Общероссийский математический портал

Н. Л. Замарашкин, Е. Е. Тыртышников, Оценки собственных значений для ганкелевых матриц, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 4, 59–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:17:44

УДК 512.64

Н. Л. Замарашкин, Е. Е. Тыртышников

Оценки собственных значений для ганкелевых матриц

Положительно определенные ганкелевы матрицы обладают следующим важным свойством: отношение максимального и минимального собственных значений (спектральное число обусловленности) имеет оценку снизу в виде растущей экспоненты от порядка матрицы, при этом оценка не зависит от конкретных значений элементов. Доказательство этого факта связано с так называемыми вандермондовыми разложениями положительно определенных ганкелевых матриц. В данной работе изучается структура таких разложений для вещественных не-знакоопределенных строго регулярных ганкелевых матриц и предлагаются некоторые обобщения оценок спектрального числа обусловленности.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Ганкелевы матрицы ($H_n = [h_{i+j-2}]$, $1 \leq i, j \leq n$) связаны с классическими задачами анализа (алгебраическая проблема моментов, ортогональные многочлены) и играют важную роль при построении вычислительных методов (квадратуры, пространства Крылова). Комплекснозначные ганкелевы матрицы могут быть обусловлены идеально – например, матрица дискретного преобразования Фурье и любые случаи, когда ганкелева матрица оказывается также унитарной. Однако матрицы с вещественными элементами обычно являются очень плохо обусловленными. Так, в положительно определенном случае *всегда* имеет место следующая оценка:

$$\text{cond}_2 H_n \geq cd^n, \quad c > 0, \quad d > 1. \quad (1)$$

Метод получения этой оценки был предложен в [1]. В данной работе мы приводим полное доказательство и находим новые возможности применения этого метода. В частности, мы показываем, что (1) остается в силе и для некоторых классов незнакоопределенных ганкелевых матриц.

В дальнейшем c обозначает положительную константу, а d – константу, которая строго больше 1 (значения констант в разных местах текста не обязаны совпадать). В положительно определенном случае уточненные значения c и d в оценке (1) были недавно найдены в [2]. Заметим, что в данной работе мы не ставим своей целью получение точных значений.

Все наши построения основаны на так называемом *вандермондовом разложении* ганкелевых матриц.

В разделе 2 мы описываем общий метод и приводим нужные нам результаты для положительно определенных матриц Вандермонда с узлами, лежащими на отрезке $[-1, 1]$. По существу, главной нашей задачей является снятие (или ослабление) последнего ограничения на узлы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00017).

В разделе 3 представлена основная техническая лемма, дающая нам возможность получать оценки сингулярных чисел для матриц Вандермонда с произвольными вещественными узлами. Мы показываем, что m -е сингулярное число (при упорядочении по невозрастанию) стремится к нулю как экспонента от n (порядок матрицы), если $m \sim cn$.

В разделе 4 доказывается оценка для положительно определенного случая. Затем, в разделе 5 мы переходим к изучению вандермондовых разложений с комплексными узлами и весами. Здесь мы обнаруживаем, что комплексные веса не являются серьезным препятствием для получения экспоненциальных оценок. Основные трудности связаны с наличием комплексных узлов.

В разделе 6 делаются приготовления для работы с незнакоопределенными матрицами. Изучается структура вандермондовых разложений для вещественных строго регулярных ганкелевых матриц, утрачивающих свойство положительной определенности. В разделе 7 устанавливается основная теорема для незнакоопределенного случая.

2. Общий метод. Ядром метода, предложенного в [1], является следующее замечательное соотношение между матрицами Ганкеля и Вандермонда:

$$H_n = V_n \Lambda_n V_n^T, \quad (2)$$

где $\Lambda_n = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ – диагональная матрица, а $V_n = V(x_1, \dots, x_n)$ – матрица Вандермонда с узлами $x_1, \dots, x_n$:

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Величины $g_i \equiv \lambda_i^{1/2}$ будем называть *весами* (хотя они могут быть отрицательными или даже комплекснозначными).

Соотношение (2) имеет место для любой невырожденной ганкелевой матрицы [3] (см. также [4], [5]). Однако в общем случае узлы $x_1, \dots, x_n$ оказываются комплекснозначными.

Если матрица $H_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является положительно определенной, то узлы и веса можно выбрать вещественными [1]. В этом случае удается доказать, что минимальное сингулярное число матрицы

$$K_n = G_n V_n^T, \quad G_n \equiv \text{diag}\{g_1, \dots, g_n\},$$

обязано быть достаточно малым.

