Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Скопина, Ортогональные полиномиальные базисы Шаудера в $C[-1, 1]$ с оптимальным ростом степеней, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 3, 115–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm553>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:08:49

УДК 517.5

М. А. Скопина

Ортогональные полиномиальные базисы Шаудера в $C[-1, 1]$ с оптимальным ростом степеней

Для любого $\varepsilon > 0$ строится ортогональный базис Шаудера в пространстве $C[-1, 1]$, состоящий из алгебраических многочленов P_n степени не выше $n(1 + \varepsilon)$. Рост степеней является минимально возможным.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

В 1961 году П. Л. Ульянов [1] поставил задачу: каким можно сделать минимальный рост степеней многочленов, образующих базис (или ортогональный базис) Шаудера в пространстве $C[a, b]$? Исследования многих авторов посвящены этой и близким к ней проблемам. Подробное изложение истории вопроса приведено, например, в [2], мы отметим лишь ее ключевые моменты. В 1914 году Г. Фабер [3] доказал, что не существует последовательности алгебраических многочленов P_n степени n , образующих базис Шаудера в $C[a, b]$. В [4] Ал. А. Привалов усилил этот результат, показав, что если P_n образуют базис Шаудера в $C[a, b]$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что степень P_n не меньше $n(1 + \varepsilon)$ для $n \geq n_0$. А в [5] он установил окончательность этой оценки, построив пример полиномиального базиса Шаудера, степени которого растут не быстрее, чем $n(1 + \varepsilon)$. Однако этот базис не был ортогональным. Параллельно рассматривалась аналогичная задача для тригонометрических полиномов. Ее удалось решить благодаря использованию всплесков. Д. Оффин, К. Осколков [6] заметили, что незначительная модификация всплесков Мейера дает ортогональный базис Шаудера, в котором степень полиномов лишь в два раза превышает минимальную. Заменив обычное всплеск-разложение на пакет всплесков, Р. А. Лоренц, А. А. Саакян [7] окончательно решили задачу для тригонометрических полиномов. Перенести этот результат на отрезок с помощью стандартного метода индуцированных функций не удастся. В работе Т. Килгоре, Я. Престина, К. Селиж [8] задача решена для алгебраических многочленов, ортогональных с весом Чебышёва первого рода. Для многочленов, ортогональных без веса, до сих пор вопрос оставался открытым. Ответу на него посвящена настоящая работа. Идея построения базиса заимствована из [7]. Реализацию этой идеи осложняли следующие обстоятельства. Определение базисов всплесков (пакетов всплесков) связано с конструкцией кратномасштабного анализа, состоящего из пространств, инвариантных относительно сдвига. При обычном понимании оператора сдвига его нельзя рассматривать на пространствах функций, заданных на

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00467).

отрезке, так как сдвиг выводит за пределы пространства. Мы вводим обобщенные операторы сдвига так, что сохраняются все необходимые свойства сдвига, в частности сдвиг алгебраического многочлена есть многочлен той же степени. Кроме того, мы используем подход к периодическому кратномасштабному анализу, данный автором в [9], вместо стандартного (периодизации кратномасштабного анализа в $L_2(\mathbb{R})$). При таком подходе понятия кратномасштабного анализа и всплесков естественным образом распространяются на произвольное гильбертово пространство.

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует последовательность алгебраических многочленов T_n степени не выше $n(1 + \varepsilon_0)$, попарно ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ и образующих базис Шаудера в пространстве $C[-1, 1]$.*

§ 2. Кратномасштабный анализ в гильбертовом пространстве

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle f, g \rangle$, $f, g \in H$, $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H . Если $f \in H$, то $f = \sum_k \hat{f}(k) X_k$, где $\hat{f}(k) = \langle f, X_k \rangle$ суть коэффициенты Фурье элемента f . Для каждого неотрицательного целого j определим оператор S_j :

$$S_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i 2^{-j} k} \hat{f}(k) X_k.$$

Ясно, что S_j – мультипликаторы, действующие из H в H , и $\|S_j f\| = \|f\|$ для любого $f \in H$. В случае, когда $H = L_2(-\pi, \pi)$, $X_n(t) = e^{int}$, S_j являются операторами сдвига (на $2^{-j+1}\pi$). И в общем случае их также естественно называть операторами сдвига, поскольку сохраняется основное свойство: последовательное применение S_{j_1}, S_{j_2} дает “сдвиг” на $2\pi(2^{-j_1} + 2^{-j_2})$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $G_j \in H$, $V_j = \text{span}\{S_j^n G_j, n = 0, \dots, 2^j - 1\}$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Если коэффициенты Фурье G_j удовлетворяют условиям:*

- G1. $\hat{G}_0(k) = 0$ для любого $k \neq 0$;
- G2. для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ и любого $k = 0, \dots, 2^j - 1$ существует такое $m \in \mathbb{Z}$, что $\hat{G}_j(2^j m + k) \neq 0$;
- G3. для любого $k \in \mathbb{Z}$ существует такое $j \in \mathbb{Z}_+$, что $\hat{G}_j(k) \neq 0$;
- G4. для любого $j = 1, 2, \dots$ и любого $k \in \mathbb{Z}$ существует такое комплексное число δ_k^j , что $\hat{G}_{j-1}(2^j m + k) = \delta_k^j \hat{G}_j(2^j m + k)$ для всех $m \in \mathbb{Z}$,

то

1. $\{S_j^n G_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ – базис в V_j ;
- 1а. $\{S_j^n G_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ является ортонормированным базисом тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{G}_j(2^j m + k)|^2 = 2^{-j} \quad (1)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$;

2. $V_j \subset V_{j+1}$ для любого $j \in \mathbb{Z}_+$;
3. $\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ плотно в H .

Семейство подпространств V_j , удовлетворяющих условиям 1, 2, 3 теоремы 2, назовем *кратномасштабным анализом в H* , а последовательность элементов G_j – *масштабирующей последовательностью*.

Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ и $n = 0, \dots, 2^j - 1$ определим оператор ω_n^j :

$$\omega_n^j f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j m + n) X_{2^j m + n}.$$

Ясно, что

$$S_j^n f = \sum_{k=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} n k} \omega_k^j f.$$

Поскольку $\langle \omega_k^j f, \omega_\ell^j f \rangle = 0$ при $k \neq \ell$, из этого равенства и унитарности матрицы $\{2^{-j/2} e^{2\pi i 2^{-j} n k}\}_{k,n=0}^{2^j-1}$ вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $f \in H$, тогда для любого $j = 0, 1, \dots$

1. $\text{span}\{S_j^n f, n = 0, \dots, 2^j - 1\} = \text{span}\{\omega_n^j f, n = 0, \dots, 2^j - 1\}$;
2. система $\{S_j^n f\}_{n=0}^{2^j-1}$ ортогональна тогда и только тогда, когда $\|\omega_n^j f\|$ не зависит от n , при $\|\omega_n^j f\| = 2^{-j/2}$ она является ортонормированной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Утверждения 1, 1а следуют из леммы 3. Кроме того, по лемме 3 $\{\omega_n^j G_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ – базис в V_j . Поэтому утверждение 2 следует из равенства

$$\begin{aligned} \omega_k^j G_j &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(2^{j+1}\ell + k) X_{2^{j+1}\ell + k} + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(2^{j+1}\ell + 2^j + k) X_{2^{j+1}\ell + 2^j + k} \\ &= \delta_k^{j+1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_{j+1}(2^{j+1}\ell + k) X_{2^{j+1}\ell + k} \\ &\quad + \delta_{2^j+k}^{j+1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_{j+1}(2^{j+1}\ell + 2^j + k) X_{2^{j+1}\ell + 2^j + k} \\ &= \delta_k^{j+1} \omega_k^{j+1} G_{j+1} + \delta_{2^j+k}^{j+1} \omega_{2^j+k}^{j+1} G_{j+1}. \end{aligned}$$

Для доказательства утверждения 3 достаточно проверить, что $X_r \in \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j}$ для всех $r \in \mathbb{Z}$. Положим

$$v_n^0 = G_0, \quad v_n^j = \begin{cases} \omega_n^j G_j, & \text{если } \delta_n^j = 0, \\ \omega_n^j v_n^{j-1}, & \text{если } \delta_n^j \neq 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots$$

В силу свойства G3 существует такое j_0 , что $\widehat{G}_{j_0}(r) \neq 0$. Отсюда и из G4 следует, что $\delta_r^j \neq 0$ при $j \geq j_0$. Поэтому $\widehat{v}_r^j(r) = \widehat{v}_r^{j_0}(r) \neq 0$ для всех $j \geq j_0$. Можно считать $r < 2^{j_0} - 1$. Тогда для $j \geq j_0$

$$s_{2^j-1}(\widehat{v}_r^j(r) X_r - v_r^j) = 0, \quad (2)$$

где $s_N(f)$ — N -я частичная сумма Фурье элемента f . Покажем, что при $j \geq j_0$ справедливо равенство

$$\widehat{v}_r^j(r)X_r - v_r^j = 2^{j_0-j} \sum_{n=0}^{2^{j-j_0}-1} e^{-2\pi i 2^{-j}nr} S_j^n(\widehat{v}_r^{j_0}(r)X_r - v_r^{j_0}). \quad (3)$$

