Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, О сбалансированных системах идемпотентов, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 4, 73–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 10:30:18

УДК 512.538+512.542+519.1

Д. Н. Иванов

О сбалансированных системах идемпотентов

Сбалансированным базисом ассоциативной полупростой конечномерной над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебры называется система идемпотентов $\{e_i\}$, образующая линейный базис и такая, что $\text{Tr } e_i$ и $\text{Tr } e_i e_j$ не зависят от $i, j, i \neq j$, где Tr – след регулярного представления алгебры. В статье строятся сбалансированные базисы в алгебре матриц $M_p(\mathbb{C})$, p нечетное простое. Для алгебр матриц такие базисы до сих пор были известны лишь в случае $M_2(\mathbb{C})$ и $M_3(\mathbb{C})$. Доказывается несуществование сбалансированных базисов определенных рангов, обладающих регулярной элементарной абелевой 2-группой автоморфизмов, в алгебрах $M_{2^n}(\mathbb{C})$, $n > 1$. Кроме того, классифицируются сбалансированные 1-системы из $n + 1$ идемпотента ранга r в алгебре $M_{rn}(\mathbb{C})$.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

В работе [1] было введено понятие сбалансированной системы идемпотентов в ассоциативной полупростой конечномерной над полем комплексных чисел¹ $\mathbb{C}$ алгебре $\mathbf{A}$. Это понятие получило свое развитие в работе [2]. Напомним основное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть система идемпотентов $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_v\}$ в алгебре $\mathbf{A}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) (условие сбалансированности) $e_1 + \dots + e_v = k \cdot \mathbf{1}_A$, где $\mathbf{1}_A$ – единичный элемент алгебры $\mathbf{A}$, $k \in \mathbb{C}$;
- 2) (условие равноугольности) $\text{Tr } e_{i_1} \dots e_{i_s} = \lambda_s$ для любых различных индексов $i_1, \dots, i_s$, $s = 1, \dots, t$, где Tr – след регулярного представления алгебры $\mathbf{A}$ и λ_s зависит только от s .

Тогда $\mathcal{E}$ называется *сбалансированной t -системой*, или просто *t -системой*.

Если $\mathcal{E}$ – сбалансированная 2-система, образующая линейный базис в $\mathbf{A}$, то $\mathcal{E}$ называется *сбалансированным базисом*. Для $\sigma \in \text{Aut } \mathbf{A}$ система $\mathcal{E}^\sigma = \{e_i^\sigma\}$ является сбалансированной t -системой, *сопряженной* к $\mathcal{E}$. Группа $\text{Aut } \mathcal{E} = \{\sigma \in \text{Aut } \mathbf{A} : \mathcal{E}^\sigma = \mathcal{E}\}$ называется *группой автоморфизмов* системы $\mathcal{E}$. Подгруппы в $\text{Aut } \mathcal{E}$ также будут называться группами автоморфизмов. Из контекста всегда

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00233).

¹С равным успехом можно вместо $\mathbb{C}$ рассматривать произвольное алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

будет ясно, о чем идет речь. Система $\widehat{\mathcal{E}} = \{\widehat{e}_i = \mathbf{1}_A - e_i\}$ называется *дополнительной* к $\mathcal{E}$. Очевидно, что $\widehat{\mathcal{E}}$, как и $\mathcal{E}$, является t -системой и имеет ту же самую группу автоморфизмов.

Как отмечалось в [1], система $\mathcal{E}$, удовлетворяющая условию равноугольности для 2-систем, линейно независима, и если $\mathcal{E}$ является базисом, то условие сбалансированности для $\mathcal{E}$ выполняется автоматически. Заметим, что согласно [1] не существует 3-систем, являющихся базисами.

Параметр $\lambda_1 = \text{Tr } e_i$ будем обозначать через r и называть *рангом* идемпотентов и всей t -системы. Для t -системы $\mathcal{E}$ ранга r из v идемпотентов будем использовать обозначение t -(v, r)-система. В случае матричной алгебры $\mathbf{A} = M_n(\mathbb{C}) = M_n$ под рангом будем понимать обычный ранг матрицы и для $\mathcal{E}$ употреблять обозначение t -(v, r, n)-система.

Понятие сбалансированной t -системы идемпотентов было введено как обобщение понятия комбинаторных t -схем, которые соответствуют в этом контексте случаю коммутативных алгебр $\mathbf{A}$. Например, 2-(v, k, λ)-схеме (по поводу обозначений см. [3]) отвечает 2-(v, r)-система в коммутативной алгебре $bM_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}$ (b слагаемых), где b — число блоков схемы, r — число появлений точки в разных блоках, $\lambda = \lambda_2$ — число появлений двух точек в разных блоках, k — мощность блока, равная коэффициенту при $\mathbf{1}_A$ в условии сбалансированности. Отметим, что симметричным 2-схемам отвечают сбалансированные базисы.

Алгебру, допускающую сбалансированный базис, будем называть *сбалансированной*. До сих пор были известны следующие примеры некоммутативных сбалансированных алгебр. В [1], [2] были построены сбалансированные базисы в алгебрах $M_2(\mathbb{C})$ и $M_3(\mathbb{C})$. Кроме того, в [1] доказано, что существование сбалансированного базиса ранга $n+1$ в алгебре $(n+1)M_1 \oplus M_n$ равносильно существованию однородного ортогонального разложения типа nM_1 алгебры M_n , которое, в свою очередь, равносильно существованию ортогонального разложения простой алгебры Ли типа A_{n-1} в сумму картановских подалгебр (см. об этих разложениях [4]). Таким образом, в силу результатов работы [4] алгебра $(n+1)M_1 \oplus M_n$ при $n = p^m, p$ простое, сбалансирована.

Основной целью данной работы является построение сбалансированных базисов в алгебрах матриц M_{p^n} , где p нечетное простое. Группы автоморфизмов этих базисов содержат нормальную регулярную элементарную абелеву p -подгруппу. Также доказывается несуществование сбалансированных базисов ранга r в алгебре $M_{2^n}(\mathbb{C})$, $n > 1$, обладающих регулярной элементарной абелевой 2-группой автоморфизмов, если $\frac{r(2^n - r)}{2^{2n} - 1}$ не является квадратом рационального числа. Таким образом, данная работа открывает исследования сбалансированных базисов с регулярной группой автоморфизмов в некоммутативных алгебрах. Кроме того, классифицируются 1-($n+1, r$)-системы в алгебре M_{rn} , что обобщает полученную в [2] классификацию таких систем в случае $r = 1$.

