Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Необходимые и достаточные условия обратимости нелинейного разностного оператора $(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1) - f(x(t))$ в пространстве ограниченных и непрерывных на оси функций, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 4, 87–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm559>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:32:56

УДК 517.9

В. Е. Слюсарчук

**Необходимые и достаточные условия
обратимости нелинейного разностного оператора
($\mathcal{D}x$)(t) = $x(t+1) - f(x(t))$ в пространстве
ограниченных и непрерывных на оси функций**

Получены необходимые и достаточные условия обратимости нелинейного разностного оператора

$$(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1) - f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное отображение, в пространстве ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций.

Библиография: 23 названия.

1. c -Непрерывные отображения. Постановка задачи. Обозначим через $C^0 = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $y = y(t)$ со значениями в $\mathbb{R}$ с нормой $\|y\|_{C^0} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |y(t)|$, а через $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ – банахово пространство отображений $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, множество значений каждого из которых ограничено, с нормой $\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|$.

Последовательность элементов $x_k \in C^0$, $k \in \mathbb{N}$, будем называть *локально сходящейся* к элементу $x \in C^0$ при $k \rightarrow \infty$ и обозначать

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} x \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

если эта последовательность ограничена и для каждого $T > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|t| \leq T} |x_k(t) - x(t)| = 0.$$

Аналогично последовательность элементов $x_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, будем называть *локально сходящейся* к элементу $x \in l_\infty$ при $k \rightarrow \infty$ и обозначать

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} x \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

если эта последовательность ограничена и для каждого $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|n| \leq p} |x_k(n) - x(n)| = 0.$$

Отображение $F: X \rightarrow X$, где $X \in \{C^0, l_\infty\}$, будем называть *c -непрерывным*, если для произвольных $x \in X$ и $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$, для которых $x_k \xrightarrow{\text{лок.}, X} x$ при $k \rightarrow \infty$, вытекает, что $Fx_k \xrightarrow{\text{лок.}, X} Fx$ при $k \rightarrow \infty$.

Понятие s -непрерывного отображения было введено (на языке “ ε, δ ”) Э. Мухамедиевым [1] при исследовании дифференциальных операторов, и было продолжено его изучение в [2]–[9] и других работах. Рассмотренное выше определение s -непрерывного отображения введено автором (см., например, [10], [11]).

Рассмотрим отображения $\mathcal{D}: C^0 \rightarrow C^0$, $\mathcal{S}: l_\infty \rightarrow l_\infty$, определенные равенствами

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}x)(t) &= x(t+1) - f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ (\mathcal{S}y)(n) &= y(n+1) - f(y(n)), \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное отображение, $x \in C^0$ и $y \in l_\infty$. Эти отображения, очевидно, являются непрерывными и s -непрерывными.

Цель статьи – выяснить, когда отображение $\mathcal{D}$ имеет обратное непрерывное отображение.

Очевидно, что в классе нелинейных отображений, действующих в C^0 , отображение $\mathcal{D}$ наиболее простое. Однако решение задачи об обратимости этого отображения вследствие его нелинейности не является тривиальным. Особенно сложным является установление необходимых условий обратимости этого отображения. Известные методы исследования обратимости линейных и слабо нелинейных отображений (см., например, [12]–[18]) неприменимы к $\mathcal{D}$. Для рассматриваемого отображения и аналогичных нелинейных отображений, действующих в других функциональных пространствах, необходимо разрабатывать новые методы исследования. Один из таких методов предложен в этой статье. Он базируется на результатах работы [19] об условиях обратимости рассмотренного выше отображения $\mathcal{S}: l_\infty \rightarrow l_\infty$, на теории s -непрерывных отображений, а также на одном утверждении о существовании для одномерных отображений замкнутых интервалов, меры которых не меньше мер их образов.

2. Формулировка основного результата. Пусть $R(L)$ – множество значений отображения $L: E \rightarrow E$, где E – банахово пространство, и $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – единичное отображение.

Обозначим через $\mathcal{G}_1$ множество отображений $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для каждого из которых $R(g - I) = \mathbb{R}$ и

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|,$$

если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x \neq y$, а через $\mathcal{G}_2$ – множество отображений $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для каждого из которых $R(g - I) = R(g + I) = \mathbb{R}$ и

$$|g(x) - g(y)| > |x - y|,$$

если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x \neq y$.