Ясно, что

$$\widehat{v}_r^j(r)X_r = \widehat{v}_r^{j_0}(r)X_r = 2^{j_0-j} \sum_{n=0}^{2^{j-j_0}-1} e^{-2\pi i 2^{-j}nr} S_j^n(\widehat{v}_r^{j_0}(r)X_r).$$

Учитывая соотношение

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i N^{-1}nk} = \begin{cases} 2^N, & \text{если } k = N\ell, \ell \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{если } k \neq N\ell, \ell \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4)$$

имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{2^{j-j_0}-1} e^{-2\pi i 2^{-j}nr} S_j^n v_r^{j_0} \\ &= \sum_{n=0}^{2^{j-j_0}-1} e^{-2\pi i 2^{-j}nr} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i 2^{-j}n(2^{j_0}k+r)} \widehat{v}_r^{j_0}(2^{j_0}k+r) X_{2^{j_0}k+r} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_r^{j_0}(2^{j_0}k+r) X_{2^{j_0}k+r} \sum_{n=0}^{2^{j-j_0}-1} e^{2\pi i 2^{j_0-j}nk} \\ &= 2^{j-j_0} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_r^{j_0}(2^j \ell + r) X_{2^j \ell + r} = 2^{j-j_0} v_r^j. \end{aligned}$$

Сопоставляя соотношения (2), (3), получаем

$$\begin{aligned} \|\widehat{v}_r^j(r)X_r - v_r^j\| &= \left\| 2^{j_0-j} \sum_{n=0}^{2^{j-j_0}-1} e^{-2\pi i 2^{-j}nr} S_j^n(\widehat{v}_r^{j_0}(r)X_r - v_r^{j_0}) \right. \\ &\quad \left. - s_{2^{j-1}} \left(2^{j_0-j} \sum_{n=0}^{2^{j-j_0}-1} e^{-2\pi i 2^{-j}nr} S_j^n(\widehat{v}_r^{j_0}(r)X_r - v_r^{j_0}) \right) \right\| \\ &= \left\| 2^{j_0-j} \sum_{n=0}^{2^{j-j_0}-1} e^{-2\pi i 2^{-j}nr} S_j^n \left(v_r^{j_0}(r)X_r - v_r^{j_0} - s_{2^{j-1}}(\widehat{v}_r^{j_0}(r)X_r - v_r^{j_0}) \right) \right\| \\ &\leq 2^{j_0-j} \sum_{n=0}^{2^{j-j_0}-1} \left\| \widehat{v}_r^{j_0}(r)X_r - v_r^{j_0} - s_{2^{j-1}}(\widehat{v}_r^{j_0}(r)X_r - v_r^{j_0}) \right\| \\ &= \left\| \widehat{v}_r^{j_0}(r)X_r - v_r^{j_0} - s_{2^{j-1}}(\widehat{v}_r^{j_0}(r)X_r - v_r^{j_0}) \right\|. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что правая часть этого соотношения стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$.

Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ определим элемент H_j , задав его коэффициенты Фурье:

$$\widehat{H}_j(r) = e^{\pi i 2^{-j} r} \overline{\delta_{2^j+r}^{j+1}} \widehat{G}_{j+1}(r),$$

и положим

$$W_j = \text{span}\{S_j^n H_j, n = 0, \dots, 2^j - 1\}.$$

Назовем W_j *пространством всплесков*.

ТЕОРЕМА 4. Если в условиях теоремы 2 выполнено (1), то

1. $\{S_j^n H_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ — ортонормированный базис в W_j ,
2. $W_j \oplus V_j = V_{j+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению функций H_j

$$\langle S_j^n H_j, S_j^m H_j \rangle = \sum_{r \in \mathbb{Z}} |\widehat{G}_{j+1}(r)|^2 |\delta_{2^j+r}^{j+1}|^2 e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)r}.$$

Отсюда, учитывая 2^{j+1} -периодичность последовательности δ_k^{j+1} и условие (1), получаем

$$\begin{aligned} \langle S_j^n H_j, S_j^m H_j \rangle &= \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} |\delta_{2^j+k}^{j+1}|^2 e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)k} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\widehat{G}_{j+1}(2^{j+1}\ell + k)|^2 \\ &= 2^{-j-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (|\delta_{2^j+k}^{j+1}|^2 + |\delta_k^{j+1}|^2) e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)k}. \end{aligned}$$

С другой стороны, из свойств G4 и (1) следует

$$\begin{aligned} \langle S_j^n G_j, S_j^m G_j \rangle &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} |\widehat{G}_j(r)|^2 e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)r} \\ &= \sum_{k=0}^{2^{j+1}-1} \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\delta_k^{j+1} \widehat{G}_{j+1}(2^{j+1}\ell + k)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\delta_{2^j+k}^{j+1} \widehat{G}_{j+1}(2^{j+1}\ell + 2^j + k)|^2 \right) e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)k} \\ &= 2^{-j-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} (|\delta_{2^j+k}^{j+1}|^2 + |\delta_k^{j+1}|^2) e^{2\pi i 2^{-j}(n-m)k}. \end{aligned}$$

Отсюда и из ортонормированности системы $\{S_j^n G_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ следует утверждение 1 теоремы 4.

Ввиду 2^{j+1} -периодичности последовательности δ_k^{j+1} имеем

$$\begin{aligned}\omega_k^j H_j &= \omega_k^{j+1} H_j + \omega_{k+2^j}^{j+1} H_j \\ &= e^{\pi i 2^{-j} k} \overline{\delta_{2^j+k}^{j+1}} \omega_k^{j+1} G_{j+1} + e^{\pi i 2^{-j} (k+2^j)} \overline{\delta_{2^{j+1}k}^{j+1}} \omega_{2^j+k}^{j+1} G_{j+1} \\ &= e^{\pi i 2^{-j} k} (\overline{\delta_{2^j+k}^{j+1}} \omega_k^{j+1} G_{j+1} - \overline{\delta_k^{j+1}} \omega_{2^j+k}^{j+1} G_{j+1}).\end{aligned}\quad (5)$$

Отсюда и из леммы 3 следует $W_j \subset V_{j+1}$. Кроме того, по свойству G4

$$\omega_k^j G_j = \delta_k^{j+1} \omega_k^{j+1} G_{j+1} + \delta_{2^j+k}^{j+1} \omega_{2^j+k}^{j+1} G_{j+1}.$$

Это равенство и (5) составляют линейную систему относительно неизвестных $\omega_k^{j+1} G_{j+1}$, $\omega_{2^j+k}^{j+1} G_{j+1}$. Определитель системы равен $e^{\pi i 2^{-j} k} (|\delta_k^{j+1}|^2 + |\delta_{2^j+k}^{j+1}|^2)$. По определению чисел δ_k^j (см. G4) в силу свойства G2 по крайней мере одно из чисел δ_k^{j+1} , $\delta_{2^j+k}^{j+1}$ отлично от нуля. Следовательно, определитель не равен нулю. Отсюда и из леммы 3, принимая во внимание, что $\dim V_j + \dim W_j = \dim V_{j+1}$, получаем утверждение 2 теоремы 4.

§ 3. Построение базиса

Пусть $H = L_2[-1, 1]$, P_n , $n = 0, 1, \dots$, — ортонормированные многочлены Лежандра. Положим $X_0 = P_0$, $X_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_{2n} + iP_{2n-1})$, $X_{-n} = \overline{X_n}$ для $n = 1, 2, \dots$. Ясно, что $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — ортонормированный базис в H . Будем использовать символ $\deg T$ для обозначения степени алгебраического многочлена T , рассматриваемого как полином по системе X_n , т.е. $\deg T = n$ для многочленов степени $2n$ и $2n-1$.

