Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Вердера, М. С. Мельников, П. В. Парамонов, C^1 -аппроксимация и продолжение субгармонических функций, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 4, 37–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 03:22:25

УДК 517.5

Дж. Вердера, М. С. Мельников, П. В. Парамонов

C^1 -аппроксимация и продолжение субгармонических функций

В работе получены критерии равномерной приближаемости в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, градиентов субгармонических функций класса C^1 градиентами аналогичных функций, гармонических в окрестностях произвольно заданного компакта. Доказана полуаддитивность связанной с этой задачей емкости, найден ряд метрических условий приближаемости. Установлена оценка потока градиента субгармонической функции через емкость “источников” этой функции и теорема о возможности C^1 -продолжения субгармонической в шаре функции до субгармонической функции во всем $\mathbb{R}^N$.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

Предположим, что функция f голоморфна на множестве внутренних точек некоторого компакта X комплексной плоскости и имеет определенную гладкость на X . Например, f может быть непрерывной на X или, более общо, принадлежать классу $C^m(X)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. В последние десятилетия большое внимание уделялось проблеме нахождения условий на f , необходимых и достаточных для возможности ее приближения в норме $C^m(X)$ голоморфными функциями в окрестностях компакта X . Аналогичное может быть сказано в случае, когда X является компактным подмножеством в $\mathbb{R}^N$, а f гармонична в его внутренности. Конечно, в последней ситуации требуется, чтобы приближающие функции были *гармоническими* в окрестностях множества X . Подробности можно найти в работах [1]–[5].

Наиболее трудные проблемы возникают для равномерных голоморфных аппроксимаций на плоскости и гармонических C^1 -приближений в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Мало того, что в названных случаях основные результаты доказываются очень сложно, но оказывается, что сами эти результаты дают *не вполне удобные критерии* приближаемости. Причина состоит в том, что возможность указанных аппроксимаций контролируется специальными емкостями, с которыми, к сожалению, очень трудно иметь дело. В частности, не известно, удовлетворяют ли они свойству полуаддитивности, т.е. справедливо ли неравенство вида

$$\text{Емкость}(K_1 \cup K_2) \leq \text{Const}(\text{Емкость}(K_1) + \text{Емкость}(K_2))$$

Работа первого и второго авторов выполнена при частичной поддержке фонда DGES (грант № РВ96-1183) и фонда BFM (грант № 2000-0361).

Работа третьего автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 00-01-00618, 00-15-96008) и фонда SAB (грант № 1998-0049).

для всех пар компактов K_1 и K_2 ? Отсутствие такого свойства ведет к серьезным трудностям.

Емкость множества определяется в терминах потенциалов распределений с носителями на этом множестве. В недавней работе Толсы [6] доказано, что если в голоморфном случае заменить распределения положительными мерами, то соответствующая емкость становится полуаддитивной. Пользуясь $T(1)$ -теоремой для операторов Кальдерона–Зигмунда в неоднородных пространствах, в этой работе мы показываем, что аналогичное происходит в контексте липшицевых гармонических функций во всех размерностях. Возникающая таким образом емкость (и ее C^1 -аналог) контролирует возможность C^1 -аппроксимации *субгармонических функций* гармоническими, а *нулевые множества* этой емкости суть в точности *устраняемые множества* для гармонических функций в классе липшицевых (соответственно C^1 -) субгармонических функций.

Теперь приступим к точным формулировкам наших результатов. Основная емкость, с которой нам предстоит работать, определяется следующим образом [7; с. 481]. Обозначим через Φ стандартное фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^N$. Для произвольного ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^N$ положим

$$\gamma_+(E) = \sup \mu(E), \quad (1.1)$$

где верхняя грань берется по всем положительным радоновским мерам μ с компактным носителем $\text{spt}(\mu)$, содержащимся в E , для которых функция $f = \Phi * \mu$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N, \quad (1.2)$$

с константой $C = 1$.

Заметим, что условие (1.2) эквивалентно тому, что распределения $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq N$, являются функциями из $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, причем $\|\nabla f(x)\|_\infty \leq C$.

Поскольку $\Delta f = \mu$ в обобщенном смысле, верхняя грань в (1.1) равна

$$\sup \langle \Delta f, 1 \rangle, \quad (1.3)$$

где скобки означают действие распределения Δf на функцию 1, а верхняя грань взята по всем функциям f , каждая из которых удовлетворяет (1.2) с константой $C = 1$, гармонична вне некоторого компакта из E и субгармонична на $\mathbb{R}^N$. Если мы опустим условие субгармоничности, то (1.3) будет определять липшицеву гармоническую емкость γ' из [4] и [7]. Нетрудно проверить, что *все* свойства емкости γ' , полученные в [4; лемма 2.2] и [7; теоремы 3.1 и 4.4], остаются справедливыми и для γ_+ . Верен также непосредственный аналог предложения 2.2 из [7].

Для произвольного шара B и $k \geq 1$ обозначим через kB шар, концентричный исходному и радиус которого в k раз больше исходного. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^N$ и (скалярной или векторнозначной) функции f полагаем $\|f\|_E = \sup\{|f(x)| : x \in E\}$. Кроме того, если f дифференцируема, то мы полагаем $\text{osc}(\nabla f, E) = \sup\{|\nabla f(x) - \nabla f(y)| : x, y \in E\}$. При $E = \mathbb{R}^N$ пишем $\|f\|$ вместо $\|f\|_{\mathbb{R}^N}$.

Наш первый основной результат состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть f – субгармоническая непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^N$ с мерой Рисса $\mu = \Delta f$, а X – компакт в $\mathbb{R}^N$. Следующие условия эквивалентны.

- (i) Найдется последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (каждая f_n субгармонична и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^N$, гармонична в зависящей от n окрестности компакта X) такая, что

$$\nabla f_n \rightarrow \nabla f \text{ равномерно на } \mathbb{R}^N \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

- (ii) Для любого ограниченного открытого множества D имеем

$$\mu(D) \leq C \operatorname{osc}(\nabla f, 2B) \gamma_+(D \setminus X),$$

где B – какой-либо шар, содержащий D , а $C > 0$ не зависит от f и D .

- (iii) Найдутся $k \geq 1$ и $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ такие, что для любого открытого шара B с радиусом $r \leq 1$, пересекающего X , справедливо

$$\mu(B) \leq \varepsilon(r) \gamma_+(kB \setminus X).$$

- (iv) Найдутся $k \geq 1$ и $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ такие, что для любого открытого шара B с радиусом $r \leq 1$, пересекающего X , выполняется

$$0 \leq \frac{1}{\sigma(\partial B)} \int_{\partial B} f(x) d\sigma(x) - \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx \leq \varepsilon(r) r^{2-N} \gamma_+(kB \setminus X),$$

где σ – поверхностная мера на ∂B , а $|B|$ есть N -мерный объем шара B .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. (а) Из доказательства теоремы 1 вытекает, что последовательность $\{f_n\}$ можно выбрать с дополнительным условием $f_n \rightarrow f$ равномерно на $\mathbb{R}^N$. То же верно и для условия (i) следствия 1.3 ниже.

(б) Условие (ii) не имеет аналогов в контексте равномерных голоморфных аппроксимаций на плоскости или C^1 -гармонических приближений в $\mathbb{R}^N$. С другой стороны, условие (iv) имеет своего рода предшественника – [8; следствие 2.3].

(с) Из доказательства будет следовать, что условие (iv) при $k = 1$ тоже эквивалентно каждому из условий теоремы 1.1.

Существует C^1 -аналог емкости γ_+ , который играет важную роль в следующем результате. Положим

$$\alpha_+(E) = \sup \mu(E),$$

где верхняя грань взята по всем положительным мерам μ с компактным носителем в E таким, что $f = \Phi * \mu$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^N$ и $\|\nabla f\| \leq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$ – компакт. Следующие условия равносильны.

- (i) Для каждой непрерывно дифференцируемой субгармонической функции f в $\mathbb{R}^N$, гармонической на внутренности $\overset{\circ}{X}$ компакта X , найдется последовательность непрерывно дифференцируемых субгармонических функций f_n в $\mathbb{R}^N$ (каждая f_n гармонична в некоторой зависящей от n окрестности множества X) такая, что

$$\nabla f_n \rightarrow \nabla f \quad \text{равномерно на } \mathbb{R}^N.$$

- (ii) $\alpha_+(D \setminus X) = \alpha_+(D \setminus \overset{\circ}{X})$ для каждого ограниченного открытого множества D .
 (iii) Найдутся $k \geq 1$ и $C > 0$ такие, что

$$\alpha_+(B \setminus \overset{\circ}{X}) \leq C \alpha_+(kB \setminus X)$$

для каждого открытого шара B .