Очевидно, что для произвольных $g_1 \in \mathcal{G}_1$ и $g_2 \in \mathcal{G}_2$ функции $y_1 = g_1(x) - x$, $y_2 = g_2(x) - x$ являются строго монотонными и непрерывными на $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 1. *Отображение $\mathcal{D}: C^0 \rightarrow C^0$ имеет обратное непрерывное и s -непрерывное отображение тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$.*

Обоснование этой теоремы осуществляется с помощью ряда вспомогательных результатов, приведенных в следующих четырех пунктах.

3. Условия обратимости отображения $\mathcal{S}: l_\infty \rightarrow l_\infty$.

ТЕОРЕМА 2 [19]. *Отображение $\mathcal{S}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет обратное непрерывное и s -непрерывное отображение тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$.*

Заметим, что, несмотря на аналогию теорем 1 и 2, первое из утверждений, как будет видно из дальнейшего, не является прямым следствием второго утверждения.

4. Ограниченность s -непрерывных отображений, действующих в l_∞ .

Напомним, что отображение $F: l_\infty \rightarrow l_\infty$ называется ограниченным, если ограничено множество его значений на каждом ограниченном множестве. В общем случае для нелинейных операторов ни ограниченность не вытекает из непрерывности (см., например, [20; §1.5]), ни непрерывность не вытекает из ограниченности. Однако для s -непрерывных отображений первое из утверждений является ложным.

ТЕОРЕМА 3. *Каждое s -непрерывное отображение $F: l_\infty \rightarrow l_\infty$ является ограниченным отображением.*

Это свойство s -непрерывных отображений устанавливается с помощью следующего утверждения.

ЛЕММА [19]. *Для каждой ограниченной последовательности элементов $x_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, можно найти такие строго возрастающую последовательность чисел $k_l \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, и элемент $x \in l_\infty$, что*

$$x_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} x \quad \text{при} \quad l \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность элементов $h_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что последовательность Fh_k , $k \in \mathbb{N}$, ограничена. Предположим противное. Не ограничивая общности, можно считать, что для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\|Fh_k\|_{l_\infty} \geq k. \quad (1)$$

Из ограниченности множества $\{h_k : k \in \mathbb{N}\}$ на основании леммы следует, что найдутся такие строго возрастающая последовательность чисел $k_l \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, и элемент $h \in l_\infty$, что

$$h_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} h \quad \text{при} \quad l \rightarrow \infty.$$

Тогда на основании s -непрерывности отображения F

$$Fh_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} Fh \quad \text{при} \quad l \rightarrow \infty.$$

Последнее соотношение противоречит (1), поскольку локально сходящаяся последовательность Fh_{k_l} , $l \in \mathbb{N}$, ограничена.

Теорема 3 доказана.

5. Условия равномерных непрерывности и s -непрерывности на ограниченных множествах обратного отображения. s -Непрерывное отображение $F: l_\infty \rightarrow l_\infty$ называется *равномерно s -непрерывным* на множестве $M \subset l_\infty$, если для произвольных локально сходящейся к нулю последовательности $y_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, и $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|n| \leq p} \sup_{x \in M} |(F(x + y_k))(n) - (Fx)(n)| = 0.$$

Рассмотрим отображение $T_m: l_\infty \rightarrow l_\infty$ ($m \in \mathbb{Z}$), определенное равенством

$$(T_m x)(n) = x(n + m),$$

где $x \in l_\infty$. Отображение $F: l_\infty \rightarrow l_\infty$ называется *автономным*, если

$$T_m F T_{-m} = F$$

для всех $m \in \mathbb{Z}$.