Рассмотрим функцию φ с преобразованием Фурье $\tilde{\varphi}$, обладающим свойствами: $\text{supp } \tilde{\varphi} \subset [-\frac{1}{2}(1+\varepsilon), \frac{1}{2}(1+\varepsilon)]$, $\tilde{\varphi} \equiv 1$ на $[-\frac{1}{2}(1-\varepsilon), \frac{1}{2}(1-\varepsilon)]$, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{6}$, $\tilde{\varphi}^2(x) + \tilde{\varphi}^2(x+1) = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Такая функция φ является масштабирующей (см., например, [10; гл. 5]) для обобщенных всплесков Мейера, рассмотренных в [6]. Масштабирующее уравнение для φ имеет вид: $\tilde{\varphi}(2x) = m_0(x)\tilde{\varphi}(x)$, где m_0 — 1-периодическая функция, $m_0(x) = \tilde{\varphi}(2x)$ на $[-1/2, 1/2]$. Положим $G_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{G}_j(k) X_k$, где $\hat{G}_j(k) = 2^{-j/2} \tilde{\varphi}(2^{-j}k)$. Ввиду финитности $\tilde{\varphi}$ функции G_j суть полиномы, $\deg G_j \leq 2^{j-1}(1+\varepsilon)$. Нетрудно проверить, что последовательность G_j является масштабирующей, т.е. выполнены условия G1–G4 теоремы 2 при $\delta_r^j = 2^{1/2} m_0(2^{-j}r)$. Таким образом, построен кратномасштабный анализ в $L_2[-1, 1]$ и определены соответствующие ему последовательность всплесков H_j и пространства всплесков W_j . Поскольку условие (1), очевидно, выполнено, по теоремам 2, 4 базисы сдвигов $\{S_j^n G_j\}_{n=0}^{2^j-1}$, $\{S_j^n H_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ являются ортонормированными. Введем в рассмотрение еще последовательность $\lambda_r^j = 2^{1/2} e^{2\pi i 2^{-j} r} m_0(2^{-j}r + \frac{1}{2})$ и отметим следующие очевидные свойства чисел δ_r^j , λ_r^j :

$$|\delta_r^j|^2 + |\lambda_r^j|^2 = |\delta_r^j|^2 + |\delta_{r+2^j-1}^j|^2 = |\lambda_r^j|^2 + |\lambda_{r+2^j-1}^j|^2 = 2, \quad (6)$$

$$\delta_r^j \overline{\lambda_r^j} + \delta_{r+2^j-1}^j \overline{\lambda_{r+2^j-1}^j} = 0. \quad (7)$$

Пусть $r \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, обозначим через Δ_k и Λ_k мультипликаторы, заданные на H и определяемые равенствами

$$\widehat{\Delta_k f}(r) = \delta_r^k \widehat{f}(r), \quad \widehat{\Lambda_k f}(r) = \lambda_r^k \widehat{f}(r).$$

Зафиксируем натуральное s . Для целого $j \geq s$ и $\nu = (\nu_{j-s+1}, \dots, \nu_j)$, где ν_k принимает значения 0 и 1, положим

$$H_j^\nu = H_j^{s,\nu} = \prod_{k=j-s+1}^j \Delta_k^{\nu_k} \Lambda_k^{1-\nu_k} H_j, \quad W_j^\nu = \text{span}\{S_{j-s}^n H_j^\nu, n = 0, \dots, 2^{j-s}-1\}.$$

Поскольку обе последовательности $\{\delta_r^j\}, \{\lambda_r^j\}$ 2^j -периодичны, то

$$\begin{aligned} \omega_r^j H_j^\nu &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \prod_{k=j-s+1}^j (\delta_{2^j \ell + r}^k)^{\nu_k} (\lambda_{2^j \ell + r}^k)^{1-\nu_k} \widehat{H}_j(2^j \ell + r) X_{2^j \ell + r} \\ &= \prod_{k=j-s+1}^j (\delta_r^k)^{\nu_k} (\lambda_r^k)^{1-\nu_k} \omega_r^j H_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда и из леммы 3, принимая во внимание, что $\omega_r^{j-s} H_j^\nu = \sum_{\ell=0}^{2^s-1} \omega_{r+2^{j-s}\ell}^j H_j^\nu$, получаем $W_j^\nu \subset W_j$. Теперь покажем, что при $\nu \neq \nu'$ $W_j^\nu \perp W_j^{\nu'}$ и при каждом ν система функций $\{S_{j-s}^n H_j^\nu\}_{n=0}^{2^{j-s}-1}$ является ортонормированным базисом пространства W_j^ν . В силу леммы 3 для этого достаточно установить, что

$$\langle \omega_r^{j-s} H_j^\nu, \omega_r^{j-s} H_j^{\nu'} \rangle = 0 \quad (9)$$

при $\nu \neq \nu'$ и

$$\|\omega_r^{j-s} H_j^\nu\|^2 = 2^{-j+s}. \quad (10)$$

Для доказательства этих равенств проведем индукцию по s . Пусть сначала $s = 1$. Применяя (8), имеем

$$\begin{aligned} \langle \omega_r^{j-1} H_j^\nu, \omega_r^{j-1} H_j^{\nu'} \rangle &= \langle \omega_r^j H_j^\nu, \omega_r^j H_j^{\nu'} \rangle + \langle \omega_{r+2^{j-1}}^j H_j^\nu, \omega_{r+2^{j-1}}^j H_j^{\nu'} \rangle \\ &= (\delta_r^j)^{\nu_j} (\overline{\delta_r^j})^{\nu'_j} (\lambda_r^j)^{1-\nu_j} (\overline{\lambda_r^j})^{1-\nu'_j} \|\omega_r^j H_j\|^2 \\ &\quad + (\delta_{r+2^{j-1}}^j)^{\nu_j} (\overline{\delta_{r+2^{j-1}}^j})^{\nu'_j} (\lambda_{r+2^{j-1}}^j)^{1-\nu_j} (\overline{\lambda_{r+2^{j-1}}^j})^{1-\nu'_j} \|\omega_{r+2^{j-1}}^j H_j\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\|\omega_r^j H_j\|^2 = 2^{-j}$, и применяя равенства (6), (7), получаем (9), (10) для $s = 1$. Теперь предположим, что равенства (9), (10) верны для всех $s < s_0$. Пусть $\nu = (\nu_{j-s_0+1}, \dots, \nu_j)$, $\nu' = (\nu'_{j-s_0+1}, \dots, \nu'_j)$, положим $\mu = (\nu_{j-s_0+2}, \dots, \nu_j)$, $\mu' = (\nu'_{j-s_0+2}, \dots, \nu'_j)$, $\varkappa = \nu_{j-s_0+1}$, $\varkappa' = \nu'_{j-s_0+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \omega_r^{j-s_0} H_j^\nu, \omega_r^{j-s_0} H_j^{\nu'} \rangle &= \langle \omega_r^{j-s_0+1} H_j^\nu, \omega_r^{j-s_0+1} H_j^{\nu'} \rangle + \langle \omega_{r+2^{j-s_0}}^{j-s_0+1} H_j^\nu, \omega_{r+2^{j-s_0}}^{j-s_0+1} H_j^{\nu'} \rangle \\ &= (\delta_r^{j-s_0+1})^{\varkappa} (\overline{\delta_r^{j-s_0+1}})^{\varkappa'} (\lambda_r^{j-s_0+1})^{1-\varkappa} (\overline{\lambda_r^{j-s_0+1}})^{1-\varkappa'} \langle \omega_r^{j-s_0+1} H_j^\mu, \omega_r^{j-s_0+1} H_j^{\mu'} \rangle \\ &\quad + (\delta_{r+2^{j-s_0}}^{j-s_0+1})^{\varkappa} (\overline{\delta_{r+2^{j-s_0}}^{j-s_0+1}})^{\varkappa'} (\lambda_{r+2^{j-s_0}}^{j-s_0+1})^{1-\varkappa} (\overline{\lambda_{r+2^{j-s_0}}^{j-s_0+1}})^{1-\varkappa'} \langle \omega_{r+2^{j-s_0}}^{j-s_0+1} H_j^\mu, \omega_{r+2^{j-s_0}}^{j-s_0+1} H_j^{\mu'} \rangle. \end{aligned}$$

По индукционному предположению $\langle \omega_k^{j-s_0+1} H_j^\mu, \omega_k^{j-s_0+1} H_j^{\mu'} \rangle = 0$ при $\mu \neq \mu'$ и $\langle \omega_k^{j-s_0+1} H_j^\mu, \omega_k^{j-s_0+1} H_j^{\mu'} \rangle = 2^{j-s_0+1}$ при $\mu = \mu'$. Отсюда, применяя равенства (6), (7), получаем (9), (10) для $s = s_0$.

Таким образом, доказано, что

$$W_j = \bigoplus_{\nu} W_j^{\nu} \quad (11)$$

и система функций $\{S_{j-s}^n H_j^{\nu}\}_{n,\nu}$ является ортонормированным базисом пространства W_j . Эта система называется *пакетом всплесков*.

