Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Фурсиков, Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 4, 115–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 02:17:29

УДК 517.977.1

А. В. Фурсиков

**Стабилизируемость квазилинейного
параболического уравнения с помощью
граничного управления с обратной связью**

Задача о стабилизируемости с границы $\partial\Omega$ параболического уравнения, заданного в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, заключается в выборе такого граничного условия (управления), чтобы решение полученной смешанной краевой задачи стремилось при $t \rightarrow \infty$ к заданному стационарному решению с предписанной скоростью $\exp(-\sigma_0 t)$. При этом требуется, чтобы управление было с обратной связью, т.е. чтобы оно реагировало на непредусмотренные флуктуации системы, подавляя результаты их воздействия на стабилизируемое решение.

В работе предлагается новая математическая формализация понятия обратной связи, и с его помощью решается задача о стабилизируемости линейного, а также квазилинейного параболического уравнения посредством управления с обратной связью, заданного на части границы.

Библиография: 21 название.

§ 1. Введение

В последние годы был достигнут прогресс в исследовании проблемы точной управляемости полулинейных параболических уравнений и системы Навье–Стокса, заданных в ограниченной области, с помощью управления, определенного на границе этой области (см. [1] и цитированную там литературу). А именно, была построена теория существования решения для этих задач. Следует отметить, что задача точной управляемости является по существу некорректной задачей и поэтому доказательство разрешимости этих задач никак не снимает проблемы о возможности построения устойчивых численных алгоритмов для ее решения. В значительной степени это происходит потому, что методы доказательства разрешимости задачи точной управляемости на отрезке времени $[0, T]$ при построении требуемого управления даже на отрезке $[0, t]$ с малым $t < T$ используют информацию о задаче на всем временном интервале $(0, T)$. Поэтому любая флуктуация в задаче, возникающая во время ее реализации и не предусмотренная заранее, делает невозможной или чрезвычайно трудной численную реализацию методов такого типа. Так как в реальных физических процессах возникновение непредусмотренных флуктуаций неизбежно, очевидна необходимость разработки методов построения управлений, способных реагировать на непредусмотренные возмущения и подавлять их. Управления такого типа называются *управлениями с обратной связью*. При наложении на управление такого жесткого требования естественно ослабить условие о достижимости фазовой функцией $y(t, \cdot)$ заданного состояния y_1 в момент

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 00-01-00415, 00-15-96109).

времени T , составляющее содержание задачи точной управляемости. Вместо этого требуют, чтобы

$$\|y(t, \cdot) - y_1\| \leq ce^{-\sigma_0 t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

где $\sigma_0 > 0$ – некоторое заданное число, а $\|\cdot\|$ – норма в соответствующем фазовом пространстве. Задача такого типа называется задачей о стабилизации фазовой функции $y(t, \cdot)$ в окрестности y_1 . При этом фазовая функция $y(t, \cdot)$ является решением уравнения в частных производных

$$P(\partial_t, D_x)(y)(t, x) = f(t, x), \quad t \in (0, \infty), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

в ограниченной области Ω для положительных времен t . Предполагается, что на границе $\partial\Omega$ области Ω задано управление

$$y(t, x') = u(t, x'), \quad x' \in \partial\Omega, \quad (1.3)$$

а при $t = 0$ задано начальное условие

$$y(t, x)|_{t=0} = y_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.4)$$

Итак, задача стабилизируемости уравнения (1.2) с начальным условием (1.4) около y_1 состоит в построении такого управления u на границе $\partial\Omega$, чтобы решение задачи (1.1)–(1.4) удовлетворяло условию (1.1). При этом важное дополнительное условие состоит в том, чтобы управление было с обратной связью. Обычно это означает, что при каждом t управление $u(t, \cdot)$ определяется по формуле

$$u(t, \cdot) = \mathcal{R}(y(t, \cdot)), \quad (1.5)$$

где $\mathcal{R}$ – некоторое отображение, не зависящее явно от t . Отображение $\mathcal{R}$ обычно называют *законом обратной связи*.