Отметим, что в $\mathbb{R}^3$ наши аппроксимационные результаты имеют вполне естественный физический смысл. Если рассматривать μ как некоторое распределение “масс” внутри “твердого тела” $\text{spt}(\mu)$, то согласно ньютоновскому закону всемирного тяготения векторное поле $-4\pi\gamma\nabla(\Phi * \mu)$ есть в точности *гравитационное* поле, индуцированное μ (где $\Phi(x) = -1/(4\pi|x|)$, а γ – универсальная гравитационная постоянная). Таким образом, мы даем ответ на следующий вопрос: в каких случаях можно “перераспределять” массу из $\mathbb{R}^3 \setminus \overset{\circ}{X}$ на $\mathbb{R}^3 \setminus X$ (или даже “удалять” ее на ∞) так, чтобы соответствующее гравитационное поле менялось сколь угодно мало на всем $\mathbb{R}^3$ (или только на X , если мы рассматриваем *полиномиально-гармонические* приближающие векторные поля). Касательно конкретных приложений теории приближений к теории гравитации см. [9] и список литературы в этой работе.

В классических равномерных рациональных аппроксимациях при попытке получить геометрические критерии из емкостных (см. [10] и [1]) возникает необходимость в оценках интеграла Коши. В контексте C^1 -гармонических приближений по аналогии возникает задача об оценке потока градиента через поверхность шара. Для заданной функции f класса C^1 на $\overline{B}$, где B – открытый шар в $\mathbb{R}^N$, мы хотим оценить

$$\int_{\partial B} (\nabla f \cdot \vec{\nu}) d\sigma, \quad (1.4)$$

где $\vec{\nu}$ есть единичный вектор внешней нормали к ∂B , а σ – поверхностная мера на ∂B . Заметим, что если f гармонична в B , то интеграл в (1.4) равен нулю по теореме Гаусса. Возникает предположение, что величина $\varkappa(\text{spt}(\Delta f) \cap B)$ будет играть основную роль в оценке (1.4). Здесь $\varkappa$ – гармоническая C^1 -емкость, определенная в [4]. В последней работе спрашивается: найдется ли константа C , зависящая только от N , такая, что

$$\left| \int_{\partial B} (\nabla f \cdot \vec{\nu}) d\sigma \right| \leq C \text{osc}(\nabla f, B) \varkappa(\text{spt}(\Delta f) \cap B)? \quad (1.5)$$

Несмотря на то, что до сих пор не удается доказать (1.5), мы смогли получить неравенство указанного типа в предположении, что f субгармонична на B , а $\varkappa$ заменена на α_+ .

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть f класса $C^1(\overline{B})$ является субгармонической на B . Тогда

$$\left| \int_{\partial B} (\nabla f \cdot \vec{\nu}) d\sigma \right| \leq C \operatorname{osc}(\nabla f, B) \alpha_+(\operatorname{spt}(\Delta f) \cap B),$$

где $C > 0$ зависит только от N .

Доказательство теоремы 1.4 приводит к необходимости изучения следующего вопроса. Пусть задана функция f класса $C^1(\overline{B})$, субгармоническая на B . Всегда ли возможно продолжить f до субгармонической функции класса C^1 на всем $\mathbb{R}^N$? Мы даем утвердительный ответ в теореме 5.1. Читатель может обратиться к работам [11] и [12], где упомянута указанная проблема продолжения.

Необходимые условия приближаемости в теореме 1.1 обсуждаются в §3. В частности, там доказывается (i) $\Rightarrow$ (ii) и (iii) $\Rightarrow$ (iv) ((ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидно). Достаточные условия аппроксимации, в частности (iv) $\Rightarrow$ (i), рассматриваются в §4. В §5 приводится доказательство теоремы 1.4, а также теоремы 5.1 о продолжении C^1 -субгармонических функций с шаров на $\mathbb{R}^N$. В §6 мы показываем, что свойства полугаддитивности α_+ (в специальных случаях) дают геометрические достаточные условия приближаемости для классов функций. Параграф 2 посвящен обсуждению $T(1)$ -теоремы.

Обозначения, используемые в работе, стандартны и, как правило, сами себя объясняют. Например, ∂X и $\overline{X}$ – топологическая граница и замыкание множества X соответственно, $C^1(\Omega)$ есть пространство непрерывно дифференцируемых функций в области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($C_0^1(\Omega)$ – класс тех же функций, но с компактными носителями, содержащимися в Ω), а $B(a, r)$ – открытый шар с центром a и радиусом r .

Буква C означает величину, которая (хотя и может зависеть от некоторых параметров, таких как размерность) не зависит от рассматриваемых переменных величин и, таким образом, играет роль констант.

§2. $T(1)$ -теорема

$T(1)$ -теорема Давида и Жорне [13] является важным результатом в теории Кальдерона–Зигмунда. В ней утверждается, что для всякого оператора T , принадлежащего некоторому специальному описанному ниже классу, справедливо утверждение: T ограничен в L^2 , если и только если образ относительно T постоянной функции 1 лежит в пространстве ВМО функций с ограниченным средним колебанием (см. [13] и замечание 2.2 ниже). Специальное семейство операторов, на котором мы остановим наше внимание, состоит из сингулярных интегралов, ассоциированных с ядрами $K(x, y)$, которые удовлетворяют условию антисимметрии $K(y, x) = -K(x, y)$ и стандартным условиям роста и гладкости, требуемым в теории Кальдерона–Зигмунда. Конкретно,

$$|K(x, y)| \leq C|x - y|^{-(N-1)}, \quad (2.1)$$

а также

$$|K(x, y) - K(x', y)| \leq C \frac{|x - x'|}{|x - y|^N} \quad \text{при } |x' - x| < \frac{1}{2}|x - y|. \quad (2.2)$$

Отметим, что если (2.1) и (2.2) выполнены, то K называется $(N - 1)$ -мерным ядром. На самом деле нам понадобятся только ядра типа Рисса, т.е.

$$K(x, y) = \frac{x_i - y_i}{|x - y|^N}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Для определения сингулярного интегрального оператора, ассоциированного с антисимметричным ядром K , удовлетворяющим свойствам (2.1) и (2.2), мы должны специфицировать соответствующую “базовую” положительную радоновскую меру μ . Для произвольной $f \in L^2(\mu)$ с компактным носителем и фиксированного $\varepsilon > 0$ соответствующий усеченный оператор $T_\varepsilon: f \rightarrow T_\varepsilon f = T_\varepsilon(f)$ определяется так:

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y-x|>\varepsilon} f(y) K(x, y) d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Проблема существования предела выражения $T_\varepsilon f(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ не так проста даже для гладких функций f ввиду произвольности меры μ . Поэтому, избегая предположения, что T определен даже на каком-то малом классе функций, предпочитают работать со всем семейством операторов T_ε , $\varepsilon > 0$, и находить оценки, не зависящие от ε . Например, говорят, что оператор T с ядром K ограничен в $L^2(\mu)$, если справедливо неравенство

$$\int |T_\varepsilon f|^2 d\mu \leq C \int |f|^2 d\mu$$

с константой C , не зависящей от ε и функции f из $L^2(\mu)$ с компактным носителем. Как доказал Семмес [14; с. 56], *необходимым* для ограниченности T в $L^2(\mu)$ является условие

$$\mu(B) \leq C(\text{радиус } B)^{N-1} \quad \text{для всех шаров } B. \quad (2.3)$$

Мы будем использовать следующий упрощенный вариант $T(1)$ -теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $K(x, y)$ – антисимметричное ядро, удовлетворяющее свойствам (2.1) и (2.2). Пусть μ – положительная мера с условием роста (2.3). Тогда следующие высказывания равносильны.

- (i) Оператор T , ассоциированный с K , ограничен в $L^2(\mu)$.
- (ii) $T(1) \in \text{ВМО}_2^2(\mu)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пространство $\text{ВМО}_k^2(\mu)$, $k \geq 1$, состоит из функций f класса $L_{\text{loc}}^2(\mu)$, для каждой из которых имеется константа $C = C(f)$ такая, что для любого куба Q выполняется

$$\int_Q |f - f_Q|^2 d\mu \leq C \mu(kQ),$$

где $f_Q = \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q f d\mu$, а kQ — куб, концентричный и гомотетичный Q с коэффициентом k .

