Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Юдович, Периодические дифференциальные уравнения с самосопряженным оператором монодромии, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 3, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:04:36

УДК 517.98

В. И. Юдович

Периодические дифференциальные уравнения с самосопряженным оператором монодромии

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение $\dot{u} = A(t)u$ с p -периодическим (вообще, неограниченным) операторным коэффициентом в евклидовом или гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. При естественных ограничениях доказано, что оператор монодромии U_p самосопряжен и строго положителен, если для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $A^*(-t) = A(t)$.

Показано, что гамильтоновы системы рассматриваемого класса, как правило, неустойчивы, а в случае устойчивости оператор U_p сводится к тождественному и все решения оказываются p -периодическими.

В случае больших частот выведены осредненные уравнения. Примечательно, что высокочастотная модуляция может увеличить вдвое количество критических значений.

Общие результаты применяются к вращательным течениям с цилиндрическими компонентами скорости $a_r = a_z = 0$, $a_\theta = \lambda c(t)r^\beta$, $\beta < -1$, $c(t)$ – четная p -периодическая функция, а также к некоторым задачам о свободной гравитационной конвекции жидкости в периодических полях.

Библиография: 19 названий.

В работе выделен и изучен класс периодических дифференциальных уравнений в гильбертовом или конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{H}$ с самосопряженным оператором монодромии. В статье изложено содержание препринтов [1], [2].

Рассматривается уравнение $\dot{u} = A(t)u$, $A(t+p) = A(t)$ при $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{U}(t)$ – его эволюционный оператор, так что $u(t) = \mathcal{U}(t)a$ есть решение задачи Коши с начальным условием $u(0) = a$. Тогда $\mathcal{U}(p)$ – оператор сдвига на период p (здесь и далее $p > 0$) – называется оператором монодромии. Условие, обеспечивающее самосопряженность и строгую положительность оператора монодромии, в простейшем случае имеет вид: $A^*(-t) = A(t)$ для всех t . Возможны и более общие условия: $A^*(\alpha(t)) = A(t)$, где $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая инволюция, меняющая ориентацию прямой (карлемановский сдвиг).

Теория Софуса Ли позволяет выяснить, при каких условиях эволюционный оператор $\mathcal{U}(t)$ для всех t принадлежит некоторой группе операторов. Для этого нужно, чтобы оператор-коэффициент $A(t)$ для каждого t принадлежал алгебре Ли этой группы. Например, $\mathcal{U}(t) \in \text{SO}(\mathbb{H})$ в том и только том случае, когда $A^*(t) = -A(t)$ для всех t . Другой пример: $\mathcal{U}(t) \in \text{SL}(\mathbb{H})$ в случае $\dim \mathbb{H} < \infty$, т.е. $\det \mathcal{U}(t) = 1$, тогда и только тогда, когда $\text{sp } A(t) = 0$ при всех t . Теория Ли распространяется и на некоторые интересные полугруппы операторов – неотрицательных [3], вполне неотрицательных, операторов Келлога первого и второго рода [4], [5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01023).

Но самосопряженные операторы не образуют группы, а потому не подпадают под теорию Ли. Конечно, эволюционный оператор $\mathcal{U}(t)$ самосопряжен для систем Лаппо–Данилевского $\left(A(t) \text{ коммутирует с } \int_0^t A(s) ds \text{ для всех } t \right)$, когда $A(t)$ для каждого t самосопряжен. Но такие системы встречаются слишком редко. По-видимому, невозможно дать сколько-нибудь общие и притом локальные признаки самосопряженности $\mathcal{U}(t)$ или хотя бы оператора монодромии $\mathcal{U}(p)$. Поэтому фактически объектом в настоящей работе являются некоторые специальные группы оператор-функций, а не операторов.

Статья начинается (§1) с рассмотрения некоторых операторных дифференциальных уравнений, ассоциированных с уравнением эволюционного оператора и получаемых переходом к его сопряженному, к его обратному, к его $(n-1)$ -й внешней степени (в случае $\dim \mathbb{H} = n$), а также заменой $t \rightarrow -t$. Выясняется, каким свойствам оператор-функции $\mathcal{U}(t)$ отвечает совпадение основного уравнения с тем или иным ассоциированным.

В §2 показано, что в случае, когда $A^*(-t) = A(t)$, оператор монодромии строго положителен. Особо рассмотрены гамильтоновы уравнения с этим свойством, а также уравнения, у которых $\text{sp } A(t)$ имеет нулевое среднее по периоду (последние названы чисто колебательными). Оказывается, как правило, такие уравнения неустойчивы, а в случае устойчивости (который иногда реализуется!) оператор монодромии сводится к тождественному и все решения оказываются p -периодическими.

Не совсем даже в шутку замечу, что результат о вещественности спектра оператора монодромии допускает подсчет экономического эффекта, скажем, в рублях. Дело в том, что во многих прикладных работах встречается меланхолическая фраза “колебательная неустойчивость не обнаружена”. Для систем рассматриваемого здесь типа (с параметром) колебательная неустойчивость, равно как и неустойчивость, связанная с удвоением периода, просто невозможна. Это знание позволяет сэкономить немало компьютерного и человеческого времени.

В §3 определены некоторые группы оператор-функций, которым, в частности, принадлежат эволюционные операторы дифференциальных уравнений рассматриваемого вида. В §4 дано представление оператора $M(t) = \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(-t)$ в виде симметричного мультипликативного интеграла. Показано, что асимптотическая устойчивость имеет место в том и только том случае, когда $M(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Для уравнений рассматриваемого класса оператор $M(t)$ при всех t самосопряжен.

В §5 выведены осредненные (по высокочастотным вибрациям) уравнения. Они могут служить для исследования устойчивости и определения критических значений параметра. Интересно, что в случае, когда параметр λ входит в заданное уравнение линейно, правая часть осредненных уравнений представляет собой квадратичный по λ операторный пучок. Коэффициент при λ^2 есть осредненный коммутатор некоторой пары оператор-функций, а потому в конечномерном случае имеет нулевой след. Для уравнений изучаемого в [1] класса этот пучок оказывается самосопряженным. Примечательно, что периодическая высокочастотная модуляция может увеличить вдвое количество критических значений. При этом каждому из них отвечает стационарное решение осредненного уравнения и соответственно периодическое решение исходного. Это можно наблюдать уже в случае периодического дифференциального уравнения на плоскости $\mathbb{R}^2$. Когда амплитуда модуляции

стремится к нулю, “лишние” критические значения уходят на бесконечность.

В целом задача устойчивости периодических дифференциальных уравнений остается трудной, и результаты этого параграфа показывают, с какими качественно новыми (по сравнению с автономными уравнениями) явлениями здесь можно столкнуться. Я не останавливаюсь на обосновании метода осреднения. В конечномерном случае это стандартный материал (см. [6]), а в бесконечномерном случае ряд результатов имеется в работах Ю. Л. Далецкого и М. Г. Крейна [7], С. Г. Крейна, М. А. Красносельского, И. Б. Симоненко, В. В. Жикова, В. Б. Левенштама и др. (см. ссылки в [8]). Суть дела состоит в том, что метод осреднения приводит к равномерной аппроксимации оператора монодромии, откуда и вытекают результаты о близости спектров исходной и осредненной задач.

В § 6 показано, что вращательные течения с цилиндрическими компонентами скорости $a_r = a_z = 0$, $a_\theta = \lambda c(t)r^\beta$ приводят к задаче устойчивости рассматриваемого класса при следующих условиях:

- 1) $\beta < -1$,
- 2) $c(t)$ – четная p -периодическая функция.

В таком случае линеаризованные уравнения Навье–Стокса в области вращения $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, не содержащей точек оси z , удовлетворяют условиям предложений из § 2, так что их оператор монодромии самосопряжен и строго положителен. Аналогичный результат получается и для некоторых задач о свободной гравитационной конвекции жидкости в периодических полях.

Чтобы не затемнять линейно-алгебраическую сторону дела – главную в этой работе, я рассматриваю в основном уравнения с ограниченными равномерно непрерывными по времени t операторными коэффициентами, останавливаясь также на тех дополнениях, которые можно сделать в конечномерном случае. Абстрактные параболические уравнения в определенном смысле даже ближе к конечномерным, так как зачастую порождают вполне непрерывные эволюционные операторы. Так, например, выходит, когда в ограниченной пространственной области рассматриваются уравнения в частных производных параболического типа или линеаризованные уравнения Навье–Стокса.