Вопрос о стабилизируемости различных эволюционных уравнений в частных производных с помощью граничного управления с обратной связью исследовался многими авторами (см., например, J.-L. Lions [2], J. Lagnese [3], V. Komornik [4], J.-M. Coron [5], A. Balogh, M. Krstik [6] и цитированную там литературу)¹. Обычно в случае граничного управления закон (1.5) обратной связи записывается в виде:

$$u(t, \cdot) = B(\partial_t y, D_x y)|_{\partial\Omega} + y|_{\partial\Omega}, \quad (1.6)$$

где $B(\alpha, p)$ – линейная или нелинейная функция конечного числа переменных. Подставляя (1.6) в (1.3), получим

$$B(\partial_t y, D_x y)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.7)$$

и тем самым задача стабилизируемости сводится к правильному выбору краевых условий (1.7) и к решению краевой задачи (1.2), (1.7), (1.4).

Закон обратной связи, который предлагается в настоящей работе, не укладывается в рамки (1.5). Идея предлагаемого метода стабилизации изложена на простом примере ниже, в §2 и в п. 4.4, и поэтому здесь не обсуждается. Отметим лишь, что предлагаемый здесь метод позволяет провести стабилизацию вида (1.1) с любой

¹Здесь мы, очевидно, никак не претендуем на полноту ссылок.

наперед заданной скоростью $\sigma_0 > 0$. Он применяется в этой работе к стабилизации общих линейных и квазилинейных параболических уравнений. При этом стабилизация уравнения сводится к решению смешанной краевой задачи для этого уравнения в некотором расширении области Ω .

§ 2. Идея метода

2.1. Постановка задачи. В этом параграфе мы изложим идею метода решения задачи стабилизации с заданной скоростью с помощью граничного управления с обратной связью. Для этого мы рассмотрим простейшее уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

заданное при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $t > 0$, с начальным условием

$$y(t, x)|_{t=0} = y_0(x), \quad (2.2)$$

где $y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$.

Пусть задано положительное число σ_0 . Задача стабилизируемости эволюционной системы (2.1), (2.2) с заданной скоростью σ_0 с помощью граничного управления состоит в следующем. Требуется построить такое граничное управление $u_-(t)$, $u_+(t)$, чтобы решение $y(t, \cdot)$ задачи (1.1), (1.2), снабженной граничными условиями

$$y(t, x)|_{x=-\pi/2} = u_-(t), \quad y(t, x)|_{x=\pi/2} = u_+(t), \quad (2.3)$$

стремилось к нулю при $t \rightarrow \infty$ следующим образом:

$$\|y(t, \cdot)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \leq c e^{-\sigma_0 t}. \quad (2.4)$$

Здесь константа $c > 0$ зависит от начального условия y_0 и числа σ_0 . Отметим, что мы взяли L_2 -норму в (2.4) исключительно ради простоты изложения. Можно было бы рассматривать задачу стабилизируемости в других нормах, например, в нормах пространств Соболева или Гёльдера. Именно такие нормы будут использованы в следующих параграфах.

Центральным условием, которому должно удовлетворять искомое управление $u_{\pm}(t) = (u_-(t), u_+(t))$, является требование, чтобы $u_{\pm}(t)$ было управлением с обратной связью. Ниже мы заменим общепринятую математическую формализацию (1.5) понятия обратной связи другим, которое по нашему мнению удобнее в случае параболических уравнений.

2.2. Метод стабилизации. Идея метода стабилизации состоит в следующем: мы расширим задачу (2.1)–(2.3) с прямоугольника $Q = \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times (-\pi/2, \pi/2)\}$ на цилиндр $\Pi = \mathbb{R}_+ \times S$, где S – это окружность, т.е. отрезок $(-\pi, \pi)$ с отождествленными концами $-\pi$ и π . При этом мы временно отбросим условие (2.3). Другими словами, мы будем рассматривать уравнение (2.1) при $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$ с периодическими краевыми условиями

$$\frac{\partial z(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2} = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

$$z(t, x + 2\pi) = z(t, x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Снабдим систему (2.5), (2.6) начальным условием

$$z(t, x)|_{t=0} = z_0(x) \quad (2.7)$$

и решим задачу (2.5)–(2.7) методом Фурье. В результате получим, что

$$z(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{z}_0(k) e^{-k^2 t} e^{ikx}, \quad (2.8)$$