Примером автономного отображения является рассмотренное выше отображение $\mathcal{S}: l_\infty \rightarrow l_\infty$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть автономное s -непрерывное отображение $F: l_\infty \rightarrow l_\infty$ имеет обратное непрерывное и s -непрерывное отображение F^{-1} . Тогда отображение F^{-1} является равномерно непрерывным и равномерно s -непрерывным отображением на каждом ограниченном множестве $M \subset l_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что отображение F^{-1} не является равномерно непрерывным или равномерно s -непрерывным на некотором ограниченном множестве $M \subset l_\infty$. Тогда в силу автономности отображения F найдутся последовательности элементов $x_k \in M$, $y_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, и число $\delta > 0$, для которых

$$|(F^{-1}(x_k + y_k))(0) - (F^{-1}x_k)(0)| \geq \delta \quad (2)$$

для каждого $k \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$$

или

$$y_k \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

На основании теоремы 3, s -непрерывности отображения F^{-1} и ограниченности последовательностей x_k и $x_k + y_k$, $k \in \mathbb{N}$, ограниченными являются и последовательности $F^{-1}(x_k + y_k)$ и $F^{-1}x_k$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому согласно лемме найдутся такие элементы $x, z_1, z_2 \in l_\infty$, что

$$x_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} x \text{ и } x_{k_l} + y_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} x \text{ при } l \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$F^{-1}(x_{k_l} + y_{k_l}) \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} z_1 \text{ при } l \rightarrow \infty \quad (4)$$

и

$$F^{-1}x_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} z_2 \text{ при } l \rightarrow \infty \quad (5)$$

для некоторой строго возрастающей последовательности $k_l \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$. Из соотношений (3)–(5) и s -непрерывности отображений F и F^{-1} вытекает, что

$$Fz_1 = x \quad \text{и} \quad Fz_2 = x.$$

Эти равенства противоречат обратимости отображения F , поскольку на основании (2) $\|z_1 - z_2\|_{l_\infty} \geq \delta$.

Итак, предположение о том, что отображение F^{-1} не является равномерно непрерывным или равномерно s -непрерывным на некотором ограниченном множестве $M \subset l_\infty$, ложно.

Теорема 4 доказана.

6. Условия существования для одномерного отображения замкнутого интервала, мера которого не меньше меры его образа.

ТЕОРЕМА 5. Пусть:

- 1) $g(x)$ – непрерывная на $\mathbb{R}$ функция со значениями в $\mathbb{R}$;
- 2) $g(x) - x$ – строго убывающая на $\mathbb{R}$ функция;
- 3) для чисел $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ ($x^* < y^*$) имеет место равенство

$$g(x^*) - g(y^*) = y^* - x^*. \quad (6)$$

Тогда найдутся отрезок $[a, b] \subset [x^*, y^*]$ и числа $c \in \mathbb{R}$, $u, v \in [a, b]$ ($u \neq v$) такие, что

$$\{g(x) + c : x \in [a, b]\} \subset [a, b] \quad (7)$$

и

$$g(u) + c = v, \quad (8)$$

$$g(v) + c = u. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множества

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(x), x^* \leq x \leq y^*\}$$

и

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^* \leq x \leq y^*, g(x^*) \geq y \geq g(y^*)\}$$

(согласно (6) множество $\mathcal{K}$ является квадратом).

Если $\mathcal{G} \setminus \mathcal{K} = \emptyset$, то соотношения (7), (8) и (9) выполняются при $c = x^* - g(y^*)$, $u = x^*$ и $v = y^*$.

Пусть $\mathcal{G} \setminus \mathcal{K} \neq \emptyset$. Тогда

$$\max_{x^* \leq x \leq y^*} g(x) > y^* \quad (10)$$

или

$$\min_{x^* \leq x \leq y^*} g(x) < x^*. \quad (11)$$

Рассмотрим случай выполнения соотношения (10). Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\min_{x^* \leq x \leq y^*} g(x) = x^*.$$

Положим

$$M = \max_{x^* \leq x \leq y^*} g(x),$$

$$\omega = \min\{x : x \in [x^*, y^*], g(x) = M\}$$

и рассмотрим функцию

$$k(x) = g(\omega) - (x - x^*).$$

Функции $k(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[x^*, y^*]$ и

$$\begin{aligned} k(x^*) - g(x^*) &= g(\omega) - g(x^*) > 0, \\ k(\omega) - g(\omega) &= g(\omega) - (\omega - x^*) - g(\omega) = x^* - \omega < 0, \\ k(y^*) - g(y^*) &= g(\omega) - (y^* - x^*) - g(y^*) = g(\omega) - y^* > 0. \end{aligned}$$