Матрицу K_n естественно называть *матрицей Крылова*, поскольку ее столбцы образуют естественный базис в соответствующем пространстве Крылова, порожденном некоторой матрицей X и вектором g :

$$K_n = [g, Xg, X^2g, \dots, X^{n-1}g],$$

где $X = \text{diag}\{x_1, \dots, x_n\}$ и $g = [g_1, \dots, g_n]^T$. Очевидно,

$$\sigma_n(K_n) \leq \left\| X^{n-1}g - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k X^k g \right\|_2$$

для любого выбора коэффициентов α_k . Другими словами,

$$\sigma_n(K_n) \leq \|(X^{n-1} - p_{n-2}(X))g\|_2$$

для любого многочлена p_{n-2} степени не выше $n-2$.

Теперь предположим, что $a \leq x_1, \dots, x_n \leq b$. Возьмем в качестве $p_{n-2}(x)$ наилучшее чебышёвское приближение к x^{n-1} . Тогда

$$\begin{aligned} \|(X^{n-1} - p_{n-2}(X))g\|_2 &\leq \min_{p_{n-2}} \max_{a \leq x \leq b} |x^{n-1} - p_{n-2}(x)| \|g\|_2 \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n-1} \|g\|_2. \end{aligned}$$

Таким образом, довольно легко получается следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Для любой матрицы Крылова K_n с вещественными узлами $x_1, \dots, x_n$, лежащими между -1 и 1 ,*

$$\text{cond}_2 K_n \geq \frac{1}{4} \cdot 2^n.$$

Следовательно, если все веса вещественны, то для любой ганкелевой матрицы вида $K_n^T K_n$

$$\text{cond}_2 H_n \geq \frac{1}{16} \cdot 4^n.$$

Если узлы принадлежат отрезку $[a, b]$, то для матриц Крылова, порожденных некоторым общим процессом, часто оказывается, что

$$|x_i| \equiv \max_k |x_k| \geq \gamma \max\{|a|, |b|\}, \quad \frac{1}{2} < \gamma < 1, \quad \text{и} \quad |\lambda_i| \geq c.$$

Если взять это как дополнительное предположение, то отсюда вытекает, что

$$\text{cond}_2 K_n \geq cd^n, \quad d = 4\gamma \left(\frac{\max\{|a|, |b|\}}{b-a} \right) \geq 2\gamma.$$

Именно такая оценка приводится в [6] (см. также [7]).

Однако мы хотели бы обойтись *без дополнительных предположений* (кроме вещественности узлов). Как и в [1], будем опираться на следующее наблюдение.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $A, \bar{A}$ являются $(n \times n)$ -матрицами, и предположим, что для $m \leq n$*

$$\begin{aligned} \text{rank } \bar{A} &\leq m, \\ \text{rank}(A - \bar{A}) &\leq n - m. \end{aligned}$$

Тогда

$$\sigma_n(A) \leq \sigma_m(\bar{A}).$$

ЛЕММА 2.2. Рассмотрим $(n \times n)$ -матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},$$

где блок A_1 образован первыми t строками. Тогда

$$\sigma_n(A) \leq \sigma_m(\bar{A}) \leq \sigma_m(\tilde{A}).$$

Теперь, даже в случае произвольных узлов, разделим их совокупность на два подмножества в соответствии со следующими неравенствами:

$$(a) \quad |x_i| \leq 1; \quad (b) \quad |x_i| \geq 1.$$

Предположим, что ровно t узлов удовлетворяют (а) (или (b)). Тогда рассмотрим соответствующие t строк матриц K_n , образуем из них матрицу A_1 и построим ее до матрицы $\tilde{A}$ таким образом, чтобы в результате получалась матрица Крылова с попарно различными узлами, подчиненными неравенству (а) (или (b)). Теперь мы должны оценить сверху t -е сингулярное число матрицы Крылова с узлами, удовлетворяющими неравенству (а) (или (b)). Важно отметить, что не зависящие от весов оценки для случаев (а) и (b) будут одинаковыми по форме в силу очевидного соотношения

$$G_n V_n^T = (G_n X_n^{n-1})(X_n^{-n+1} V_n^T),$$

которое означает, что матрица Крылова для одного случая после перестановки столбцов в обратном порядке превращается в матрицу Крылова (с другими весами) для другого случая. Значит, можно считать в дальнейшем, что $t \geq n/2$.