Ясно, что $L^\infty(\mu) \subset \text{BMO}_2^2(\mu)$, так что T ограничен в $L^2(\mu)$ при условии $T(1) \in L^\infty(\mu)$. Это единственный факт о ВМО, который будет использоваться в дальнейшем. Читатель должен быть в курсе, что имеются некоторые технические трудности в определении $T(1)$ (см. [14; с. 27]). Здесь мы не будем обсуждать эти детали.

Для мер μ с условием удвоения ($\mu(2Q) \leq c\mu(Q)$ для всех кубов Q) предыдущий результат принадлежит Давиду, Жорне и Семмесу [15].

Только совсем недавно установлено [16], что $T(1)$ -теорема справедлива в той (на самом деле в гораздо большей) общности, в которой она сформулирована выше, т.е. без условий удвоения на меру μ (см. также [6] и [17]).

Мы будем использовать $T(1)$ -теорему следующим образом. Наши предположения обеспечат свойство $T_\varepsilon(1) \in L^\infty(\mu)$ с $L^\infty(\mu)$ -нормами, равномерно ограниченными по ε . Отсюда нетрудно вывести, используя определение $T(1)$, что $T(1) \in L^\infty(\mu)$. Таким образом, (ii) из теоремы 2.1 выполняется, поэтому T ограничен в $L^2(\mu)$. По теории Кальдерона–Зигмунда без условий удвоения [18] операторы T_ε ограниченно переводят пространство $M(\mathbb{R}^N)$ конечных мер на $\mathbb{R}^N$ в пространство $L^{1,\infty}(\mu)$ слабых $L^1(\mu)$ -функций с константами, не зависящими от ε . Другими словами, для любой конечной (комплексной) меры Радона ν имеем

$$\mu\{x : |T_\varepsilon(\nu)(x)| > t\} \leq Ct^{-1}\|\nu\|, \quad (2.4)$$

где C не зависит от ε , t и ν и

$$T_\varepsilon\nu(x) = \int_{|y-x|>\varepsilon} K(x, y) d\nu(y), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Здесь и далее $\|\nu\|$ означает полную вариацию меры ν .

Неравенство (2.4) и будет существенным для нашей аппроксимационной задачи. Некоторые другие примеры, в которых (2.4) приводит к аппроксимационным теоремам для голоморфных и гармонических функций, см. в [2] и [3]. В [7] указанные выше результаты применяются для исследования геометрических свойств $\mathcal{H}'$ и γ_+ .

§ 3. Необходимые условия приближаемости

Нам понадобятся несколько лемм.

ЛЕММА 3.1. Пусть μ — положительная радонова мера с потенциалом $f = \Phi * \mu$, непрерывно дифференцируемым на $\mathbb{R}^N$. Тогда для любого шара B с радиусом r

$$\mu(B) \leq C \text{osc}(\nabla f, B) r^{N-1}.$$

В частности, $\mu(E) = 0$, если $(N-1)$ -мерная мера Хаусдорфа множества E конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для возможности применения формулы Гаусса нам необходимо *регуляризовать* меру μ . Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B(0, 1))$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\int \varphi(x) dx = 1$. При $\delta > 0$ положим $\varphi_\delta(x) = \varphi(\delta^{-1}x)\delta^{-N}$, $\mu_\delta = \varphi_\delta * \mu$ и $f_\delta = \varphi_\delta * f$. Поскольку $\Delta f_\delta = \mu_\delta$, формула Гаусса дает

$$\int_{\partial B} (\nabla f_\delta \cdot \vec{\nu}) d\sigma = \int_B \Delta f_\delta(x) dx = \mu_\delta(B),$$

где $\vec{\nu}$ – вектор внешней единичной нормали к ∂B . Заметим, что в последнем равенстве мы можем заменить ∇f_δ на $\nabla f_\delta - \nabla f_\delta(a)$, где a – центр шара B .

Таким образом,

$$\mu_\delta(B) \leq C \operatorname{osc}(\nabla f_\delta, B) r^{N-1}.$$

Полагая $\delta \rightarrow 0$, мы получаем

$$\mu(B) \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \mu_\delta(B) \leq C \operatorname{osc}(\nabla f, B) r^{N-1},$$

что и требовалось.

Пусть теперь E – борелевское множество с конечной $(N-1)$ -мерной мерой Хаусдорфа. Для доказательства того, что $\mu(E) = 0$, мы можем без ограничения общности считать E компактом. Тогда

$$\mu(B(a, r)) \leq \varepsilon(r) r^{N-1}, \quad a \in E, \quad 0 < r < 1,$$

с некоторой функцией $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Отсюда $\mu(E) = 0$.

Отметим, что из предыдущей леммы нетрудно вывести справедливость “обобщенной” формулы Гаусса

$$\int_{\partial B} (\nabla f \cdot \vec{\nu}) d\sigma = \mu(B),$$

используя тот факт, что $\nabla f_\delta \rightarrow \nabla f$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно на компактах в $\mathbb{R}^N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если в предыдущей лемме f имеет только ограниченный градиент, то мы получаем (с тем же доказательством) более слабую оценку $\mu(B) \leq C r^{N-1}$.

ЛЕММА 3.3. Пусть μ – положительная радонова мера с компактным носителем, у которой потенциал $f = \Phi * \mu$ имеет ограниченные обобщенные производные первого порядка. Тогда найдется такая положительная константа $C = C(N)$, что

$$\mu(E) \leq C \gamma_+(E) \|\nabla f\|$$

для всякого ограниченного борелевского множества E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию распределения $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} * \mu$ являются функциями класса $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Предположим, не ограничивая общности, что $\|\nabla f\| = 1$. Ввиду замечания 3.2 мера μ удовлетворяет условиям роста (2.3).

Пусть T_i , $1 \leq i \leq N$, – сингулярные интегральные операторы, ассоциированные с ядрами $c_N \frac{x_i - y_i}{|x - y|^N}$ (где c_N выбраны так, что $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = c_N \frac{x_i}{|x|^N}$) и с базовой мерой μ .

Мы утверждаем, что $T_i(1) \in L^\infty(\mu)$, $1 \leq i \leq N$, что эквивалентно (см. [16]) существованию постоянной C такой, что

$$|T_{i,\varepsilon}(1)(x)| \leq C, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.1)$$

где

$$T_{i,\varepsilon}(1)(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_i \Phi(x-y) d\mu(y).$$

Пусть $B = B(0, 1)$. Так как $\partial_i \Phi(x)$ локально интегрируема, то функция $\partial_i \Phi * \frac{\chi_B}{|B|}$ всюду непрерывна. Мы хотим установить тождество

$$\left(\partial_i \Phi * \frac{\chi_B}{|B|} \right)(x) = \begin{cases} \partial_i \Phi(x), & |x| \geq 1; \\ c_N x_i, & |x| \leq 1. \end{cases}$$

Поскольку $\partial_i \Phi$ гармонична вне начала координат, по теореме о среднем получаем $\left(\partial_i \Phi * \frac{\chi_B}{|B|} \right)(x) = \partial_i \Phi(x)$ при $|x| \geq 1$. С другой стороны, $\partial_i \Phi * \frac{\chi_B}{|B|} = \Phi * \partial_i \left(\frac{\chi_B}{|B|} \right)$ гармонична на B (так как $\partial_i \chi_B$ сосредоточена на ∂B) и имеет непрерывные граничные значения, равные $c_N x_i$. Следовательно,

$$\left(\partial_i \Phi * \frac{\chi_B}{|B|} \right)(x) = c_N x_i \quad \text{на } B.$$

Полагая $K_\varepsilon = \partial_i \Phi * \frac{\chi_{B(0,\varepsilon)}}{|B(0,\varepsilon)|}$, мы имеем

$$K_\varepsilon = \begin{cases} \partial_i \Phi(x), & |x| > \varepsilon; \\ c_N \varepsilon^{-N} x_i, & |x| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Отсюда находим, что при некотором $C = C(N)$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$

$$\left| T_{i,\varepsilon}(1)(x) - \int K_\varepsilon(x-y) d\mu(y) \right| \leq C \mu(B(x, \varepsilon)) \varepsilon^{-(N-1)} \leq C.$$

Легко видеть, что

$$\int K_\varepsilon(x-y) d\mu(y) = \frac{1}{|B(x, \varepsilon)|} \int_{B(x, \varepsilon)} (\partial_i \Phi * \mu)(y) dy,$$

откуда получаем

$$\left| \int K_\varepsilon(x-y) d\mu(y) \right| \leq \|\partial_i \Phi * \mu\|, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

и, следовательно, (3.1).