Пусть T — алгебраический многочлен, $\deg T \leq m2^{k-1}(1+\varepsilon)$, $\varepsilon \leq 1/(4m)$. Поскольку на множестве $\{[\ell + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1-\varepsilon), \ell + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1-\varepsilon)], \ell \in \mathbb{Z}\}$ функция m_0 тождественно равна нулю, $\deg \Delta_k T \leq (m2^{k-1} - 2^{k-2})(1+\varepsilon)$ при нечетных m и $\deg \Lambda_k T \leq (m2^{k-1} - 2^{k-2})(1+\varepsilon)$ при четных m . Отсюда, принимая во внимание, что $\deg H_j \leq 2^j(1+\varepsilon)$, и считая $\varepsilon \leq 2^{-s-2}$, нетрудно понять, что функции $H_j^{s,\nu}$ (для фиксированных j, s) можно перенумеровать одномерным индексом $\ell = 1, \dots, 2^s$ таким образом, чтобы

$$\deg H_j^{s,\ell} \leq (2^{j-1} + \ell 2^{j-s-1})(1+\varepsilon), \quad (12)$$

положив $\ell = 2^s - (\alpha_1 2^{s-1} + \alpha_2 2^{s-2} + \dots + \alpha_s)$, где

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu_j = 1, \\ 1, & \text{если } \nu_j = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_k = 1, \nu_{j-k} = 0 \text{ или } \alpha_k = 0, \nu_{j-k} = 1, \\ 1, & \text{если } \alpha_k = 0, \nu_{j-k} = 0 \text{ или } \alpha_k = 1, \nu_{j-k} = 1. \end{cases}$$

Положим

$$T_1 = G_0,$$

$$T_{2^j+n+1} = H_j^{j,n+1} \quad \text{для } j < s, n = 0, \dots, 2^j - 1,$$

$$T_{2^j+m2^{j-s}+r+1} = S_{j-s}^r H_j^{s,m+1} \quad \text{для } j \geq s, m = 0, \dots, 2^s - 1, r = 0, \dots, 2^{j-s} - 1.$$

Неравенство (12), очевидно, влечет $\deg T_N \leq \frac{1}{2}N(1+\varepsilon)$ при $N \leq 2^s$. Представляя произвольное натуральное $N > 2^s$ в виде $N = 2^j + m2^{j-s} + r + 1$, где $j \geq s$, $m < 2^s$, $r < 2^{j-s}$, из (12) получаем

$$\begin{aligned} \deg T_N &\leq (2^{j-1} + (m+1)2^{j-s-1})(1+\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2}(2^j + m2^{j-s} + 2^{j-s})(1+\varepsilon) \leq \frac{1}{2}N(1+2^{-s})(1+\varepsilon). \end{aligned}$$

По любому заданному $\varepsilon_0 > 0$ можно подобрать столь большое натуральное s и столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы для всех N выполнялось неравенство

$$\deg T_N \leq \frac{1}{2}N(1+\varepsilon_0).$$

Далее нам будут полезны следующие представления функций $H_j, H_j^{s,\nu}$ (ν – бинарный вектор):

$$H_j = 2^{-j/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}(2^{-j}\ell) X_\ell, \quad H_j^{s,\nu} = 2^{-j/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}^{s,\nu}(2^{-j}\ell) X_\ell, \quad (13)$$

где $\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^{s,\nu}$ – функции, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x) &= e^{\pi i x} m_0\left(\frac{x+1}{2}\right) \tilde{\varphi}\left(\frac{x}{2}\right), \\ \tilde{\psi}^{s,\nu} &= \prod_{k=j-s+1}^j (m_0(x))^{\nu_k} \left(e^{2\pi i x} m_0\left(x + \frac{1}{2}\right) \right)^{1-\nu_k} \tilde{\psi}(x). \end{aligned}$$

В соответствии с описанной выше перенумерацией функций $H_j^{s,\nu}$ в функциях $\psi^{s,\nu}$ мы также заменим ν на одномерный индекс $\ell = 1, \dots, 2^s$.

§ 4. Вспомогательные результаты

Нам понадобятся следующие свойства ортонормированных многочленов Лежандра P_n . Их можно найти, например, в монографии [11].

Формула Дирихле–Мелера:

$$P_n(\cos \pi \theta) = \sqrt{2 \left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\theta \frac{\cos((n + \frac{1}{2})\pi \tau) d\tau}{\sqrt{\cos \pi \tau - \cos \pi \theta}}, \quad \theta \in (0, 1). \quad (14)$$

Уравнение Вольтерра второго рода:

$$\begin{aligned} (\sin \pi \theta)^{1/2} P_n(\cos \pi \theta) &= \lambda_n \cos \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \theta - \frac{\pi}{4} \right) \\ &- \frac{\pi}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_\theta^{1/2} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\pi(t - \theta))}{4 \sin^2 \pi t} (\sin \pi t)^{1/2} P_n(\cos \pi t) dt, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\theta \in (0, 1)$,

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (16)$$

При тех же значениях θ и λ_n справедлива асимптотическая формула

$$(\sin \pi \theta)^{1/2} P_n(\cos \pi \theta) = \lambda_n \cos \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \theta - \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{n \sin \pi \theta}\right). \quad (17)$$

Метод Лиувилля–Стеклова (см. [11; § 8.61]) дает следующее уточнение этой формулы

$$\begin{aligned} (\sin \pi \theta)^{1/2} P_n(\cos \pi \theta) &= \lambda_n \cos \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \theta - \frac{\pi}{4} \right) \\ &+ \frac{\lambda_n}{8(n + \frac{1}{2})} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \theta - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{ctg} \pi \theta + O\left(\frac{1}{n^2 \sin^2 \pi \theta}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Для всех $x \in [-1, 1]$ имеет место неравенство

$$|P_n(x)| \leq P_n(1) = \sqrt{n + \frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Будем обозначать через C абсолютные постоянные, вообще говоря, различные.

ЛЕММА 5. Пусть $\theta \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, тогда $X_n(\cos \pi\theta)$ есть сумма двух слагаемых вида

$$\frac{1}{\sqrt{\sin \pi\theta}} [A_1(\theta)\xi_1(n)e^{2\pi in\theta} + A_2(\theta)\xi_2(n)e^{-2\pi in\theta}] + O\left(\frac{1}{|n|(\sin \pi\theta)^{3/2}}\right), \quad (20)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\sin \pi\theta}} [A_1(\theta)\xi_1(n)e^{2\pi in\theta} + A_2(\theta)\xi_2(n)e^{-2\pi in\theta}] \\ & + \frac{1}{n(\sin \pi\theta)^{3/2}} [A_3(\theta)\xi_3(n)e^{2\pi in\theta} + A_4(\theta)\xi_4(n)e^{-2\pi in\theta}] + O\left(\frac{1}{n^2(\sin \pi\theta)^{5/2}}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

или

$$\begin{aligned} & \int_0^\theta \frac{d\tau}{\sqrt{\cos \pi\tau - \cos \pi\theta}} \left[\sqrt{n}A_5(\tau)\xi_5(n)e^{2\pi in\tau} + \sqrt{n}A_6(\tau)\xi_6(n)e^{-2\pi in\tau} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{n}}A_7(\tau)\xi_7(n)e^{2\pi in\tau} + \frac{1}{\sqrt{n}}A_8(\tau)\xi_8(n)e^{-2\pi in\tau} \right] + O\left(\frac{1}{|n|^{3/2}}\right), \end{aligned} \quad (22)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\sin \pi\theta}} \left[A_1(\theta)\xi_1(n)e^{2\pi in\theta} + A_2(\theta)\xi_2(n)e^{-2\pi in\theta} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ & + \frac{1}{\sqrt{\sin \pi\theta}} \int_\theta^{1/2} \frac{dt}{\sin^{3/2} \pi t} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\cos \pi\tau - \cos \pi t}} \left[\frac{1}{\sqrt{n}}A_9(t)\xi_9(n)e^{2\pi in(\tau+t-\theta)} \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{n}}A_{10}(t)\xi_{10}(n)e^{-2\pi in(\tau+t-\theta)} + n^{-3/2}A_{11}(t)\xi_{11}(n)e^{2\pi in(\tau+t-\theta)} \\ & \left. + n^{-3/2}A_{12}(t)\xi_{12}(n)e^{-2\pi in(\tau+t-\theta)} + O\left(\frac{1}{|n|^{5/2}}\right) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где $x^a = |x|^a e^{ia \arg x}$, $0 \leq \arg x < 2\pi$, ξ_ℓ — функции, постоянные на интервалах $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$, $|A_\ell(\theta)| \leq C$.

Представления (20)–(22) легко следуют соответственно из (17), (18), (14), если применить формулы Эйлера и произвести элементарные тригонометрические преобразования. Аналогично, (23) следует из сопоставления (15) с (14).

ЛЕММА 6. Пусть $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \gamma \subset [-\Delta, \Delta]$, $\theta \in \mathbb{R}$, тогда

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell) e^{2\pi i \ell \theta} = O\left(\frac{1}{|\sin \pi \theta|}\right), \quad (24)$$

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell) e^{2\pi i \ell \theta} = O\left(\frac{1}{2^j |\sin \pi \theta|^2}\right), \quad (25)$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell) e^{2\pi i \ell \theta} \right| d\theta = O(1). \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (24) применим к левой части преобразование Абеля и воспользуемся явным представлением ядра Дирихле. Для доказательства (25) дважды применим к левой части преобразование Абеля и воспользуемся явным представлением ядра Фейера и свойствами γ . Левая часть (26) является константой Лебега линейного метода суммирования с множителями суммируемости, определяемыми функцией γ . Хорошо известно, что в предполагаемых условиях константы Лебега равномерно ограничены.