§ 1. Уравнение эволюционного оператора и индуцированные уравнения

Речь пойдет о линейном дифференциальном уравнении

$$\dot{u} = A(t)u \quad (1.1)$$

в конечномерном евклидовом или гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Оператор-коэффициент $A(t)$ будем (пока) предполагать равномерно (по норме операторов) непрерывным по t .

Для уравнения (1.1) можно рассматривать задачу Коши с условием $u(0) = a$. Эволюционный оператор $U(t)$ определим, считая, что решение $u(t) = U(t)a$. Тогда $U(t)$ можно определить как решение задачи Коши для операторного дифференциального уравнения

$$\dot{U} = A(t)U, \quad U(0) = I. \quad (1.2)$$

Далее в основном нас будут интересовать периодические дифференциальные уравнения, для которых $A(t+p) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$. В этом случае оператор $U(p) = U_p$ называется *оператором монодромии* уравнения (1.1).

Введем в рассмотрение ряд уравнений, связанных с уравнением эволюционного оператора (1.2). Первая серия (четверка) таких уравнений получается, когда наряду с (1.2) рассматриваются уравнения для $U^*(t)$, $U^{-1}(t)$, $U^{*-1}(t)$:

$$\frac{d}{dt}U^* = U^*A^*(t), \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt}U^{-1} = -U^{-1}A(t), \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{dt}U^{*-1} = -A^*(t)U^{*-1}. \quad (1.5)$$

Вторая серия уравнений, связанных с уравнением (1.2), получается для $U(-t)$, $U^*(-t)$, $U^{-1}(-t)$, $U^{*-1}(-t)$ и имеет вид

$$\frac{d}{dt}U(-t) = -A(-t)U(-t), \quad (1.6)$$

$$\frac{d}{dt}U^*(-t) = -U^*(-t)A^*(-t), \quad (1.7)$$

$$\frac{d}{dt}U^{-1}(-t) = U^{-1}(-t)A(-t), \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{dt}U^{*-1}(-t) = A^*(-t)U^{*-1}(-t). \quad (1.9)$$

Далее будет рассмотрено некоторое обобщение уравнений (1.6)–(1.9), получаемое заменой инволюции $t \mapsto -t$ на инволюцию общего вида $t \mapsto \alpha(t)$, $\alpha(\alpha(t)) = t$.

Рассматривая тензорные, внешние и т. п. (симметричные по одним и антисимметричные по другим наборам множителей) степени оператора U , можно прийти к целому ряду дифференциальных уравнений в тензорной алгебре, порождаемой оператором U . В нашем контексте наибольший интерес представляет уравнение для $U^{\wedge(n-1)}(t)$ – $(n-1)$ -й внешней степени оператора $U(t)$, где $n = \dim \mathbb{H}$ – размерность фазового пространства. Это потому, что имеется естественный изоморфизм пространства $\mathbb{H}$ и его $(n-1)$ -й внешней степени $\mathbb{H}^{\wedge(n-1)}$. Конечно, при этом $\mathbb{H}$ приходится считать конечномерным, однако полученное уравнение интересно и в бесконечномерном случае. Необходимые для дальнейшего сведения из полилинейной алгебры имеются, например, в [9; гл. 5], [10; гл. 1, § 5], [11; лекции 8–10].

Если векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис в $\mathbb{H}$, то поливекторы $\check{e}_i = (-1)^i e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_n$, $i = 1, \dots, n$, образуют базис в $\mathbb{H}^{\wedge(n-1)}$. Шапочка над e_i означает, что этот вектор во внешнем произведении пропущен.

Теперь соответствие $e_i \rightarrow \check{e}_i$ определяет изоморфизм $Y: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^{\wedge(n-1)}$. Положим $Z(t) = Y^{-1}U^{\wedge(n-1)}(t)Y$, т.е. перенесем оператор $U^{\wedge(n-1)}$ в $\mathbb{H}$.

Оператор $U^{\wedge(n-1)}$, определяемый на каждом базисном поливекторе $\check{e}_i$ равенством $U^{\wedge(n-1)}\check{e}_i = (-1)^i Ue_1 \wedge Ue_2 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge Ue_n$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}U^{\wedge(n-1)} = S_{\wedge}(A(t))U^{\wedge(n-1)}(t),$$

где через $S_{\wedge}$ обозначается внешняя сумма порядка $n-1$ оператора $A(t)$:

$$S_{\wedge}(A) = A \otimes I \otimes \dots \otimes I + I \otimes A \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes \dots \otimes I \otimes A \Big|_{\mathbb{H}^{\wedge(n-1)}}.$$

Соответственно оператор-функция Z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dZ}{dt} = [\text{sp } A(t)I - A(t)] Z. \quad (1.10)$$

Для доказательства заметим, что матрицу внешней суммы $S_{\wedge}(A)$ можно выразить через матрицу $(a_{ik})_{i,k=1}^n$ оператора A . Для этого вычисляем

$$\begin{aligned} (-1)^i S_{\wedge}(A) \check{e}_i &= A e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_n + e_1 \wedge A e_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_n \\ &\quad + \cdots + e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_i \wedge \cdots \wedge A e_n \\ &= a_{1k} e_k \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_n + a_{2k} e_1 \wedge e_k \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_n \\ &\quad + \cdots + a_{nk} e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_k. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Подразумевается суммирование по k от 1 до n . В каждой из сумм по k в (1.11) могут быть отличны от нуля лишь два слагаемых, отвечающих $k = j$ и $k = i$, где j — номер слагаемого. Это позволяет (после необходимых перестановок множителей во внешних произведениях) переписать (1.11) в виде

$$S_{\wedge}(A) \check{e}_i = \text{sp } A \check{e}_i - \sum_{j=1}^n a_{ji} \check{e}_j.$$

Отсюда и следует (1.10) в матричной форме. Результат, как видим, не зависит, по сути, от выбора базиса. Можно построить инвариантное доказательство. Для этого следует выбрать форму объема $\omega \in \mathbb{H}^{\wedge n}$ и определить изоморфизм $Y: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^{\wedge(n-1)}$, полагая $Y\xi = i(\xi)\omega$ для любого $\xi \in \mathbb{H}$. В результате придем снова к (1.10).

Теперь положим $Z(t) = \Delta(t)W(t)$, где $\Delta(t) = \det U(t) = \exp \int_0^t \text{sp } A(s) ds$.

Тогда для оператор-функции $W(t)$ получается уравнение, которое запишем в главе порождаемой им серии:

$$\dot{W} = -A(t)W, \quad (1.12)$$

$$\dot{W}^* = -W^* A^*(t), \quad (1.13)$$

$$\frac{d}{dt} W^{-1} = W^{-1} A(t), \quad (1.14)$$

$$\frac{d}{dt} W^{*-1} = A^*(t) W^{*-1}. \quad (1.15)$$

Запишем еще серию уравнений, порождаемую инверсией $t \mapsto -t$ из (1.12)–(1.15):

$$\frac{d}{dt} W(-t) = A(-t)W(-t), \quad (1.16)$$

$$\frac{d}{dt} W^*(-t) = W^*(-t)A^*(-t), \quad (1.17)$$

$$\frac{d}{dt} W^{-1}(-t) = -W^{-1}(-t)A(-t), \quad (1.18)$$

$$\frac{d}{dt} W^{*-1}(-t) = -A^*(-t)W^{*-1}(-t). \quad (1.19)$$

Итак, с уравнением (1.1) мы связали 4 серии дифференциальных уравнений (1.2)–(1.5), (1.6)–(1.9), (1.12)–(1.15), (1.16)–(1.19), по 4 уравнения в каждой серии. Теперь наша задача – рассмотреть такие уравнения (1.1), для которых некоторые пары из этого набора уравнений совпадают или переходят одно в другое при простейшей замене неизвестной типа $W = \beta(t)W_1$, где $\beta(t)$ – известная гладкая функция времени. Сейчас мы последовательно пройдем вдоль всех четырех серий уравнений и рассмотрим все возможные совпадения уравнения (1.2) с остальными.

Внутри первой серии (1.2)–(1.5) возможны лишь совпадения первого и последнего уравнений; тогда и уравнения (1.3), (1.4) совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $A(t) = -A^*(t)$, т.е. оператор $A(t)$ кососимметричен для любого t . Тогда оператор $U(t)$ изометричен:

$$U(t) = U^{*-1}(t).$$

Доказательство следует из единственности решения задачи Коши для уравнений (1.2), (1.5) и того факта, что $U(0) = U^*(0) = I$. Подчеркнем, что этот результат связан с выделенным в $\mathbb{H}$ скалярным произведением. Изометричность, конечно, непосредственно получается из (1.1) скалярным умножением на $u(t)$.