3. Основная лемма.

ЛЕММА 3.1. Предположим, что K_n есть матрица Крылова с узлами из отрезка $[-1, 1]$, и пусть $0 < c' < 1$ – некоторая величина, не зависящая от n . Обозначим через g вектор весов. Тогда для любых n и t таких, что $c'n \leq t \leq n$, выполняется неравенство

$$\sigma_m(K_n) \leq cq^n \|g\|_2, \quad 0 < q < 1.$$

Оно остается в силе, когда все узлы по модулю не меньше 1.

Это утверждение близко к лемме 3.1 из работы [1]. Для доказательства рассмотрим линейную оболочку L_m , натянутую на первые t столбцов матрицы K_n , и запишем неравенство

$$\sigma_m(K_n) \leq \sum_{k=t}^{n-1} \|X_n^k g - v_k\|_2^2, \quad (3)$$

верное для любого вектора $v_k \in L_m$. Оценки можно получать, выбирая подходящие векторы v_k . Для этого нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 3.2. Пусть $0 < c' < 1$. Тогда для любых n и t таких, что $c'n \leq t \leq n$, имеет место оценка

$$\min_{p_m(x)} \max_{|x| \leq 1} |x^n - p_m(x)| \leq cq^n,$$

где $0 < q < 1$ и $c > 0$ не зависит от n и t , а $p_m(x)$ обозначает многочлен степени не выше t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $x^n = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x)$, где $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ есть многочлен Чебышёва степени k . Положим $x = \cos \varphi$. Используя свойства ортогональности, находим

$$c_k = \frac{\int_0^\pi \cos^n \varphi \cos(k\varphi) d\varphi}{\int_0^\pi \cos^2(k\varphi) d\varphi}.$$

Примем во внимание, что

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{k} \cos(n-2k)\varphi + \frac{\delta_n}{2^n} \binom{n}{n/2},$$

где δ_n равно 1, если n четно, и 0 в противном случае. Окончательно

$$x^n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{k} T_{n-2k}(x) + \frac{\delta_n}{2^n} \binom{n}{n/2}. \quad (4)$$

Выберем

$$p_m(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{c''n \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{k} T_{n-2k}(x) + \frac{\delta_n}{2^n} \binom{n}{n/2},$$

где $c'' = \frac{1-c'}{2}$. Следовательно,

$$\max_{|x| \leq 1} |x^n - p_m(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{0 \leq k \leq c''n} \binom{n}{k} \leq \frac{c''n}{2^{n-1}} \binom{n}{\lceil c''n \rceil}. \quad (5)$$

Далее, используя известные асимптотики для биномиальных коэффициентов, получаем неравенства:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq c \frac{n^n}{k^n(n-k)^{n-k}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}},$$

справедливые при достаточно больших n, k и $n-k$. К тому же если α и β ограничены равномерно по n и k , то

$$\binom{n+\alpha}{k+\beta} \leq c \binom{n}{k}, \quad n, k \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\binom{n}{\lceil c''n \rceil} \leq \frac{c}{\sqrt{n} d^n},$$

где

$$d(c'')^{c''} (1-c'')^{1-c''}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x \log x + (1-x) \log(1-x)$ при $0 < x < 1$. Легко видеть, что $f'(x) = \log \frac{x}{1-x}$ и, значит,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 & \text{для } x &= \frac{1}{2}, \\ f'(x) &> 0 & \text{для } x > \frac{1}{2}, \\ f'(x) &< 0 & \text{для } x < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > \log \frac{1}{2}$. Заметим, что $d > \frac{1}{2}$, если $c'' \neq \frac{1}{2}$. Возвращаясь к (5), получаем

$$\max_{|x| \leq 1} |x^n - p_m(x)| \leq c \frac{\sqrt{n}}{(2d)^n}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $2d > 1$.

В действительности мы получили оценку вида

$$\min_{p_m(x)} \max_{|x| \leq 1} |x^n - p_m(x)| \leq c \sqrt{n} q^n$$

с несколько меньшим q , чем в формулировке леммы 3.2.