За стандарт обозначений, касающихся конечных групп, принята книга [5]. Так, $G = A.B$ обозначает расширение группы A посредством $B \cong G/A$; $G = A : B$ — расщепляемое расширение; p^n — элементарная абелева группа ранга n ; p^{1+2n} — экстраспециальная группа.

Автор выражает глубокую благодарность А. И. Кострикину за поддержку и

внимание к работе.

§ 2. Матрицы J_u

Пусть p простое, ε – примитивный корень степени p из 1. Определим матрицы размера $p \times p$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \varepsilon & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{a,b} = D^a P^b.$$

Удобно считать показатели степеней a и b элементами поля вычетов $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Далее, положим

$$J_u = J_{a_1, b_1} \otimes \dots \otimes J_{a_n, b_n}, \quad u = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^{2n}.$$

Так как $D^a P^b = \varepsilon^{ab} P^b D^a$, то имеем следующие формулы:

$$J_u J_{u'} = \varepsilon^{B(u, u')} J_{u+u'}, \quad \text{где } B(u, u') = - \sum_{i=1}^n a'_i b_i, \quad (2.1)$$

$$J_u J_v J_u^{-1} = \varepsilon^{\langle u | v \rangle} J_v, \quad \text{где } \langle u | u' \rangle = \sum_{i=1}^n (a_i b'_i - a'_i b_i) = B(u, u') - B(u', u). \quad (2.2)$$

Отметим, что $\langle u | v \rangle$ – невырожденная кососимметрическая форма на $\mathbb{F}_p^{2n}$. Так как

$$J_u^k = \varepsilon^{\frac{1}{2}k(k-1)B(u, u)} J_{ku},$$

то

$$J_u^p = E \quad \text{при } p > 2 \quad \text{и} \quad J_u^2 = (-1)^{B(u, u)} E \quad \text{при } p = 2,$$

где E – единичная матрица. Кроме того,

$$J_u^{-1} = \varepsilon^{B(u, u)} J_{-u}, \quad J_u^t = \varepsilon^{-B(u, u)} J_{\hat{u}}, \quad \overline{J}_u = J_{-\hat{u}}, \quad (2.3)$$

где черта над матрицей означает комплексное сопряжение и $\hat{u} = (a_1, \dots, a_n; -b_1, \dots, -b_n)$. Отметим, что $B(\hat{u}, \hat{u}) = -B(u, u)$.

Положим

$$N(J) = \{\sigma \in \text{Aut } M_{p^n} : \langle J_u^\sigma \rangle_{\mathbb{C}} = \langle J_{u'} \rangle_{\mathbb{C}}\}, \\ H = \{\text{сопряжения матрицами } J_u, \quad u \in \mathbb{F}_p^{2n}\}.$$

Группа H является нормальной элементарной абелевой p -подгруппой ранга $2n$ в группе $N(J)$. Как установлено в [6], фактор-группа $N(J)/H$ изоморфна симплектической группе $Sp_{2n}(p)$. Расширение $N(J) = H.Sp_{2n}(p)$ нерасщепляемо только

при $p = 2$ и $n > 2$. При $p > 2$ группа $Sp_{2n}(p)$ вкладывается в $N(J)$ путем отображения $\phi \mapsto \Phi_\phi$, где

$$\Phi_\phi(J_u) = \varepsilon^{\frac{1}{2}(B(\phi(u), \phi(u)) - B(u, u))} J_{\phi(u)} \quad (2.4)$$

(см. [7]).

Легко видеть, что группа, порожденная матрицами J_u , реализует неприводимое представление экстраспециальной группы p_+^{1+2n} экспоненты p в случае $p > 2$ и экстраспециальной группы $2_+^{1+2n} \cong D_4 * \dots * D_4$ (n множителей) в случае $p = 2$, где D_4 — группа диэдра порядка 8. Матрицы J_u имеют множество применений. В частности, они использовались для построения ортогональных разложений простых алгебр Ли типа A_{p^n-1} в сумму картановских подалгебр [4], [7].

§3. Сбалансированные базисы в $M_{p^n}(\mathbb{C})$, $p > 2$

Положим

$$A_x = \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{\langle u|x \rangle + \frac{1}{2}B(u, u)} J_u, \quad x \in \mathbb{F}_p^{2n},$$

где суммирование ведется по всем $u = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{F}_p^{2n}$.

ТЕОРЕМА 1. 1) $A_x A_y = \varepsilon^{c(x, y)} J_{2(y-x)}$, где $c(x, y) = 2(B(x, x) + B(y, y) - 2B(x, y))$, в частности, $A_x^2 = J_0 = E$ — единичная матрица;

2) системы идемпотентов

$$\mathcal{B}_{p^n}^+ = \left\{ e_x^+ = \frac{1}{2}(E + A_x) : x \in \mathbb{F}_p^{2n} \right\}, \quad \mathcal{B}_{p^n}^- = \left\{ e_x^- = \frac{1}{2}(E - A_x) : x \in \mathbb{F}_p^{2n} \right\}$$

являются дополнительными сбалансированными базисами алгебры M_{p^n} рангов $\frac{p^n+1}{2}$ и $\frac{p^n-1}{2}$ соответственно;

3) $\text{Aut } \mathcal{B}_{p^n}^+ = \text{Aut } \mathcal{B}_{p^n}^- = N(J) \cong p^{2n} : Sp_{2n}(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Нам понадобится следующий простой факт о тригонометрических суммах:

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_p} \varepsilon^{ab} = \begin{cases} 0, & \text{если } b \neq 0, \\ p, & \text{если } b = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Пусть $u = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$, $x = (f_1, \dots, f_n; g_1, \dots, g_n)$. Тогда в силу (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \sum_u \varepsilon^{\langle u|x \rangle} &= \sum_u \varepsilon^{a_1 g_1 + \dots + a_n g_n - b_1 f_1 - \dots - b_n f_n} \\ &= \left(\sum_{a_1} \varepsilon^{a_1 g_1} \right) \dots \left(\sum_{b_n} \varepsilon^{-b_n f_n} \right) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ p^{2n}, & \text{если } x = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя формулу (2.1), получаем

$$\begin{aligned}
A_x A_y &= \frac{1}{p^{2n}} \sum_{u,v} \varepsilon^{\langle u|v \rangle + \langle v|y \rangle + \frac{1}{2}B(u,u) + \frac{1}{2}B(v,v) + B(u,v)} J_{u+v} \\
&= \frac{1}{p^{2n}} \sum_v \sum_u \varepsilon^{\langle u|x \rangle + \langle v-u|y \rangle + \frac{1}{2}B(u,u) + \frac{1}{2}B(v-u, v-u) + B(u, v-u)} J_v \\
&= \frac{1}{p^{2n}} \sum_v \sum_u \varepsilon^{\langle u|x-y \rangle + \langle v|y \rangle + \frac{1}{2}B(v,v) + \frac{1}{2}\langle u|v \rangle} J_v \\
&= \frac{1}{p^{2n}} \sum_v \left(\sum_u \varepsilon^{\langle u|x-y + \frac{1}{2}v \rangle} \right) \varepsilon^{\langle v|y \rangle + \frac{1}{2}B(v,v)} J_v. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

В силу (3.2) в заключительном выражении (3.3) единственный отличный от 0 коэффициент будет при J_v , где $v = 2(y - x)$. Этот коэффициент равен

$$\frac{1}{p^{2n}} p^{2n} \varepsilon^{\langle 2(y-x)|y \rangle + \frac{1}{2}B(2(y-x), 2(y-x))} = \varepsilon^{2(B(x,x) + B(y,y) - 2B(x,y))}.$$

2) Так как $A_x^2 = E$, то $\frac{1}{2}(E \pm A_x)$ суть идемпотенты. Далее,

$$\text{tr } J_u = 0 \text{ при } u \neq 0 \Rightarrow \text{tr } A_x = 1 \Rightarrow \text{tr } \frac{1}{2}(E \pm A_x) = \frac{p^n \pm 1}{2}.$$

Кроме того, в силу 1) $\text{tr } A_x A_y = 0$ при $x \neq y$. Значит, $\text{tr } e_x^\pm e_y^\pm = \text{tr } \frac{1}{4}(E \pm A_x \pm A_y + A_x A_y) = \frac{1}{4}(p^n \pm 2)$. Отсюда следует, что $\mathcal{B}_{p^n}^\pm$ удовлетворяют условию равноугольности для 2-систем.

С помощью определителя Грама легко доказать линейную независимость систем $\mathcal{B}_{p^n}^\pm$. Значит, $\mathcal{B}_{p^n}^\pm$ суть базисы. Раскладывая единичную матрицу E по этим базисам, получаем, что выполняется условие сбалансированности.

Также условие сбалансированности можно установить непосредственно, используя формулу (3.2):

$$\sum_x A_x = \frac{1}{p^n} \sum_x \sum_u \varepsilon^{\langle u|x \rangle + \frac{1}{2}B(u,u)} J_u = \frac{1}{p^n} \sum_u \left(\sum_x \varepsilon^{\langle u|x \rangle} \right) \varepsilon^{\frac{1}{2}B(u,u)} J_u = p^n E.$$

Так как сумма A_x — скалярная матрица, то это же можно сказать и о сумме $e_x^\pm$.

3) Очевидно, $\text{Aut } \mathcal{B}_{p^n}^+ = \text{Aut } \mathcal{B}_{p^n}^-$. Обозначим $\text{Aut } \mathcal{B}_{p^n}^+ = G$. Группа G переставляет идемпотенты e_x^+ . Значит, G переставляет инволюции A_x . Так как $A_x A_y = \varepsilon^{c(x,y)} J_{2(y-x)}$, то G переставляет прямые $\langle J_u \rangle_{\mathbb{C}}$. Значит, G содержится в $N(J)$. С другой стороны, в силу (2.2) и (2.4) имеем

$$\begin{aligned}
J_v A_x J_v^{-1} &= \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{\langle u|x \rangle + \frac{1}{2}B(u,u) + \langle v|u \rangle} J_u = A_{x-v}; \\
\Phi_\phi(A_x) &= \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{\langle u|x \rangle + \frac{1}{2}B(u,u) + \frac{1}{2}(B(\phi(u), \phi(u)) - B(u,u))} J_{\phi(u)} \\
&= \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{\langle \phi(u)|\phi(x) \rangle + \frac{1}{2}B(\phi(u), \phi(u))} J_{\phi(u)} = A_{\phi(x)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $N(J)$ содержится в G , и мы получаем, что $G = N(J)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Отметим, что базисы $\mathcal{B}_{p^n}^\pm$ состоят из эрмитовых матриц и инвариантны относительно операции транспонирования. Это вытекает из следующих равенств, полученных с учетом формул (2.3):

$$\begin{aligned} A_x^t &= \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{\langle u|x \rangle + \frac{1}{2} B(u, u)} J_u^t = \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{\langle u|x \rangle + \frac{1}{2} B(u, u) - B(u, u)} J_{\hat{u}} \\ &= \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{\langle \hat{u} | -\hat{x} \rangle + \frac{1}{2} B(\hat{u}, \hat{u})} J_{\hat{u}} = A_{-\hat{x}}; \\ \bar{A}_x &= \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{-\langle u|x \rangle - \frac{1}{2} B(u, u)} \bar{J}_u = \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{-\langle u|x \rangle - \frac{1}{2} B(u, u)} J_{-\hat{u}} \\ &= \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{\langle -\hat{u} | -\hat{x} \rangle + \frac{1}{2} B(-\hat{u}, -\hat{u})} J_{-\hat{u}} = A_{-\hat{x}}. \end{aligned}$$