где

$$\widehat{z}_0(k) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} z_0(x) dx \quad (2.9)$$

— коэффициенты Фурье функции $z_0(x)$. Очевидно, что если

$$\widehat{z}_0(k) = 0 \quad \text{при} \quad |k| < \sqrt{\sigma_0}, \quad (2.10)$$

то решение (2.8) задачи (2.5)–(2.7) удовлетворяет неравенству

$$\|z(t, \cdot)\|_{L_2(-\pi, \pi)} \leq c e^{-\sigma_0 t}. \quad (2.11)$$

Пусть $\gamma_{(-\pi/2, \pi/2)}$ — это оператор сужения функции $z(x)$, $x \in \mathbb{R}$, на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$, а $\gamma_{-\pi/2}$, $\gamma_{\pi/2}$ — операторы сужения функции $z(x)$ соответственно при $x = -\pi/2$ и $x = \pi/2$. Определим оператор $\mathcal{R}$ обратной связи соотношением

$$(y(t, \cdot), u_{\pm}(t)) = \mathcal{R}z(t, \cdot), \quad \text{где} \quad \mathcal{R} = (\gamma_{(-\pi/2, \pi/2)}, \gamma_{-\pi/2}, \gamma_{\pi/2}). \quad (2.12)$$

Очевидно, из (2.11), (2.12) следует (2.4).

Таким образом, центральный шаг предлагаемого метода стабилизации состоит в построении такого оператора продолжения

$$E: L_2(-\pi/2, \pi/2) \rightarrow L_2(-\pi, \pi), \quad (\gamma_{(-\pi/2, \pi/2)} Ly)(x) \equiv y(x), \quad (2.13)$$

преобразующего начальное условие $y_0(x)$ из (2.7) в начальное условие $z_0(x)$ из (2.7): $z_0 = Ey_0$, что коэффициенты Фурье $\widehat{z}_0(k)$ функции $z_0 = Ey_0$ удовлетворяют (2.10).

ЛЕММА 2.1. *Для любого $\sigma > 0$ существует оператор продолжения (2.13) такой, что при любом $y_0(x) \in L_2(-\pi/2, \pi/2)$*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} (Ey_0)(x) dx = 0 \quad \forall k: |k| < \sqrt{\sigma_0}. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим оператор (2.13) формулой

$$Ey_0(x) = \begin{cases} y_0(x), & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ z(x), & x \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi), \end{cases} \quad (2.15)$$

где функция $z(x)$ подлежит определению. В силу (2.14) $z(x)$ должна удовлетворять системе уравнений

$$\int_{(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)} e^{-ikx} z(x) dx = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ikx} y_0(x) dx \equiv -2\pi \hat{y}_0(k). \quad (2.16)$$

Будем искать $z(x)$ в виде

$$z(x) = \sum_{|j| < \sqrt{\sigma_0}} \hat{z}(j) e^{ijx}. \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.16), получим систему уравнений для определения $\hat{z}(j)$:

$$\sum_{-\sqrt{\sigma_0} < j < \sqrt{\sigma_0}} a_{kj} \hat{z}(j) = -2\pi \hat{y}_0(k), \quad -\sqrt{\sigma} < k < \sqrt{\sigma}, \quad (2.18)$$

где $\hat{y}_0(k)$ определено в (2.16), а коэффициенты a_{jk} определяются соотношениями

$$a_{kj} = \int_{(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)} e^{i(j-k)x} dx. \quad (2.19)$$

Матрица $A = \|a_{kj}\|$ положительно определена. Действительно, если

$$\Phi = \{\hat{\varphi}_k, -\sqrt{\sigma_0} < k < \sqrt{\sigma_0}\} \text{ и } \varphi(x) = \sum_k \hat{\varphi}_k e^{ikx},$$