Кроме того, если m близко к n , то с помощью той же техники можно указать некоторые конкретные значения q и c . Например,

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2}, & c &= 4 & \text{для } m &= n; \\ q &= \frac{1}{2}, & c &= 8 & \text{для } m &= n-1. \end{aligned}$$

Если $m = n - k$, где k не зависит от n , то по-прежнему $q = \frac{1}{2}$ (но c должно зависеть от k).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Рассмотрим “наихудшее” значение $m = \lceil c'n \rceil$. Опираясь на (3), положим $v_k = p_{k'}(X_n)g$, где $k' = \lceil c'k \rceil$ и многочлен $p_{k'}$ обеспечивает оценку леммы 3.2. Следовательно, $\|X_n^k g - v_k\|_2 \leq cq^k \|g\|_2$, откуда очевидным образом вытекает, что $\sigma_m(K_n) \leq cq^n \|g\|_2$.

Иногда полезно иметь в виду следующее простое следствие леммы 3.1.

ЛЕММА 3.3. *В условиях и обозначениях леммы 3.1 справедливо неравенство*

$$\sigma_m(K_n^* K_n) \leq c_1 q_1^n \|g\|_2^2,$$

где $c_1 = c^2$ и $q_1 = q^2$.

Очевидно, $0 < q_1 < 1$. В силу вещественности узлов матрица $K_n^* K_n$ является ганкелевой и, как можно заметить, неотрицательно определенной.

4. Случай положительно определенной матрицы. Предположим, что ганкелева матрица H_k является положительно определенной. Тогда существует разложение $H_k = K_n^T K_n$, где K_n есть матрица Крылова с вещественными узлами и весами.

Опираясь на лемму 3.1, легко находим оценку снизу для $\|K_n^{-1}\|_2$ и немедленно получаем (1).

5. Комплексные узлы и веса. Если вещественная ганкелева матрица является положительно определенной, то узлы и веса могут оказаться комплексными (особые свойства комплексных узлов и весов будут рассмотрены в следующем разделе). Однако полезные оценки для сингулярных чисел возможны и в таких случаях.

Сначала рассмотрим случай, когда веса комплексные, но узлы вещественные.

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что $H_n = V_n \Lambda_n V_n^T$ – невырожденная ганкелева матрица, $\Lambda_n = \text{diag}\{\lambda_{1n}, \dots, \lambda_{nn}\}$ – диагональная матрица с комплексными весами, V_n – матрица Вандермонда с вещественными узлами. Положим*

$$\beta_n = \frac{\gamma_n}{\alpha_n}, \quad \gamma_n = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_{in} \right|, \quad \alpha_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_{in}|^2},$$

$$\beta'_n = \frac{\gamma'_n}{\alpha'_n}, \quad \gamma'_n = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_{in} x_i^{2n-2} \right|, \quad \alpha'_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_{in} x_i^{2n-2}|^2}.$$

Обозначим m число узлов x_{in} таких, что $|x_{in}| \leq 1$; возьмем $0 < c' < 1$, не зависящее от n и m , и рассмотрим следующие два случая: $c'n \leq m$ и $c'n \leq n - m$. Тогда в первом случае имеем

$$\text{cond}_2 H_n \geq c \beta_n d^n, \quad d > 1,$$

а во втором случае

$$\text{cond}_2 H_n \geq c \beta'_n d^n, \quad d > 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условиям теоремы m узлов x_i таковы, что $|x_i| \leq 1$. Без потери общности запишем $V_n = [V_{n1}, V_{n2}]$, где V_{n1} содержит эти m узлов, а V_{n2} – остальные узлы. Положим

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} \Lambda_{n1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{n2} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{n1} \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad \Lambda_{n2} \in \mathbb{C}^{(n-m) \times (n-m)}.$$

Тогда

$$H_n = V_{n1} \Lambda_{n1} V_{n1}^T + V_{n2} \Lambda_{n2} V_{n2}^T.$$

Согласно лемме 3.1 в случае $c'n \leq m$ находим

$$\sigma_m(\Lambda_{n1} V_{n1}^T) \leq c q^n \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1} |\lambda_{in}|^2} \leq c q^n \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_{in}|^2}$$

и, более того,

$$\sigma_m(V_{n1} \Lambda_{n1} V_{n1}^T) \leq \|V_{n1}\|_2 \sigma_m(\Lambda_{n1} V_{n1}^T) \leq n \sigma_m(\Lambda_{n1} V_{n1}^T).$$

По лемме 2.1

$$\sigma_n(H_n) \leq \sigma_m(V_{n1} \Lambda_{n1} V_{n1}^T).$$

Остается оценить $\|H_n\|_2$ снизу:

$$\|H_n\|_2 \geq |h_{11}| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_{in} \right|.$$