И еще одно замечание. Здесь и далее в этом параграфе несущественно, что скалярное произведение дефинитно. Те же результаты получаются и для псевдоевклидова пространства – линейного пространства с фиксированной невырожденной билинейной формой. Все это, по сути, различные частные случаи теории Софуса Ли: для того чтобы эволюционный оператор для всех t содержался в некоторой группе Ли линейных операторов, необходимо и достаточно, чтобы операторный коэффициент $A(t) = \dot{U}(t)U^{-1}(t)$ содержался в ее алгебре Ли. Еще один важный пример дает группа унимодулярных операторов $SL(n, \mathbb{R})$ – подгруппа в $GL(n, \mathbb{R})$, выделяемая условием $\det U = 1$. В этом случае алгебра Ли состоит из всевозможных матриц A с нулевым следом: $\text{sp } A = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Справедливы следующие утверждения:

- a) если $A(t)$ нечетно по t , так что $A(t) = -A(-t)$, то $U(t)$ – четная оператор-функция: $U(t) = U(-t)$;
- b) если $A(t) = A^*(-t)$, то $U(t) = U^{*-1}(-t)$, так что

$$U^*(-t)U(t) = I;$$

- c) если $A(t) = A^*(t)$, то справедливо соотношение

$$W^*(t)U(t) = I;$$

- d) если $A(t) = A(-t)$, то $U(t) = W(-t)$;
- e) если $A(t) = -A^*(-t)$, то

$$W^*(-t)U(t) = I. \tag{1.20}$$

Доказательство сразу следует из того факта, что уравнение (1.2) (вместе с начальным условием) совпадает в случае a) с (1.6), в случае b) – с (1.9), в случае c) – с (1.15), в случае d) – с (1.16), в случае e) – с (1.19).

Заметим, что определение оператора W зависит от фиксированной формы объема ω . Независимо от выбора ω всегда спектр $\sigma(W(t))$ совпадает со спектром $\sigma(U^{-1}(t))$. В случае, когда выполнено равенство (1.20), получается, что $\sigma(U(t)) = \sigma(W^{*-1}(-t)) = \sigma(U(-t))$.

§ 2. Периодические уравнения с самосопряженным оператором монодромии

Наряду с дифференциальным уравнением

$$\dot{u} = A(t)u, \quad (2.1)$$

где $A(t)$ — p -периодическая оператор-функция, будем рассматривать союзное дифференциальное уравнение

$$\dot{v} = A^*(-t)v. \quad (2.2)$$

Пусть $U(t)$, $V(t)$ — эволюционные операторы уравнений (2.1), (2.2), так что $u(t) = U(t)a$, $v(t) = V(t)b$ суть решения задач Коши для этих уравнений с начальными условиями: $u(0) = a$, $v(0) = b$. Соответствующие операторы монодромии: $U_p = U(p)$, $V_p = V(p)$. Следующее утверждение хорошо известно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Для любых $a, b \in \mathbb{H}$ справедливо равенство*

$$\frac{d}{dt}(U(t)a, V(p-t)b) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Оператор V_p есть гильбертов сопряженный к U_p , т.е. $U_p^ = V_p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисляя производную в (2.3) с использованием соотношений $\dot{U} = A(t)U$, $\dot{V} = A^*(-t)V$, видим, что она равна

$$(A(t)U(t)a, V(p-t)b) + (U(t)a, -A^*(-p+t)V(p-t)b) = 0.$$

Интегрируя равенство (2.3) от 0 до p , имеем

$$(U_p a, b) = (a, V_p b).$$

Таким образом, $V_p = U_p^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Для любого t выполняются равенства*

$$U_p = V^*(p-t)U(t), \quad V_p = U^*(t)V(p-t), \quad (2.4)$$

$$U^*(t)V(-t) = I. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства (2.4), (2.5) получаем, интегрируя (2.3) сначала в пределах 0, t , а затем в пределах t , p . Применяя “дискретный принцип причинности” $V(p-t) = V(-t)V(p)$, из (2.4) выводим (2.5).

Другое доказательство равенства (2.5) получается непосредственным применением соотношения

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(-t)) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть p -периодический операторный коэффициент $A(t)$ в (2.1) удовлетворяет условию*

$$A^*(-t) = A(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Тогда оператор монодромии U_p самосопряжен и положительно определен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии (2.6) уравнение (2.1) совпадает со своим союзным уравнением (2.2). Поэтому совпадают эволюционные операторы: $U(t) = V(t)$, а также операторы монодромии $U_p = V_p$. Но $V_p = U_p^*$ согласно предложению 2.1, так что оператор U_p самосопряжен. Полагая в (2.4) $t = p/2$, выводим

$$U_p = U^* \left(\frac{p}{2} \right) U \left(\frac{p}{2} \right),$$

откуда ввиду невырожденности оператора $U(p/2)$ следует положительная определенность.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = A(t, \lambda)u, \quad (2.7)$$

зависящее от вещественного параметра λ и периодическое с периодом p , не зависящим от λ . Предположим, что при $\lambda = 0$ уравнение (2.7) асимптотически устойчиво, и поставим вопрос о возможности потери устойчивости с изменением λ . Пусть $(\lambda_*^-, \lambda_*^+)$ – наибольший интервал на оси λ , для которого сохраняется асимптотическая устойчивость, т.е. все мультипликаторы (собственные значения оператора монодромии) находятся внутри единичного круга. Тогда λ_*^- называется *первым отрицательным критическим значением*, а λ_*^+ – *первым положительным критическим значением*. Вообще же *критическим* называется такое значение λ_* параметра λ , для которого существует хотя бы один мультипликатор на единичной окружности. Как известно, имеется ровно три случая общего положения:

- 1) нейтральный спектр σ_0 оператора монодромии (часть спектра, лежащая на единичной окружности) при $\lambda = \lambda_*$ состоит из единственного простого собственного значения $+1$;
- 2) $\sigma_0 = \{-1\}$;
- 3) $\sigma_0 = \{e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\}, \alpha \neq 0, \pi \pmod{2\pi}$;

все эти собственные числа – простые.

Предположим, что для всех λ

$$A(t+p, \lambda) \equiv A(t, \lambda). \quad (2.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4 (принцип монотонности). *При условии (2.8) для уравнения (2.1) возможна лишь монотонная (т.е. связанная с положительными мультипликаторами) неустойчивость.*

Это с очевидностью следует из строгой положительности оператора монодромии.

В приложениях часто встречаются уравнения с линейно входящим параметром:

$$\dot{u} = -A(t)u + \lambda B(t)u. \quad (2.9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть $A^*(-t) = A(t)$, $B^*(-t) = B(t)$. Предположим, что $\dim \mathbb{H} < \infty$ и при $\lambda = 0$ уравнение (2.9) асимптотически устойчиво. Пусть $\text{sp } B(t)$ имеет ненулевое среднее по периоду:

$$\langle \text{sp } B \rangle := \frac{1}{p} \int_0^p \text{sp } B(t) dt \neq 0.$$

Тогда для λ , достаточно больших по абсолютной величине и того же знака, что $\langle \text{sp } B \rangle$, уравнение (2.9) неустойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле Лиувилля оператор монодромии $U(p)$ имеет определитель

$$\det U(p) = e^{p(-\langle \operatorname{sp} A \rangle + \lambda \langle \operatorname{sp} B \rangle)}.$$

Поэтому $\det U(p) > 1$ при $\lambda \langle \operatorname{sp} B \rangle > \langle \operatorname{sp} A \rangle$. При этом условии хотя бы один мультипликатор по модулю больше единицы.

Дальнейшее исследование возможных критических значений и интервалов устойчивости для уравнения (2.9) представляет большой интерес, но пока это далее не продвинуто (см., впрочем, случай больших частот в § 5). Ясно, что условие неустойчивости $\langle \operatorname{sp} B \rangle \neq 0$ необходимо лишь в одномерном случае.