Согласно замечаниям о $T(1)$ -теореме, сделанным в §2, мы заключаем, что T_i отображают ограниченно $M(\mathbb{R}^N)$ в $L^{1,\infty}(\mu)$. Предположим, не ограничивая общности, что E — компакт. По теореме Уя [19] (см. также [7], [20] или [21]) можно найти μ -измеримую функцию h с носителем на E такую, что $0 \leq h \leq 1$, $\mu(E) \leq C \int h d\mu$ и

$$\|T_i(h\mu)\| \leq C, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Строго говоря, теорема Уя не применима к $T_{i,\varepsilon}$, поскольку их ядра разрывны. Но она применима, тем не менее, к операторам с непрерывными ядрами K_ε , отличающимися от $T_{i,\varepsilon}$ на выражения, контролируемые “частичным” максимальным оператором

$$\sup_{r>1} r^{-(N-1)} \left| \int_{B(x,r)} h d\mu \right|.$$

За конкретными деталями читатель может обратиться, например, к [7; лемма 4.2] или [21; лемма 4.2].

Итак, $\|\nabla(\Phi * h\mu)\| \leq C$ и отсюда по определению γ_+

$$\int h d\mu \leq C\gamma_+(E).$$

Для заданной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ при $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ определим

$$V_\varphi(f) = \Phi * \varphi \Delta f$$

— оператор Витушкина, ассоциированный с функцией φ (см. [1], [22], [3] или [4]).

Нам потребуется ряд свойств оператора V_φ .

ЛЕММА 3.4. *Для любой $\varphi \in C_0^1(B(a,r))$ выполняются следующие утверждения.*

(а) *Если $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, то $V_\varphi(f) \in C^1(\mathbb{R}^N)$, причем*

$$\|\nabla(V_\varphi(f))\| \leq C \operatorname{osc}(\nabla f, B(a,r)) \|\nabla \varphi\| r.$$

(б) *Если обобщенные первые производные функции f ограничены, то $V_\varphi(f)$ липшицева на всем $\mathbb{R}^N$ и*

$$\|\nabla(V_\varphi(f))\| \leq C \|\nabla f\| \|\nabla \varphi\| r.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Читателю предлагается сравнить последнее утверждение с [3; лемма 2.1], а также с аналогичными оценками в [4; лемма 4.2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4. Мы докажем только (а); доказательство (b) аналогично. Пользуясь соображениями регуляризации, мы можем предположить, что $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. При этом легко показать, что $V_\varphi(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. По принципу максимума нам достаточно оценить $|\nabla(V_\varphi(f))(x)|$ при $x \in B(a, r)$. Фиксируем такой x , и пусть

$$F(y) = f(y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot (y - x).$$

При $y \in B(a, r)$ мы будем иметь

$$|F(y)| \leq M|y - x| \quad \text{и} \quad |\nabla F(y)| \leq M, \quad (3.2)$$

где M есть $\text{osc}(\nabla f, B(a, r))$.

Обозначая через $\langle T, \psi \rangle$ действие распределения T на гладкую функцию ψ , получаем

$$\nabla(V_\varphi(f))(x) = \nabla \langle \Phi(x - y), \varphi(y) \Delta F(y) \rangle.$$

Применяя к равенству

$$\Delta(\varphi F) = F \Delta \varphi + \varphi \Delta F + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla F$$

свертку с Φ , подставляя x и учитывая, что $F(x) = 0$, мы заключаем, что

$$\langle \Phi(x - y), \varphi(y) \Delta F(y) \rangle = -\langle \Phi(x - y), F \Delta \varphi \rangle - 2 \langle \Phi(x - y), \nabla \varphi \cdot \nabla F \rangle.$$

Поскольку

$$F \partial_j^2 \varphi = \partial_j (F \partial_j \varphi) - \partial_j F \partial_j \varphi,$$

то отсюда

$$\langle \Phi(x - y), \varphi(y) \Delta F(y) \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \partial_j \Phi(x - y), F(y) \partial_j \varphi(y) \rangle - \langle \Phi(x - y), \nabla \varphi \cdot \nabla F \rangle.$$

После взятия градиента по переменной x становится ясно, что нам нужно оценить выражения вида

$$\langle \partial_k \partial_j \Phi(x - y), F(y) \partial_j \varphi(y) \rangle \quad (3.3)$$

и

$$\langle \partial_k \Phi(x - y), \partial_j \varphi(y) \partial_j F(y) \rangle. \quad (3.4)$$

Модуль величины (3.4), очевидно, не превышает

$$C \|\nabla \varphi\| M \int_{B(a, r)} |x - y|^{-N+1} dy \leq C M \|\nabla \varphi\| r.$$

Оценка модуля (3.3) на первый взгляд представляется более деликатным делом, поскольку

$$|\partial_k \partial_j \Phi(x - y)| \simeq |x - y|^{-N}.$$

Тем не менее, хорошо известно [23; гл. 3], что свертка распределения $\partial_k \partial_j \Phi$ с непрерывной функцией ψ , имеющей компактный носитель, определяется в точке x как главное значение интеграла

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x, \varepsilon)} \partial_k \partial_j \Phi(x - y) \psi(y) dy$$

при условии, что $\psi(y)$ убывает к нулю достаточно быстро при $y \rightarrow x$. В нашем случае $\psi = F \partial_j \varphi$, причем эта функция стремится к нулю не медленнее, чем $|y - x|$ при $y \rightarrow x$ ввиду (3.2). Поэтому указанный интеграл в смысле главного значения сходится абсолютно и

$$\begin{aligned} & \int |\partial_k \partial_j \Phi(x - y) F(y) \partial_j \varphi(y)| dy \\ & \leq CM \|\nabla \varphi\| \int_{B(a, r)} |x - y|^{-N+1} dy \leq CM \|\nabla \varphi\| r. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (i) $\Rightarrow$ (ii) в ТЕОРЕМЕ 1.1. Пусть f_n удовлетворяет условию (i) и $\mu_n = \Delta f_n$. Фиксируем ограниченное открытое множество D . Пусть B — некоторый шар с радиусом $r = \text{diam}(D)$, содержащий D . Возьмем $\varphi \in C_0^1(2B)$, $\varphi = 1$ на B , $|\nabla \varphi| \leq Cr^{-1}$. По лемме 3.4

$$\|\nabla(V_\varphi(f))\| \leq C \text{osc}(\nabla f, 2B) \quad \text{и} \quad \|\nabla(V_\varphi f_n) - \nabla(V_\varphi f)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.5)$$

Пусть Ω — некоторая область с гладкой границей, замыкание которой лежит в D . Обозначим через $\vec{\nu}$ вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$, тогда

$$\mu_n(\Omega) = \int_{\Omega} \varphi d\mu_n = \int_{\partial\Omega} (\nabla V_\varphi f_n \cdot \vec{\nu}) d\sigma \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} (\nabla V_\varphi f \cdot \vec{\nu}) d\sigma = \int_{\Omega} \varphi d\mu = \mu(\Omega).$$

По лемме 3.3 с заменой μ на μ_n

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu_n \leq C \|\nabla V_\varphi f_n\| \gamma_+(\Omega \cap \text{spt } \mu_n) \leq C \|\nabla V_\varphi f_n\| \gamma_+(D \setminus X),$$

и мы получаем, полагая $n \rightarrow \infty$ и учитывая (3.5),

$$\mu(\Omega) = \int_{\Omega} \varphi d\mu \leq C \text{osc}(\nabla f, 2B) \gamma_+(D \setminus X),$$

что дает (ii) в теореме 1.1 после взятия супремума по областям Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (iii) $\Rightarrow$ (iv) в ТЕОРЕМЕ 1.1. Нам будет удобно рассмотреть одно вспомогательное условие, которое окажется эквивалентным (i)–(iv) (это будет ясно в § 4).

Пусть $\varphi \geq 0$ — ограниченная борелевская функция с положительным интегралом по мере Лебега и носителем в $\overline{B}(0, 1)$. Указанное условие состоит в следующем.

Найдутся $k \geq 1$ и функция $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ такие, что

$$\int \varphi \left(\frac{x - a}{r} \right) d\mu(x) \leq C \varepsilon(r) \gamma_+(B(a, kr) \setminus X) \quad (3.6)$$

для всех $0 < r < 1$ и шаров $B(a, r)$, имеющих непустое пересечение с X .

Несложные вычисления показывают, что (iv) есть (3.6) для следующей функции φ :

$$\varphi(x) = 1 - |x|^2, \quad |x| \leq 1, \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 0, \quad |x| > 1.$$

С другой стороны, понятно, что (iii), примененное к $B = B(a, r)$, дает (3.6) при $C = \|\varphi\|$, а (ii), примененное к $D = B(a, r)$, дает то же с $k = 1$.