2) Так как коэффициенты матриц систем $\mathcal{B}_{p^n}^\pm$ лежат в круговом поле $\mathbb{Q}[\varepsilon]$, то можно рассматривать действие на них автоморфизма $\sigma_m \in \text{Gal}(\mathbb{Q}[\varepsilon]/\mathbb{Q})$, определенного равенством $\sigma_m(\varepsilon) = \varepsilon^m$. Оказывается, базисы $\mathcal{B}_{p^n}^\pm$ σ_m -инвариантны. Для σ_{-1} это следует из эрмитовости матриц $e_x^\pm$ и инвариантности $\mathcal{B}_{p^n}^\pm$ относительно транспонирования, отмеченных выше. В случае произвольного m это следует из равенств:

$$\begin{aligned} J_u^{\sigma_m} &= J_{\alpha_m(u)}, \quad \text{где } \alpha_m(u) = (ma_1, \dots, ma_n; b_1, \dots, b_n); \\ B(\alpha_m(u), \alpha_m(u)) &= mB(u, u); \quad A_x^{\sigma_m} = \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{m\langle u|x \rangle + \frac{m}{2} B(u, u)} J_{\alpha_m(u)} \\ &= \frac{1}{p^n} \sum_u \varepsilon^{\langle \alpha_m(u) | \alpha_m(x) \rangle + \frac{1}{2} B(\alpha_m(u), \alpha_m(u))} J_{\alpha_m(u)} = A_{\alpha_m(x)}. \end{aligned}$$

3) Отметим, что группа H действует регулярно на $\mathcal{B}_{p^n}^\pm$. Разлагая произвольную матрицу по базису $\mathcal{B}_{p^n}^\pm$, из транзитивности H получаем, что H действует неподвижно только на скалярных матрицах. Значит, H проективно неприводима, т.е. линейаризация тождественного вложения $H \rightarrow \text{Aut } M_{p^n}$ является неприводимым представлением универсальной накрывающей $\hat{H} = p.H$. Кроме того, так как $Sp_{2n}(p)$ действует транзитивно на ненулевых векторах пространства $\mathbb{F}_p^{2n}$, то $N(J) = H : Sp_{2n}(p)$ действует 2-транзитивно на $\mathcal{B}_{p^n}^\pm$. Из указанных свойств H и $N(J)$ вытекают нужные свойства систем $\mathcal{B}_{p^n}^\pm$. Так, из проективной неприводимости H следует условие сбалансированности, а из 2-транзитивности $N(J)$ следует условие равноугольности для 2-систем.

§ 4. Сбалансированные базисы в $M_{2n}(\mathbb{C})$

Сбалансированный базис в M_2 впервые был построен в [1], и там же была вычислена его группа автоморфизмов, которая оказалась изоморфной A_4 . В [1] отмечалась единственность такого базиса с точностью до сопряженности. Докажем здесь это утверждение.

ТЕОРЕМА 2. В $M_2(\mathbb{C})$ существует единственный с точностью до сопряженности сбалансированный базис.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ранг сбалансированного базиса $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ в M_2 может быть равен только 1. Из условий сбалансированности и равноугольности находим остальные параметры: $k = 2, \lambda = \lambda_2 = \frac{1}{3}$. Сопряжением мы можем добиться, чтобы $e_0 = \text{diag}(1, 0)$. Тогда

$$\text{tr } e_i e_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow e_i = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \end{pmatrix} \cdot (1 \ y_i), \text{ где } x_i y_i = 2, \text{ так как } \text{tr } e_i = 1.$$

Далее, $\text{tr } e_i e_j = \frac{1}{3}$ при $i \neq j \Rightarrow 3 = (1 + x_i y_j)(1 + x_j y_i) = 1 + x_i y_j + x_j y_i + 4$. Подставляя $y_i = \frac{2}{x_i}$, получаем $x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 = 0$. Значит, $x_i = \xi^{\pm 1} x_j$, где $\xi = e^{(2\pi i)/3}$. Сопрягая матрицей $\text{diag}(1, x_1)$, устанавливаем, что каждый сбалансированный базис сопряжен базису, в котором $x_1 = 1$. Отсюда $x_2 = \xi$, $x_3 = \xi^2$ или $x_2 = \xi^2$, $x_3 = \xi$. В обоих случаях мы имеем один и тот же базис. Теорема доказана.

Если потребовать, чтобы сбалансированный базис в M_2 был инвариантен относительно группы H , то таких базисов будет два: $\mathcal{B}_2^+$ и $\mathcal{B}_2^-$. Они являются дополнительными:

$$\mathcal{B}_2^\pm = \left\{ \frac{1}{2}(E_2 \pm A_x) : x \in \mathbb{F}_2^2 \right\}, \text{ где } A_x = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{u \neq 0} (-1)^{\langle x|u \rangle} i^{B(u,u)} J_u.$$

Здесь $i^a = i$, если $a = 1$, и $i^a = 1$, если $a = 0$. Отметим, что, в отличие от случая $p > 2$, группа $\text{Aut } \mathcal{B}_2^\pm$ не совпадает с $N(J)$, а является в ней подгруппой индекса 2.

ТЕОРЕМА 3. В алгебре $M_{2^n}(\mathbb{C})$ при $n > 1$ не существует сбалансированного базиса ранга r , обладающего регулярной элементарной абелевой 2-группой автоморфизмов, если $\frac{r(2^n - r)}{2^{2n} - 1}$ не является квадратом рационального числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сбалансированный базис $\mathcal{B}$ в M_{2^n} , $n > 1$, обладает регулярной элементарной абелевой 2-группой автоморфизмов H_0 . Тогда из транзитивности H_0 на $\mathcal{B}$ следует (проективная) неприводимость H_0 . Как доказано в [6], неприводимые конечные абелевы подгруппы в $\text{Aut } M_n$ сопряжены в $\text{Aut } M_n$, если они изоморфны. Следовательно, H_0 сопряжена с H . Поэтому мы можем считать, что $H_0 = H \leq \text{Aut } \mathcal{B}$.

Положим $q = 2^n > 2$. Находим параметры 2-системы $\mathcal{B}$: $k = rq, \lambda = \frac{(rq - 1)r}{q^2 - 1}$.

