.1)$$

Рассмотрим пространство W^a голоморфных функций в круге $|z| < 1$, удовлетворяющих условию

$$\iint_{|z|<1} |f(z)|^2 (1-|z|^2)^{2a-2} dz < \infty,$$

где через dz обозначена мера Лебега в круге.

Введем в пространстве W^a скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi\Gamma(2a-1)} \iint_{|z|<1} f(z) \overline{g(z)} (1-|z|^2)^{2a-2} {}_2F_1(a-b, a-c; 2a-1; 1-|z|^2) dz.$$

Полученное гильбертово пространство мы обозначим через $W_{b,c}^a$.

ЗАМЕЧАНИЕ. По запасу функций пространство $W_{b,c}^a$ не зависит от b, c и совпадает с W^a .

ЛЕММА 5.1. *Функции z^k образуют в $W_{b,c}^a$ ортогональный базис, причем*

$$\langle z^k, z^k \rangle_{W_{b,c}^a} = \frac{k! \Gamma(b+c+k)}{\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+k)}. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ортогональность функций z^k очевидна, вычислим

$$\begin{aligned} \langle z^k, z^k \rangle &= \frac{1}{\pi \Gamma(2a-1)} \iint_{|z| < 1} |z|^{2k} (1-|z|^2)^{2a-2} {}_2F_1(a-b, a-c; 2a-1; 1-|z|^2) dz \\ &= \frac{2}{\Gamma(2a-1)} \int_0^1 r^{2k+1} (1-r^2)^{2a-2} {}_2F_1(a-b, a-c; 2a-1; 1-r^2) dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(2a-1)} \int_0^1 y^k (1-y)^{2a-2} {}_2F_1(a-b, a-c; 2a-1; 1-y) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(2a-1)} \int_0^1 (1-v)^k v^{2a-2} {}_2F_1(a-b, a-c; 2a-1; v) dv. \end{aligned}$$

Далее все сводится к табличному интегралу [32; 7.512.4].

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы видим, что радиальные пространства Березина $V_\theta^{O(n)}$, введенные выше в п. 3.6, являются частным случаем пространств $W_{b,c}^a$ при

$$b = \frac{n}{4} - \frac{1}{4}, \quad c = \frac{n}{4} + \frac{1}{4}, \quad a = \theta - \frac{n}{4} + \frac{1}{4}.$$

5.2. Воспроизводящее ядро пространства $W_{b,c}^a$.

ЛЕММА 5.2. *Воспроизводящее ядро пространства $W_{b,c}^a$ равно*

$$K_{b,c}^a(z, u) = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)}{\Gamma(b+c)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+b, a+c \\ b+c \end{matrix}; z\bar{u} \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно. Действительно, положим $\varphi_w(z) = K_{b,c}^a(z, w)$. Тогда для любой голоморфной функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ выполнено

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_w \rangle_{W_{b,c}^a} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k \frac{\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+k)}{k! \Gamma(b+c+k)} \langle z^k, z^k \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k = f(w). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ядра $K_{b,c}^a(z, u)$ являются частными случаями ядер, рассматривавшихся Гроссом и Ричардсом [33], а также частными случаями ядер, изучавшихся Оджиевичем [34].

5.3. Формула Планшереля. Пусть $g \in W_{b,c}^a$. Рассмотрим преобразование

$$J_{b,c}^a g(s) = \frac{1}{|\Gamma(a+is)|^2 \Gamma(b+c)} \int_0^\infty (1+x)^{-a-b} g\left(\frac{x}{x+1}\right) \times {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx.$$

ТЕОРЕМА 5.3. Оператор $J_{b,c}^a$ является унитарным оператором

$$W_{b,c}^a \rightarrow L^2\left(\mathbb{R}_+, \left|\frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)}\right|^2\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образ функции $f(z) = z^k$ при нашем преобразовании есть

$$\frac{S_n(s^2; a, b, c)}{\Gamma(a+b+k)\Gamma(a+c+k)}, \quad (5.3)$$

и теперь унитарность оператора следует из формулы (5.2) и соотношений ортогональности для многочленов Хана.

5.4. Оператор d/dz . Обозначим через W^∞ пространство функций, голоморфных в круге $|z| < 1$ и гладких вплоть до границы. Пусть $a > 1$. Тогда согласно лемме 1.1 для $f \in W^\infty$ функция $J_{b,c}^a f$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} s| < 1 + \varepsilon$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Для любой $f \in W^\infty$ и любого $a > 1$ выполнено

$$J_{b,c}^a \frac{d}{dz} f = \mathcal{L} J_{b,c}^a f,$$

где $\mathcal{L}$ – разностный оператор, заданный формулой (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образ функций z^k задается формулой (5.3), а многочлены Хана удовлетворяют разностным уравнениям (4.2).

§ 6. Λ -функция и ее свойства

Мотивировка для введения функции, рассматриваемой в этом параграфе, содержится выше в п. 3.7.