В случае $c'n \leq n - m$ предположим для простоты, что нет нулевых узлов. Тогда возможна редукция к предыдущему случаю. В самом деле, пусть

$$\tilde{V}_n^T \equiv X_n^{1-n} V_n^T J_n,$$

где

$$X_n = \text{diag}\{|x_i|\}, \quad J = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}.$$

В матрице Вандермонда $\tilde{V}_n^T$ по меньшей мере $c'n$ узлов по модулю не больше 1. Запишем

$$J_n H_n J_n = \tilde{V}_n (X_n^{2n-2} \Lambda_n) \tilde{V}_n^T.$$

Поскольку матрица J_n унитарная, находим

$$\text{cond}_2 H_n = \text{cond}_2 (J_n H_n J_n).$$

ТЕОРЕМА 5.2. *В условиях и обозначениях теоремы 5.1 предположим дополнительно, что величины λ_{in} вещественные. Тогда*

$$\text{cond}_2 H_n \geq c\beta_n d^n, \quad d > 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно записать

$$H_n = V_{n1} \Lambda_{n1} V_{n1}^T - V_{n2} \Lambda_{n2} V_{n2}^T,$$

где

$$\Lambda_{n1} > 0, \quad \Lambda_{n2} > 0.$$

В отличие от предыдущего доказательства теперь

$$H_n = K_{n1}^T K_{n1} - K_{n2}^T K_{n2},$$

где матрицы Крылова K_{n1} и K_{n2} вещественные. Спектральное число обусловленности для каждого слагаемого не превышает квадрата спектрального числа обусловленности для соответствующей матрицы Крылова.

Оценки чисел обусловленности можно представить также в следующей форме.

ТЕОРЕМА 5.3. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 5.2. Тогда для любого n либо справедлива оценка*

$$\text{cond}_2 H_n \geq \sqrt{\frac{c}{\alpha_n} d_n},$$

либо для всех элементов H_n имеет место неравенство

$$|\{H_n\}_{ij}| \leq \sqrt{\frac{\alpha_n}{c} \left(\frac{1}{d}\right)^n}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже знаем, что

$$\|H_n^{-1}\|_2 \geq \frac{c}{\alpha_n} d^n.$$

Остается лишь заметить, что $\|H_n\|_2 \leq |\{H_n\}_{ij}|$.

Случай комплексных узлов не обязательно связан с плохой обусловленностью, так как матрицы Вандермонда с комплексными узлами могут оказаться унитарными (например, матрица дискретного преобразования Фурье). Плохая обусловленность в таких случаях связана с дополнительными предположениями.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $H_n = V_n \Lambda V_n^T$, где $\Lambda_n, V_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$, и предположим, что $0 < c' < 1$ не зависит от n . Если V_n имеет t вещественных узлов и $c'n \leq t \leq n$, то для всех n

$$\text{cond}_2 H_n \geq c\beta_n d^n$$

либо

$$\text{cond}_2 H_n \geq c\beta'_n d^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя доказательству теоремы 5.1, примем во внимание, что по меньшей мере $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ узлов удовлетворяет неравенству $|x_i| \leq 1$ либо $|x_i| \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Те же оценки снизу остаются в силе, когда t узлов имеют вид $x_k = e^{i\varphi} r_k$, где r_k и φ вещественные ($i^2 = -1$).

6. Вандермондовы разложения вещественных ганкелевых матриц.

ТЕОРЕМА 6.1. Предположим, что вещественная ганкелева матрица H порядка n является строго регулярной (т.е. все ведущие подматрицы невырожденные). Тогда для нее существует вандермондово разложение

$$H = V \Lambda V^T,$$

где

$$V = V(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \bar{x}_{r+1}, \dots, x_{r+k}, \bar{x}_{r+k})$$

и

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_{r+k}, \bar{\lambda}_{r+k}\},$$

причем $x_1, \dots, x_r$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строгая регулярность матрицы H гарантирует существование так называемого LDL^T -разложения:

$$H = R^T D R, \quad R, D \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ – невырожденная диагональная матрица, а R – верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали. Попробуем найти верхнюю хессенбергову матрицу $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ такую, что, во-первых,

$$R = [e_1, T e_1, \dots, T^{n-1} e_1], \quad e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T,$$

и, во-вторых,

$$DTe_n = T^T De_n, \quad e_n = [0, \dots, 0, 1]^T.$$

Из первого соотношения единственным образом определяются первые $n-1$ столбцов T . Второе соотношение дает

$$t_{1n} = \dots = t_{n-2n} = 0$$

и поэтому сводится к такому уравнению:

$$d_{n-1}t_{n-1n} = d_n t_{nn-1} \Rightarrow t_{n-1n} = \frac{d_n}{d_{n-1}} t_{nn-1}.$$

В качестве t_{nn} можно взять *любое* значение.