§ 4. Достаточные условия аппроксимации

В этом параграфе мы доказываем, что условие (i) в формулировке теоремы 1.1 следует из предположения о том, что (3.6) выполняется с произвольно взятой *одной* функцией φ с указанными выше свойствами. Мы применяем аппроксимационную схему Витушкина [1], адаптированную (в частности и) к гармоническому случаю в работах [22], [3], [4], а также одну идею из [8], позволяющую работать с “отдельно взятой” функцией φ в контексте, аналогичном условию (3.6).

Для произвольного $\delta > 0$ рассмотрим покрытие $\{B_j\}$ пространства $\mathbb{R}^N$ открытыми шарами с радиусами δ и подчиненное ему разбиение единицы $\{\psi_j\}$ такие, что

$$\begin{aligned} &\text{при некотором натуральном } M \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^N \\ &\text{число шаров } B_j \text{ с условием } 2B_j \cap B(x, \delta) \neq \emptyset \\ &\text{не превосходит } M, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\psi_j \in C_0^\infty(B_j), \quad 0 \leq \psi_j, \quad \|\nabla \psi_j\| \leq C\delta^{-1} \quad \text{и} \quad \sum_j \psi_j = 1. \quad (4.2)$$

Детали построения такого покрытия и соответствующего разбиения единицы можно найти в [4] или [3]. Должно отметить, что M и C зависят только от N и что множество индексов j есть $\mathbb{Z}^N$ (последнее исключает путаницу в обозначениях φ_δ и φ_j).

Итак, пусть f (т.е. $\mu = \Delta f$) удовлетворяет условию (3.6). Фиксируем функцию $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, равную 1 в некоторой окрестности компакта X , $0 \leq \chi \leq 1$. По лемме 3.4 функция $F = V_\chi(f) = \Phi * (\chi\mu)$ принадлежит $C^1(\mathbb{R}^N)$, F субгармонична на $\mathbb{R}^N$ и ее мера Рисса $\chi\mu$ также удовлетворяет (3.6). Поскольку $\Delta(f - F) = (1 - \chi)\mu$, то $f - F$ субгармонична на $\mathbb{R}^N$ и гармонична в окрестности X . Таким образом, задача сведена к случаю, когда μ имеет компактный носитель и $f = \Phi * \mu$, который и будет рассматриваться в дальнейшем. Теперь ∇f становится равномерно непрерывной на всем $\mathbb{R}^N$ и ее модуль непрерывности $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Наконец, по лемме 3.1 для любого шара $B(x, r)$ имеем $\mu(B(x, r)) \leq C\omega(r)r^{N-1}$, так что μ удовлетворяет (3.6) уже для *всех* $B(a, r)$, $0 < r < 1$.

Фиксируем $\delta \in (0, 1)$. Пусть $\varphi_\delta(x) = \varphi(x/\delta)\delta^{-N} \left(\int \varphi(y) dy \right)^{-1}$ и $\varphi_j = \varphi_\delta * \psi_j$, так что (4.2) остается верным при замене ψ_j на φ_j и B_j на $2B_j$. Мы *утверждаем*, что

$$\int \varphi_j d\mu \leq C\varepsilon(\delta)\gamma_+((k+1)B_j \setminus X) \quad (4.3)$$

для всех j . Для доказательства (4.3) запишем

$$\int \varphi_j d\mu = \int \left(\int \varphi_\delta(x-y) d\mu(x) \right) \psi_j(y) dy$$

и оценим внутренний интеграл при $y \in B_j$, пользуясь (3.6):

$$\begin{aligned} \int \varphi_\delta(x-y) d\mu(x) &= C\delta^{-N} \int \varphi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) d\mu(x) \leq C\delta^{-N}\varepsilon(\delta)\gamma_+(B(y, k\delta) \setminus X) \\ &\leq C\delta^{-N}\varepsilon(\delta)\gamma_+((k+1)B_j \setminus X). \end{aligned}$$

Откуда

$$\int \varphi_j d\mu \leq C\delta^{-N}\varepsilon(\delta)\gamma_+((k+1)B_j \setminus X) \int \psi_j(y) dy \leq C\varepsilon(\delta)\gamma_+((k+1)B_j \setminus X),$$

что и *утверждалось*.

Теперь обратимся к локализационной технике Витушкина. Пусть $\mu_j = \varphi_j \mu$ и $f_j = \Phi * \mu_j$. По лемме 3.4 каждая f_j непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^N$, причем $\|\nabla f_j\| \leq C\omega(\delta)$. Более того, $\Delta f_j = \varphi_j \mu \geq 0$, поэтому f_j субгармонична на $\mathbb{R}^N$, как и f .

Введем $J = \{j : 2B_j \cap \text{spt}(\mu) \neq \emptyset\}$, так что $f = \sum_{j \in J} f_j$. Пусть a_j — центр B_j , $j \in J$. Функция f_j допускает представление вида

$$f_j(x) = \|\mu_j\| \Phi(x - a_j) + d_j(x), \quad x \notin 2B_j,$$

где $d_j(x)$ удовлетворяет при $|x - a_j| > 4\delta$ оценке

$$|\nabla d_j(x)| = \left| \int (\nabla \Phi(x - y) - \nabla \Phi(x - a_j)) d\mu_j(y) \right| \leq C\delta \|\mu_j\| |x - a_j|^{-N}.$$

Согласно (4.3) и определению γ_+ заключаем, что найдется положительная мера ν_j с носителем в $(k+1)B_j \setminus X$ такая, что $\|\nu_j\| = \|\mu_j\|$ и $\|\nabla g_j\| \leq C\varepsilon(\delta)$, где g_j есть $\Phi * \nu_j$. Используя регуляризацию ν_j , мы можем дополнительно сделать g_j непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}^N$.

Так же, как для f_j , получаем представление для g_j вида

$$g_j(x) = \|\nu_j\| \Phi(x - a_j) + \tilde{d}_j(x), \quad x \notin (k+1)B_j,$$

где

$$|\nabla \tilde{d}_j(x)| \leq C\delta \|\nu_j\| |x - a_j|^{-N}, \quad |x - a_j| > 2(k+1)\delta.$$

Откуда $\|\nabla f_j - \nabla g_j\| \leq C(\omega(\delta) + \varepsilon(\delta))$ и

$$|\nabla f_j(x) - \nabla g_j(x)| \leq \frac{C\delta \|\mu_j\|}{|x - a_j|^N} \quad \text{при } |x - a_j| > 2(k+1)\delta.$$

Пусть $g = \sum_{j \in J} g_j$, тогда $g \in C^1(\mathbb{R}^N)$, причем $\Delta g = \sum_{j \in J} \nu_j$ неотрицательна и равна нулю в некоторой окрестности U компакта X . Поэтому g субгармонична всюду и гармонична на U . Остается показать, что найдется $\eta(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ такая, что

$$|\nabla f(x) - \nabla g(x)| \leq C\eta(\delta), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.4)$$

Пусть p есть целая часть числа $2(k+1) + 1$. Фиксируем любое $x \in \mathbb{R}^N$ и определим

$$\begin{aligned} J_0 &= \{j \in J : |x - a_j| < p\delta\}, \\ J_n &= \{j \in J : n\delta \leq |x - a_j| < (n+1)\delta\}, \quad n = p, p+1, \dots \end{aligned}$$

Тогда

$$|\nabla f(x) - \nabla g(x)| \leq \sum_{j \in J_0} |\nabla f_j(x) - \nabla g_j(x)| + \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{j \in J_n} \frac{C\delta \|\mu_j\|}{|x - a_j|^N} \equiv T_0 + \sum_{n=p}^{\infty} T_n.$$

Ввиду (4.1) число элементов в J_0 не превышает некоторой константы, зависящей только от p . Поэтому $T_0 \leq C(\omega(\delta) + \varepsilon(\delta))$.