6.1. Определение. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}_+$. Мы определяем Λ -функцию по формуле

$$\Lambda_{b,c}^a(x) = \frac{1}{\pi \Gamma(b+c)} \int_0^\infty \Gamma(a+is) \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(b-is)\Gamma(c+is)\Gamma(c-is)}{\Gamma(2is)\Gamma(-2is)} \times {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) ds. \quad (6.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $\Lambda_{b,c}^a(x)$ продолжается по голоморфности в область $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b, \operatorname{Re} c > 0$. Нам будет приятнее формулировать ее свойства для вещественных a, b, c .

Нам не удалось выразить интеграл (6.1) через стандартные специальные функции (см. список в [11]) с помощью конечного числа алгебраических операций, за исключением некоторых случаев с выделенными значениями b, c (см. ниже п. 6.6). Мы также склонны думать, что это невозможно. Нетривиальность интеграла (6.1) состоит не столько в том, что подынтегральное выражение несколько замысловато, сколько в необычных пределах интегрирования. Действительно, если при вещественных a, b, c заменить пределы интегрирования на

$$\int_{-\infty}^{+\infty}, \quad (6.2)$$

что равносильно взятию

$$\operatorname{Re} \Lambda_{b,c}^a(x), \quad (6.3)$$

то наш интеграл превращается в интеграл типа Слейтер (см. [35], [36]), и стандартная техника позволяет выписывать для $\operatorname{Re} \Lambda_{b,c}^a(x)$ различные представления в виде рядов. Автору, однако, не удалось на этом пути получить радующего глаз окончательного выражения для $\operatorname{Re} \Lambda_{b,c}^a(x)$.

При некоторых значениях b, c выражение (6.3) может быть вычислено явно (см. п. 6.7).

Если мы подставим $x = 0$ в (6.3), то получим барнсовский интеграл

$$\operatorname{Re} \Lambda_{b,c}^a(0) = \frac{1}{2\pi\Gamma(b+c)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(b-is)\Gamma(c+is)\Gamma(c-is)}{\Gamma(2is)\Gamma(-2is)} ds,$$

который с помощью обычного метода Барнса (см. [35], [36], [30]) представляется в виде суммы двух гипергеометрических рядов типа ${}_4F_4(1)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Lambda_{b,c}^a(0) &= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \Gamma(a-b-n)\Gamma(2b+n)\Gamma(c-b-n)\Gamma(c+b+n)}{n! \Gamma(2b+2n)\Gamma(-2b-2n)} \\ &+ \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \Gamma(a-c-n)\Gamma(2c+n)\Gamma(b-c-n)\Gamma(b+c+n)}{n! \Gamma(2c+2n)\Gamma(-2c-2n)}. \end{aligned}$$

Мы видим, что $\Lambda_{b,c}^a(0)$ является чем-то вроде барнсовского интеграла по незамкнутому контуру. Тем не менее, выражение $\Lambda_{b,c}^a(0)$ все же “лучше” неопределенного барнсовского интеграла

$$\frac{1}{2\pi\Gamma(b+c)} \int_u^{+\infty} \Gamma(a+is) \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(b-is)\Gamma(c+is)\Gamma(c-is)}{\Gamma(2is)\Gamma(-2is)} ds, \quad (6.4)$$

так как точка $s = 0$ является выделенной точкой для второго сомножителя подынтегрального выражения.

6.2. Имитация задачи Эрстеда. Мы рассматриваем пространство $W_{b,c}^a$. Оператор $J_{b,c}^a$ переводит его унитарно в

$$L^2\left(\mathbb{R}_+, \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds\right). \quad (6.5)$$

Далее оператор умножения

$$Mg(s) = \Gamma(a+is)g(s) \quad (6.6)$$

переводит унитарно пространство (6.5) в пространство

$$L^2\left(\mathbb{R}_+, \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds\right),$$

а обратное индексное преобразование $(J_{b,c})^{-1}$ переводит унитарно (6.6) в

$$L^2(\mathbb{R}_+, x^{b+c-1}(1+x)^{b-c} dx).$$

Таким образом, мы получаем унитарный оператор

$$(J_{b,c})^{-1} \circ M \circ J_{b,c}^a: W_{b,c}^a \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+, x^{b+c-1}(1+x)^{b-c} dx).$$

Этот оператор и есть имитация оператора

$$V_\theta \rightarrow L^2(\mathcal{B}_m(\mathbb{K})),$$

обсуждавшегося в п. 3.7. Функция $\Lambda_{b,c}^a$ есть образ функции $f(z) = 1$ при этом отображении.

6.3. Прямые следствия определения Λ -функции. Формула обращения для индексного преобразования влечет

$$\frac{1}{\Gamma(b+c)} \int_0^\infty \Lambda_{b,c}^a(x) {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx = \Gamma(a+is).$$

Из формулы Планшереля для индексного преобразования следует

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Lambda_{b,c}^a(x) \overline{\Lambda_{b,c}^a(x)} x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+is)\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds \\ &= \Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(b+c) \end{aligned}$$

(по поводу последней строчки см. [30; 3.6]).