Для $a \in \mathbb{F}_2^{2^n}$, как и раньше, определим $i^a = i$, если $a = 1$, и $i^a = 1$, если $a = 0$. При этом справедливы равенства

$$i^{a+b} = i^a i^b (-1)^{ab} \text{ и } i^a i^a (-1)^a = 1.$$

Пусть $e_0 = \sum_u \alpha_u i^{B(u,u)} J_u \in \mathcal{B}$, тогда

$$e_x = J_x e_0 J_x^{-1} = \sum_u \alpha_u (-1)^{\langle x|u \rangle} i^{B(u,u)} J_u \in \mathcal{B}.$$

Заметим, что $(i^{B(u,u)} J_u)^2 = J_0 = E_q$ — единичная матрица порядка q . Так как $\text{tr } J_u = 0$ при $u \neq 0$, то

$$\text{tr } e_0^2 = q \sum_u \alpha_u^2 = \text{tr } e_0 = r, \quad \text{tr } e_0 e_x = q \sum_u \alpha_u^2 (-1)^{\langle x|u \rangle} = \lambda \quad (4.1)$$

для всех $0 \neq x \in \mathbb{F}_2^{2n}$. Таким образом, мы имеем линейную систему (4.1) относительно неизвестных α_u^2 с квадратной матрицей коэффициентов $S = (s_{x,u})_{q^2 \times q^2}$, $s_{x,u} = (-1)^{\langle x|u \rangle}$. Матрица S , очевидно, является таблицей неприводимых характеров элементарной абелевой 2-группы ранга $2n$. Поэтому $S^t S = q^2 E_{q^2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S \cdot (\alpha_0^2, \dots, \alpha_u^2, \dots)^t &= \frac{1}{q} (r, \lambda, \dots, \lambda)^t \Rightarrow (\alpha_0^2, \dots, \alpha_u^2, \dots)^t \\ &= \frac{1}{q^3} S^t \cdot (r, \lambda, \dots, \lambda)^t \Rightarrow \alpha_0^2 = \frac{1}{q^3} (r + \lambda(q^2 - 1)) = \frac{r^2}{q^2}, \\ \alpha_u^2 &= \frac{1}{q^3} \left(r + \sum_{x \neq 0} (-1)^{\langle x|u \rangle} \lambda \right) = \frac{1}{q^3} (r - \lambda) = \frac{r(q-r)}{q^2(q^2-1)}. \end{aligned}$$

Так как $\text{tr } e_0 = \text{tr } \alpha_0 J_0 = \alpha_0 q$, то $\alpha_0 = r/q$. Положим

$$\alpha_u = (-1)^{f(u)} \frac{\alpha}{q}, \quad \text{где } \alpha = \sqrt{\frac{r(q-r)}{q^2-1}}.$$

Далее, приравнявая в равенстве $e_0 = e_0^2$ коэффициенты при J_v , $v \neq 0$, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_v i^{B(v,v)} &= \sum_u \alpha_u \alpha_{u+v} i^{B(u,u)} i^{B(u+v,u+v)} (-1)^{B(u,u+v)} = 2\alpha_0 \alpha_v i^{B(v,v)} \\ &+ \sum_{u \neq 0, v} \alpha_u \alpha_{u+v} i^{B(u,u)} i^{B(u+v,u+v)} (-1)^{B(u,u+v)} = \frac{2r}{q^2} \alpha (-1)^{f(v)} i^{B(v,v)} \\ &+ \sum_{u \neq 0, v} \frac{\alpha^2}{q^2} (-1)^{f(u)+f(u+v)+B(u,u+v)} i^{B(u,u)} i^{B(u+v,u+v)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$0 = (2r - q) (-1)^{f(v)} i^{B(v,v)} + \alpha \sum_{u \neq 0, v} \kappa(u, v), \quad (4.2)$$

где $\kappa(u, v) = (-1)^{f(u)+f(u+v)+B(u,u+v)} i^{B(u,u)} i^{B(u+v,u+v)}$.

Если $\langle u | v \rangle = 1$, то $\kappa(u, v) = -\kappa(u+v, v)$. Положим $V_1 = \{u : \langle u | v \rangle = 1\}$. Тогда $u \in V_1 \Leftrightarrow u+v \in V_1$. Следовательно, разбивая V_1 на пары $\{u, u+v\}$, получаем $\sum_{u \in V_1} \kappa(u, v) = 0$.

Пусть $V_0 = \{u : \langle u | v \rangle = 0, u \neq 0, v\}$. Тогда $|V_0| = 2^{2n-1} - 2 > 0$, так как $n > 1$. Далее, $u \in V_0 \Leftrightarrow u+v \in V_0$ и

$$\begin{aligned} \kappa(u, v) &= \kappa(u+v, v) = (-1)^{f(u)+f(u+v)} i^{B(u,u)} i^{B(u+v,u+v)} (-1)^{B(u,u+v)} \\ &= (-1)^{f(u)+f(u+v)} i^{B(u,u)} i^{B(u,u)} i^{B(v,v)} (-1)^{B(u,u)B(v,v)} (-1)^{B(u,u)+B(u,v)} \\ &= (-1)^{f(u)+f(u+v)+B(u,u)B(v,v)+B(u,v)} i^{B(v,v)} = \tau(u, v) i^{B(v,v)}. \end{aligned}$$

Если $u \in V_0$, то $\tau(u, v) = \tau(u + v, v) = \pm 1$. Значит, V_0 разбивается на нечетное число $2^{2n-2} - 1$ пар $\{u, u + v\}$ и на каждой паре τ принимает значение $+1$ или -1 .

Следовательно, $\sum_{u \in V_0} \tau(u, v) \neq 0$ и в силу (4.2) $\alpha = \sqrt{\frac{r(q-r)}{q^2-1}} \in \mathbb{Q}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В алгебре $M_{2^n}(\mathbb{C})$, $n > 1$, не существует сбалансированных базисов ранга r , обладающих регулярной элементарной абелевой 2-группой автоморфизмов, если выполняется одно из следующих условий:

- 1) $r = 1$ или $r = 2^n - 1$, $n \neq 3$;
- 2) $r = 2^m$, где $m \geq 1$.

Перед рассмотрением теоретико-числовых вопросов введем стандартные обозначения: $a \mid b$ означает a делит b ; (a, b) обозначает наибольший общий делитель a и b .

Для доказательства следствия нам понадобится лемма, первые три пункта которой хорошо известны, а четвертый, возможно, представляет новое утверждение, имеющее самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1.