ЛЕММА 7. В условиях леммы 6

$$\int_0^1 \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell) e^{2\pi i \ell \theta} \right| \sqrt{|\sin \pi \theta|} d\theta = O(2^{-j/2}), \quad (27)$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell) e^{2\pi i \ell \theta} \right| \frac{d\theta}{\sqrt{|\sin \pi \theta|}} = O(2^{j/2}). \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (27) разобьем интеграл по схеме:

$$\int_0^1 = \int_{-1/2}^{1/2} = \int_{|\theta| \leq 2^{-j}} + \sum_{s=1}^{j-1} \int_{2^{-j+s-1} \leq |\theta| \leq 2^{-j+s}} = \sum_{s=0}^{j-1} I_s.$$

Из (26) следует, что $I_0 = O(2^{-j/2})$. При $s > 0$, применяя (25) к подынтегральному выражению, имеем

$$\sum_{s=1}^{j-1} I_s \leq C 2^{-j} \sum_{s=1}^{j-1} 2^{\frac{j-s}{2}} = O(2^{-j/2}).$$

Аналогично, используя (24) вместо (25) и очевидное соотношение

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell) e^{2\pi i \ell \theta} = O(2^j)$$

вместо (26), получаем (28).

Введем обозначение $e_\tau = \{t \in \mathbb{R} : |\sin \pi t| \leq |\sin \pi \tau|\}$. Для фиксированного $\phi \in [0, 1/2]$ положим $g_1(t) = \chi_{e_{2\phi}}(t) \cos \pi t$, где χ_e — характеристическая функция множества e , $g_2(t) = \cos \pi t - g_1(t)$.

ЛЕММА 8. Пусть $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \gamma \subset [-\Delta, \Delta] \setminus [-\delta, \delta]$, $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_{\alpha, \nu}^\pm(\theta) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell)(2^{-j}\ell)^\alpha \xi_\nu(2^{-j}\ell) e^{2\pi i \ell(\tau \pm \theta)},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, ξ_ν — функции из леммы 5. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell) e^{2\pi i \ell \tau} X_\ell(\cos \pi \theta) \right| dg_1(\theta) \\ & \leq C \sqrt{\phi} \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} (|\sigma_{0,1}^+(\theta)| + |\sigma_{0,2}^-(\theta)|) d\theta + O(1) \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\ell) e^{2\pi i \ell \tau} X_\ell(\cos \pi \theta) \right| dg_2(\theta) \\ & \leq C \int_{-1/2}^{1/2} (|\sigma_{0,1}^+(\theta)| + |\sigma_{0,2}^-(\theta)|) \frac{|g_2'(\theta)| d\theta}{\sqrt{|\sin \pi \theta|}} \\ & \quad + C 2^{-j} \int_{-1/2}^{1/2} (|\sigma_{-1,3}^-(\theta)| + |\sigma_{-1,4}^-(\theta)|) \frac{|g_2'(\theta)| d\theta}{\sqrt{|\sin \pi \theta|^3}} + O(2^{-j/2}). \end{aligned} \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (29) несложно вывести из (20), если при оценке остаточного члена принять во внимание структуру носителя функции γ и учесть периодичность функций $\sigma_{\alpha, \nu}^\pm$. Для доказательства (30) разобьем интеграл в левой части по схеме:

$$\int_{[0,1] \setminus e_{2\phi}} = \int_{(e_{2-j} \setminus e_{2\phi}) \cap [0,1]} + \int_{[0,1] \setminus e_{2-j}} = I_1 + I_2.$$

Если $\phi \geq 2^{-j-1}$, то $I_1 = 0$. Если $\phi \leq 2^{-j-1}$, то те же рассуждения, которые применялись для доказательства (29), дают

$$I_1 \leq C \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} (|\sigma_{0,1}^+(\theta)| + |\sigma_{0,2}^-(\theta)|) \frac{|g_2'(\theta)| d\theta}{\sqrt{|\sin \pi \theta|}} + O(2^{-j/2}) \right\}.$$

Аналогично, чтобы оценить I_2 , применим (21). Снова учитывая структуру носителя γ при оценке остатка, получаем (30).

ЛЕММА 9. Пусть μ — ограниченная монотонно убывающая суммируемая на $[0, \infty)$ функция. Тогда для всех $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(|x+k|) \mu(|y+k|) \leq A \mu\left(\frac{|x-y|}{4}\right),$$

где A — постоянная, зависящая только от μ .

Эта несложная лемма известна, доказательство несколько более общего утверждения приводится, например, в [12].

Пусть $\psi \in L(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\nu = 1, \dots, 8$. Положим

$$s_{n, \alpha, \nu}^\pm(\tau) = s_{n, \alpha, \nu}^\pm(\tau, \psi) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i(n2^{-j} \pm \tau)\ell} (2^{-j}\ell)^\alpha \xi_\nu(2^{-j}\ell) \tilde{\psi}(2^{-j}\ell),$$

где $\tilde{\psi}$ — преобразование Фурье функции ψ , ξ_ν — функции из леммы 5.

ЛЕММА 10. Пусть $\tilde{\psi} \in C^\infty$, $\text{supp } \tilde{\psi} \subset [-\Delta, \Delta] \setminus [-\delta, \delta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $|\tau| \leq 1/4$, $|\gamma| \leq 1/2$, тогда

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^\pm(\tau)| |s_{n,\beta,\mu}^\pm(\theta \pm \tau)| |\sin \pi \theta|^\gamma d\theta = O(2^{(1-\gamma)j}),$$

где знаки “+” или “−” в выражениях $s_{n,\beta,\mu}^\pm$ и $\theta \pm \tau$ согласованы таким образом, что τ входит во все экспоненты подынтегрального выражения с одним и тем же знаком.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, можно ограничиться рассмотрением знаков “+” в качестве каждого из трех “ $\pm$ ”. Кроме того, оставим только первую половину слагаемых в подынтегральной сумме. Для второй половины оценка проводится с помощью аналогичных рассуждений. Функции $\psi_{\alpha,\nu}$, $\psi_{\beta,\mu}$, определяемые равенствами $\tilde{\psi}_{\alpha,\nu}(u) = \tilde{\psi}(u) \xi_\nu(u)(u)^\alpha$, $\tilde{\psi}_{\beta,\mu}(u) = \tilde{\psi}(u) \xi_\mu(u)(u)^\beta$, очевидно, обладают теми же свойствами, что и ψ , поэтому

$$|\psi_{\alpha,\nu}(u)|, |\psi_{\beta,\mu}(u)| = O\left(\frac{1}{1+u^2}\right) \quad (31)$$

и по формуле суммирования Пуассона

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} |s_{n,\alpha,\nu}^+(\tau)| |s_{n,\beta,\mu}^+(\theta + \tau)| \\ &= 2^{2j} \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \psi_{\alpha,\nu}(2^j \tau + 2^j \ell + n) \right| \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{\beta,\mu}(2^j(\theta + \tau) + 2^j k + n) \right|. \end{aligned} \quad (32)$$

Поскольку в силу (31)

$$\sum_{\ell \neq 0} |\psi_{\alpha,\nu}(2^j \tau + 2^j \ell + n)| = O(2^{-2j}), \quad \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi_{\beta,\mu}(2^j(\theta + \tau) + 2^j k + n)| = O(1),$$

правая часть (32) не превосходит

$$2^{2j} \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi_{\alpha,\nu}(2^j \tau + n)| |\psi_{\beta,\mu}(2^j(\theta + \tau) + 2^j k + n)| + O(1).$$

Отсюда, из леммы 9 и (32) следует

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{2^{j-1}-1} |s_{n,\alpha,\nu}^+(\tau)| |s_{n,\beta,\mu}^+(\theta + \tau)| |\sin \pi \theta|^\gamma \\ &= O\left(1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2^{2j} |\theta|^\gamma}{1 + (2^j(\theta + k))^2}\right) = O\left(1 + \frac{2^{2j} |\theta|^\gamma}{1 + (2^j(\theta))^2}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Разбивая интеграл I по схеме

$$\int_{-1/2}^{1/2} = \int_{|\theta| \leq 2^{-j}} + \sum_{s=0}^{j-1} \int_{2^{-j+s-1} \leq |\theta| \leq 2^{-j+s}}$$

и применяя (33) к подынтегральному выражению в каждом слагаемом, получаем

$$I = O\left(2^{j(1-\gamma)} + 2^{j(1-\gamma)} \sum_{s=0}^{j-1} 2^{-s(1-\gamma)}\right) = O(2^{j(1-\gamma)}).$$

СЛЕДСТВИЕ 11. В условиях леммы 10 выполняется соотношение

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(\tau)| |s_{n,\beta,\mu}^{\pm}(\theta)| d\theta = O(2^j).$$

Утверждение следствия является частным случаем леммы 10, если произвести замену переменной $\theta = \theta' \pm \tau$ и принять во внимание периодичность подынтегральной функции.