6.4. Дифференциально-разностные уравнения. Тожество

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -x) = (1+x)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; -x)$$

(см. [29; том 1, 2.1(23)]) влечет

$$\Lambda_{b,c}^a(x) = (1+x)^{c-b} \Lambda_{c,b}^a(x). \quad (6.7)$$

Дифференцируя интеграл (6.1) по параметру x с помощью формулы

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} {}_2F_1(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; x),$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Lambda_{b,c}^a(x) &= -\frac{1}{\Gamma(b+c+1)} \int_0^\infty \Gamma(a+is) \left| \frac{\Gamma(b+1+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 \\ &\quad \times {}_2F_1(b+1+is, b+1-is; b+c+1; -x) ds = -\Lambda_{b+1,c}^a(x) \end{aligned}$$

и окончательно

$$\frac{d}{dx} \Lambda_{b,c}^a(x) = -\Lambda_{b+1,c}^a(x). \quad (6.8)$$

Отметим следствие из формул (6.7), (6.8):

$$\Lambda_{b+k,c+l}^a(x) = (-1)^{k+l} (1+x)^{c+l-b-k} \frac{d^l}{dx^l} (1+x)^{b+k-c} \frac{d^k}{dx^k} \Lambda_{b,c}^a(x). \quad (6.9)$$

Используя формулу (см. [30; 2.5.7])

$$\left(x \frac{d}{dx} + \gamma - 1 \right) {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = (\gamma - 1) {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma - 1; x),$$

мы получаем

$$\begin{aligned} &\left(x \frac{d}{dx} + b + c - 1 \right) \Lambda_{b,c}^a(x) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(b+c-1)} \int_0^\infty \Gamma(a+is) \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c-1+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 (c+is)(c-is) \\ &\quad \times {}_2F_1(b+is, b-is; b+(c-1); -x) ds. \end{aligned}$$

Далее, представляем $(c+is)(c-is)$ в виде

$$(c+is)(c-is) = (c^2 - a^2) + (2a+1)(a+is) - (a+is)(a+1+is)$$

и получаем

$$\left(x \frac{d}{dx} + b + c - 1 \right) \Lambda_{b,c}^a(x) = (c^2 - a^2) \Lambda_{b,c}^a(x) + (2a+1) \Lambda_{b,c}^{a+1}(x) - \Lambda_{b,c}^{a+2}(x) \quad (6.10)$$

или

$$-x \Lambda_{b+1,c}^a(x) = (c^2 - a^2 - b - c + 1) \Lambda_{b,c}^a(x) + (2a+1) \Lambda_{b,c}^{a+1}(x) - \Lambda_{b,c}^{a+2}(x). \quad (6.11)$$

Приведенный нами список разностных уравнений заведомо неполон.

6.5. Один интеграл.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Для $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty \Lambda_{b,c}^a(x) \overline{\Lambda_{b,c}^{a+n}(x)} x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dx \\ &= (2a)_{2n} \Gamma(a+c) \Gamma(b+c) \Gamma(a+b) {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -n/2, -(n+1)/2, a+b, a+c \\ -n+1, 2a, 2a+1 \end{matrix}; 1 \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Отметим, что выражение ${}_4F_3$ в нашем случае является не рядом, а конечной суммой. Правую часть можно также переписать в форме

$$\begin{aligned} & \Gamma(a+b) \Gamma(a+c) \Gamma(b+c) (2a)_{2n} \\ & - n \Gamma(a+b+1) \Gamma(a+c+1) \Gamma(b+c) (2a+2)_{2n-2} + n \Gamma(b+c) \\ & \times \sum_{k=2}^{[(n+1)/2]} \frac{(n-k-1) \cdots (n-2k+1)}{k!} \Gamma(a+b+k) \Gamma(a+c+k) (2a+2k)_{2n-2k}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы Планшереля наш интеграл равен

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} [\Gamma(a+is) \overline{\Gamma(a+is+n)}] \left| \frac{\Gamma(b+is) \Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [(a+is)_n + (a-is)_n] \left| \frac{\Gamma(a+is) \Gamma(b+is) \Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds. \end{aligned} \quad (6.13)$$

ЛЕММА 6.2.

$$\begin{aligned} & (a+is)_n + (a-is)_n \\ &= (2a)_{2n} - n(2a+2)_{2n-2} (a+is)(a-is) \\ & \quad + n \sum_{k=2}^{[(n+1)/2]} \frac{(-1)^k (-n+k+1)_{k-1}}{k!} (2a+2k)_{2n-2k} (a+is)_k (a-is)_k \\ &= (2a)_{2n} \sum_{j=0}^{[(n+1)/2]} \frac{(-n/2)_j (-n+1)/2)_j (a-is)_j (a+is)_j}{j! (-n+1)_j (2a)_{2j}}. \end{aligned}$$

С помощью леммы 6.2 интеграл (6.13) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & (2a)_{2n} \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} \frac{(-n/2)_k (-n+1)/2)_k}{k! (-n+1)_k (2a)_{2k}} \\ & \quad \times \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+j+is) \Gamma(b+is) \Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 ds \\ &= (2a)_{2n} \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} \frac{(-n/2)_k (-n+1)/2)_k}{k! (-n+1)_k (2a)_{2k}} \Gamma(b+c) \Gamma(a+j+b) \Gamma(a+j+c), \end{aligned}$$

что и влечет искомый результат.