Введем следующее “скалярное произведение”:

$$(x, y)_D = y^T D x.$$

Тогда

$$(T^{i+1}e_1, T^j e_1)_D = (T^i e_1, T^{j+1} e_1)_D, \quad 0 \leq i, j \leq n-2,$$

а также

$$\begin{aligned} (TT^i e_1, e_n)_D &= e_n^T (DTT^i e_1) = (T^T D e_n)^T T^i e_1 \\ &= (D T e_n)^T T^i e_1 = (T e_n)^T D T^i e_1 = (T^i e_1, T e_n)_D. \end{aligned}$$

Поскольку матрица R невырожденная, поддиагональ T не может иметь нулей. Следовательно, векторы $e_1, T e_1, \dots, T^{n-2} e_1, e_n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$. Поэтому

$$(Tx, y)_D = (x, Ty)_D \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

откуда

$$DT = T^T D.$$

Таким образом, T – неприводимая трехдиагональная матрица.

Легко показать, что все собственные значения T простые (имеют алгебраическую кратность 1). Значит, матрица T диагонализуема:

$$T = Z X Z^{-1}, \quad X = \text{diag}\{x_i\}.$$

Следовательно,

$$R = Z[Z^{-1}e_1, X Z^{-1}e_1, \dots, X^{n-1} Z^{-1}e_1] = Z[g, Xg, \dots, X^{n-1}g],$$

где $g \equiv Z^{-1}e_1$. Отсюда

$$H = R^T D R = V\{G Z^T D Z G\} V^T,$$

где

$$V^T = V^T(x_1, \dots, x_n), \quad G = \text{diag}\{g_i\}.$$

Матрица в фигурных скобках диагональная, потому что $Z^T D Z$ есть диагональная матрица. Чтобы доказать последнее, запишем

$$D Z X Z^{-1} = Z^{-T} X Z^T D.$$

После умножения слева на Z^T и справа на Z получаем

$$(Z^T D Z) X = X (Z^T D Z).$$

Диагональные элементы матрицы X попарно различны, поэтому матрица $M \equiv Z^{-1} D Z$ обязана быть диагональной. Более того, можно выбрать Z (путем масштабирования столбцов) таким образом, что

$$M = \text{diag}\{\pm 1\}.$$

Получаем $H = V \Lambda V^T$, причем $\Lambda = \text{diag}\{\pm g_i^2\}$.

Узлы $x_1, \dots, x_n$ суть собственные значения вещественной матрицы. Поэтому их всегда можно переупорядочить в соответствии с формулировкой теоремы, после чего квадраты элементов первого столбца в Z^{-1} приобретают нужный нам вид.

СЛЕДСТВИЕ. *Если все собственные значения T вещественные, то все узлы и веса вандермондова разложения строго регулярной ганкелевой матрицы можно выбрать вещественными.*

Обсудим некоторые возможности выбора T в проведенном доказательстве. Прежде всего можно отказаться от требования, что все элементы главной диагонали R равны 1. Достаточно, чтобы таковым был элемент в левом верхнем углу этой матрицы. Возникает естественный вопрос о влиянии D в LDL^T разложения для H на спектр матрицы T . Оказывается, D на спектр T никак не влияет. В самом деле, рассмотрим два различных разложения: $H = R^T D R = R_1^T D_1 R_1$. Тогда для некоторой диагональной матрицы D_2 находим $R_1^T = R^T D_2$ и $D_1 = D_2^{-1} D D_2^{-1}$. Нетрудно проверить, что R_1 — матрица Крылова, порожденная $T_1 \equiv D_2 T D_2^{-1}$, и, кроме того, $D_1 T_1 = T_1^T D_1$. Ясно, что собственные значения матриц T и $T_1 = D_2 T D_2^{-1}$ совпадают.

Можно попытаться использовать произвол в выборе t_{nn} . Однако в некоторых случаях T имеет невещественное собственное значение при любом выборе t_{nn} .