Посмотрим, что дают предыдущие результаты в случае гамильтонова уравнения

$$\dot{x} = JA(t)x \quad (2.10)$$

на двоином пространстве $2\mathbb{H} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, причем $A^*(t) = A(t)$ и

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие (2.6) для уравнения (2.10) принимает вид

$$A(-t) = JA(t)J. \quad (2.11)$$

Из условия (2.11) вытекает обратимость [12] – специфическая симметрия уравнения (2.10): если $x(t)$ – решение, то и $x_J(t) = Jx(-t)$ – тоже решение. Действительно, $x(-t) = -Jx_J(t)$, так как $J^2 = -I$, и

$$\dot{x}_J(t) = -J\dot{x}(-t) = -JJA(-t)x(-t) = -JA(t)JJx_J(t) = JA(t)x_J(t).$$

Как известно, спектр оператора монодромии U_p гамильтоновой системы (2.10) с p -периодическим коэффициентом симметричен относительно единичной окружности: вместе с мультипликатором ρ присутствует и $1/\rho$. Выходит, что при условии (2.11), когда спектр $\sigma(U_p)$ лежит на положительном луче $\mathbb{R}_+$, уравнение (2.10), как правило, неустойчиво. Если все-таки оно устойчиво, то $U_p = I$. Случай, когда оператор монодромии U_p сводится к тождественному, хотя и редко, но встречается. Примером может служить уравнение (2.10) в случае $\mathbb{H} = \mathbb{R}^2$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ b(t) & 0 \end{pmatrix},$$

если среднее $\langle b \rangle = 0$. Условие (2.11) выполняется, когда $b(t) = b(-t)$.

Несколько обобщая предыдущий результат, рассмотрим p -периодическое уравнение $\dot{u} = A(t)u$ при условиях (2.6) и

$$\langle \operatorname{sp} A \rangle = 0. \quad (2.12)$$

Такое уравнение назовем *чисто колебательным*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть выполнены условия (2.6), (2.12) и уравнение $\dot{u} = A(t)u$ устойчиво. Тогда его оператор монодромии $U_p = I$ и все решения – периодические с периодом p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Лиувилля из условия (2.12) следует, что произведение всех мультипликаторов равно +1. Из (2.6) вытекает, что они положительны, а из устойчивости – что все они лежат на единичной окружности и полупросты (т.е. являются простыми полюсами резольвенты оператора U_p). Отсюда следует, что $U_p = I$.

§3. Группы оператор-функций и периодические дифференциальные уравнения

Если заданы группа Ли G и многообразие X , то можно определить группу $F(G, X)$, элементами которой являются (гладкие) отображения $g: x \mapsto g(x)$ ($g: X \rightarrow G$), а умножение определяется поточечно: если $g, h \in F(G, X)$, то по определению $(g \cdot h)(x) = g(x)h(x)$. Единицей группы $F(G, X)$ служит отображение $e: x \mapsto e_G$, где e_G — единица в группе G . Обратный элемент g^{-1} дается равенством: $g^{-1}(x) = [g(x)]^{-1}$.

Нас будет интересовать в первую очередь тот случай, когда $G = \text{GL}(\mathbb{H})$ — группа автоморфизмов евклидова пространства $\mathbb{H}$, а X — вещественная прямая $\mathbb{R}$ или окружность S^1 . Для краткости группу $F(\text{GL}(\mathbb{H}), \mathbb{R})$ будем обозначать через $\mathcal{G}$. Группу $\mathcal{G}_0$ определим как подгруппу в $\mathcal{G}$, состоящую из всевозможных оператор-функций U , удовлетворяющих условию: для всех $t \in \mathbb{R}$

$$U^*(-t)U(t) = I. \quad (3.1)$$

Тогда ввиду обратимости $U(t)$ также и $U(t)U^*(-t) = I$. Это определение корректно: если $U, V \in \mathcal{G}_0$, то

$$\begin{aligned} (UV)^*(-t)UV(t) &= V^*(-t)U^*(-t)U(t)V(t) = I, \\ (U^{-1})^*(t)U^{-1}(t) &= [U(t)U^*(-t)]^{-1} = I. \end{aligned}$$

Если потребовать дополнительно условия $U(0) = I$, то на оператор-функцию U класса C^r можно смотреть как на эволюционный оператор линейного дифференциального уравнения

$$\dot{u} = A(t)u, \quad A(t) = \dot{U}(t)U^{-1}(t). \quad (3.2)$$

Коэффициент $A(t)$ при $U \in C^{r+1}$ принадлежит C^r и называется (*правой*) *мультипликативной производной семейства* $U(t)$. Решение задачи Коши для уравнения (3.2) с начальным условием $u(t_0) = u_0$ есть

$$u(t) = U_{t_0}^t u_0, \quad U_{t_0}^t = U(t)U^{-1}(t_0).$$

Здесь $U_{t_0}^t$ — эволюционный оператор, отвечающий начальному моменту t_0 , при этом $U_0^t = U(t)$. Справедливо тождество (обобщенный принцип причинности)

$$U_{t_0}^t = U_{t_1}^t U_{t_0}^{t_1}.$$

Если коэффициент A в уравнении (3.2) p -периодичен: $A(t+p) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$, то, как известно, выполняется равенство

$$U(t+p) = U(t)U(p), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Верно и обратное.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $U \in \mathcal{G}$, $U(0) = I$, $U \in C^1$, и выполнено условие (3.3). Тогда U есть оператор сдвига уравнения (3.2) с p -периодическим операторным коэффициентом A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь определением (3.2), выводим

$$A(t+p) = \dot{U}(t+p)U^{-1}(t+p). \quad (3.4)$$

Согласно условию (3.3) верны соотношения

$$\dot{U}(t+p) = A(t)U(t)U(p), \quad U^{-1}(t+p) = U^{-1}(p)U^{-1}(t). \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) в (3.4), видим, что $A(t+p) = A(t)$.

Посмотрим теперь, какова мультипликативная производная $A(t)$, когда $U \in \mathcal{G}_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть U — обратимая для каждого $t \in \mathbb{R}$ оператор-функция класса C^1 , причем $U(0) = I$. Для того чтобы $U \in \mathcal{G}_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$A^*(-t) = A(t). \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $U \in \mathcal{G}_0$ и равенство (3.1) выполнено, то, дифференцируя его, сразу приходим к (3.6). Обратно, если выполнено условие (3.6), имеем

$$\frac{d}{dt}[U^*(-t)U(t)] = U^*(-t)[A(t) - A^*(-t)]U(t) = 0.$$

Интегрируя это равенство, приходим к (3.1).

В случае $\dim \mathbb{H} = 1$ группу $\mathcal{G}_0$ обозначим через $\mathcal{G}_0^1$ и отождествим ее элементы со скалярными функциями. Условие (3.1) принимает вид

$$u(-t) \cdot u(t) = 1.$$

Такую функцию $u(t)$, когда она непрерывна, можно представить в виде

$$u(t) = \varepsilon e^{\varphi(t)},$$

где $\varepsilon = 1$ либо $\varepsilon = -1$, а функция $\varphi(t)$ нечетна. В комплексном случае получилось бы выражение

$$u(t) = e^{\varphi(t) + i\psi(t)}$$

с вещественными функциями φ, ψ , причем φ нечетна, ψ четна. Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид $\dot{u} = a(t)u$, где функция a должна удовлетворять условию: $a^*(-t) = a(t)$, т.е. ее вещественная часть четна, а мнимая нечетна. Следующее предложение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если $U \in \mathcal{G}_0$ и $\lambda \in \mathcal{G}_0^1$, то $\lambda U \in \mathcal{G}_0$. Кроме того, $U^* \in \mathcal{G}_0$ и оператор-функция U_- , определяемая как $U_-(t) = U(-t)$, также принадлежит группе $\mathcal{G}_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Замена переменной $u(t) = V(t)z(t)$ не выводит уравнение (3.2) из рассматриваемого класса, если V — эволюционный оператор уравнения $\dot{v} = B(t)v$, $B^*(-t) = B(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После замены получается уравнение

$$\dot{z} = Cz, \quad C(t) = V^{-1}(t)[A(t) - B(t)]V(t).$$

Поскольку $V^*(-t)V(t) = I$ (см. (3.1)), имеем

$$C^*(-t) = V^*(-t)[A^*(-t) - B^*(-t)]V^{*-1}(-t) = C(t).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Замена $u(t) = Kz(t)$ с постоянным ортогональным оператором K (таким, что $KK^* = I$) не выводит уравнение (3.2) из рассматриваемого класса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В результате замены получается уравнение с коэффициентом $A_K(t) = K^{-1}A(t)K$. При условии $KK^* = I$ получаем, что $A_K^*(-t) = A_K(t)$.

Заметим, что условие $KK^* = I$ означает принадлежность постоянной оператор-функции K группе $\mathcal{G}_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Если оператор-функция $A(t)$ p -периодична и $A^*(-t) = A(t)$, то ее разложение Фурье имеет вид

$$A(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{p}, \quad A_n^* = A_n. \quad (3.7)$$

Обратно, из (3.7) следует, что $A^*(-t) = A(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из равенства

$$A^*(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^* e^{in\omega t}.$$

Группа $\mathcal{G}_\alpha$ и периодические уравнения. Пусть имеются два дифференциальных уравнения в $\mathbb{H}$:

$$\dot{u} = A(t)u, \quad (3.8)$$

$$\dot{w} = B(t)w. \quad (3.9)$$

Пусть еще задана функция $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая свойством инволютивности $\alpha(\alpha(t)) = t$ (карлемановский сдвиг на прямой, см., например, [13], [14]). Далее мы подчиним ее требованию p -периодичности, так что получится карлемановский сдвиг окружности. Тривиальным примером служит $\alpha(t) = t$, а простейший нетривиальный пример: $\alpha(t) = -t$.