6.6. Связь с λ -функцией. Функция $\lambda(z, a)$ задается формулой

$$\lambda(z, a) := \int_0^a z^{-t} \Gamma(t+1) dt.$$

Нам будет удобней переобозначить ее как

$$\lambda^*(z, b) = \int_b^{i\infty} z^{-t} \Gamma(t+1) dt$$

(это тот же неопределенный интеграл с другой начальной точкой). Функция λ входит в довольно экзотическое семейство спецфункций (иногда они называются *функциями типа Вольтерра*), включающее также

$$\begin{aligned} \mu(z, p) &= \int_0^\infty \frac{t^p z^t dt}{\Gamma(t+1)}; & \mu(z, p, \rho) &= \int_0^\infty \frac{t^p z^{t+\rho} dt}{\Gamma(\rho+t+1)}; \\ \nu(z) &= \int_0^\infty \frac{z^t dt}{\Gamma(t+1)}; & \nu(z, \rho) &= \int_0^\infty \frac{z^{t+\rho} dt}{\Gamma(\rho+t+1)}. \end{aligned}$$

Отметим некоторое внешнее сходство этих функций с (6.1) – это интегралы, напоминающие барнсовские, но имеющие “неправильные” пределы интегрирования. Функции $\mu(z, p)$, $\mu(z, p, \rho)$ появляются у Вольтерра [37] в связи с дробными дифференцированиями с логарифмическими добавками (см. также [10]). Далее функции μ, ν оживленно обсуждались во французских и бельгийских математических журналах первой половины 40-х годов XX века (Humbert, Poli, Colombo, Parodi и др., см., например, [38], [39]). Первое упоминание о функции λ , которое мне удалось найти, содержится в таблицах Мак-Лахлана, Гумберта, Поли [40].

Теория функций ν, μ излагается в [29; 18.3] (там же есть большая библиография), интегралы с функциями ν, μ, λ можно найти в таблицах Прудникова, Брычкова, Маричева, см. [11; соответствующие разделы в томах 3–5].

Сейчас мы покажем, что функции

$$\Lambda_{1/2+k,l}^a(x), \quad \Lambda_{k,1/2+l}^a(x)$$

выражаются через функцию $\lambda^*(z, b)$ (в частности это так для Λ -функций, связанных с группами подсерии $O(1, 2n+1)$). Рассмотрим, например, функцию

$$\begin{aligned} \Lambda_{1/2,1}^a(x) &:= \frac{1}{\pi \Gamma(3/2)} \int_0^\infty \Gamma(a+is) \left| \frac{\Gamma(1/2+is)\Gamma(1+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 \frac{1}{2s\sqrt{x}} \sin(2s \operatorname{arcsch} \sqrt{x}) ds \\ &= -\frac{4}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty \Gamma(a+is) is [e^{2is \operatorname{arcsch} \sqrt{x}} - e^{-2is \operatorname{arcsch} \sqrt{x}}] ds \\ &= -\frac{4}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty (\Gamma(a+1+is) - a\Gamma(a+is)) \\ &\quad \times [(\sqrt{x^2+1}+x)^{2is} - (\sqrt{x^2+1}-x)^{2is}] ds, \end{aligned}$$

и мы получаем сумму четырех интегралов, выражаемых через функцию λ^* .

Далее, применяя формулу (6.9), мы получаем выражение для $\Lambda_{1/2+k,1+l}^a(x)$ через производные от функции λ^* . Случай функций $\Lambda_{k,1/2+l}^a$ аналогичен.

Отметим, что производные от функции λ^* выражаются через саму функцию λ^* :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \lambda^*(z, b) &= - \int_b^{+\infty} \frac{t}{z} z^{-t} \Gamma(t+1) dt \\ &= - \frac{1}{z} \int_b^{+\infty} (\Gamma(t+2) - \Gamma(t+1)) z^{-t} dt = -\lambda^*(z, b+1) + \frac{1}{z} \lambda^*(z, b). \end{aligned}$$

6.7. Явно вычислимые случаи для $\operatorname{Re} \Lambda_{b,c}^a$. Пусть $k, l = 0, 1, 2, \dots$. Покажем, что следующие функции

$$\operatorname{Re} \Lambda_{1/2+k,l}^a(x), \quad \operatorname{Re} \Lambda_{k,1/2+l}^a(x)$$

могут быть явно вычислены. Вычислим, например,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Lambda_{1/2,1}^a &:= \operatorname{const} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(a+is) s^2 \frac{1}{2s\sqrt{x}} \sin(2s \operatorname{arcsch} \sqrt{x}) ds \\ &= \operatorname{const} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Gamma(a+1+is) - a\Gamma(a+is)) \\ &\quad \times [(\sqrt{x^2+1}+x)^{2is} - (\sqrt{x^2+1}-x)^{2is}] ds. \end{aligned}$$