Поскольку $\|\mu_j\| \leq \mu(2B_j)$, мы получаем из (4.1), что

$$T_n \leq \sum_{j \in J_n} \frac{C\delta \mu(2B_j)}{n^N \delta^N} \leq C\delta^{1-N} n^{-N} (\mu(B(x, (n+3)\delta)) - \mu(B(x, (n-2)\delta)))$$

и, следовательно, по лемме 3.1

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^{\infty} T_n &\leq C\delta^{1-N} p^{-N} (\omega(\delta) + \varepsilon(\delta)) \delta^{N-1} \\ &\quad + C\delta^{1-N} \sum_{n=p}^{\infty} \mu(B(x, (n+3)\delta)) \left(\frac{1}{n^N} - \frac{1}{(n+5)^N} \right) \\ &\leq Cp^{-N} (\omega(\delta) + \varepsilon(\delta)) + C \sum_{n=p}^{\infty} \frac{\omega(n\delta)}{n^2} \equiv \eta(\delta). \end{aligned}$$

Последнее доказывает (4.4), так как $\sum_{n=p}^{\infty} \omega(n\delta) n^{-2} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Оценка $|f(x) - g(x)| \leq C\eta(\delta)$ получается аналогично: надо только вначале установить неравенство

$$|f_j(x) - g_j(x)| \leq \frac{C\delta \|\mu_j\|}{|x - a_j|^{N-1}} \quad \text{при} \quad |x - a_j| > 2(k+1)\delta,$$

а затем с учетом (4.4) проверить нужную оценку только для x , находящихся от $\text{spt}(\mu)$ на расстоянии не менее 1.

§ 5. C^1 -продолжение субгармонических функций и оценка потока

Основной результат этого раздела состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть f субгармонична на открытом шаре B и принадлежит классу C^1 на $\overline{B}$. Тогда найдется функция F , субгармоническая и класса C^1 на всем $\mathbb{R}^N$ такая, что $F = f$ на $\overline{B}$ и $\|\nabla F\|_{\mathbb{R}^N} \leq C\|\nabla f\|_B$, где $C > 0$ зависит только от N .

Нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 5.2. Пусть f и B взяты из формулировки теоремы 5.1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция F_ε класса $C^1(\mathbb{R}^N)$ такая, что

- (i) F_ε субгармонична на $\mathbb{R}^N$, а $f - F_\varepsilon$ субгармонична на B ;
- (ii) $(\text{spt } \Delta F_\varepsilon) \cap B \subset \text{spt } \Delta f$;
- (iii) $\|f - F_\varepsilon\|_B + \|\nabla f - \nabla F_\varepsilon\|_B < \varepsilon$; $\|\nabla F_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^N} \leq C\|\nabla f\|_B$, $\|F_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^N} \leq C\|f\|_B$ при $N \geq 3$ и $\|F_\varepsilon\|_{2B} \leq C\|f\|_B$ при $N = 2$, где $C > 0$ зависит только от N .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. При $N = 2$ неравенство $\|F_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^N} \leq C\|f\|_B$ может выполняться (при всех $\varepsilon > 0$) только в тривиальном случае $f \equiv \text{const}$, поскольку на плоскости нет непостоянных ограниченных субгармонических функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2. Доказательство основано на идеях симметричного отражения и аппроксимации, предложенных в [10].

Без ограничения общности мы будем предполагать, что $B = B(0, 1)$ и $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ имеет компактный носитель. Мы *утверждаем*, что найдется функция f_ε класса $C^1(\mathbb{R}^N)$ такая, что $f - f_\varepsilon$ субгармонична на B ,

$$\|f - f_\varepsilon\|_{2B} < \varepsilon, \quad \|\nabla f - \nabla f_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^N} < \varepsilon, \quad \text{spt}(\Delta f_\varepsilon) \cap B \subset \text{spt}(\Delta f),$$

причем f_ε гармонична в некоторой окрестности ∂B . Существование такой f_ε следует из стандартной конструкции, которая приводится ниже для удобства читателя и смысл которой состоит в “сдвиге” особенностей функции f из малой окрестности ∂B во внешность $\overline{B}$.

Фиксируем достаточно малое $\delta > 0$ и рассмотрим покрытие $\{B_j\}$ пространства $\mathbb{R}^N$ открытыми шарами с радиусами δ и ассоциированное с ним разбиение единицы $\{\psi_j\}$, удовлетворяющее (4.1) и (4.2).

Положим $f_j = \Phi * \psi_j \Delta f$, так что $f = \sum_j f_j$.

Обозначим через a_j центр B_j . Справедливо разложение вида

$$f_j(x) = c_j \Phi(x - a_j) + d_j(x), \quad x \notin 2B_j,$$

где

$$c_j = \langle \psi_j \Delta f, 1 \rangle = - \int \nabla \psi_j \cdot (\nabla f - \nabla f(a_j)) dx, \quad d_j(x) = O(|x - a_j|^{1-N}),$$

так что

$$|c_j| \leq C\delta^{N-1}\omega(\nabla f, \delta).$$

Обозначим через J совокупность индексов j с условием $2B_j \cap \partial B \neq \emptyset$. Для каждого $j \in J$ найдется шар B_j^* радиуса δ , содержащийся в $5B_j$, причем $2B_j^* \cap B = \emptyset$.

Выберем $\chi_j \in C_0^\infty(B_j^*)$ со свойствами $\int \chi_j \equiv \int \chi_j(x) dx = 1$ и $0 \leq \chi_j \leq C\delta^{-N}$. Полагая $g_j = c_j \Phi * \chi_j$, мы получим (см. [4; следствие 3.4]) $\|\nabla g_j\| \leq Cw(\nabla f, \delta)$ и

$$|\nabla f_j(x) - \nabla g_j(x)| \leq C \frac{w(\nabla f, \delta)\delta^N}{|x - a_j|^N}, \quad x \notin 6B_j. \quad (5.1)$$

Функция

$$f_\varepsilon = \sum_{j \notin J} f_j + \sum_{j \in J} g_j$$

удовлетворяет всем требованиям нашего *утверждения* при достаточно малых δ . Действительно, достаточно получить оценку сверху величины $|\nabla f(x) - \nabla f_\varepsilon(x)|$ только при x из 7δ -окрестности ∂B и применить принцип максимума. Указанная оценка проходит по той же схеме, как при доказательстве (4.4), с той лишь разницей, что здесь мы пользуемся неравенством (5.1) и элементарной оценкой сверху *числа элементов* в каждом из множеств J_n .

Заметим еще, что f_ε гармонична в δ -окрестности множества ∂B .

Пусть далее $R = 1 + \delta/2$ и $M = \|\nabla f_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^N}$. Определим функцию g на $\mathbb{R}^N$ с помощью преобразования Кельвина: $g(x) = f_\varepsilon(x)$ при $|x| \leq R$ и

$$g(x) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{N-2} f_\varepsilon\left(\frac{xR^2}{|x|^2}\right) \quad \text{при } |x| > R.$$

Оказывается, что g субгармонична на $\mathbb{R}^N \setminus \partial B(0, R)$ и гармонична на

$$\mathbb{R}^N \setminus (\partial B(0, R) \cup S_\varepsilon \cup (S_\varepsilon)^*),$$

где $(S_\varepsilon)^*$ есть результат симметричного отражения (инверсии) множества $S_\varepsilon = \text{spt}(\Delta f_\varepsilon) \cap B(0, R)$ относительно сферы $\partial B(0, R)$. Нам следует модифицировать функцию $g(x)$, поскольку она (в общем случае) не принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^N)$ и, вообще говоря, может не быть субгармонической около $\partial B(0, R)$. Идея в том, чтобы добавить к g некоторую специальную функцию с положительным скачком нормальной производной на $\partial B(0, R)$, достаточно большим, чтобы компенсировать возможные отрицательные скачки нормальной производной функции g на $\partial B(0, R)$ (см. [24; гл. 5, разд. 7]). При $N \geq 3$ определим $g_1(x) = g(x)$ при $|x| \leq R$ и

$$g_1(x) = g(x) + 2MR \left(1 - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{N-2}\right) \quad \text{при } |x| > R.$$

Для $N = 2$ выражение $1 - (R/|x|)^{N-2}$ должно быть заменено на $-\log(R/|x|)$. Заметим, что g_1 — липшицева субгармоническая функция на $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющая всем требованиям к функции F_ε в лемме 5.2, кроме условия принадлежности к классу $C^1(\mathbb{R}^N)$. Мы устраним последнюю трудность, регуляризуя функцию g_1 в малой окрестности $\partial B(0, R)$. Выберем *радиально-симметричную* функцию $\varphi \in C_0^1(B(0, \delta/4))$, $\varphi \geq 0$, $\int \varphi = 1$, и положим

$$F_\varepsilon(x) = g_1(x) \quad \text{при } |x| \leq 1 \quad \text{и} \quad F_\varepsilon(x) = (\varphi * g_1)(x) \quad \text{при } |x| > 1.$$

Поскольку φ радиальна и g_1 гармонична на $1 - \delta < |x| < 1 + \delta/2$, мы получаем $g_1(x) = (\varphi * g_1)(x)$ при $1 < |x| < 1 + \delta/4$. Таким образом, F_ε принадлежит $C^1(\mathbb{R}^N)$ и доказательство завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Применяя лемму 5.2 для f и $\varepsilon = 1/2$, найдем F_1 . Применим снова лемму 5.2 к $f - F_1$ и $\varepsilon = 1/2^2$, получая F_2 . По индукции находим функции $F_1, \dots, F_n, \dots$ такие, что

$$\|f - (F_1 + \dots + F_n)\|_B + \|\nabla(f - (F_1 + \dots + F_n))\|_B < \frac{1}{2^n}$$

и

$$\|F_n\|_{2B} + \|\nabla F_n\|_{\mathbb{R}^N} \leq \frac{C}{2^n}.$$

Функция $F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$ дает нужное продолжение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Легко видеть, что ввиду теоремы 5.1 и (обобщенной) формулы Гаусса нам остается доказать следующую лемму, которую имеет смысл сравнить с леммой 3.3.