ЛЕММА 6.1. *Предположим, что*

$$H = V \Lambda V^T = R^T D R,$$

где $V = V(x_1, \dots, x_n)$ — невырожденная матрица Вандермонда, R — верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали, Λ и D — диагональные матрицы. Пусть G и M — диагональные матрицы такие, что

$$\Lambda = G M G.$$

Положим

$$Z = G V^T R^{-1}, \quad T = Z^{-1} X Z.$$

Тогда T — трехдиагональная матрица, удовлетворяющая уравнению

$$D T = T^T D, \tag{6}$$

а R является матрицей Крылова вида

$$R = [e_1, T e_1, \dots, T^{n-1} e_1]. \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению Z

$$Z^T M Z = D$$

и, как легко видеть, $Ze_1 = g$, где g – вектор диагональных значений матрицы G . Пусть $X = \text{diag}\{x_i\}$. Тогда

$$[e_1, Te_1, \dots, T^{n-1}e_1] = Z^{-1}[g, Xg, \dots, X^{n-1}g] = Z^{-1}GV^T = Z^{-1}(ZR) = R$$

и, следовательно, T есть верхняя хессенбергова матрица. Далее,

$$DT = (Z^T M Z)(Z^{-1} X Z) = Z^T M X Z$$

и

$$T^T D = (Z^T X Z^{-T})(Z^T M Z) = Z^T X M Z.$$

Поэтому $DT = T^T D$ и поскольку мы уже знаем, что T является верхней хессенберговой, приходим к выводу о том, что она должна быть диагональной.

Попутно заметим, что данная лемма указывает некоторый путь решения обратных задач на собственные значения. Мы же используем ее для другой цели.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Существуют строго регулярные ганкелевы матрицы, не имеющие вещественных вандермондовых разложений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $H = V\Lambda V^T$, где матрицы V и Λ вещественные. В силу строгой регулярности H запишем $H = R^T D R$, где R – верхняя треугольная матрица. Используя лемму 6.1, заключаем, что узлы матрицы V суть собственные значения трехдиагональной матрицы T , удовлетворяющие соотношениям (6) и (7). Такая матрица T определяется по R однозначно, за исключением элемента t_{nn} .

Пусть

$$H = R^T \text{diag}\{-1, 1, 1\} R, \quad R = [e_1, Te_1, T^2 e_1],$$

где

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \delta \\ 0 & \delta & t_{33} \end{bmatrix}, \quad \delta \geq 0.$$

Очевидно, T можно рассматривать как возмущение матрицы

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание унитарность T_0 и используя теорему Бауэра–Файка в усиленном варианте, аналогичном второй теореме Гершгорина (см., например, [8]), рассмотрим следующие круги:

$$|i - \lambda| \leq \delta, \quad |-i - \lambda| \leq \delta, \quad |t_{33} - \lambda| \leq \delta.$$

Каждый из этих кругов содержит ровно одно собственное значение матрицы T для достаточно малых δ (при которых круги не пересекаются).

Например, можно взять $\delta = \frac{1}{3}$. Тогда для любого t_{33} матрица T имеет одно вещественное собственное значение и пару комплексно сопряженных.

7. Случай вещественной недиагональной матрицы.

ТЕОРЕМА 7.1. *Предположим, что H_n – строго регулярная вещественная ганкелева матрица порядка n с сигнатурой σ_n , где $c'n \leq |\sigma_n|$ и $0 < c' < 1$. Тогда*

$$\text{cond}_2 H_n \geq c \frac{\gamma_n}{\alpha_n} d^n, \quad d > 1,$$

где

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \alpha_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2},$$

а величины λ_i суть веса диагональной матрицы любого вандермондова разложения для H_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $H_n = V\Lambda V^T = R^T D R$. Тогда на основании леммы 6.1 узлы $x_1, \dots, x_n$ вандермондовой матрицы V суть собственные значения некоторой диагонализуемой матрицы

$$T = Z^{-1} X Z, \quad X = \text{diag}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Более того, в выражении $\Lambda = G M G$ с диагональными матрицами G и M можно взять $M = I$ (в общем случае матрица G комплексная). По той же лемме

$$Z^{-T} D Z^{-1} = I. \quad (8)$$

Очевидно, $F \equiv Z^{-1}$ есть матрица собственных векторов для T . Рассмотрим произвольное комплексное собственное значение $x = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Если $f = u + iv$ (с вещественными u, v) – соответствующий собственный вектор, то

$$\begin{aligned} (T(u + iv) = (u + iv)(\alpha + i\beta), T(u - iv) = (u - iv)(\alpha - i\beta)) \\ \Rightarrow (Tu = \alpha u - \beta v, Tv = \beta u + \alpha v). \end{aligned}$$