то в силу (2.19)

$$(A\Phi, \Phi) = \sum_{k,j} a_{kj} \hat{\varphi}_j \bar{\hat{\varphi}}_k = \int_{(-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)} |\varphi(x)|^2 dx \geq 0. \quad (2.20)$$

Если при некотором Φ в (2.20) достигается равенство, то

$$\varphi(x) = \sum \hat{\varphi}_k e^{ikx} \equiv 0 \text{ и, значит, } \varphi_k = 0 \quad \forall k.$$

(Последнее утверждение является простым следствием теоремы 4.1, доказанной ниже.) Следовательно, $\det \|a_{kj}\| \neq 0$ и поэтому система (2.18) и формула (2.17) однозначно определяют оператор (2.15), удовлетворяющий всем условиям леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Формула (2.12), очевидно, предлагает более широкое понимание обратной связи по сравнению с формулой (1.5). Ниже (см. п. 4.4) мы покажем, что расширение понимания (2.12) обратной связи вполне согласуется с “физическими представлениями” об обратной связи, согласно которым любые нежелательные флуктуации фазовой функции, возникающие из-за непредвиденных внешних воздействий, сразу приводят к изменению управления, за счет чего у фазовой функции гасятся эти флуктуации.

§ 3. Предварительные сведения

В этом параграфе собраны сведения по секториальным операторам и голоморфным полугруппам, необходимые для построения метода стабилизации.

3.1. Секториальные операторы с компактной резольвентой. Пусть X — комплексное банахово пространство и $A: X \rightarrow X$ — замкнутый оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$. Множество чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых существует резольвента, т.е. непрерывный оператор $R(\lambda, A) \equiv (\lambda E - A)^{-1}: X \rightarrow X$, называется *резольвентным множеством* и обозначается через $\rho(A)$. Здесь E — единичный оператор.

Оператор A называется *секториальным*, если существуют такие числа $\varphi \in (0, \pi/2)$, $M \geq 1$ и $a \in \mathbb{R}$, что сектор комплексной плоскости

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \quad (3.1)$$

лежит в $\rho(A)$ и

$$\|(\lambda E - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \forall \lambda \in S_{a,\varphi}. \quad (3.2)$$

Будем предполагать, что при некотором $\lambda_0 \in \rho(A)$ резольвента $R(\lambda_0, A): X \rightarrow X$ является компактным оператором. Из тождества Гильберта [7]:

$$R(\lambda, A) = R(\lambda_0, A) + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda, A)R(\lambda_0, A), \quad \lambda, \lambda_0 \in \rho(A),$$

сразу следует, что оператор $R(\lambda, A): X \rightarrow X$ компактен при любом $\lambda \in \rho(A)$.

Спектр оператора A , т.е. множество $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$, будет обозначаться $\sigma(A)$.

ЛЕММА 3.1. *Спектр секторального оператора с компактной резольвентой состоит из дискретного множества точек.*

Доказательство см., например, в [8], [9].

Пусть $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Резольвенту $R(\lambda, A)$ можно разложить в ряд Лорана в окрестности λ_0 :

$$R(\lambda, A) = \sum_{k=-m}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_k, \quad (3.3)$$

$$R_k = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda - \lambda_0|=\varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^{-k-1} R(\lambda, A) d\lambda,$$

причем число членов с отрицательными степенями $(\lambda - \lambda_0)$ конечно (см. ниже лемму 3.3).

ЛЕММА 3.2 [7; гл. VIII, § 8].

- (а) Все операторы R_k из (3.3) коммутируют между собой и коммутируют с оператором A .
- (б) Оператор R_{-1} является проектором, т.е. $R_{-1}^2 = R_{-1}$.
- (в) Справедливы формулы:

$$R_{-(k+1)} + (\lambda_0 E - A)R_{-k} = 0 \quad \text{при } k \geq 1, \quad (3.4)$$

$$R_{-1} + (\lambda_0 E - A)R_0 = E. \quad (3.5)$$

ЛЕММА 3.3. Пусть A – секториальный оператор с компактной резольвентой, $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Тогда

- а) разложение (3.3) резольвенты в ряд Лорана в окрестности λ_0 содержит конечное число членов с отрицательными степенями $(\lambda - \lambda_0)$;
- б) все операторы R_k из (3.3) с $k < 0$ имеют конечномерные образы: $\dim \operatorname{Im} R_k < \infty$ при $k < 0$.