Применяя формулу (см., например [30; (2.4.1)])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(u+t) z^t dt = z^u e^{-z},$$

получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{const} &\left[(x + \sqrt{x^2+1})^{2a} ((x + \sqrt{x^2+1})^2 - a) \exp\{-(x + \sqrt{x^2+1})^2\} \right. \\ &\quad \left. - (\sqrt{x^2+1} - x)^{2a} ((\sqrt{x^2+1} - x)^2 - a) \exp\{-(\sqrt{x^2+1} - x)^2\} \right]. \end{aligned}$$

Чтобы получить явное выражение для $\operatorname{Re} \Lambda_{1/2+k,l}^a(x)$, достаточно применить формулу (6.9).

ЗАМЕЧАНИЕ. Некоторая громоздкость формул этого и предыдущего пункта исчезает, если перейти к новой переменной t по формуле

$$x = \operatorname{sh}^2 t.$$

6.8. Комментарии. Как было объяснено в конце §3, в выборе формулы для Λ -функции есть определенный произвол. Некоторые из свойств нашего списка остаются в силе при произвольном выборе функции ψ (см. (3.10)), т.е. для общих интегралов вида

$$\frac{1}{\pi\Gamma(b+c)} \int_0^\infty \Gamma(a+is) e^{iu(s)} \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(b-is)\Gamma(c+is)\Gamma(c-is)}{\Gamma(2is)\Gamma(-2is)} \times {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) ds,$$

где $\text{Im } u(s) = 0$. Так обстоит дело с интегралами из п. 6.3, дифференциально-разностными уравнениями (6.7)–(6.9), с теоремой 7.1, предложением 7.2, теоремой 8.1.

Забавно, однако, что у Λ -функции есть и ряд свойств, которые не вытекают из мотивировки п. 3.7 и которые верны лишь при нашем выборе функции ψ . К этим свойствам относятся разностное уравнение (6.10) и весь материал пп. 6.5–6.7.

Отметим также, что дифференциально-разностные уравнения п. 6.4 и выражения через λ -функцию остаются в силе для неопределенного слейтеровского интеграла (6.4). Однако никакие другие полученные нами свойства Λ -функции для неопределенных интегралов не выживают.

§7. Зазеркальные базисы и гипергруппа обобщенного сдвига

7.1. Зазеркальные базисы. В п. 5.3 нами был определен унитарный оператор

$$Q = (J_{b,c})^{-1} \circ M \circ J_{b,c}^a: W_{b,c}^a \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+, x^{b+c-1}(1+x)^{b-c} dx).$$

Через

$$\Xi_n(x) = \Xi_n(x; a; b, c)$$

мы обозначим образ функции z^n при преобразовании Q .

ТЕОРЕМА 7.1. а) Система функций Ξ_n образует ортогональный базис в $L^2(\mathbb{R}_+, x^{b+c-1}(1+x)^{b-c} dx)$.

б) Функции Ξ_n выражаются через Λ -функцию по формуле

$$\begin{aligned} \Xi_n(x; a, b, c) &= \frac{(b+c)_n}{\Gamma(a+c)\Gamma(a+b+n)} \\ &\times \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j (-n)_j}{j! (a+c)_j (b+c)_j} x^{-b-c+1} \frac{d^j}{dx^j} x^{b+c+j-1} \Lambda_{b,c+j}^a. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается лишь утверждение б). Напомним, что образ функции z^n под действием оператора $J_{b,c}^a$ является многочленом Хана. Поэтому нам достаточно вычислить интеграл

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(a+b+n)\Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c)} \int_0^\infty \Gamma(a+is) \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 \\ &\times {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) S_n(x^2; a, b, c) ds. \end{aligned}$$

Воспользовавшись симметрией многочленов Хана по a, b, c , мы переписываем этот интеграл в виде

$$\frac{1}{\Gamma(a+b+n)\Gamma(a+c+n)\Gamma(b+c)} \int_0^\infty \Gamma(a+is) \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 \times {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x)(a+c)_n(b+c)_n {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, c+is, c-is \\ a+c, b+c \end{matrix}; 1\right) ds.$$

Разлагая ${}_3F_2$ в сумму, получаем

$$\frac{(b+c)_n}{\Gamma(a+b+n)\Gamma(a+c)\Gamma(b+c)} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{j!(a+c)_j(b+c)_j} \times \int_0^\infty \Gamma(a+is) \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+j+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -x) ds.$$

Далее мы применяем формулу [29; том 1, 2.8(22)]

$$(\mu)_k y^{\mu-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \mu; y) = \frac{d^k}{dy^k} y^{\mu+k-1} {}_2F_1(\alpha, \beta; \mu+k; y)$$

и получаем

$$\frac{(b+c)_n}{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j}{j!(a+c)_j(b+c)_j} \frac{1}{\Gamma(b+c+j)} (-1)^j x^{1-b-c} \frac{d^j}{dx^j} x^{b+c+j-1} \times \int_0^\infty \Gamma(a+is) \left| \frac{\Gamma(b+is)\Gamma(c+j+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 {}_2F_1(b+is, b-is; b+(c+j); -x) ds,$$

что и дает искомое выражение.