- (i) Уравнение $2^x + 1 = y^2$ имеет единственное решение в натуральных числах $x = y = 3$;
- (ii) уравнение $2^x - 1 = y^2$ имеет единственное решение в натуральных числах $x = y = 1$;
- (iii) $(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{(n,m)} - 1$;
- (iv) число $1 + 2^{2d} + \dots + 2^{2nd}$ не является квадратом натурального числа ни при каких натуральных d и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Имеем: $2^x = (y-1)(y+1) \Rightarrow (y-1) \mid (y+1) \Rightarrow (y-1) = (y-1, y+1)$. Но $(y-1, y+1) \leq 2$. Значит, $y-1 = 2$ и $x = 3$.

Пункт (ii) вытекает из того, что квадрат нечетного числа сравним с 1 по модулю 4.

(iii) Пусть $a = (2^n - 1, 2^m - 1)$ и $n > m$. Тогда $a \mid (2^n - 1) - (2^m - 1) = 2^m(2^{n-m} - 1) \Rightarrow a \mid (2^{n-m} - 1)$. Отсюда выводим $a \mid (2^r - 1)$, где r — остаток от деления n на m . Теперь, используя алгоритм Евклида, получаем $a \mid (2^{(n,m)} - 1)$. Значит, $a = 2^{(n,m)} - 1$.

(iv) Положим $A(n, d) = 1 + 2^{2d} + \dots + 2^{2nd}$. Рассмотрим отдельно два случая — когда n четно и когда n нечетно.

Случай 1. $n = 2m - 1$. Имеем

$$A(n, d) = \frac{2^{2(n+1)d} - 1}{2^{2d} - 1} = \frac{2^{4md} - 1}{2^{2d} - 1} = \frac{2^{2md} - 1}{2^{2d} - 1} \cdot (2^{2md} + 1) = A(m-1, d)(2^{2md} + 1).$$

Очевидно, $(2^{2md} - 1, 2^{2md} + 1) = 1 \Rightarrow (A(m-1, d), 2^{2md} + 1) = 1$. Значит, так как в силу п. (i) $2^{2md} + 1$ — не квадрат, то $A(n, d)$ — не квадрат.

Случай 2. $n = 2m$. Имеем

$$\begin{aligned} A(n, d) &= \frac{2^{2(2m+1)d} - 1}{2^{2d} - 1} = \frac{2^{(2m+1)d} - 1}{2^d - 1} \cdot \frac{2^{(2m+1)d} + 1}{2^d + 1} \\ &= (1 - 2^d + 2^{2d} - \dots + 2^{2md})(1 + 2^d + 2^{2d} + \dots + 2^{2md}). \end{aligned}$$

Положим $a = 1 - 2^d + 2^{2d} - \dots + 2^{2md}$, $b = 1 + 2^d + 2^{2d} + \dots + 2^{2md}$. Так как $(2^{(2m+1)d} - 1, 2^{(2m+1)d} + 1) = 1$, то $(a, b) = 1$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что $A(n, d)$ – квадрат. Тогда $a = a_1^2$, $b = b_1^2$. Если $d = 1$, то $a \equiv b \equiv -1 \pmod{4}$. Это противоречит тому, что a и b – квадраты. Поэтому далее считаем $d > 1$.

Имеем $b_1^2 - a_1^2 = 2^{d+1}(1 + 2^{2d} + \dots + 2^{2(m-1)d})$. Так как b_1, a_1 – нечетные взаимнопростые числа, то $(b_1 - a_1, b_1 + a_1) = 2$. Значит,

$$\text{либо (1) } \begin{cases} b_1 - a_1 = 2x, \\ b_1 + a_1 = 2^d y, \end{cases} \quad \text{либо (2) } \begin{cases} b_1 - a_1 = 2^d x, \\ b_1 + a_1 = 2y, \end{cases}$$

где x, y – нечетные взаимно простые числа.

Системы (1) и (2) переводятся друг в друга заменами $a_1 \leftrightarrow -a_1, x \leftrightarrow y$. Так как у нас был произвол в выборе знака a_1 , то достаточно рассмотреть систему (1).

Имеем

$$xy = 1 + 2^{2d} + \dots + 2^{2(m-1)d} = \frac{2^{2md} - 1}{2^{2d} - 1}. \quad (4.3)$$

Кроме того, равенства $b_1 = x + 2^{d-1}y$, $a_1 = -x + 2^{d-1}y$ влекут

$$x^2 + 2^{2d-2}y^2 = \frac{1}{2}(b_1^2 + a_1^2) = 1 + 2^{2d} + \dots + 2^{2md}. \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) получаем $x^2 + 2^{2d-2}y^2 = xy + 2^{2md}$. В силу (4.3) $2^{2md} = 1 + (2^{2d} - 1)xy$. Отсюда следует $x^2 + 2^{2d-2}y^2 = xy + 1 + (2^{2d} - 1)xy \Rightarrow x^2 - 2^{2d}xy + 2^{2d-2}y^2 = 1 \Rightarrow$

$$(x - 2^{2d-1}y)^2 - (2^{4d-2} - 2^{2d-2})y^2 = 1. \quad (4.5)$$

Так как $2^{4d-2} - 2^{2d-2} = 2^{2d-2}(2^{2d} - 1)$ не является квадратом в силу п. (ii), то поле $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2^{2d} - 1}]$ суть квадратичное расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Равенство (4.5) означает, что норма числа $z = x - 2^{2d-1}y + y\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}}$, принадлежащего порядку $\mathcal{P} = \langle 1, \sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}} \rangle_{\mathbb{Z}}$ поля F , равна 1. Значит, z – единица (= обратимый элемент) порядка $\mathcal{P}$. В силу известной теоремы Дирихле о строении группы единиц порядков полей алгебраических чисел, примененной к вещественному квадратичному расширению поля $\mathbb{Q}$, $z = \pm \varepsilon^k$, где ε – основная единица порядка $\mathcal{P}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Условие $\varepsilon > 1$ определяет основную единицу однозначно. Найдем ε методом разложения числа $\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}}$ в цепную дробь (см. [8]):

$$\begin{aligned} \sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}} &= 2^{2d-1} - 1 + (\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}} - 2^{2d-1} + 1), \\ \frac{1}{\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}} - 2^{2d-1} + 1} &= 1 + \frac{\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}} - 2^{2d-2}}{2^{2d} - 2^{2d-2} - 1}, \\ \frac{2^{2d} - 2^{2d-1} - 1}{\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}} - 2^{2d-2}} &= 2 + \frac{\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}} - 2^{2d-2}}{2^{2d-2}}, \\ \frac{2^{2d-2}}{\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}} - 2^{2d-2}} &= 1 + \frac{\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}} - 2^{2d-1} + 1}{2^{2d-1} + 2^{2d-2} - 1}. \end{aligned}$$