Поэтому на основании теоремы Больцано–Коши [21] найдутся такие точки $x^{**} \in (x^*, \omega)$ и $y^{**} \in (\omega, y^*)$, что

$$k(x^{**}) = g(x^{**}), \quad (12)$$

$$k(y^{**}) = g(y^{**}), \quad (13)$$

причем

$$g(x) > k(x) \quad (14)$$

для всех $x \in (x^{**}, y^{**})$. Выполняется также соотношение

$$\begin{aligned} &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(x), x^* \leq x \leq \omega\} \\ &\subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x^*) + (x - x^*) \geq y \geq g(\omega) + (x - \omega), x^* \leq x \leq \omega\} \end{aligned}$$

вследствие условия 2) теоремы. Поэтому для всех $x \in [x^*, y^{**}]$

$$g(y^{**}) \leq g(x) \leq M,$$

т.е.

$$g(\omega) - (y^{**} - x^*) \leq g(x) \leq g(\omega).$$

Следовательно, для всех $x \in [x^*, y^{**}]$

$$x^* \leq g(x) + c \leq y^{**}, \quad (15)$$

где

$$c = y^{**} - g(\omega).$$

Таким образом, соотношение (7) выполняется при $a = x^*$, $b = y^{**}$ и $c = y^{**} - g(\omega)$.

Теперь докажем выполнение соотношений (8) и (9). Легко проверить, используя (12), (13) и (14), что непрерывная на $[x^{**}, \omega]$ функция $G(x) = g(x) + c$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} G(G(\omega)) &= G(b) = a < \omega, \\ G(G(x^{**})) &= G(b - (x^{**} - a)) > x^{**}. \end{aligned}$$

Поэтому на основании теоремы Больцано–Коши найдется точка $u \in (x^{**}, \omega)$, для которой

$$G(G(u)) = u. \quad (16)$$

Рассмотрим число $v = G(u)$. Имеют место включение $v \in [a, b]$ (согласно (15)) и равенство $G(v) = u$ (согласно (16)), причем $u \neq v$, поскольку $G(u) > u$ (согласно неравенству $g(\omega) + c > \omega$ и условию 2) теоремы).

Итак, соотношения (8) и (9) выполняются.

Таким образом, утверждение теоремы в случае выполнения соотношения (10) доказано.

Случай выполнения соотношения (11) сводится к рассмотренному случаю переходом от функции $g(x)$ к функции $-g(-x)$.

Теорема 5 доказана.

7. Доказательство теоремы 1. Достаточность. Пусть $f \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$. Фиксируем произвольный элемент $h \in C^0$. Покажем, что разностное уравнение

$$z(t+1) - f(z(t)) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

имеет единственное решение в C^0 (тогда в силу произвольности $h \in C^0$ отображение $\mathcal{D}: C^0 \rightarrow C^0$ будет иметь обратное отображение). Обозначим через $\mathcal{M}$ векторное пространство всех ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $x = x(t)$ со значениями в $\mathbb{R}$. Рассмотрим определенное на $\mathcal{M}$ отображение, которое каждой функции $x = x(t)$ ставит в соответствие функцию $x(t+1) - f(x(t))$. Это отображение обозначим через $\widehat{\mathcal{D}}$. Очевидно, что сужение $\widehat{\mathcal{D}}$ на C^0 совпадает с $\mathcal{D}$. Каждому $x \in \mathcal{M}$ поставим в соответствие элементы $x_s \in l_\infty$, $s \in [0, 1)$, определенные равенствами

$$x_s = x_s(n) = x(n+s), \quad n \in \mathbb{N}, \quad s \in [0, 1).$$

Очевидно, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $s \in [0, 1)$

$$(\widehat{\mathcal{D}}x)(n+s) = x(n+s+1) - f(x(n+s)) = x_s(n+1) - f(x_s(n)) = (\mathcal{S}x_s)(n).$$

Рассмотрим уравнение

$$(\widehat{\mathcal{D}}y)(t) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

На основании равенств

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{D}}y)(n+s) &= (\mathcal{S}y_s)(n) = h_s(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad s \in [0, 1), \\ h_s(n) &= h(n+s), \quad n \in \mathbb{N}, \quad s \in [0, 1), \end{aligned}$$

и обратимости отображения $\mathcal{S}: l_\infty \rightarrow l_\infty$ (согласно теореме 2 и включению $f \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$) имеет место соотношение

$$y_s(n) = (\mathcal{S}^{-1}h_s)(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad s \in [0, 1).$$