7.2. Операторы обобщенного сдвига. Гипергруппа обобщенного сдвига — существенный элемент теории индексного гипергеометрического преобразования (см. [5], [7]). Мы лишь слегка коснемся этого предмета.

Рассмотрим множество $J \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, состоящее из точек (x, y, z) таких, что три числа $\operatorname{arcsch} \sqrt{x}$, $\operatorname{arcsch} \sqrt{y}$, $\operatorname{arcsch} \sqrt{z}$ удовлетворяют неравенству треугольника. Рассмотрим функцию $K(x, y, z)$ на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, равную нулю тождественно вне множества J , а на множестве J равную

$$K(x, y, z) = \frac{2^{-4b}\Gamma(b+c)}{\Gamma(b+c-1/2)} \frac{((1+x)(1+y)(1+z))^{c-1}}{(xyz)^{b+c-1}} \times (1-B^2)^{b+c-1/2} {}_2F_1\left(2b-1, 2c-1; b+c-\frac{1}{2}; \frac{1-B}{2}\right),$$

где

$$B = \frac{x+y+z+2}{2(1+x)(1+y)(1+z)}.$$

Оператор обобщенного сдвига T_z в $L^2(\mathbb{R}_+, x^{b+c-1}(1+x)^{b-c})$ задан формулой

$$T_z f(y) = \int_0^\infty K(x, y, z) f(x) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} dy.$$

Известно, что

$$J_{b,c} T_z (J_{b,c})^{-1} g(s) = {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -z) f(s). \quad (7.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2.

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \Lambda_{b,c}^a(x) \overline{\Lambda_{b,c}^a(x)} K(x, y, z) x^{b+c-1} (1+x)^{b-c} y^{b+c-1} (1+y)^{b-c} dx dy \\ & = \Gamma(a+b) \Gamma(a+c) \Gamma(b+c) (1+z)^{-a-b}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение в левой части есть скалярное произведение $\Lambda_{b,c}^a$ и $T_z \Lambda_{b,c}^a$ в $L^2(\mathbb{R}_+, x^{b+c-1} (1+x)^{b-c})$. В силу формулы Планшереля и (7.1) это равно

$$\int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(b+is) \Gamma(c+is)}{\Gamma(2is)} \right|^2 \Gamma(a+is) \overline{\Gamma(a+is)} {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -z) ds.$$

Последнее выражение есть обратное индексное преобразование от $|\Gamma(a+is)|^2$. Но оно нам известно из леммы 4.1.

7.3. Обобщенный сдвиг и зазеркальные базисы. По-видимому, оператор обобщенного сдвига имеет в зазеркальном базисе простую явно вычислимую матрицу.

Автор умеет вычислять лишь ее первую строку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3.

$$T_z \Lambda_{b,c}^a = T_z \Xi_0(x; a, b, c) = (1+z)^{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (b+c)_n} \left(\frac{z}{z+1} \right)^n \Xi_n(x; a, b, c).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индексное преобразование от $T_z \Lambda_{b,c}^a$ равно

$$\begin{aligned} & \Gamma(a+is) {}_2F_1(b+is, b-is; b+c; -z) \\ & = \Gamma(a+is) (1+z)^{-b-is} {}_2F_1\left(b+is, c+is; b+c; \frac{z}{z+1}\right) \\ & = \Gamma(a+is) (1+z)^{a-b} \left(1 - \frac{z}{z+1}\right)^{a+is} {}_2F_1\left(b+is, c+is; b+c; \frac{z}{z+1}\right). \end{aligned}$$

Используя производящую функцию для многочленов Хана (см. [30; с. 349]), мы получаем

$$\Gamma(a+is) (1+z)^{a-b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(x^2; a, b, c)}{k! (b+c)_k} \left(\frac{z}{z+1} \right)^k,$$

а это равносильно нашему утверждению.

§ 8. Приложение Λ -функции и зазеркальных базисов.

Симметрические пространства $U(p, q)/(U(p) \times U(q))$

8.1. Пространство $U(p, q)/(U(p) \times U(q))$. Пусть $p \leq q$. Через $U(p, q)$ мы обозначим псевдоунитарную группу порядка (p, q) , т.е. группу всех матриц $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условию

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Через $B_{p,q}$ мы обозначим множество всех матриц над $\mathbb{C}$ размера $p \times q$ с нормой < 1 . Группа $U(p, q)$ действует на $B_{p,q}$ дробно-линейными преобразованиями

$$z \mapsto z^{[g]} := (a + zc)^{-1}(b + zd).$$

Стабилизатор K точки 0 состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad a \in U(p), \quad d \in U(q).$$