ЛЕММА 12. Пусть ψ , H_j удовлетворяют условиям леммы 10, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(\tau)| |S_j^n H_j(\cos \pi \theta)| dg_1(\theta) \\ & \leq C\sqrt{\phi} \left\{ 2^{-j/2} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(\tau)| (|s_{n,0,1}^+(\theta)| + |s_{n,0,2}^-(\theta)|) d\theta + O(2^{j/2}) \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(\tau)| |S_j^n H_j(\cos \pi \theta)| dg_2(\theta) \\ & \leq C 2^{-j/2} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(\tau)| (|s_{n,0,1}^+(\theta)| + |s_{n,0,2}^-(\theta)|) \frac{|g_2'(\theta)| d\theta}{\sqrt{|\sin \pi \theta|}} \\ & \quad + C 2^{-3j/2} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(\tau)| (|s_{n,-1,3}^+(\theta)| + |s_{n,-1,4}^-(\theta)|) \frac{|g_2'(\theta)| d\theta}{\sqrt{|\sin \pi \theta|^3}} + O(1). \end{aligned} \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании (13) и (20), (21), принимая во внимание, что $\tilde{\psi}(2^{-j}\ell)$ отлично от нуля лишь при $2^j\delta \leq |\ell| \leq 2^j\Delta$, имеем

$$|S_j^n H_j(\cos \pi \theta)| \leq C \left(\frac{2^{-j}}{\sin \pi \theta} \right)^{1/2} (|s_{n,0,1}^+(\theta)| + |s_{n,0,2}^-(\theta)|) + O\left(\frac{2^{-j/2}}{\sin^{3/2} \pi \theta} \right), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} |S_j^n H_j(\cos \pi \theta)| & \leq C \left(\frac{2^{-j}}{\sin \pi \theta} \right)^{1/2} (|s_{n,0,1}^+(\theta)| + |s_{n,0,2}^-(\theta)|) \\ & \quad + C \left(\frac{2^{-j}}{\sin \pi \theta} \right)^{3/2} (|s_{n,-1,3}^+(\theta)| + |s_{n,-1,4}^-(\theta)|) + O\left(\frac{2^{-3j/2}}{\sin^{5/2} \pi \theta} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Пусть $\psi_{\alpha,\nu}$ – функция, определенная в лемме 10. Из формулы суммирования Пуассона и (31) следует

$$\sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(\tau)| = 2^j \sum_{n=0}^{2^j-1} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \psi_{\alpha,\nu}(\pm 2^j \tau + 2^j \ell + n) \right| = O(2^j). \quad (38)$$

Соотношения (36) и (38) влекут (34), если принять во внимание периодичность функций $s_{n,\eta,\varkappa}^{\pm}(\theta)$. Для доказательства (35) разобьем интеграл в левой части по схеме

$$\int_{[0,1] \setminus e_{2^j}} = \int_{(e_{2^j} \setminus e_{2^j}) \cap [0,1]} + \int_{[0,1] \setminus e_{2^j}} = I_1 + I_2.$$

Если $|\phi| \geq 2^{-j-1}$, то $I_1 = 0$. Если $|\phi| \leq 2^{-j-1}$, то те же рассуждения, которые применялись для доказательства (34), дают

$$I_1 \leq C 2^{-j/2} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(\tau)| (|s_{n,0,1}^+(\theta)| + |s_{n,0,2}^-(\theta)|) \frac{|g_2'(\theta)| d\theta}{\sqrt{|\sin \pi \theta|}} + O(1).$$

Аналогично, чтобы оценить I_2 , применим (37) и (38). Осталось заметить, что

$$2^{-j/2} \int_{[0,1] \setminus e_{2^j}} \frac{dg_2(\theta)}{\sin^{5/2} \pi \theta} = O(1).$$

ЛЕММА 13. Пусть функции ψ , H_j удовлетворяют условиям леммы 10, $n = 0, \dots, 2^j - 1$, тогда

$$\int_0^1 |S_j^n H_j(\cos \pi \theta)| d \cos \pi \theta = O(2^{-j/2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании (36) имеем

$$\int_0^1 |S_j^n H_j(\cos \pi \theta)| d \cos \pi \theta \leq C 2^{-j/2} \int_{-1/2}^{1/2} (|s_{n,0,1}^+(\theta)| + |s_{n,0,2}^-(\theta)|) d\theta + O(2^{-j/2}).$$

Пусть $\psi_{0,\nu}$, $\nu = 1, 2, -$ функции, определенные в лемме 10. По формуле суммирования Пуассона

$$\int_{-1/2}^{1/2} |s_{n,0,\nu}^{\pm}(\theta)| d\theta \leq 2^j \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{-1/2}^{1/2} |\psi_{0,\nu}(\pm 2^j \theta + 2^j \ell + n)| d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{0,\nu}(\pm \theta)| d\theta.$$

Осталось заметить, что интеграл в правой части этого равенства конечен в силу (31).

ЛЕММА 14.

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2n} P_k(x) P_k(t) \right| dt = O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функции Лебега сумм Фейера–Лежандра равномерно ограничены (см., например, [13]), в силу равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^n P_k(x) P_k(t) \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2n} P_k(x) P_k(t) + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2n+1} P_k(x) P_k(t) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2n} P_k(x) P_k(t) + \sum_{k=0}^{2N} P_k(x) P_k(t) + \sum_{n=0}^{N-1} P_{2n+1}(x) P_{2n+1}(t) \\ &= 2 \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{2n} P_k(x) P_k(t) - \sum_{n=0}^N P_{2n}(x) P_{2n}(t) \end{aligned}$$

достаточно доказать соотношение

$$I = \frac{1}{N} \int_{-1}^1 \left| \sum_{n=0}^N P_{2n}(x) P_{2n}(t) \right| dt = O(1). \quad (39)$$

Положим $t = \cos \pi \theta$, $x = \cos \pi \phi$, $\phi, \theta \in [0, 1]$. Поскольку P_{2n} – четная функция, достаточно ограничиться рассмотрением случая $\phi \in [0, 1/2]$. Применяя (17) к $P_{2n}(\cos \pi \theta)$ и используя (19) при оценке остаточного члена, имеем

$$I = \frac{\sqrt{2}}{N\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left| \sum_{n=0}^N P_{2n}(\cos \pi \phi) \cos \left[\left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi \theta - \frac{\pi}{4} \right] \right| \frac{d \cos \pi \theta}{\sqrt{\sin \pi \theta}} + O(1).$$

Интеграл в правой части разобьем по схеме

$$\int_0^1 d \cos \pi \theta = \int_0^1 dg_1(\theta) + \int_0^1 dg_2(\theta) = I_1 + I_2.$$

Для оценки I_2 при $\phi \neq 0$ применим к $P_{2n}(\cos \pi \phi)$ формулу Дирихле–Мелера (14). После перестановки интегралов получим

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{2} \int_0^\phi \frac{d\tau}{\sqrt{\cos \pi \tau - \cos \pi \phi}} \int_0^1 \left\{ \left| \sum_{n=0}^N e^{2\pi i n(\theta+\tau)} \sqrt{n + \frac{1}{4}} \right| \right. \\ &\quad + \left| \sum_{n=0}^N e^{2\pi i n(\theta-\tau)} \sqrt{n + \frac{1}{4}} \right| + \left| \sum_{n=0}^N e^{-2\pi i n(\theta+\tau)} \sqrt{n + \frac{1}{4}} \right| \\ &\quad \left. + \left| \sum_{n=0}^N e^{-2\pi i n(\theta-\tau)} \sqrt{n + \frac{1}{4}} \right| \right\} \frac{dg_2(\theta)}{\sqrt{\sin \pi \theta}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Производя преобразование Абеля в каждой из сумм и используя хорошо известные свойства ядер Дирихле, устанавливаем, что эти суммы имеют порядок $O(\sqrt{N}/|\sin \pi(\theta \pm \tau)|)$. Таким образом, внутренний интеграл в (40) не превосходит суммы четырех интегралов вида

$$C\sqrt{N} \int_0^1 \frac{dg_2(\theta)}{|\sin \pi(\theta \pm \tau)|\sqrt{\sin \pi\theta}}. \quad (41)$$

Поскольку $\tau \leq \phi$, то $1/|\sin \pi(\theta \pm \tau)| \leq C/\sin \pi\theta$ при $\theta \geq 2\phi$. Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{dg_2(\theta)}{|\sin \pi(\theta \pm \tau)|\sqrt{\sin \pi\theta}} \leq C \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \pi\theta}} = O(1).$$

Сопоставляя это соотношение с (41) и (40), получаем

$$I_2 = O(\sqrt{N}). \quad (42)$$

Для $\phi = 0$ интеграл I_2 можно оценить аналогично, используя вместо формулы Дирихле–Мелера равенство (19). Теперь оценим I_1 в случае, когда $\phi \leq 1/N$. Для $\phi \neq 0$ снова воспользуемся формулой Дирихле–Мелера:

$$I_1 \leq C \int_0^\phi \frac{d\tau}{\sqrt{\cos \pi\tau - \cos \pi\phi}} \int_0^1 \sum_{n=0}^N \sqrt{n + \frac{1}{4}} \frac{g'_1(\theta)}{\sqrt{\sin \pi\theta}} d\theta.$$

Учитывая, что $g'_1(\theta)/\sqrt{\sin \pi\theta} \leq C\sqrt{\phi} \leq C/\sqrt{N}$, получаем

$$I_1 = O(N). \quad (43)$$

Точно так же (43) следует из (19) при $\phi = 0$. Наконец рассмотрим случай $\phi \geq 1/N$. Сопоставляя соотношения (14) и (15), имеем

$$\begin{aligned} (\sin \pi\phi)^{1/2} P_{2n}(\cos \pi\phi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \left[\left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi\phi - \frac{\pi}{4} \right] \\ &- \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2n + \frac{1}{2}}} \int_\phi^{1/2} \frac{\sin[\pi(2n + \frac{1}{2})(t - \phi)]}{4 \sin^{3/2} \pi t} dt \int_0^t \frac{\cos[\pi(2n + \frac{1}{2})\tau]}{\sqrt{\cos \pi\tau - \cos \pi t}} d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание, что $g'_1(\theta)/\sqrt{\sin \pi\theta} \leq C\sqrt{\phi}$ и $\phi^{-1} \leq N$, получаем

$$I_1 \leq C \int_\phi^{1/2} \frac{dt}{t^{3/2}} \sum_{n=0}^N \frac{1}{\sqrt{n}} + O(1) = O\left(\sqrt{\frac{N}{\phi}} + 1\right) = O(N).$$

Эта оценка вместе с (42) и (43) дает (39).