Пусть $f = u + iv$ и $\bar{f} = u - iv$ – пара столбцов в F . Согласно проведенным выше рассуждениям для некоторой невырожденной матрицы P вещественные векторы u и v будут парой столбцов вещественной $(n \times n)$ -матрицы $S = FP$. Учитывая (8), получаем

$$\sum_{k=1}^n d_k (u_k + iv_k)(u_k - iv_k) = 0 \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} u^T \\ v^T \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}, \gamma \in \mathbb{R} \right).$$

В итоге находим

$$B \equiv S^T D S = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{bmatrix}$$

с вещественными блоками B_i размеров 1×1 и 2×2 , причем каждый (2×2) -блок B_i имеет вид

$$B_i = \gamma_i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

По построению число (2×2) -блоков равно числу пар комплексно сопряженных узлов в матрице V . Поскольку H , D и B конгруэнтны, они имеют одну и ту же сигнатуру. В то же время, сигнатура для любого (2×2) -блока равна нулю. Значит, число вещественных узлов совпадает с сигнатурой по модулю. Для завершения доказательства используем теорему 5.4.

ТЕОРЕМА 7.2. В условиях и обозначениях теоремы 7.1 для любого n имеет место одно из двух:

$$\text{cond}_2 H_n \geq \sqrt{\frac{c}{\alpha_n} d^n}, \quad d > 1,$$

либо

$$|\{H_n\}_{ij}| \leq \sqrt{\frac{\alpha_n}{c} \frac{1}{d^n}}.$$

Доказательство легко получается по аналогии с доказательством теоремы 5.3.

8. Заключение. В данной работе развивается метод, предложенный в [1]. Мы изучаем ситуации, когда m -е сингулярное число матрицы Крылова порядка n достаточно мало, если только $m \sim cn$. В частности, отсюда получаются нижние оценки вида cd^n , $d > 1$, для спектрального числа обусловленности любой положительно определенной ганкелевой матрицы H порядка n . Замечательно, что c и d не зависят от значения элементов матрицы H .

Самостоятельный интерес может представлять проведенное в работе изучение структуры вандермондовых разложений строго регулярных вещественных ганкелевых матриц.

Последнее позволило нам описать классы плохо обусловленных ганкелевых матриц в незнакоопределенном случае. Показано, что спектральное число обусловленности строго регулярной вещественной ганкелевой матрицы порядка n растет экспоненциально по n — при условии, что сигнатура σ по модулю растет как cn . В этом случае матрица Крылова в соответствующем вандермондовом разложении имеет достаточно много *вещественных* узлов.

Заметим также, что наши оценки в незнакоопределенном случае содержат коэффициент β_n (или β'_n), асимптотическое поведение которого не обсуждалось. Однако существует разумная вероятностная модель, в которой можно утверждать, что $\beta_n \geq \varepsilon$ с вероятностью $1 - O(\varepsilon)$.

Отдельного внимания заслуживает, конечно, вопрос о точных значениях констант (см. [2]).

Список литературы

1. Tyrttyshnikov E. E. How bad are Hankel matrices? // Numer. Math. 1994. V. 67. P. 261–269.
2. Beckermann B. The condition number of real Vandermonde, Krylov and positive definite Hankel matrices // Laboratoire d'analyse numerique et d'optimisation. Preprint ANO-380. Lille, Nov. 1997.
3. Ландер Ф. И. Безутианта и обращение ганкелевых и теплицевых матриц // Матем. исследования. 1974. № 2 (32). P. 69–87.
4. Heinig G., Rost K. Algebraic methods for toeplitz-like matrices and operators. Berlin: Akademie Verlag, 1984.
5. Ильин В. П., Кузнецов Ю. И. Алгебраические основы численного анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
6. Taylor J. M. The condition of Gram matrices and related problems // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1978. V. 80. P. 45–56.
7. Gautschi W., Inglese G. Lower bounds for the condition number of Vandermonde matrices // Numer. Math. 1988. V. 52. № 3. P. 241–250.
8. Stewart G. W., Sun J. Matrix perturbation theory. San Diego: Academic Press, 1990.