Отсюда вытекает, что уравнение (18) имеет решение, которое представляется в виде

$$y(t) = (\mathcal{S}^{-1}h_{\{t\}})([t]), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

где $[t]$ и $\{t\}$ – соответственно целая и дробная части числа t . На основании теоремы 3, s -непрерывности отображения $\mathcal{S}^{-1}$ (согласно теореме 2) и ограниченности функции $h = h(t)$ на $\mathbb{R}$ имеет место включение $y \in \mathcal{M}$. Покажем, что функция $y = y(t)$ непрерывна в каждой точке $t_0 \in \mathbb{R}$. Это свойство функции $y = y(t)$ вытекает из (19) и s -непрерывности отображения $\mathcal{S}^{-1}$. Действительно, если $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, то из непрерывности функции $h = h(t)$ на $\mathbb{R}$ следует, что

$$h_{\{t\}} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} h_{\{t_0\}} \quad \text{при } t \rightarrow t_0.$$

Поэтому на основании s -непрерывности отображения $\mathcal{S}^{-1}$ имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathcal{S}^{-1}h_{\{t\}})([t]) = (\mathcal{S}^{-1}h_{\{t_0\}})([t_0]),$$

т.е. функция $y = y(t)$ непрерывна в точке t_0 . Если $t_0 \in \mathbb{Z}$, то на основании непрерывности функции $y = y(t)$ на $\mathbb{Z}$

$$h_{\{t\}} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} h_0 \quad \text{при } t \rightarrow t_0 + 0$$

и

$$h_{\{t\}} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} z \quad \text{при } t \rightarrow t_0 - 0,$$

где z – элемент пространства l_∞ , для которого $z(n) = h(n+1)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому на основании s -непрерывности отображения $\mathcal{S}^{-1}$ выполняются равенства

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} (\mathcal{S}^{-1}h_{\{t\}})([t]) = (\mathcal{S}^{-1}h_0)([t_0])$$

и

$$\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} (\mathcal{S}^{-1}h_{\{t\}})([t]) = (\mathcal{S}^{-1}z)([t_0] - 1).$$

Заметим, что

$$(\mathcal{S}^{-1}h_0)(n) \equiv (\mathcal{S}^{-1}z)(n-1). \quad (20)$$

Действительно,

$$(\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}h_0)(n) = h_0(n) = h(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

и

$$(\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}z)(n) = z(n) = h(n+1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

т.е.

$$(\mathcal{S}^{-1}h_0)(n+1) - f((\mathcal{S}^{-1}h_0)(n)) = h(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

и

$$(\mathcal{S}^{-1}z)(n) - f((\mathcal{S}^{-1}z)(n-1)) = h(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда и из обратимости отображения $\mathcal{S}$ вытекает (20). Поэтому

$$(\mathcal{S}^{-1}h_0)([t_0]) = (\mathcal{S}^{-1}z)([t_0] - 1),$$

если $t_0 \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, функция $y = y(t)$ непрерывна и на множестве $\mathbb{Z}$.

Следовательно, уравнение (18) для каждой функции $h \in C^0$ имеет решение $y \in C^0$. Это решение единственное, поскольку отображение $\mathcal{S}$ имеет обратное отображение. Поэтому отображение $\mathcal{D}: C^0 \rightarrow C^0$ имеет обратное отображение $\mathcal{D}^{-1}$. Отображение $\mathcal{D}^{-1}$ непрерывно и s -непрерывно в силу равномерной непрерывности и равномерной s -непрерывности на ограниченных множествах отображения $\mathcal{S}^{-1}$ (на основании теоремы 4) и равенства (19).

Таким образом, отображение $\mathcal{D}: C^0 \rightarrow C^0$ имеет обратное непрерывное и s -непрерывное отображение, если $f \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$.