Если α — гладкая функция, то справедлива формула

$$\frac{d}{dt}(u(t), w(\alpha(t))) = ([A(t) + \dot{\alpha}(t)B^*(\alpha(t))]u(t), w(\alpha(t))).$$

Отсюда следует, что при условии

$$A(t) + \dot{\alpha}(t)B^*(\alpha(t)) = 0$$

выполняется равенство

$$\frac{d}{dt}(u(t), w(\alpha(t))) = 0. \quad (3.10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть оператор-коэффициент $A(t)$ в (3.8) непрерывен, p -периодичен и для всех t имеет место равенство

$$A(t) + \dot{\alpha}(t)A^*(\alpha(t)) = 0, \quad (3.11)$$

где α — гладкий карлемановский сдвиг прямой, меняющий ориентацию, причем выполнено условие

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha(p) = 0. \quad (3.12)$$

Тогда оператор монодромии U_p уравнения (3.8) самосопряжен и положительно определен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u и w — два решения уравнения (3.8) при начальных условиях $u(0) = \varphi$, $w(0) = \psi$. Интегрируя от 0 до p равенство (3.10), которое выполняется в силу (3.11), получаем

$$(u(p), w(\alpha(p))) = (u(0), w(\alpha(0))).$$

Но $u(p) = U_p \varphi$, а согласно (3.12) $w(\alpha(p)) = w(0) = \psi$, $w(\alpha(0)) = w(p) = U_p \psi$. Поэтому для любых $\varphi, \psi \in \mathbb{H}$:

$$(U_p \varphi, \psi) = (\varphi, U_p \psi).$$

Итак, U_p — симметричный оператор. Теперь заметим, что из условия (3.11) вытекает равенство для эволюционного оператора $U(t)$, обобщающее (3.1):

$$U^*(\alpha(t))U(t) = U(\alpha(0)). \quad (3.13)$$

Из условий (3.12) следует, что отображение α имеет неподвижную точку t_0 на интервале $(0, p)$ (функция $\alpha(t) - t$ принимает значения разных знаков на концах $0, p$). Так как $\alpha(0) = p$, $\alpha(t_0) = t_0$, из (3.13) получаем, что

$$U_p = U^*(t_0)U(t_0).$$

Итак, оператор U_p положительно определен.

Как видим, естественно возникает группа $\mathcal{G}_\alpha$ — подгруппа группы $\mathcal{G}$, выделяемая условием

$$U^*(\alpha(t))U(t) = I,$$

где α — инволюция вещественной прямой, а 0 — ее неподвижная точка: $\alpha(0) = 0$. В случае $\alpha(t) = -t$ получается группа $\mathcal{G}_0$.

Заметим, что небезынтересны и уравнения, удовлетворяющие условию (3.11) со сдвигом α , не имеющим неподвижных точек.

§ 4. Симметричный мультипликативный интеграл

Вновь рассмотрим дифференциальное уравнение в $\mathbb{H}$

$$\dot{u} = A(t)u \quad (4.1)$$

с непрерывным коэффициентом A . Для любого $t \in \mathbb{R}$ определим оператор $M(t): \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ условием

$$u(t) = M(t)u(-t).$$

Пусть по-прежнему U_s^t — оператор сдвига по траекториям уравнения (4.1) за время от s до t и $U(t) = U_0^t$. Тогда положим

$$M(t) = U_{-t}^t = U_0^t U_{-t}^0 = U(t)U^{-1}(-t). \quad (4.2)$$

Оператор M естественно представляется в виде мультипликативного интеграла [15], содержащего лишь оператор-коэффициент $A(t)$. Сначала заметим, что оператор-функция $M(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dM(t)}{dt} = A(t)M(t) + M(t)A(-t), \quad (4.3)$$

которое следует из (4.2). Трансформатор в правой части уравнения (4.3) естественно записывается в виде кронекеровской (тензорной) суммы $A(t) \otimes I + I \otimes A(-t)$. Уравнение (4.3) эквивалентно следующему асимптотическому равенству, которое подсказывает данное далее определение интегральных произведений:

$$M(t + \tau) = e^{\tau A(t)} M(t) e^{\tau A(-t)} + o(\tau), \quad \tau \rightarrow 0.$$

Уравнение (4.3) нужно решать при начальном условии $M(0) = I$. Решение этой задачи Коши мы представим в виде симметричного мультипликативного интеграла, который по определению есть предел последовательности интегральных произведений $M_1(t), M_2(t), \dots$:

$$M_n = V_n V_{n-1} \cdots V_1 V_0 V_{-1} \cdots V_{-(n-1)} V_{-n}, \quad (4.4)$$

где приняты обозначения

$$V_k = e^{\tau_n A(t_{kn})}, \quad \tau_n = \frac{t}{n}, \quad t_{kn} = k\tau_n, \quad -n \leq k \leq n, \quad n = 0, 1, \dots$$

При этом M_n можно (подобно (4.2)) факторизовать в виде

$$M_n = M_n^+ M_n^-, \quad M_n^+ = V_n V_{n-1} \cdots V_1 V_0, \quad M_n^- = V_{-1} \cdots V_{-(n-1)} V_{-n}.$$

Для введенного симметричного мультипликативного интеграла будем применять обозначение

$$M(t) = \int_{-t}^t e^{A(s)} ds. \quad (4.5)$$

В обычных обозначениях [15] мультипликативный интеграл (4.5) записывается так

$$M(t) = \int_{-t}^t (I + A(s) ds).$$

Эта формула соответствует иному предельному процессу, в котором вместо оператора V_k в (4.4) применяется его асимптотика

$$V_k = I + \tau_n A(t_{kn}) + o(\tau_n), \quad \tau_n \rightarrow 0.$$

Остаточный член, конечно, отбрасывается. При работе с неограниченными коэффициентами A , скажем с параболическими дифференциальными уравнениями, формула (4.5) и определение (4.4) предпочтительны, поскольку полугруппа или группа $\exp(\tau A(t))$ с параметром τ всюду определена и во многих случаях вполне непрерывна.

Симметричный мультипликативный интеграл может быть полезен, в частности, при исследовании устойчивости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для того чтобы p -периодическое уравнение*

$$\dot{u} = A(t)u, \quad A(t+p) = A(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

было асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M(t) = 0. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь определением (4.2) и свойствами эволюционного оператора p -периодического уравнения, выводим

$$M(np) = U_{-np}^{np} = U_p^{2n}. \quad (4.8)$$

Если условие (4.7) выполнено, то $U_p^{2n} \rightarrow 0$, а тогда и $U_p^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Уравнение (4.6) асимптотически устойчиво.

Обратно, если уравнение (4.6) асимптотически устойчиво, то согласно (4.8) $M_{np} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Всякое $t \in \mathbb{R}_+$ запишем в виде $t = np + \tau$, $0 \leq \tau < p$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Снова обращаясь к определению (4.2) и пользуясь равенством $U_{np}^{np+t} = U_0^t(t) = U(t)$, получаем

$$M(t) = M(np + \tau) = U_{-np-\tau}^{np+\tau} = U_0^\tau U_{-np}^{np} U_{-\tau}^0 = U_0^\tau M(np) U_{-\tau}^0. \quad (4.9)$$

Оценка по норме дает неравенство

$$\|M(t)\| \leq b_+ b_- \|U_p^{2n}\|, \quad b_+ = \max_{0 \leq \tau \leq p} \|U_0^\tau\|, \quad b_- = \max_{0 \leq \tau \leq p} \|U_{-\tau}^0\|.$$

Отсюда следует (4.7), поскольку $n \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Формула (4.9) есть частный случай более общей формулы, справедливой для любых t, s , $0 \leq s \leq t$:

$$M(t) = U_s^t M(s) U_{-t}^{-s}.$$

Если $A^*(-t) = A(t)$, то из (4.2) и (3.1) следует равенство

$$M(t) = U(t) U^*(t).$$

Таким образом, в этом случае оператор $M(t)$ для каждого t положительно определен.