§ 5. Доказательство теоремы 1

Докажем, что система ортогональных многочленов T_n , построенная в § 3, является базисом Шаудера в пространстве $C[-1, 1]$. Каждой функции $f \in C[-1, 1]$ сопоставим ее ряд Фурье по системе T_n , через $\sigma_N(f)$ обозначим частичную сумму этого ряда порядка N . Если $N = 2^j + m2^{j-s} + r$, $m = 0, \dots, 2^s - 1$, $r = 0, \dots, 2^{j-s} - 1$, то

$$\begin{aligned} \sigma_N(f) = \sum_{n=1}^N \langle f, T_n \rangle T_n &= \sum_{n=1}^{2^j} \langle f, T_n \rangle T_n + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{2^{j-s}-1} \langle f, S_{j-s}^n H_j^{s,k+1} \rangle S_{j-s}^n H_j^{s,k+1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^r \langle f, S_{j-s}^n H_j^{s,m+1} \rangle S_{j-s}^n H_j^{s,m+1}. \end{aligned}$$

Первая сумма в правой части является ортогональной проекцией функции f на пространство V_j . Переразложенная по ортонормированному базису $S_j^n G_j$, $n = 0, \dots, 2^j - 1$, она примет вид

$$\sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, S_j^n G_j \rangle S_j^n G_j.$$

Пусть $|\nu| \leq 2^{j-2}$, из построения функций G_j , $H_j^{s,k}$ следует, что $\widehat{H}_j^{s,k}(\nu) = 0$, $k = 1, \dots, 2^s$, $\widehat{G}_j(\nu) = 2^{-j/2}$, $\widehat{G}_j(\nu + 2^j n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_N(X_\nu) &= \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle X_\nu, S_j^n G_j \rangle S_j^n G_j \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(\ell) \langle X_\nu, X_\ell \rangle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{G}_j(k) X_k \sum_{n=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} n(k-\ell)}. \end{aligned}$$

Из этого равенства, ортонормированности системы $\{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и (4) следует $\sigma_N(X_\nu) = X_\nu$. Таким образом, оператор σ_N не изменяет алгебраические многочлены степени не выше 2^{j-1} , что влечет

$$\|f - \sigma_N(f)\| \leq \|\sigma_N\|_{C \rightarrow C} E_{2^{j-1}}(f),$$

где $E_m(f)$ — величина наилучшего приближения функции f алгебраическими многочленами порядка m . Для доказательства теоремы осталось проверить ограниченность последовательности $\|\sigma_N\|_{C \rightarrow C}$. Для этого достаточно убедиться в равномерной (по $x \in [-1, 1]$) ограниченности интегралов

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_{-1}^1 \left| \sum_{n=0}^{2^j-1} S_j^n G_j(x) \overline{S_j^n G_j(t)} \right| dt, \\ J^m(x) &= \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{2^{j-s}-1} |S_{j-s}^n H_j^{s,m}(x) S_{j-s}^n H_j^{s,m}(t)| dt, \quad m = 1, \dots, 2^s. \end{aligned}$$

Зафиксируем m и займемся оценкой J^m . Переобозначим функции $H_j^{s,m}$, $\psi^{s,m}$ через H_j , ψ (выше эти обозначения имели другой смысл, но они уже больше не будут использоваться). Отметим, что функция $\tilde{\psi}$ удовлетворяет условиям леммы 10. Ясно, что

$$J^m(x) \leq \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{2^j-1} |S_j^n H_j(x) S_j^n H_j(t)| dt = I.$$

Ограничимся рассмотрением случая $x \in [0, 1]$, для $x \in [-1, 0]$ доказательство аналогично. Положим $x = \cos \pi \phi$, $\phi \in [0, 1/2]$. Пусть сначала $\phi \in [1/4, 1/2]$. Применяя к $S_j^n H_j(\cos \pi \phi)$ неравенства (36) и (38), имеем

$$I \leq C 2^{j/2} \max_n \int_{-1}^1 |S_j^n H_j(t)| dt.$$

Отсюда и из леммы 13 следует $I = O(1)$. Теперь рассмотрим случай $\phi \in (0, 1/4]$. Произведем в интеграле I замену переменной $t = \cos \pi \theta$, $\theta \in [0, 1]$, и разобьем его по схеме

$$I = \int_0^1 dg_1(\theta) + \int_0^1 dg_2(\theta) = I_1 + I_2.$$

При $\phi \geq 2^{-j}$ для доказательства ограниченности I_1 оценим $S_j^n H_j(\cos \phi)$, используя (23) и учитывая структуру носителя функции $\tilde{\psi}$:

$$\begin{aligned} |S_j^n H_j(\cos \phi)| &\leq C \frac{2^{-j/2}}{\sqrt{\phi}} \left[|s_{n,0,1}^+(\phi)| + |s_{n,0,2}^-(\phi)| \right. \\ &\quad + 2^{-j/2} \int_{\phi}^{1/2} \frac{dt}{t^{3/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\cos \pi \tau - \cos \pi t}} \\ &\quad \left. \times (|s_{n,-1/2,9}^+(\tau + t - \phi)| + |s_{n,-1/2,10}^-(\tau + t - \phi)|) + O(2^{-j/2}) \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

В каждом слагаемом внеинтегральной и подынтегральной сумм присутствует выражение вида $s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(u)$. Соответствующее слагаемое в I_1 оценится через интеграл

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(u)| |S_j^n H_j(\cos \pi \theta)| dg_1(\theta) = I_1^{\alpha,\nu}.$$

Применяя к этому интегралу неравенство (34), а затем к каждому слагаемому правой части (34) следствие 11, устанавливаем, что $I_1^{\alpha,\nu} \leq C 2^{j/2} \sqrt{\phi}$. Отсюда, учитывая при оценке остаточного члена лемму 13, получаем

$$I_1 = O(1 + (2^j \phi)^{-1/2}) = O(1).$$

Для доказательства ограниченности I_2 при $\phi \neq 0$ оценим $S_j^n H_j(\cos \phi)$, используя (22):

$$\begin{aligned} |S_j^n H_j(\cos \phi)| &\leq C \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{\cos \pi t - \cos \pi \phi}} (|s_{n,1/2,5}^+(t)| + |s_{n,1/2,6}^-(t)| \\ &\quad + |s_{n,-1/2,7}^+(t)| + |s_{n,-1/2,8}^-(t)| + O(2^{-j/2})). \end{aligned} \quad (45)$$

В каждом слагаемом подынтегральной суммы присутствует выражение вида $s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(t)$. Соответствующее слагаемое в I_2 оценивается через интеграл

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(t)| |S_j^n H_j(\cos \pi \theta)| dg_2(\theta) = I_2^{\alpha,\nu}.$$

Применим к этому интегралу неравенство (35) и произведем в каждом слагаемом правой части (35) замену переменной $\theta' = \theta \pm t$, выбирая знак “+” или “−” так, чтобы t входило во все экспоненты подынтегрального выражения с одним и тем же знаком. Учитывая, что при $t \leq \phi$

$$|g_2'(\theta)| |\sin \pi \theta|^{-1 \pm 1/2} \leq C |\sin \pi \theta'|^{\pm 1/2}, \quad (46)$$

на основании леммы 10 при $\gamma = \pm 1/2$ получаем $I_2^{\alpha,\nu} = O(1)$. Отсюда с учетом леммы 13 при оценке остаточного члена устанавливаем ограниченность I_2 . Теперь оценим I_1 при $\phi \in (0, 2^{-j})$. Те же рассуждения, что и для случая $\phi \geq 2^{-j}$, дают

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{2^j-1} |s_{n,\alpha,\nu}^{\pm}(u)| |S_j^n H_j(\cos \pi \theta)| dg_1(\theta) = O(2^{j/2} \sqrt{\phi}).$$

Сопоставляя это с (45), учитывая, что $\sqrt{\phi} = O(2^{-j/2})$, и принимая во внимание лемму 13, опять получаем $I_1 = O(1)$. При $\phi = 0$ интеграл I_1 отсутствует, а I_2 можно оценить по той же схеме, используя вместо (22) следующее равенство

$$X_\ell(1) = \sqrt{2i\ell} + \frac{1}{4\sqrt{2i\ell}} + O\left(\frac{1}{|\ell|^{3/2}}\right), \quad (47)$$

где $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\arg z}{2}}$, $-\pi \leq \arg z \leq \pi$. Таким образом, доказана ограниченность J^m .