Одновременно заполняем таблицу, в которой q_s – неполные частные, $\frac{P_s}{Q_s}$ – подходящие дроби. При этом $P_s = q_s P_{s-1} + P_{s-2}$, $Q_s = q_s Q_{s-1} + Q_{s-2}$ и $P_{-1} = 1$,

$Q_{-1} = 0, P_0 = q_0, Q_0 = 1$. Первая встретившаяся в последней строке таблицы ± 1 будет означать, что числитель и знаменатель соответствующей подходящей дроби дают искомую основную единицу $\varepsilon = P_s + Q_s \sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}}$. При этом в нашем случае должна появиться именно 1, так как очевидно, что норма любой единицы в $\mathcal{P}$ сравнима с 1 по модулю 4.

s	0	1	2	3
q_s	$2^{2d-1} - 1$	1	2	1
P_s	$2^{2d-1} - 1$	2^{2d-1}	$2^{2d} + 2^{2d-1} - 1$	$2^{2d+1} - 1$
Q_s	1	1	3	4
$P_s^2 - (2^{4d-2} - 2^{2d-2})Q_s^2$	$-2^{2d} + 2^{2d-2} + 1$	2^{2d-2}	$-2^{2d} + 2^{2d-2} + 1$	1

Так как $d > 1$, то 1 впервые появляется в последней строке таблицы при $s = 3$. Значит, $\varepsilon = 2^{2d+1} - 1 + 4\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}}$ — основная единица порядка $\mathcal{P}$. Легко видеть, что тогда для произвольной единицы $u + v\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}} \in \mathcal{P}$ коэффициент v делится на 4. Следовательно, $z = x - 2^{2d-1}y + y\sqrt{2^{4d-2} - 2^{2d-2}}$ не может быть единицей, так как y нечетно. Противоречие доказывает (iv). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Положим $Q(r, n) = \frac{r(2^n - r)}{2^{2n} - 1}$. В силу теоремы 3 достаточно доказать, что $Q(r, n)$ не является квадратом при ограничениях, наложенных на r и n .

1) Имеем: $Q(1, n) = Q(2^n - 1, n) = \frac{1}{2^n + 1}$ — не квадрат при $n \neq 3$ в силу п. (i) леммы 1.

2) Имеем: $Q(2^m, n) = \frac{2^{2m}(2^{n-m} - 1)}{2^{2n} - 1}$. Положим $n - m = l$ и $d = (l, 2n)$.

Отметим, что $l < n$. Очевидно, $Q(2^m, n)$ — не квадрат $\Leftrightarrow \frac{2^l - 1}{2^{2n} - 1}$ — не квадрат. Рассмотрим два случая.

Случай 1. l нечетно. Имеем $d \mid n$. Положим $n = dn_1, l = dl_1$. Тогда после сокращения на $2^d - 1$ получаем

$$\frac{2^l - 1}{2^{2n} - 1} = \frac{1 + 2^d + \dots + 2^{d(l_1-1)}}{(1 + 2^d + \dots + 2^{d(n_1-1)})(2^n + 1)},$$

где последняя дробь несократима в силу п. (iii) леммы 1 и в ее знаменателе стоят взаимно простые множители, так как $(2^n - 1, 2^n + 1) = 1$. Следовательно, по п. (i) леммы 1 дробь $\frac{2^l - 1}{2^{2n} - 1}$ может быть квадратом только при $n = 3$. Но тогда $2^3 - 1 = 7 \mid (2^l - 1)$, что невозможно, ибо $l < n = 3$.

Случай 2. l четно. Тогда d четно. Положим $d = 2d_1, n = d_1n_1, l = dl_1$. После сокращения на $2^d - 1$ получим

$$\frac{2^l - 1}{2^{2n} - 1} = \frac{1 + 2^{2d_1} + \dots + 2^{2(l_1-1)d_1}}{1 + 2^{2d_1} + \dots + 2^{2(n_1-1)d_1}},$$

где последняя дробь несократима по п. (iii) леммы 1 и, следовательно, не может быть квадратом в силу п. (iv) леммы 1. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Доказательство несуществования сбалансированного H -инвариантного базиса ранга 2^{n-1} в M_{2^n} , $n > 1$, не требует привлечения теоретико-числовых рассуждений и следует из формулы (4.2), так как в этом случае $2r - q = 0$.

2) По-видимому, дробь $\frac{r(2^n - r)}{2^{2n} - 1}$ является квадратом рационального числа только при $n = 3$ и $r = 1$ или 7 . Однако автор пока не располагает доказательством этого утверждения. Также неизвестно, существует ли сбалансированный базис ранга 1 в $M_8(\mathbb{C})$, допускающий регулярную элементарную абелеву 2 -группу автоморфизмов.

§5. Сбалансированные $1-(n+1, r, rn)$ -системы

В [2] доказано, что существует единственная с точностью до сопряженности $1-(n+1, 1, n)$ -система $\mathcal{E}(n)$. При этом $\mathcal{E}(n)$ является фактически $(n+1)-(n+1, 1, n)$ -системой и $\text{Aut } \mathcal{E}(n) \cong S_{n+1}$ — симметрическая группа. Система $\mathcal{E}(n)$ состоит из идемпотентов

$$f_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^t \cdot \left(-\frac{1}{n}, \dots, 1, \dots, -\frac{1}{n} \right) \quad (1 \text{ на } i\text{-й позиции}), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$f_{n+1} = (1, \dots, 1)^t \cdot \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right).$$

Положим $\mathcal{E} \otimes E_r = \{e \otimes E_r : e \in \mathcal{E}\}$.