§ 5. Высокочастотные модуляции и осредненные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение в конечномерном евклидовом или гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$

$$\frac{du}{dt} = -A(t)u + \lambda B(\tau, t)u, \quad (5.1)$$

где A и B — линейные операторные коэффициенты, λ — вещественный параметр. Наряду с “медленным временем” t в (5.1) фигурирует “быстрое время” $\tau = \omega t$, $\omega \rightarrow \infty$ — большой параметр. Будем пока считать, что A и B — ограниченные и равномерно непрерывные оператор-функции от t и t, τ соответственно. О случае неограниченных операторных коэффициентов далее будет сказано особо.

Пусть A и λ не зависят от ω , а оператор-функция $B(\tau, t)$ периодична по τ с периодом 2π и допускает представление

$$B(\tau, t) = B_0(t) + \omega^{1/2} B_v(\tau, t).$$

Здесь B_0 — среднее по τ , а $\omega^{1/2} B_v$ — модуляция, так что

$$B_0 = \overline{B}, \quad \overline{B_v} = 0.$$

Зависимость от медленного времени далее иногда не будем явно указывать. Как обычно, среднее по τ определяется, например, для оператор-функции $B(\tau, t)$ равенством

$$\overline{B} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B(\tau, t) d\tau.$$

Чтобы найти высокочастотную асимптотику ($\omega \rightarrow \infty$) решений задачи Коши, а также периодических решений, и вообще решений Флоке, применим метод осреднения. Решение уравнения (5.1) разыскиваем в виде

$$u = \overline{u}(t) + \omega^{-1/2} \xi(\tau), \quad \overline{\xi} = 0. \quad (5.2)$$

Заметим, что вибрационная компонента ξ может зависеть и от t . Подстановка выражения (5.2) в (5.1) и выделение главных членов порядка $\omega^{1/2}$ при $\omega \rightarrow \infty$ дает асимптотическое уравнение

$$\xi' = \lambda B_v(\tau, t) \overline{u}(t), \quad (\cdot)' = \frac{d}{d\tau}.$$

Его 2π -периодическое по τ решение с нулевым средним определяется однозначно равенством

$$\xi(\tau) = \lambda C(\tau, t) \overline{u}. \quad (5.3)$$

Оператор-функция $C(\tau, t)$ есть решение задачи

$$C'(\tau, t) = B_v(\tau, t), \quad \overline{C} = 0. \quad (5.4)$$

Его можно записать, например, в виде

$$C(\tau, t) = \int_{-\pi}^{\pi} G(\tau, s) B_v(s, t) ds,$$

где ядро $G(\tau, s)$ определяется равенствами

$$G(\tau, s) = \begin{cases} \frac{s}{2\pi}, & \tau > s, \\ \frac{s}{2\pi} - 1, & \tau < s. \end{cases}$$

Подставляя выражения (5.2), (5.3) в (5.1), после осреднения по τ приходим к уравнению для плавной компоненты $\bar{u}$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -A\bar{u} + \lambda B_0 \bar{u} + \lambda^2 K \bar{u}, \quad (5.5)$$

где виброгенное (вибрационного происхождения) слагаемое $\lambda^2 K \bar{u}$ задается равенством

$$K \bar{u} = \lambda^{-1} \overline{B_v \xi} = \overline{B_v C} \bar{u} = \overline{C' C} \bar{u}.$$

В интересном и важном частном случае гравитационной конвекции жидкости в поле вибрационных сил уравнение типа (5.5) было выведено в [16].

Интегрирование по частям позволяет получить для K выражение

$$K = \overline{C' C} = -\overline{C C'} = \frac{1}{2} [\overline{C'}, \overline{C}], \quad (5.6)$$

где $[C', C] = C' C - C C'$ — коммутатор. В случае $\dim \mathbb{H} < \infty$ из (5.6) следует, что $\text{sp } K = 0$.

В наиболее простой ситуации, когда коэффициенты A, B в (5.1) не зависят от t , осредненное уравнение (5.5) автономно. Если спектр оператора $-A + \lambda B_0 + \lambda^2 K$ весь помещается внутри левой полуплоскости, то уравнение (5.5) асимптотически устойчиво.

Часто бывает целесообразно считать, что вибрационная компонента B_v пропорциональна некоторому параметру m , так что $B_v = m B_v^0$, тогда и $C = m C^0$, где C^0 уже не зависит от m . В этом случае осредненное уравнение принимает вид

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -A\bar{u} + \lambda B_0 \bar{u} + \mu K_0 \bar{u}, \quad (5.7)$$

где $\mu = \lambda^2 m^2$, $K_0 = \overline{C^{0'} C^0}$.

Рассмотрим теперь уравнение (5.1) при дополнительных условиях, что A и B не зависят от t , оператор A положительно определен, а оператор-функция $B(\tau)$ удовлетворяет условию

$$B^*(-\tau) = B(\tau). \quad (5.8)$$

Сейчас мы покажем, что в этом случае в осредненном уравнении (5.5) операторы B_0 и K симметричны. Учитывая (5.8), получаем

$$B_0^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B^*(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(-\tau) d\tau.$$

После замены переменных $\tau = 2\pi - s$ видно, что $B_0^* = B_0$. Теперь докажем, что оператор-функция C , определенная равенством (5.4), нечетна относительно инверсии, стоящей в левой части (5.8):

$$C^*(-\tau) = -C(\tau). \quad (5.9)$$

Действительно, обозначая $C^*(-\tau)$ через $Q(\tau)$, из (5.4) получаем равенства

$$Q'(\tau) = -B_v^*(-\tau) = -B_v(\tau), \quad \overline{Q} = 0.$$

Отсюда следует $Q(\tau) = -C(\tau)$, что совпадает с (5.9). Теперь симметричность оператора K вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned} K^* &= \overline{C^* C^{*'}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C^* C^{*'} d\tau = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(-\tau) C'(-\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(s) C'(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C'(s) C(s) ds = K \quad (s = 2\pi - \tau). \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае задача о критических значениях параметра λ сводится к исследованию вещественных собственных чисел квадратичного самосопряженного пучка, т.е. к уравнению

$$A\varphi - \lambda B_0\varphi - \lambda^2 K\varphi = 0. \quad (5.10)$$

О спектре критических значений. Сразу видно, что задача устойчивости и задача о критических значениях параметра λ в стационарном случае ($K = 0$) и в периодическом случае различаются принципиально. Если $\dim \mathbb{H} = n$, то для определения критических значений λ получается характеристическое уравнение n -й степени, когда $K = 0$. В общем же периодическом случае это уравнение имеет степень $2n$, если только $\det K \neq 0$.

Уже простейший пример, следующий ниже, иллюстрирует осложнения и новые явления, которые невозможны в стационарном случае.

ПРИМЕР 1. Поскольку при $\mathbb{H} = \mathbb{R}$ вибрация не дает существенного эффекта ($K = 0$), примем $\dim \mathbb{H} = 2$. Выбирая в качестве базиса пару собственных векторов оператора A , зададим операторы A, B_0, K матрицами

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} b_1 & b_{12} \\ b_{12} & b_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & l \\ l & -k \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Легко видеть, что надлежащим образом выбранная модуляция может дать произвольный набор коэффициентов в (5.11).

Для собственных значений пучка (5.10) имеем уравнение

$$-\begin{vmatrix} d_1 - \lambda b_1 - \lambda^2 k & -\lambda b_{12} - \lambda^2 l \\ -\lambda b_{12} - \lambda^2 l & d_2 - \lambda b_2 + \lambda^2 k \end{vmatrix} = 0. \quad (5.12)$$

Слева стоит полином формальной четвертой степени. Его старший коэффициент $k^2 + l^2$ положителен, если $K \neq 0$. Его свободный член есть $-d_1 d_2$, и он отрицателен, когда оператор A знакоопределен. В этом случае уравнение (5.12) имеет не менее двух вещественных корней: по крайней мере один положительный и хотя бы один отрицательный.

Случай, когда их ровно два, реализуется, например, при $d_1 = d_2 = d, b_1 = b_2 = b, b_{12} = l = 0$. Тогда уравнение (5.12) записывается в виде

$$(d - \lambda b - \lambda^2 k)(d - \lambda b + \lambda^2 k) = 0. \quad (5.13)$$

Если выбрать k так, что $\Delta_- = b^2 - 4kd < 0$, а $\Delta_+ = b^2 + 4kd > 0$, то у первого множителя в (5.13) вещественных корней нет, а у второго ровно два. Для этого достаточно взять k достаточно большим. Если же, напротив, k мало, то $\Delta_- > 0$ и $\Delta_+ > 0$. Тогда уравнение (5.13) имеет четыре вещественных корня.