Для оценки J преобразуем подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{2^j-1} \overline{S_j^n G_j(t)} S_j^n G_j(x) \\ &= 2^{-j} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \tilde{\varphi}(2^{-j}\ell) \overline{X_\ell(t)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\varphi}(2^{-j}k) X_k(x) \sum_{n=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} n(k-\ell)} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \tilde{\varphi}(2^{-j}\ell) \overline{X_\ell(t)} \tilde{\varphi}(2^{-j}\ell + m) X_{\ell+2^j m}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \omega_m(t, x). \end{aligned}$$

Поскольку $\text{supp } \tilde{\varphi} \subset [-\frac{1}{2}(1+\varepsilon), \frac{1}{2}(1+\varepsilon)]$, то $\omega_m(t, x) = 0$ для всех $m \neq 0, 1, -1$. Покажем, что

$$\int_{-1}^1 |\omega_m(t, x)| dt = O(1) \quad (48)$$

для $m = 0, 1, -1$. Перепишем $\omega_0(t, x)$ в вещественном виде:

$$\omega_0(t, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}^2(2^{-j}n) (P_{2n-1}(x)P_{2n-1}(t) + P_{2n}(x)P_{2n}(t)).$$

После двукратного применения преобразования Абеля к этой сумме на основании леммы 14 получаем (48) для $m = 0$.

Пусть θ, ϕ имеют тот же смысл, что и выше, опять ограничимся рассмотрением случая $\phi \in [0, 1/2]$. Положим $\gamma_{\pm}(u) = \tilde{\varphi}(u)\tilde{\varphi}(u \pm 1)$, тогда

$$\int_0^1 |\omega_{\pm 1}(t, x)| dt = \int_0^1 \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}\ell) \overline{X_{\ell}(\cos \pi \theta)} X_{\ell \pm 2^j}(\cos \pi \phi) \right| d \cos \pi \theta.$$

Разобьем этот интеграл по схеме

$$\int_0^1 d \cos \pi \theta = \int_0^1 dg_1(\theta) + \int_0^1 dg_2(\theta) = i_1 + i_2.$$

При $\phi \neq 0$ применим (22) к $X_{\ell \pm 2^j}(\cos \pi \phi)$. Используя неравенство (19) и учитывая структуру носителя функции $\gamma_{\pm}$ при оценке остатка, имеем

$$\begin{aligned} i_2 &\leq C 2^{j/2} \int_0^{\phi} \frac{d\tau}{\sqrt{\cos \pi \tau - \cos \pi \phi}} \\ &\times \int_0^1 \left\{ \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}\ell) \xi_5(2^{-j}\ell \pm 1) (2^{-j}\ell)^{1/2} e^{2\pi i \ell \tau} X_{\ell}(\cos \pi \theta) \right| \right. \\ &+ \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}\ell) \xi_6(2^{-j}\ell \pm 1) (2^{-j}\ell)^{1/2} e^{-2\pi i \ell \tau} X_{\ell}(\cos \pi \theta) \right| \\ &+ \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}\ell) \xi_7(2^{-j}\ell \pm 1) (2^{-j}\ell)^{-1/2} e^{2\pi i \ell \tau} X_{\ell}(\cos \pi \theta) \right| \\ &\left. + \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}\ell) \xi_8(2^{-j}\ell \pm 1) (2^{-j}\ell)^{-1/2} e^{-2\pi i \ell \tau} X_{\ell}(\cos \pi \theta) \right| \right\} dg_2(\theta) + O(1). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $\gamma(u) = \gamma_{\pm}(u) \xi_{\nu}(u \pm 1) (u)^{\alpha}$ удовлетворяет условиям леммы 8. К внутреннему интегралу применим (30) и произведем в каждом слагаемом правой части (30) замену переменной $\theta' = \tau \pm \theta$. Учитывая, что при $\tau \leq \phi$ выполнено (46), на основании леммы 7 получаем $i_2 = O(1)$. При $\phi = 0$ это соотношение доказывается так же с использованием равенства (47) вместо (22). Аналогично, воспользуемся (22) для оценки i_1 при $\phi \in (0, 2^{-j})$. Применив затем (29) и (26), получим $i_1 = O(1)$. Наконец, чтобы доказать ограниченность i_1 при $\phi \in (2^{-j}, 1/2)$, применим к $X_{\ell \pm 2^j}(\cos \pi \phi)$ соотношение (23). Используя неравенство (19) и учитывая структуру носителя функции $\gamma_{\pm}$ при оценке остаточных членов, имеем

$$\begin{aligned} i_1 &\leq C \frac{1}{\sqrt{\phi}} \int_0^1 \left\{ \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}\ell) \xi_1(2^{-j}\ell \pm 1) e^{2\pi i \ell \phi} X_{\ell}(\cos \pi \theta) \right| \right. \\ &+ \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}\ell) \xi_2(2^{-j}\ell \pm 1) e^{-2\pi i \ell \phi} X_{\ell}(\cos \pi \theta) \right| \left. \right\} dg_1(\theta) \\ &+ O\left(\frac{2^{-j/2}}{\sqrt{\phi}}\right) \\ &+ C \frac{2^{-j/2}}{\sqrt{\phi}} \int_{\phi}^{1/2} \frac{dt}{t^{3/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\cos \pi \tau - \cos \pi t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^1 \left\{ \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}\ell) \xi_9(2^{-j}\ell \pm 1) (2^{-j}\ell)^{-1/2} e^{2\pi i \ell(\tau+t-\phi)} X_{\ell}(\cos \pi \theta) \right| \right. \\
& + \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}\ell) \xi_{10}(2^{-j}\ell \pm 1) (2^{-j}\ell)^{-1/2} e^{-2\pi i \ell(\tau+t-\phi)} X_{\ell}(\cos \pi \theta) \right| \\
& + \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}\ell) \xi_{11}(2^{-j}\ell \pm 1) (2^{-j}\ell)^{-3/2} e^{2\pi i \ell(\tau+t-\phi)} X_{\ell}(\cos \pi \theta) \right| \\
& + \left. \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \gamma_{\pm}(2^{-j}\ell) \xi_{12}(2^{-j}\ell \pm 1) (2^{-j}\ell)^{-3/2} e^{-2\pi i \ell(\tau+t-\phi)} X_{\ell}(\cos \pi \theta) \right| \right\} dg_1(\theta) \\
& + O\left(\frac{2^{-j}}{\phi}\right).
\end{aligned}$$

Осталось применить к внутренним интегралам (29) и (26).

Список литературы

1. *Ульянов П. Л.* О некоторых решенных и нерешенных проблемах теории ортогональных рядов // Труды IV Всесоюзного математического съезда. Т. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1964. С. 694–704.
2. *Ульянов П. Л.* О некоторых результатах и задачах из теории базисов // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1989. Т. 170. С. 274–284.
3. *Faber G.* Über die interpolatorische Darstellung stetiger Functionen // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1914. V. 23. P. 192–210.
4. *Привалов Ал. А.* О росте степеней полиномиальных базисов // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 4. С. 69–78.
5. *Привалов Ал. А.* О росте степеней полиномиальных базисов и приближении тригонометрических проекторов // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 2. С. 207–214.
6. *Offin D., Oskolkov K.* A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1993. V. 9. № 1. P. 319–325.
7. *Lorentz R. A., Sahakian A. A.* Orthogonal trigonometric Shauder bases of optimal degree for $C(0, 2\pi)$ // J. Fourier Anal. Appl. 1994. V. 1. № 1. P. 103–112.
8. *Kilgore T., Prestin J., Selig K.* Orthogonal algebraic polynomial Shauder bases of optimal degree // J. Fourier Anal. Appl. 1996. V. 2. № 6. P. 597–610.
9. *Skopina M.* Multiresolution analysis of periodic functions // East J. Approx. 1997. V. 3. № 2. P. 203–224.
10. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets // CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math. V. 61. Philadelphia, PA: SIAM, 1992.
11. *Ceġġ Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
12. *Skopina M.* Local convergence of Fourier series with respect to periodized wavelets // J. Approx. Theory. 1998. V. 94. № 2. P. 191–202.
13. *Chanillo S., Muckenhoupt B.* Weak type estimates for Cesaro sums of Jacobi Polynomial series // Mem. Amer. Math. Soc. 1993. V. 102. № 487. P. 1–90.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: skopina@sk.usr.lgu.spb.su

Поступила в редакцию
15.02.1999 и 28.12.2000