Пространство $B_{p,q}$ является однородным симметрическим пространством

$$B_{p,q} = U(p, q)/(U(p) \times U(q)).$$

Мера на пространстве $B_{p,q}$, инвариантная относительно $U(p, q)$, имеет плотность $\det(1 - zz^*)^{-p-q}$ относительно меры Лебега. Группа $U(p, q)$ действует в L^2 по инвариантной мере заменами переменных

$$T(g)f(z) = f(z^{[g]}). \quad (8.1)$$

8.2. Пространства Березина $V_\theta^\circ(B_{p,q})$. Пространство Березина $V_\theta^\circ(B_{p,q})$ задается как пространство функций на $B_{p,q}$, определенное ядром

$$K(z, u) = \frac{\det(1 - zz^*)^{\theta/2} \det(1 - uu^*)^{\theta/2}}{|\det(1 - zu^*)|^\theta}.$$

Группа $U(p, q)$ действует в $V_\theta^\circ(B_{p,q})$ по формуле (8.1). При достаточно больших θ представление $U(p, q)$ в $V_\theta^\circ(B_{p,q})$ эквивалентно представлению в L^2 (см. [16], а также [18], [23]). Задача Эрстеда состоит в том, чтобы построить явно унитарный сплетающий оператор между этими представлениями.

8.3. Λ -функция пространства $U(p, q)/(U(p) \times U(q))$. Обозначим через $\lambda_1(z), \dots, \lambda_p(z)$ сингулярные числа матрицы z , положим

$$x_j(z) = \frac{\lambda_j^2(z)}{1 - \lambda_j^2(z)}.$$

Мы определяем Λ -функцию пространства $U(p, q)/(U(p) \times U(q))$ по формуле

$$\Lambda^\theta(z) = \det \begin{pmatrix} \Xi_0(x_1) & \dots & \Xi_0(x_p) \\ \Xi_1(x_1) & \dots & \Xi_1(x_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_{p-1}(x_1) & \dots & \Xi_{p-1}(x_p) \end{pmatrix}, \quad (8.2)$$

где

$$\Xi_j(x) = \Xi_j \left(x; \theta - \frac{q+p-1}{2}; \frac{q-p+1}{2}; \frac{q-p+1}{2} \right)$$

— первые p элементов зазеркального базиса.

ТЕОРЕМА 8.1 (см. также [41]). Для $g \in U(p, q)$ через u мы обозначим образ точки $0 \in B_{p,q}$ под действием g . Тогда

$$\int_{B_{p,q}} \Lambda^\theta(z) \overline{\Lambda^\theta(z[g])} \det(1 - zz^*)^{-p-q} dz = \det(1 - uu^*)^{\theta/2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 8.2. Определим функцию $L(z, u)$ на $B_{p,q} \times B_{p,q}$ по формуле

$$L(z, u) = \Lambda(z^{[g_u]}),$$

где $g_u \in U(p, q)$ — любой элемент, переводящий точку $0 \in B_{p,q}$ в точку u . Тогда оператор

$$Mf(z) = \int_{B_{p,q}} L(z, u) f(u) \det(1 - uu^*)^{-p-q} du$$

является унитарным $U(p, q)$ -сплетающим оператором

$$L^2(B_{p,q}) \rightarrow V_\theta^\circ(B_{p,q}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение ядра $L(z, u)$ можно переформулировать следующим образом. Оно задается определителем (8.2), где в качестве чисел λ_j берутся сингулярные числа матрицы

$$(1 - zz^*)^{-1/2} (1 - zu^*) (1 - uu^*)^{-1/2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичная теорема верна для групп серий $O(n, \mathbb{C})$ и $Sp(2n, \mathbb{C})$.

Список литературы

1. Weyl H. Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen (2 Note) // Nachr. Konig. Gess. Wissen. Göttingen. Math.-Phys. 1910. P. 442–467; Weyl H. // Gessamelte Abhandlungen. V. 1. Berlin: Springer-Verlag, 1968. P. 222–247.
2. Mehler F. G. Über eine mit den Kugel und Zylinderfunktionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung // Math. Ann. 1881. V. 18. P. 161–194.
3. Тичмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М.: ИЛ, 1960.
4. Олевский М. Н. О представлении произвольной функции через интеграл с ядром, включающим гипергеометрическую функцию // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69. № 1. С. 11–14.
5. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. The convolution structure for Jacobi function expansions // Ark. Math. 1973. V. 11. P. 245–262.
6. Koornwinder T. H. A new proof of a Paley–Wiener theorem for Jacobi transform // Ark. Math. 1975. V. 13. P. 145–159.
7. Koornwinder T. H. Jacobi functions and analysis on noncompact symmetric spaces // Special functions: group theoretical aspects and applications / ed. R. Askey et al. Dodrecht: Reidel, 1984. P. 1–85.
8. Koornwinder T. H. Special orthogonal polynomial systems mapping to each other by Fourier–Jacobi transform // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1171. P. 174–183.