Необходимость. Пусть отображение $\mathcal{D}$ имеет непрерывное и s -непрерывное обратное отображение. Тогда для каждого $h \in C^0$ уравнение (17) имеет единственное в пространстве C^0 решение. Положим в уравнении (17) $h(t) = d$, где d — произвольное вещественное число, и пусть $y(t)$ — решение этого уравнения. Для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ функция $y(t + \tau)$, очевидно, также является решением уравнения (17) и в силу единственности $y(t + \tau) = y(t)$, т.е. $y(t) = y = \text{const}$, откуда $y - f(y) = d$. Отсюда и из обратимости отображения $\mathcal{D}$ следует, что уравнение

$$x - f(x) = d$$

для каждого $d \in \mathbb{R}$ имеет единственное решение $y \in \mathbb{R}$. На основании этого и произвольности $d \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $R(I - f) = \mathbb{R}$, а отображение $I - f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является обратимым. Из непрерывности отображения $(I - f)^{-1}$ (на основании непрерывности отображения $\mathcal{D}^{-1}$) вытекает, что функция $x - f(x)$ имеет обратную функцию. Следовательно, функция $x - f(x)$ является строго монотонной на $\mathbb{R}$.

Докажем, что выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \quad (21)$$

если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x \neq y$, или неравенство

$$|f(x) - f(y)| > |x - y| \quad (22)$$

для тех же x и y .

Предположим, что ни одно из этих неравенств не выполняется. В этом случае на основании непрерывности отображения f найдутся такие точки $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ ($x^* < y^*$), что

$$f(x^*) - f(y^*) = x^* - y^* \quad (23)$$

или

$$f(x^*) - f(y^*) = y^* - x^* \quad (24)$$

(в втором случае функция $f(x) - x$ будет строго убывающей на $\mathbb{R}$).

Равенство (23), очевидно, противоречит обратимости отображения $I - f$.

Равенство (24) противоречит s -непрерывности отображения $\mathcal{D}^{-1}$. Действительно, в силу (24) и теоремы 5 найдутся отрезок $[a, b] \subset [x^*, y^*]$ и числа $c \in \mathbb{R}$, $u, v \in [a, b]$ ($u \neq v$) такие, что

$$\{f(x) + c : x \in [a, b]\} \subset [a, b] \quad (25)$$

и

$$f(u) + c = v, \quad (26)$$

$$f(v) + c = u. \quad (27)$$

На основании соотношения (25) и теоремы Брауэра о неподвижной точке [22] найдется точка $z^* \in [a, b]$ такая, что

$$f(z^*) + c = z^*.$$

Рассмотрим разностное уравнение

$$x(t+1) = f(x(t)) + c + h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

где $h = h(t)$ – произвольная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, носитель которой содержится в $[0, \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < 1$) и $R(h) = [a - z^*, b - z^*]$. Определим решение этого уравнения, сужение которого на интервал $(-\infty, 1]$ совпадает с z^* . Из ограничений на $h(t)$ вытекает, что это решение имеет вид

$$y(t) = \begin{cases} z(t), & \text{если } t \in \Gamma, \\ z^*, & \text{если } t \in \mathbb{R} \setminus \Gamma, \end{cases}$$

где

$$\Gamma = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{t : k \leq t \leq k + \varepsilon\}$$

и $z(t)$ – такая функция, что ее множество значений содержится в $[a, b]$ и для некоторых чисел $t_1, t_2 \in (1, 1 + \varepsilon)$ выполняются соотношения

$$z(t_1 + 2k) = u, \quad (29)$$

$$z(t_2 + 2k) = v \quad (30)$$

для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Выделенные свойства решения $y(t)$ уравнения (28) легко проверяются методом шагов с использованием соотношений (25), (26) и (27).

Заметим, что на основании обратимости отображения $\mathcal{D}$ функция $y(t)$ является единственным решением уравнения (28).

Рассмотрим последовательность функций $h_k(t) = h(t+k)$, $y_k(t) = y(t+n) \in C^0$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что

$$h_k \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \\ \mathcal{D}^{-1}c = z^*, \quad \mathcal{D}^{-1}(c + h_k) = y_k$$

и согласно (29) и (30) последовательность $y_k(t)$, $k \geq 1$, локально не стремится к z^* при $k \rightarrow \infty$, что противоречит s -непрерывности отображения $\mathcal{D}^{-1}$.

Следовательно, предположение, что ни одно из соотношений (21) и (22) не выполняется, является ложным.