ЛЕММА 5.4. Пусть μ – положительная радонова мера на $\mathbb{R}^N$ с компактным носителем такая, что $f = \Phi * \mu$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^N)$ и $\|\nabla f\| \leq 1$. Тогда для любого ограниченного открытого множества D имеет место

$$\mu(D) \leq C\alpha_+(D \cap \text{spt } \mu),$$

где $C = C(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\delta > 0$ пусть

$$D_\delta = \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) > 2\delta\},$$

так что $\mu(D) \leq 2\mu(D_\delta)$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Рассмотрим покрытие $\mathbb{R}^N$ шарами $\{B_j\}$ с радиусами δ и разбиение единицы $\{\psi_j\}$, удовлетворяющее (4.1) и (4.2). Пусть J есть совокупность индексов j таких, что $\overline{B_j} \subset D$. Тогда $\sum_{j \in J} \psi_j = 1$ на D_δ . Пусть $\mu_j = \psi_j \mu$ и $f_j = \Phi * \mu_j$. По лемме 3.4 и из (4.2) имеем $\|\nabla f_j\| \leq C\omega(\nabla f, \delta)$, где $\omega(\nabla f, \delta)$ – модуль непрерывности ∇f . По лемме 3.1 получаем $\|\mu_j\| \leq C\omega(\nabla f, \delta)\delta^{N-1}$.

Пусть a_j – центр B_j . Выберем $r_j > 0$ такие, что $\|\mu_j\| = \nu_j(\partial B(a_j, r_j))$, где ν_j – поверхностная мера на $\partial B(a_j, r_j)$ (при $\|\mu_j\| = 0$ полагаем $r_j = 0, \nu_j = 0$). Будем считать δ выбранным так, что шары $B(a, 3r_j)$ попарно не пересекаются. Положим $K = \bigcup_{j \in J} \partial B(a_j, r_j)$, и пусть

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j + \sum_{j \notin J} \mu_j.$$

Легко проверяется, что $\|\nabla \Phi * \nu_j\| \leq C$, так что, действуя так же, как в § 4, мы получаем

$$\left\| \sum_{j \in J} (\nabla \Phi * \nu_j - \nabla \Phi * \mu_j) \right\| \leq C,$$

откуда $\|\nabla \Phi * \nu\| \leq C$. Применяя лемму 3.3 к функции $\Phi * \nu$, получаем $\nu(K) \leq C\gamma_+(K)$, что дает $\mu(D) \leq C\gamma_+(K)$.

Для завершения доказательства нам остается показать, что

$$\gamma_+(K) \leq C\alpha_+(\text{spt } \mu \cap D).$$

Выберем положительную меру σ с носителем на K , удовлетворяющую $\gamma_+(K) \leq 2\|\sigma\|$ и $\|\nabla \Phi * \sigma\| \leq 1$.

Найдем $\varphi_j \in C_0^\infty(B(a_j, 3r_j))$, $\varphi_j = 1$ на $B(a_j, 2r_j)$ и $\|\nabla \varphi_j\| \leq Cr_j^{-1}$. Пусть σ_j есть сужение меры σ на $\partial B(a_j, r_j)$, тогда $\sigma_j = \varphi_j \sigma$. Отсюда по утверждению (b) леммы 3.4 $\|\nabla \Phi * \sigma_j\| \leq C$, а согласно замечанию 3.2

$$\|\sigma_j\| \leq Cr_j^{N-1} \leq C\|\mu_j\|.$$

Пусть λ_j таковы, что $\|\sigma_j\| = \lambda_j \|\mu_j\|$, так что λ_j ограничены равномерно по j и δ . Определим $\sigma_0 = \sum_{j \in J} \lambda_j \mu_j$. Тогда

$$2\|\sigma_0\| = 2\|\sigma\| \geq \gamma_+(K), \quad \text{spt } \sigma_0 \subset D \cap \text{spt } \mu$$

и

$$\|\nabla \Phi * \sigma - \nabla \Phi * \sigma_0\| \leq C$$

снова по аналогии с §4.

Таким образом, $\|\nabla \Phi * \sigma_0\| \leq C$, и $\nabla \Phi * \sigma_0$ непрерывна, поскольку таковыми являются все $\nabla \Phi * \mu_j$. Следовательно,

$$\gamma_+(K) \leq C\alpha_+(D \cap \text{spt } \mu).$$

Завершая этот параграф, привлечем внимание читателя к следующей весьма интересной (на наш взгляд) проблеме. Требуется описать такие компакты X в $\mathbb{R}^N$, для которых всякая функция класса $C^1(\mathbb{R}^N)|_X$, субгармоническая на $\overset{\circ}{X}$, может быть продолжена до субгармонической функции класса C^1 на всем $\mathbb{R}^N$.

§6. Свойства γ_+ , α_+ и связанные с ними критерии аппроксимации

Один из типичных результатов этого параграфа состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^N$ — компакт и его граница имеет конечную $(N-1)$ -мерную меру Хаусдорфа. Если f — субгармоническая класса C^1 функция на $\mathbb{R}^N$, гармоническая на $\overset{\circ}{X}$, то найдутся субгармонические класса C^1 на $\mathbb{R}^N$ функции f_n ($n = 1, 2, \dots$), каждая из которых гармонична в некоторой (зависящей от n) окрестности компакта X , такие, что

$$\nabla f_n \rightarrow \nabla f \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{равномерно на } \mathbb{R}^N.$$

Этот результат непосредственно вытекает из следствия 1.3 и свойств полуаддитивности, полученных в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть E_1 и E_2 — ограниченные борелевские множества в $\mathbb{R}^N$. Существует константа $C > 0$, зависящая только от N , такая, что выполняются следующие два утверждения.

- (a) $\gamma_+(E_1 \cup E_2) \leq C(\gamma_+(E_1) + \gamma_+(E_2))$.
- (b) Пусть E_2 открыто, а $(N-1)$ -мерная мера Хаусдорфа множества E_1 конечна или $\gamma_+(E_1) = 0$. Тогда $\alpha_+(E_1 \cup E_2) \leq C\alpha_+(E_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется положительная радонова мера μ с носителем на $E_1 \cup E_2$ такая, что

$$\gamma_+(E_1 \cup E_2) \leq 2\mu(E_1 \cup E_2)$$

и $\|\nabla f\| \leq 1$, где $f = \Phi * \mu$. По лемме 3.3, примененной к E_1 и E_2 , получаем

$$\mu(E_j) \leq C\gamma_+(E_j), \quad j = 1, 2,$$

что дает (a).

Для доказательства (b) возьмем положительную радонову меру μ с компактным носителем в $E_1 \cup E_2$ такую, что $\alpha_+(E_1 \cup E_2) \leq 2\mu(E_1 \cup E_2)$ и $f = \Phi * \mu$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^N$ с оценкой $\|\nabla f\| \leq 1$. Тогда $\mu(E_1) = 0$, если E_1 имеет конечную $(N-1)$ -мерную меру Хаусдорфа (см. лемму 3.1), или $\mu(E_1) = 0$ при $\gamma_+(E_1) = 0$ ввиду леммы 3.3.

Еще одно применение леммы 3.3 дает

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_2) \leq C\gamma_+(E_2).$$

Поскольку E_2 открыто, то $\gamma_+(E_2) = \alpha_+(E_2)$, что нетрудно установить простой регуляризацией.

Аналогично доказательству п. (a) теоремы 6.2 можно доказать (вместо леммы 3.3 используется лемма 5.4), что если E_1 и E_2 открыты в (относительной) топологии множества $E_1 \cup E_2$ (например, если E_1 и E_2 — непересекающиеся компакты), то

$$\alpha_+(E_1 \cup E_2) \leq C\alpha_+(E_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Если B — произвольный открытый шар, то

$$\alpha_+(B \setminus \overset{\circ}{X}) = \alpha_+((B \cap \partial X) \cup (B \setminus X)) \leq C\alpha_+(B \setminus X)$$

по утверждению (b) теоремы 6.2. Остается применить следствие 1.3 (п. (iii)).