ТЕОРЕМА 4. В алгебре M_{rn} каждая $1-(n+1, r, rn)$ -система $\mathcal{E}$ сопряжена системе $\mathcal{E}(n) \otimes E_r$. В частности, $\mathcal{E}$ является $(n+1)-(n+1, r, rn)$ -системой, порождающей подалгебру, изоморфную M_n , и $\text{Aut } \mathcal{E} \cong S_{n+1} \times GL(r, \mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ — сбалансированная $1-(n+1, r, rn)$ -система в алгебре M_{rn} . Из условия сбалансированности, применяя к обоим частям функцию Tr , получаем $(n+1)r = krn$. Отсюда находим параметр $k = (n+1)/n$.

Как показано в [2], каждый идемпотент ранга 1 может быть представлен в виде $e_i = X^{(i)}Y_i$, где $X^{(i)}, Y_i$ — матрицы ранга r размеров соответственно $rn \times r$ и $r \times rn$. Такое представление не единственно. Любое другое представление может быть получено из данного единственным образом с помощью подходящей невырожденной $(r \times r)$ -матрицы $T : e_i = X^{(i)}T \cdot T^{-1}Y_i$. Отметим, что

(*) если j -я строка матрицы $X^{(i)}$ ненулевая, то, используя метод исключения Гаусса, можно подобрать матрицу T так, чтобы j -я строка матрицы $X^{(i)}T$ состояла из нулей и одной единицы в любой наперед заданной позиции.

Шаг 1. Положим $X = (X^{(1)} \dots X^{(n+1)})$. Покажем, что ранг матрицы $X(i) = (X^{(1)} \dots \widehat{X^{(i)}} \dots X^{(n+1)})$, полученной из X вычеркиванием $X^{(i)}$, равен rn .

Достаточно рассмотреть случай $i = n+1$. Предположим, что $\text{rank } X(n+1) < rn$. Тогда сопряжением в M_{rn} можно добиться, чтобы последняя строка матриц $X^{(i)}, i = 1, \dots, n$, была нулевой. Далее, последнюю строку матрицы $X^{(n+1)}$, которая в силу условия сбалансированности нулевой быть не может, без ограничения общности в силу (*) можно считать равной $(0, \dots, 0, 1)$. Тогда из условия

сбалансированности

$$\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} Y_i + \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} Y_{n+1} = k E_{rn}$$

следует, что последняя строка матрицы Y_{n+1} равна $(0, \dots, 0, k)$. Так как условие идемпотентности $e_{n+1}^2 = e_{n+1}$ влечет $E_r = Y_{n+1} X^{(n+1)}$, то, приравнявая последние строки матриц E_r и $Y_{n+1} X^{(n+1)}$, получаем $k = 1$. Это противоречит найденному ранее значению $k = (n+1)/n$.

Шаг 2. Так как $\text{rang } X(n+1) = rn$, то, переходя к сопряженной системе $X^{-1}(n+1) \mathcal{E} X(n+1)$, получаем, что без ограничения общности можно считать $X(n+1) = E_{rn}$. Отсюда в силу равенства $Y_i X^{(i)} = E_r$ выводим

$$X^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ E_r \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_i = (A_{i1} \dots A_{ii-1} E_r A_{ii+1} \dots A_{in}), \quad i = 1, \dots, n, \quad A_{ij} \in M_r.$$

Положим

$$X^{(n+1)} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}, \quad Y_{n+1} = (C_1 \dots C_n), \quad B_i, C_i \in M_r.$$

Тогда условие сбалансированности

$$\sum_{i=1}^n X^{(i)} Y_i + X^{(n+1)} Y_{n+1} = \frac{n+1}{n} E_{rn}$$

записывается в виде

$$\begin{pmatrix} E_r & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & E_r & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & E_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \cdot (C_1 \dots C_n) = \frac{n+1}{n} E_{rn}. \quad (5.1)$$

Приравнявая в (5.1) диагональные блоки, получаем: $B_i C_i = \frac{1}{n} E_r$. Для недиагональных блоков имеем: $(A_{ij} + B_i C_j = 0) \Rightarrow \left(A_{ij} = \frac{1}{n} B_i B_j^{-1} \right)$. Сопрягая блочно-диагональной матрицей $T = \text{diag}(B_1^{-1}, \dots, B_n^{-1})$, получаем $T e_i T^{-1} = f_i \otimes E_r$, т.е. $\mathcal{E}$ сопряжена системе $\mathcal{E}(n) \otimes E_r$. Теорема доказана.

Заключение

В заключение отметим два дальнейших направления исследований. Как известно, в комбинаторном анализе широкое изучение получили симметричные блок-схемы, обладающие регулярной группой автоморфизмов. Это то, что называется разностными множествами в группах. Интересен некоммутативный аналог этой тематики.

ПРОБЛЕМА 1. *Классифицировать сбалансированные базисы в некоммутативных алгебрах (в частности, в алгебрах матриц), допускающие регулярную (абелеву) группу автоморфизмов.*

В работе [2] приводится бесконечное семейство попарно несопряженных 2-(6, 1, 3)-систем. Тем не менее автору кажется правдоподобной

ГИПОТЕЗА 1. *В любой алгебре существует не более чем конечное число попарно несопряженных сбалансированных базисов.*

Список литературы

1. *Иванов Д. Н.* Ортогональные разложения ассоциативных алгебр и сбалансированные системы идемпотентов // Матем. сб. 1998. Т. 189. №12. С. 83–102.
2. *Иванов Д. Н.* Сбалансированные системы из примитивных идемпотентов в алгебрах матриц // Матем. сб. 2000. Т. 191. №4. С. 67–90.
3. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
4. *Кострикин А. И., Кострикин И. А., Уфнаровский В. А.* Ортогональные разложения простых алгебр Ли (тип A_n) // Труды МИАН. 1981. Т. 158. С. 105–120.
5. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
6. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. М.: Наука, 1979.
7. *Kostrikin A. I., Pham Huu Tiep.* Orthogonal decompositions and integral lattices. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
8. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1972.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: Dmitry.Ivanov@tversu.ru

Поступила в редакцию
15.03.2000