9. *Yakubovich S. B., Luchko Yu. F.* The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. (Math. Appl. (Dordrecht). V. 287.)
10. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
11. *Прудников А. М., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981–1986.
12. *Koelink E., Stockman J. V.* Askey–Wilson transform scheme // Preprint, <http://xxx.lanl.gov/math/9912140>.
13. *Heckman G. I., Opdam E. M.* Root systems and hypergeometric functions. I // *Compositio Math.* 1987. V. 64. P. 329–352.
14. *Heckman G. I.* Root systems and hypergeometric functions. II // *Compositio Math.* 1987. V. 64. P. 353–373.
15. *Opdam E. M.* Root systems and hypergeometric functions. III, IV // *Compositio Math.* 1988. V. 67. P. 21–49; 191–209.
16. *Березин Ф. А.* Связь между ко и контравариантными символами операторов на классических комплексных классических симметрических пространствах // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. №1. С. 15–17.
17. *Неретин Ю. А., Ольшанский Г. И.* Граничные значения голоморфных функций, особые унитарные представления групп $O(p, q)$ и их пределы при $q \rightarrow 0$ // Записки научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 223. С. 9–91; // *J. Math. Sci. New York.* 1997. V. 87. №6. P. 3983–4035.
18. *Olafsson G., Ørsted B.* Generalizations of the Bargmann transform // Lie theory and its applications in physics. Proceedings of the international workshop, Clausthal, Germany, August 14–17, 1995 / ed. H.-D. Döbner et al. Singapore: World Scientific, 1996. P. 3–14.
19. *van Dijk G., Hille S. C.* Canonical representations related to hyperbolic spaces // *J. Funct. Anal.* 1997. V. 147. №1. P. 109–139.
20. *Hille S. C.* Canonical representations // Ph.D. Thesis. Leiden University, 1999.
21. *Неретин Ю. А.* Матричные аналоги В-функции и формула Планшереля для ядер-представлений Березина // Матем. сб. 2000. Т. 191. №5. С. 67–100; // Preprint, <http://xxx.lanl.gov/math.RT/9905045>.
22. *Неретин Ю. А.* О разделении спектров в анализе ядер Березина // Функци. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. №3. С. 49–62; // Preprint, <http://xxx.lanl.gov/math.RT/9906075>.
23. *Neretin Yu. A.* Plancherel formula for Berezin deformation of L^2 on Riemannian symmetric space // Preprint, <http://xxx.lanl.gov/abs/math/9911020> (to appear in *J. Funct. Anal.*).
24. *Zhang Zhen Kai.* Tensor products of weighted Bergman spaces and invariant Ha-plitz operators // *Math. Scand.* 1992. V. 71. P. 69–84.
25. *Cherednik I.* Harish-Chandra transform and difference operators // Preprint, <http://xxx.lanl.gov.9706010>.
26. *Myller-Lebedeff W.* Sur l'équation hypergéométrique // *C.R. Acad. Sci. Paris.* 1909. V. 149. P. 561–563.
27. *Myller-Lebedeff W.* Orthogonale hypergeometrische Functionen // *Math. Ann.* 1911. V. 70. P. 87–93.
28. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. М.: Мир, 1966.
29. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1–3. М.: Наука, 1965, 1966, 1967.
30. *Andrews G. E., Askey R., Roy R.* Special functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
31. *Vilenkin N. Ya., Klimyk A. U.* Representations of Lie groups and special functions. V. 1. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991. (Math. Appl. (Soviet Ser.). V. 72.)
32. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
33. *Gross K. I., Richards D. S. P.* Total positivity, spherical series, and hypergeometric functions of matrix argument // *J. Approx. Theory.* 1989. V. 59. P. 224–246.
34. *Odziejewicz A.* Quantum algebras and q -special functions related to coherent states maps of the disk // *Comm. Math. Phys.* 1998. V. 192. P. 183–215.

35. *Slater L. J.* Generalized hypergeometric functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966.
36. *Маричев О. И.* Методы вычисления интегралов от специальных функций. Минск: Наука и техника, 1978.
37. *Volterra V.* Teoria delle potenze dei logaritmi e delle funzioni di decomposizione // Mem. Accad. Lincei. Ser. 5. 1916. V. 11. № 4. P. 167–250.
38. *Humbert P., Poli L.* Sur certaines transcendentes liees au calcul symbolique // Bull. Sci. Math. (2). 1944. V. 68. P. 204–214.
39. *Colombo S.* Sur quelques nouvelles correspondances symboliques // Bull. Sci. Math. (2). 1943. V. 67. P. 104–107.
40. *McLachlan N. W., Humbert P., Poli L.* Supplement au formulaire pour le calcul symbolique. Paris: Gauthier-Villars, 1950. (Mem. Sci. Math. V. 113.)
41. *Neretin Yu. A.* Matrix balls, radial analysis of Berezin kernels, and hypergeometric determinants // Preprint, <http://xxx.lanl.gov/abs/math/0012220> (to appear in Moscow Math. J.).

Институт теоретической и экспериментальной физики,
Москва

Поступила в редакцию
08.06.2000