Этот пример показывает, что по сравнению со стационарным случаем (когда A и B постоянны) количество критических значений параметра λ может удвоиться. Вместе с тем ситуация довольно сложна, и в действительности в разных задачах число критических значений может быть различным. Было бы очень интересно доказать, что, как и в этом примере, в абстрактной гидродинамической модели типа (6.9) тоже существует не менее двух критических значений.

Опыт говорит, что в задаче устойчивости колебательной системы наиболее естественные результаты получаются, когда задача содержит три параметра: частота ω , амплитуда модуляции и еще один параметр, ответственный за изменение средней по времени части векторного поля. Мы уже устремили ω к ∞ , а потому параметров остается два. Таким образом, целесообразно перейти к осредненному уравнению в форме (5.7). Вместо спектральной задачи для квадратичного по λ пучка (5.10) мы получаем спектральную задачу

$$A\varphi - \lambda B_0\varphi - \mu K_0\varphi = 0. \quad (5.14)$$

Будем считать, что $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$ — независимые параметры. Мы видим, что λ отвечает за изменение средней части векторного поля, а параметр μ описывает влияние высокочастотной модуляции. Становится ясно, что при отсутствии одного из этих эффектов картина вполне обозрима, а трудности связаны с их взаимодействием.

Следующее предложение описывает ситуации, когда влияние одного из эффектов преобладает. Ориентируясь на приложения к задачам устойчивости течения вязкой жидкости и задачам конвекции, будем рассматривать спектральную задачу (5.14) при следующих предположениях:

- 1) оператор A самосопряжен и положительно определен в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$; обратный оператор $A^{-1}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ вполне непрерывен, и его образ плотен в $\mathbb{H}$;
- 2) операторы B_0 и K_0 подчинены положительно определенному квадратному корню $A^{1/2}$ в том смысле, что операторы $A^{-1/2}B_0$ и $A^{-1/2}K_0$ допускают продолжение по непрерывности до ограниченных операторов на пространстве $\mathbb{H}$, а операторы $B_0A^{-1/2}$ и $K_0A^{-1/2}$ определены и ограничены.

Рассмотрим две предельные спектральные задачи

$$A\varphi - \lambda B_0\varphi = 0, \quad (5.15)$$

$$A\varphi - \mu K_0\varphi = 0. \quad (5.16)$$

При таких предположениях ненулевые решения могут существовать лишь при вещественных λ , μ , и они действительно существуют, если $B_0 \neq 0$, $K_0 \neq 0$. Положительные собственные значения μ существуют всякий раз, когда оператор K_0 не является отрицательным — он может быть положительным или знакопеременным. Общее число собственных значений пучков (5.15) и (5.16) есть соответственно $\dim(\text{im } A^{-1}B_0)$ и $\dim(\text{im } A^{-1}K_0)$. Все это следует, в конечном счете, из теоремы

Гильберта–Шмидта. Для определенности рассмотрим тот случай, когда существует бесконечная последовательность $(0 <) \lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq \dots \leq \lambda_n^+ \leq \dots$ положительных и бесконечная последовательность $(0 >) \lambda_1^- \geq \lambda_2^- \geq \lambda_n^- \geq \dots$ отрицательных собственных значений пучка (5.15). Все они конечнократны. Аналогично предположим, что имеется бесконечная последовательность $(0 <) \hat{\mu}_1 \leq \hat{\mu}_2 \leq \dots \leq \hat{\mu}_n \leq \dots$ положительных собственных значений пучка (5.16). Они тоже конечнократны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *При сделанных предположениях справедливы следующие утверждения.*

Пусть λ фиксировано и столь мало, что спектр $\sigma(A - \lambda B_0)$ лежит внутри положительного луча, т.е. $\lambda_1^- < \lambda < \lambda_1^+$. Тогда существует бесконечно много критических значений $\mu_1(\lambda) \leq \mu_2(\lambda) \leq \dots \leq \mu_n(\lambda) \leq \dots$ пучка (5.14).

Если $\mu_k(\lambda) < \mu < \mu_{k+1}(\lambda)$, то спектр устойчивости $\sigma(-A + \lambda B_0 + \mu K_0)$ уравнения (5.7) содержит ровно k отрицательных (неустойчивых) собственных значений (каждое считается столько раз, какова его кратность).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что оператор $A_\lambda = A - \lambda B_0$ при $\lambda_1^- < \lambda < \lambda_1^+$ положительно определен и имеет обратный. Тогда оператор $A_\lambda^{-1} K_0$ симметричен относительно энергетического скалярного произведения оператора A_λ . Он вполне непрерывен, а его образ $\text{im } A_\lambda^{-1} K_0$ изоморфен подпространству $\text{im } A^{-1} B_0$ и, значит, бесконечномерен. Теперь вывод о существовании критических значений $\mu_1(\lambda), \mu_2(\lambda), \dots$ следует из теоремы Гильберта–Шмидта.

Рассмотрим спектр устойчивости уравнения (5.7), т.е. спектр оператора $-A + \lambda B_0 + \mu K_0$. Стандартно устанавливается, что он чисто точечный, т.е. состоит из собственных значений σ спектральной задачи

$$(-A + \lambda B_0 + \mu K_0)\varphi = \sigma\varphi.$$

При $\mu = 0$ все собственные значения σ отрицательны, а когда μ , возрастая, переходит через собственное значение $\mu_k(\lambda)$, некоторые из собственных значений $\sigma_j(\mu)$ — в количестве равном кратности μ_k — переходят через нуль слева направо. Это следует из [17; теорема 2.3].

Аналогично, фиксируя малое μ , можно установить, что существует бесконечно много собственных значений λ пучка (5.14) и т.д. — справедливо предложение типа 5.1 с заменами $\lambda \leftrightarrow \mu, B_0 \leftrightarrow K_0$.

§6. Гидродинамические приложения

В этом параграфе указаны примеры приложения развитой выше теории к некоторым задачам динамики вязкой несжимаемой жидкости.

Как показано в [17], линеаризованный оператор Навье–Стокса несимметричен, за исключением лишь очевидного случая, когда линеаризация производится на нулевом поле скорости. Вместе с тем, если ограничиться вращательно симметричными течениями, то находится единственное поле скорости, которому отвечает самосопряженный линеаризованный оператор. Оно определяется, понятно, с точностью до постоянного множителя, который мы теперь будем считать зависящим от времени t . В цилиндрических координатах r, θ, z это поле a задается компонентами

$$a_r = a_z = 0, \quad a_\theta = \lambda \frac{c(t)}{r^3}. \quad (6.1)$$

Здесь $c(t)$ – периодическая с периодом p скалярная функция; λ , как и в [17], – вещественный параметр.

Кроме того, в [17] указаны течения, для которых линеаризованная система симметризуема – оператор $A - \lambda B(t)$ самосопряжен относительно нового скалярного произведения. Это верно для течения a с компонентами

$$a_r = 0, \quad a_z = 0, \quad a_\theta = \lambda c(t) r^\beta \quad (6.2)$$

при $\beta < -1$. Соответствующее скалярное произведение имеет вид

$$(u, v)_\varkappa = \int_D (u_r v_r + \varkappa u_\theta v_\theta + u_z v_z) r dr dz, \quad \varkappa = -\frac{2}{\beta + 1}.$$

Еще один пример относится к некоторым моделям конвекции Буссинеска при периодических внешних воздействиях.