Таким образом, неравенство (21) или (22) выполняется. Отсюда вытекает, что на основании строгой монотонности функции $x - f(x)$ на $\mathbb{R}$ и равенства $R(I - f) = \mathbb{R}$ имеет место включение $f \in \mathcal{G}_1$, если для f выполняется неравенство (21). Если же выполняется неравенство (22), то или функция $f(x) - x$ строго возрастает на $\mathbb{R}$ и тогда, очевидно, выполняется соотношение

$$\{g(x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}, \quad (31)$$

где $g(x) = x + f(x)$, или функция $g(x)$ строго убывает на $\mathbb{R}$. Во втором случае также выполняется соотношение (31). Действительно, согласно обратимости отображения $\mathcal{D}$ разностное уравнение

$$x(t+1) + x(t) - g(x(t)) = h(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

имеет единственное 2-периодическое решение $x = x(t) \in C^0$ для каждой 2-периодической функции $h = h(t) \in C^0$, для которой

$$h(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n - \text{четное число,} \\ \gamma, & \text{если } n - \text{нечетное число} \end{cases}$$

(здесь γ — произвольное вещественное число). Поэтому

$$x(n+2) = x(n) - g(x(n)) + g(-x(n) + g(x(n))) + \gamma$$

для всех четных n и, следовательно,

$$-g(z) + g(-z + g(z)) + \gamma = 0$$

для некоторого $z \in \mathbb{R}$, если учесть, что $x(n+2) = x(n)$ для всех четных n . Отсюда и из произвольности $\gamma \in \mathbb{R}$ получаем, что

$$\{-g(x) + g(-x + g(x)) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}. \quad (32)$$

Поскольку функции $-g(x)$, $g(-x + g(x))$ являются непрерывными и строго возрастающими на $\mathbb{R}$ и $\{-x + g(x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$, то из (32) вытекает, что выполняется соотношение (31).

Таким образом, $f \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$.

Теорема 1 доказана.

В заключение отметим, что полученные в данной статье результаты могут найти применение в исследовании липшицевой обратимости отображения $\mathcal{D}: C^0 \rightarrow C^0$ (для отображения $\mathcal{S}$ условия липшицевой обратимости в пространствах l_p , $1 \leq p \leq \infty$, приведены в [23]).

Список литературы

1. Мухамадиев Э. Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Матем. заметки. 1972. Т. 11. №3. С. 269–274.
2. Мухамадиев Э. Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. Душанбе, 1978.
3. Слюсарчук В.Е. Обратимость почти периодических s -непрерывных функциональных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 116 (158). №4. С. 483–501.
4. Слюсарчук В.Е. Интегральное представление s -непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. 1981. №8. С. 34–37.
5. Слюсарчук В.Е. Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). №1. С. 86–104.
6. Слюсарчук В.Е. Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1987. Т. 42. №2. С. 262–267.
7. Слюсарчук В.Е. Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно s -непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. матем. журн. 1989. Т. 41. №2. С. 201–205.
8. Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1990.
9. Чан Хью Бонг. Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. Киев, 1993.
10. Слюсарчук В.Е. Метод s -непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений. Душанбе, 1987. С. 102–103.
11. Слюсарчук В.Е. Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Матем. физика и нелинейная мех. 1991. №15 (49). С. 32–35.
12. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
13. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев: Наукова думка, 1972.
14. Дороговцев А.Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. Киев: Вища школа, 1992.
15. Coffman C. V., Schäffer J. J. Dichotomies for linear difference equations // Math. Ann. 1967. V. 172. P. 139–166.
16. Слюсарчук В.Е. Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на $\mathbb{Z}$ функций // Матем. заметки. 1985. Т. 37. №5. С. 662–666.
17. Слюсарчук В.Е. Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. матем. журн. 1987. Т. 39. №5. С. 660–662.
18. Баскаков А.Г. Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №6. С. 816–827.
19. Слюсарчук В.Е. Необхідні і достатні умови оборотності нелінійних різницевих відображень у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ // Матем. студії. Праці Львівського матем. товариства. 2000. Т. 13. №1. С. 63–73.
20. Трубников Ю.В., Перов А.И. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск: Наука и техника, 1986.
21. Физтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1966.
22. Постников М.М. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
23. Слюсарчук В.Е. Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейных разностных операторов в пространствах $l_p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ // Матем. заметки. 2000. Т. 68. №3. С. 448–454.