В размерности $N = 2$ емкость γ_+ удалось связать с геометрической величиной, называемой кривизной Менгера (см. [25], [6], [17]), что должно упростить применение критериев, полученных в теореме 1.1.

Около трех лет назад П. Джонс анонсировал результат, согласно которому

$$\gamma_+(K) \geq C \operatorname{diam}(K) \quad (6.1)$$

для любого континуума K на плоскости.

Поскольку доказательство этого результата пока не опубликовано, все нижеследующие утверждения носят *условный* характер. На самом деле они *эквивалентны* (6.1).

Из (6.1) непосредственно вытекает, что если X — плоский компакт со связным дополнением, то для всех $\delta > 0$ имеем

$$\gamma_+(B(a, \delta) \setminus X) \geq C\delta, \quad a \in \partial X,$$

откуда сразу получаем

$$\alpha_+(B(a, \delta) \setminus \overset{\circ}{X}) \leq C\alpha_+(B(a, 2\delta) \setminus X), \quad a \in \mathbb{C}.$$

Отсюда, пользуясь следствием 1.3 (п. (iii)) и классическим методом Рунге (движения полюсов), можно установить C^1 -гармонический-субгармонический аналог известной теоремы Мергеляна.

На самом деле в предыдущем рассуждении не обязательно ограничиваться субгармоническими функциями, поэтому *обычный* C^1 -гармонический аналог теоремы Мергеляна также следовал бы из результата П. Джонса (см. [4], где эта проблема была поставлена и сведена к (6.1)).

С другой стороны, нам *нужна* субгармоничность при доказательстве следующего критерия. Напомним, что внутренней границей компакта $X \subset \mathbb{R}^2$ называется множество $\partial_i X = \partial X \setminus \bigcup_k \partial U_k$, где U_k — связные компоненты $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ — компакт и его внутренняя граница $\partial_i X$ имеет конечную одномерную меру Хаусдорфа (длину) или же $\gamma_+(\partial_i X) = 0$. Тогда для любой субгармонической функции f на $\mathbb{R}^2$ класса $C^1(\mathbb{R}^2)$, гармонической на $\overset{\circ}{X}$, найдутся субгармонические функции f_n на $\mathbb{R}^2$ класса $C^1(\mathbb{R}^2)$, причем каждая f_n гармонична в некоторой (зависящей от n , $n = 1, 2, \dots$) окрестности компакта X , такие, что

$$\nabla f_n \rightarrow \nabla f \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{равномерно на } \mathbb{R}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{U_k\}$ — совокупность компонент связности дополнения к X , так что $\partial X \setminus \bigcup_k \partial U_k$ есть внутренняя граница компакта X . Можно доказать, что для каждого k имеется $\delta_k > 0$ такое, что если $a \in \partial U_k$ и $\delta \leq \delta_k$, то найдется континуум диаметра не менее $\delta/2$, содержащийся в $B(a, \delta) \cap U_k$. Ввиду (6.1) мы получаем, что при любом $a \in \partial U_k$ и $\delta \leq \delta_k$ имеет место

$$\alpha_+(B(a, \delta) \setminus \overset{\circ}{X}) \leq \delta \leq C\alpha_+(B(a, \delta) \cap U_k) \leq C\alpha_+(B(a, \delta) \setminus X).$$

Пользуясь последним свойством и стандартной схемой аппроксимации [1], можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция f_ε , субгармоническая и класса C^1 на $\mathbb{R}^2$, такая, что $\|\nabla f_\varepsilon - \nabla f\|_{\mathbb{R}^2} < \varepsilon$ и f_ε гармонична на $\overset{\circ}{X}$ и в некоторой окрестности множества $\partial X \setminus \partial_i X$. Поэтому если мы положим $\mu_\varepsilon = \Delta f_\varepsilon$, то $\text{spt } \mu_\varepsilon \subset (\mathbb{R}^2 \setminus X) \cup (\partial X_i)$. Пусть $\mu = \Delta f$ и B — какой-либо открытый диск. Если ε достаточно мало, то $\mu(B) \leq 2\mu_\varepsilon(B)$ и $\text{osc}(\nabla f, B) \leq 2 \text{osc}(\nabla f_\varepsilon, B)$.

Пользуясь леммой 5.4, нетрудно установить, что

$$\mu_\varepsilon(B) \leq C \text{osc}(\nabla f_\varepsilon, B) \alpha_+((B \setminus X) \cup \partial_i X).$$

С другой стороны, по утверждению (b) теоремы 6.2 и условиям на $\partial_i X$ мы имеем

$$\alpha_+((B \setminus X) \cup \partial_i X) \leq C\alpha_+(B \setminus X).$$

То есть окончательно

$$\mu(B) \leq C \text{osc}(\nabla f, B) \alpha_+(B \setminus X),$$

что завершает доказательство ввиду теоремы 1.1 (п. (iii)).

Список литературы

1. Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. №6. С. 141–199.
2. Verdera J. On C^m rational approximation // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 97. P. 621–625.
3. Verdera J. C^m approximation by solutions of elliptic equations, and Calderón–Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55. P. 157–187.
4. Парамонов П. В. О гармонических аппроксимациях в C^1 -норме // Матем. сб. 1990. Т. 181. №10. С. 1341–1365.

5. *Парамонов П. В.* C^m -приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1993. Т. 184. №2. С. 105–128.
6. *Tolsa X.* L^2 -boundedness of the Cauchy integral operator for continuous measures // Duke Math. J. 1999. V. 98. №2. P. 269–304.
7. *Mattila P., Paramonov P. V.* On geometric properties of harmonic Lip_1 -capacity // Pacific J. Math. 1995. V. 171. №2. P. 469–490.
8. *Парамонов П. В.* Некоторые новые критерии равномерной приближаемости функций рациональными дробями // Матем. сб. 1995. Т. 186. №9. С. 97–112.
9. *Freedman W.* Basis systems and their role in the approximation of the Earth's gravitational field // Gerlands Beitr. Geophysik, Leipzig. 1985. V. 94. №1. P. 19–34.
10. *Мельников М. С.* Оценка интеграла Коши по аналитической кривой // Матем. сб. 1966. Т. 71 (113). С. 503–515.
11. *Gardiner S. J.* Harmonic approximation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. (Lectures Notes ser. V. 221.)
12. *Gauthier P. M.* Subharmonic extension and approximation // Canadian Math. Bull. 1994. V. 37. P. 46–53.
13. *David G., Journé J. L.* A boundedness criterion for generalized Calderón–Zygmund operators // Ann. of Math. 1984. V. 120. P. 371–397.
14. *David G.* Wavelets and singular integrals on curves and surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1991. (Lecture Notes in Math. V. 1465.)
15. *David G., Journé J. L., Semmes S.* Opérateurs de Calderón–Zygmund, fonctions para-accrétives et interpolation // Rev. Mat. Iberoamericana. 1985. V. 4. P. 1–56.
16. *Nazarov F., Treil S., Volberg A.* Cauchy integral and Calderón–Zygmund operators on non homogeneous spaces // Internat. Math. Res. Notices. 1997. V. 15. P. 703–726.
17. *Verdera J.* On the $T(1)$ -Theorem for the Cauchy Integral // Ark. Mat. 2000. V. 38. P. 183–199.
18. *Nazarov F., Treil S., Volberg A.* Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderón–Zygmund operators on non homogeneous spaces // Internat. Math. Res. Notices. 1998. V. 9. P. 463–487.
19. *Uy N. X.* An extremal problem on singular integrals // Amer. J. Math. 1980. V. 102. №2. P. 279–290.
20. *Verdera J.* A weak type inequality for Cauchy transforms of finite measures // Publ. Mat. UAB. 1992. V. 36. P. 1029–1034.
21. *Verdera J.* Removability, capacity and approximation // Complex Potential Theory. NATO ASI Series. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1994. P. 419–473.
22. *Bagby T.* Approximation in the mean by solutions of elliptic equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 281. P. 761–784.
23. *Stein E. M.* Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton: Princeton Univ. Press., 1970.
24. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
25. *Мельников М. С.* Аналитическая емкость: дискретный подход и кривизна меры // Матем. сб. 1995. Т. 186. №6. С. 57–76.

Автономный университет Барселоны (Испания),

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: verdera@mat.uab.es, melnikov@mat.uab.es, petr@paramonov.msk.ru

Поступила в редакцию

15.06.2000