Периодические чисто вращательные течения. Если v' – произвольное вращательно симметричное поле скорости, удовлетворяющее уравнениям Навье–Стокса, положим $v' = a + v$. Тогда для возмущения v течения (6.1) получится система уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_r - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) + 2\lambda \omega v_\theta, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = \nu \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \lambda g v_r, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta v_z \quad (6.6)$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

Здесь v_r, v_θ, v_z – компоненты возмущенной скорости v ; через P обозначено возмущение давления; $\nu > 0$ – кинематическая вязкость. Функции $\omega(r, t)$ и $g(r, t)$ определяются для любого профиля $v_0(r, t)$ азимутальной скорости и в случае профиля $v_0(r, t) = c(t)/r^3$ имеют вид

$$\omega = \frac{v_0}{r} = \frac{c(t)}{r^4}, \quad g = -\left(\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \right) = \frac{2c(t)}{r^4}.$$

Пусть $\mathcal{D} = \Omega \times S^1$ – область вращения, Ω – ее осевое сечение, S^1 – единичная окружность, которую пробегает переменная θ . Будем предполагать, что область Ω – ограниченная с гладкой границей $\partial\Omega$ и при этом ее замыкание $\bar{\Omega}$ не содержит точек оси вращения. Возьмем краевое условие на $\partial\mathcal{D}$: $v'|_{\partial\mathcal{D}} = a|_{\partial\mathcal{D}}$. Линеаризованная система возмущений получается из (6.3)–(6.6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u) + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial q}{\partial r} + \nu \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + 2\lambda \omega v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \nu \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right) + \lambda g u, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial q}{\partial z} + \nu \Delta w. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Краевое условие для цилиндрических компонент u, v, w есть условие первого рода

$$u|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad v|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad w|_{\partial\mathcal{D}} = 0. \quad (6.8)$$

Пусть Π – гидродинамический проектор Вейля, отвечающий области $\mathcal{D}$, а Π_0 – его сужение на подпространство вращательно симметричных векторных полей. Как известно (см. [18]; впервые это понял С. Г. Крейн), систему (6.7)–(6.8) можно трактовать как обыкновенное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}^0 = \mathbb{S}_2^0$, получаемом посредством замыкания в $\mathbb{L}_2$ -метрике множества гладких соленоидальных финитных в $\mathcal{D}$ вращательно симметричных векторных полей. Это уравнение для векторного поля $\mathbf{v} = (u, v, w)$ имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -A\mathbf{v} + \lambda B(t)\mathbf{v}. \quad (6.9)$$

Здесь $A = -\nu\Pi_0\Delta$ – оператор Стокса, а $B(t)$ определяется равенством

$$B(t)\mathbf{v} = \Pi_0(2\omega v, gu, 0). \quad (6.10)$$

Оператор A самосопряжен, а оператор B ограничен, и для него выполняется соотношение

$$(B(t)\mathbf{v}, \mathbf{u})_{\mathbb{H}^0} = 2\pi \int_{\mathcal{D}} (2\omega v u_r + g u u_\theta) r \, dr \, dz, \quad (6.11)$$

где $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ – произвольное вращательно симметричное векторное поле из $\mathbb{S}_2^0$. Согласно (6.11) сопряженный оператор $B^*(t)$ дается равенством

$$B^*(t)\mathbf{u} = \Pi_0(gu_\theta, 2\omega u_r, 0).$$

Сравнение с (6.10) показывает, что оператор $B(t)$ для каждого t самосопряжен – выполняется равенство $B(t) = B^*(t)$ – в том и только том случае, когда $g = 2\omega$. Это условие и определяет однозначно поле (6.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $c(t)$ – четная периодическая функция времени. Тогда при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор монодромии уравнения (6.9) в случае течения (6.1) самосопряжен и строго положителен. При изменении λ может возникнуть только монотонная неустойчивость (мультипликатор $+1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается сразу, так как выполнены алгебраические условия предложения 2.3 из §2.

Заметим, что оператор монодромии в рассматриваемых условиях вполне непрерывен, а потому лишь строго положителен, а не положительно определен.

В качестве $c(t)$ можно, например, взять функцию $a \sin t + b \cos t$ – она становится четной при надлежащем выборе начала отсчета времени.

Аналогично предыдущему можно проверить, что результаты предложения 6.1 сохраняются и для более общего течения (6.2), конечно, с соответствующим изменением скалярного произведения.

Естественно спросить, теряется ли на самом деле устойчивость течения (6.2) с ростом λ . В случае, когда нет зависимости от t , ответ утвердителен (см. [17]). И более того, когда λ растет по абсолютной величине, число собственных значений в

правой (неустойчивой) полуплоскости стремится к бесконечности. В рассматриваемом неавтономном случае ситуация усложняется, и достаточно полного описания спектра нет. Конечно, методами теории возмущений мы без труда устанавливаем, что неустойчивость в случае слабой модуляции имеет место. Можно рассмотреть также случай высокочастотной модуляции, полагая в (6.2) $c(t) = \bar{c} + \omega^{1/2}c_1(t)$, $\bar{c}_1 = 0$. Заметим, что для изучаемого течения вибрационная добавка K (коэффициент при λ^2 в (5.10)) исчезает. Это означает, что вибрации высокой частоты ω даже при большой амплитуде $\omega^{1/2}$ не влияют на главные члены асимптотики. Неустойчивость стационарного течения, когда она есть, сохраняется и при вибрационном воздействии такого рода.

Задача о тепловой конвекции. В ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\nabla p + \mu \Delta v + m(x, t)\theta \bar{k}, \\ \operatorname{div} v &= 0; \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \delta \Delta \theta - a(x, t)v_3, \quad (6.13)$$

$$v|_{\partial \mathcal{D}} = 0, \quad \theta|_{\partial \mathcal{D}} = 0. \quad (6.14)$$

Здесь a и m – заданные функции, $\bar{k}$ – орт, направленный вертикально вверх. Эта система слегка обобщает задачу для возмущений механического равновесия жидкости, заполняющей контейнер $\mathcal{D}$ с твердыми стенками (см., например, [19]). На границе $\partial \mathcal{D}$ была задана температура, а для возмущений она равна нулю. Фазовым пространством этой системы является пространство $\mathbb{H} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{L}_2$. Скалярное произведение его элементов $w' = (v', \theta')$ и $w'' = (v'', \theta'')$ определим равенством

$$(w', w'')_{\mathbb{H}} = (v', v'')_{\mathbb{S}_2} + l(\theta', \theta'')_{\mathbb{L}_2}$$

с некоторой фиксированной константой $l > 0$. Посмотрим, при каких условиях самосопряжен оператор $B: (v, \theta) \mapsto (\Pi(m\theta \bar{k}), -av_3)$, $B: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. Имеем

$$(Bw', w'')_{\mathbb{H}} = \int_{\mathcal{D}} (m\theta' \bar{k} v'' - l a v' \theta'' \bar{k}) dx.$$

Отсюда следует, что

$$B^* w = (-l \Pi(a \theta \bar{k}), m v_3)$$

для любого $w = (v, \theta)$. Сравнивая B и B^* , заключаем, что оператор B симметричен в том и только том случае, когда $l = 1$ и $m(x, t) = -a(x, t)$.

Если дополнительно предположить, что функция $m(x, t)$ четная и периодическая по t , то из предыдущей теории следует, что для линеаризованной системы (6.12)–(6.14) оператор монодромии самосопряжен и строго положителен.

Все перечисленные условия выполнены, например, в случае, когда ускорение силы тяжести есть четная периодическая функция $g(t)$, а основной профиль температуры есть $\theta^0 = -g(t)z$, при этом $m(x, t) = g(t)$, $a(x, t) = -g(t)$.

В заключение подчеркну, что здесь рассмотрены лишь очень частные примеры вращательных и конвективных течений. Исследование спектров и устойчивости

периодических течений в более общей ситуации остается жгуче актуальной проблемой математической гидродинамики.

Я очень благодарен С. М. Зеньковской и В. Б. Левенштаму за полезные обсуждения вопросов, связанных с методом осреднения, а также рецензенту за внимательное чтение статьи и замечания, которые способствовали улучшению текста.

Список литературы

1. Юдович В. И. Периодические дифференциальные уравнения с самосопряженным оператором монодромии. I // Деп. в ВИНТИ. 16.11.1998. № 3309-B98.
2. Юдович В. И. Периодические дифференциальные уравнения с самосопряженным оператором монодромии. II // Деп. в ВИНТИ. 25.11.1998. № 3451-B98.
3. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
4. Loeper K. On totally positive matrices // Math. Z. 1955. V. 63. №3. P. 338–340.
5. Юдович В. И. Спектральные свойства эволюционного оператора параболического уравнения с одной пространственной переменной и его конечномерных аналогов // УМН. 1977. Т. 32. №1. С. 230–232.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
7. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
8. Симоненко И. Б. Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1989.
9. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.
10. Крейн С. Г. (ред.). Функциональный анализ. М.: Наука, 1972.
11. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979.
12. Arnold V. I. Reversible systems // Nonlinear and turbulent processes in physics. V. 3. Chur: Harwood Acad. Publ., 1984. P. 1161–1174; Арнольд В. И. Обратимые системы // Избранное-60. М.: Фазис, 1997. С. 355–363.
13. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977.
14. Карапетянц Н. К., Самко С. Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1988.
15. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
16. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. №5. С. 51–56.
17. Юдович В. И. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения жидкости в замкнутом сосуде // Матем. сб. 1967. Т. 74 (116). №4. С. 565–579.
18. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1984; Yudovich V. I. The linearization method in hydrodynamical stability theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1989. (Transl. Math. Monographs. V. 74.)
19. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.

Ростовский государственный университет,
Ростов-на-Дону
E-mail: yudovich@math.rsu.ru

Поступила в редакцию
14.11.1999 и 24.08.2000