При этом

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} R_{-1} &= \ker(\lambda_0 E - A)^m, \\ R_{-k-1} &= (\lambda_0 E - A)^k R_{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где m – порядок полюса резольвенты $R(\lambda, A)$ при $\lambda = \lambda_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{\lambda} \in \rho(A)$ фиксировано, $\lambda \in \rho(A)$. Очевидно,

$$(\lambda E - A) = ((\lambda - \hat{\lambda})R(\hat{\lambda}, A) + E) \cdot (\hat{\lambda}E - A). \quad (3.7)$$

Обратив в (3.7) операторы, получим

$$(\hat{\lambda}E - A) \cdot R(\lambda, A) = ((\lambda - \hat{\lambda})R(\hat{\lambda}, A) + E)^{-1}. \quad (3.8)$$

Поэтому, положив в (3.8)

$$\nu = (\hat{\lambda} - \lambda)^{-1}, \quad \hat{R} = R(\hat{\lambda}, A), \quad B_\nu = \nu^{-1}(\hat{\lambda}E - A) \cdot R(\lambda, A), \quad (3.9)$$

получим, что оператор B_ν совпадает с $(\nu E - \hat{R})^{-1}$ и, значит, является резольвентой вполне непрерывного оператора $\hat{R}$. Если $\lambda_0 \in \sigma(A)$, то в силу (3.7) $\nu_0 = (\hat{\lambda} - \lambda_0)^{-1} \in \sigma(\hat{R})$ и $\nu_0 \neq 0$. Так как множество $\sigma(\hat{R})$ дискретно вместе с $\sigma(A)$, то можно разложить $B_\nu = (\nu E - \hat{R})^{-1}$ в ряд Лорана в окрестности ν_0 :

$$\begin{aligned} B_\nu &= (\nu E - \hat{R})^{-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\nu - \nu_0)^k b_k, \\ b_k &= \int_{|\nu - \nu_0|=\varepsilon} (\nu - \nu_0)^{-k-1} (\nu E - \hat{R})^{-1} \frac{d\nu}{2\pi i}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В [7; гл. X, § 5] показано, что $\dim \operatorname{Im} b_{-1} < \infty$. Отсюда в [7; гл. VIII, § 8] выведено, что ν_0 – полюс оператора B_ν конечного порядка и $\dim \operatorname{Im} b_{-k} < \infty$ при $k > 0$. Покажем, что оператор R_{-1} из разложения (3.3) конечномерен, т.е. $\dim \operatorname{Im} R_{-1} < \infty$. Из (3.8), (3.9) следует, что

$$R(\lambda, A) = \nu \hat{R}(\nu E - \hat{R})^{-1}.$$

Подставляя в обе части этого равенства разложения (3.3), (3.10), получим:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_k = \nu \hat{R} \sum_{l=-m}^{\infty} (\nu - \nu_0)^l b_l, \quad \text{где } \nu = (\hat{\lambda} - \lambda)^{-1}, \quad \nu_0 = (\hat{\lambda} - \lambda_0)^{-1}. \quad (3.11)$$

Учитывая связь (3.11) между ν и λ , будем иметь

$$\nu = \frac{1}{\widehat{\lambda} - \lambda_0} \left(1 - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - \widehat{\lambda}} \right)^{-1} = \frac{1}{\widehat{\lambda} - \lambda_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{(\widehat{\lambda} - \lambda_0)^k}. \quad (3.12)$$

Далее, при натуральном k справедливы равенства:

$$\begin{aligned} (\nu - \nu_0)^{-k} &= \frac{(\widehat{\lambda} - \lambda_0)^k (\widehat{\lambda} - \lambda_0 + \lambda_0 - \lambda)^k}{(\lambda - \lambda_0)^k} \\ &= \sum_{j=0}^k C_k^j (\lambda - \lambda_0)^{j-k} (-1)^j (\widehat{\lambda} - \lambda_0)^{2k-j}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} (\nu - \nu_0)^k &= \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{(\widehat{\lambda} - \lambda_0)^k (\widehat{\lambda} - \lambda_0 + \lambda_0 - \lambda)^k} \\ &= \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{(\widehat{\lambda} - \lambda_0)^{2k}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^j}{(\widehat{\lambda} - \lambda_0)^j} \right)^k. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подставляя выражения (3.12), (3.13), (3.14) в правую часть равенства (3.11), легко видеть, что коэффициент при $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ в правой части выражается только через операторы b_l с отрицательными l :

$$R_{-1} = \sum_{l=-m}^{-1} \nu_l b_l, \quad (3.15)$$

где ν_l — некоторые константы. Так как $\dim \operatorname{Im} b_l < \infty$ при отрицательных l , то $\dim \operatorname{Im} R_{-1} < \infty$. Из этого равенства в [7; гл. VIII, § 8] выводятся все утверждения леммы 3.3.

Пусть H — комплексное гильбертово пространство такое, что вложение $X \subset H$ непрерывно и X плотно в H , а X^* — пространство, сопряженное к X , причем соотношение двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X \times X^*}$ порождается скалярным произведением в H . Пусть $A^*: X^* \rightarrow X^*$ — оператор, сопряженный к A . Если $A: X \rightarrow X$ — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$, то

$$\rho(A^*) = \overline{\rho(A)} \quad \text{и} \quad R(\lambda, A)^* = R(\bar{\lambda}, A^*) \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \rho(A), \quad (3.16)$$

где $\overline{\rho(A)}$ — множество чисел, комплексно сопряженных числам из $\rho(A)$. Так как оператор вполне непрерывен тогда и только тогда, когда вполне непрерывным является сопряженный оператор [7; гл. X, § 4], то из (3.16) следует, что оператор A^* является секториальным оператором с компактной резольвентой, если таковым является оператор A . Очевидно, $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$. Поэтому если $\lambda_0 \in \sigma(A)$, то $\bar{\lambda}_0 \in \sigma(A^*)$. Разлагая $R(\lambda, A^*)$ в ряд Лорана в окрестности $\bar{\lambda}_0$, получим:

$$R(\lambda, A^*) = \sum_{k=-m}^{\infty} (\lambda - \bar{\lambda}_0)^k R_k^*, \quad (3.17)$$

причем, очевидно, порядки полюсов в (3.3) и (3.17) совпадают и коэффициенты R_k^* из разложения (3.17) являются операторами, сопряженными соответствующим

коэффициентам R_k из (3.3). Поэтому в силу леммы 3.2 операторы R_k^* коммутируют между собой и с оператором A^* , $(R_{-1}^*)^2 = R_{-1}^*$ и

$$R_{-(k+1)}^* + (\bar{\lambda}_0 E - A^*) R_{-k}^* = 0 \quad \text{при } k \geq 1, \quad (3.18)$$

$$R_{-1}^* + (\bar{\lambda}_0 E - A^*) R_0^* = E. \quad (3.19)$$

Более того, из леммы 3.3 следует, что $\dim \operatorname{Im} R_k^* = \dim \operatorname{Im} R_k$, $k < 0$, и

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} R_{-1}^* &= \ker(\bar{\lambda}_0 E - A^*)^m, \\ R_{-k-1}^* &= (\bar{\lambda}_0 E - A^*)^k R_{-1}^*, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.2. Структура операторов R_k с $k < 0$. Как известно, число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* оператора A , если $\ker(\lambda_0 E - A) \neq 0$, а ненулевой вектор $e_0 \in \ker(\lambda_0 E - A)$ называется *собственным вектором*. Вектор e_k называется *присоединенным вектором* порядка k к собственному вектору e , если e_k получается в результате решения цепочки уравнений:

$$(\lambda_0 E - A)e_0 = 0, \quad e_0 + (\lambda_0 E - A)e_1 = 0, \quad \dots, \quad e_{k-1} + (\lambda_0 E - A)e_k = 0. \quad (3.21)$$

Мы будем говорить, что $e, e_1, e_2, \dots$ образуют *цепочку присоединенных векторов*. Если максимальный порядок присоединенных к e векторов равен m , то число $m+1$ называется *кратностью собственного вектора e* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Канонической системой*

$$e_0^{(k)}, e_1^{(k)}, \dots, e_{m_k}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.22)$$

собственных и присоединенных векторов, соответствующих собственному значению λ_0 , называется *система векторов*, обладающая следующими свойствами

- 1⁰. Векторы $e_0^{(k)}$ образуют базис подпространства собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_0 .
- 2⁰. $e_0^{(1)}$ есть собственный вектор, кратность которого достигает возможного максимума $m_1 + 1$.
- 3⁰. $e_0^{(k)}$ есть собственный вектор, не выражающийся линейно через $e^{(1)}, \dots, e^{(k-1)}$, кратность которого достигает возможного максимума $m_k + 1$.
- 4⁰. Векторы (3.22) образуют цепочку присоединенных элементов. Очевидно, что числа $m_1, m_2, \dots$ не зависят от выбора канонической системы. Число $N(\lambda_0) = m_1 + 1 + m_2 + 1 + \dots + m_N + 1$ называется *кратностью собственного значения λ_0* .

Помимо канонической системы (3.22), соответствующей собственному значению λ_0 оператора A , мы будем рассматривать каноническую систему

$$\varepsilon_0^{(k)}, \varepsilon_1^{(k)}, \dots, \varepsilon_{m_k}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (3.23)$$

соответствующую собственному значению $\bar{\lambda}_0$ оператора A^* , которая определяется совершенно аналогично. В частности, набор собственных и присоединенных векторов удовлетворяет соотношениям, аналогичным (3.21):

$$(\bar{\lambda}_0 E - A^*)\varepsilon_0^{(k)} = 0, \quad \varepsilon_0^{(k)} + (\bar{\lambda}_0 E - A^*)\varepsilon_1^{(k)} = 0, \quad \dots, \quad \varepsilon_{m_k-1}^{(k)} + (\bar{\lambda}_0 E - A^*)\varepsilon_{m_k}^{(k)} = 0. \quad (3.24)$$

Соотношение двойственности между X и X^* , порожденное скалярным произведением в H , мы будем обозначать символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Для $y \in X$, $z^* \in X^*$ обозначим через yz^* оператор $B: X \rightarrow X$, определяемый равенством $Bf = \langle f, z^* \rangle y$, а через z^*y обозначим оператор $B^*: X^* \rightarrow X^*$ такой, что $B^*g = \langle y, g \rangle z^*$. Очевидно, что B^* — сопряженный к B оператор.

Следующая теорема хорошо известна (см. [8], где она доказана в чуть иной ситуации).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть A — секториальный оператор с компактной резольвентой $R(\lambda, A)$, λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ — полюсы кратности m соответственно резольвент $R(\lambda, A)$ и $R(\lambda, A^*)$.

а) Тогда λ_0 — собственное значение A , а $\bar{\lambda}_0$ — собственное значение A^* , причем λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ имеют собственные векторы одинаковой максимальной кратности m .

б) Для произвольной канонической системы (3.23) оператора A^* , соответствующей собственному значению $\bar{\lambda}_0$, существует и однозначно определена такая каноническая система (3.22) оператора A при $\lambda = \lambda_0$, что главная часть ряда Лорана (3.3) резольвенты $R(\lambda, A)$ в окрестности λ_0 может быть представлена в следующем виде:

$$\sum_k \left\{ \frac{e_0^{(k)} \varepsilon_0^{(k)}}{(\lambda - \lambda_0)^{m_k+1}} + \frac{e_0^{(k)} \varepsilon_1^{(k)} + e_1^{(k)} \varepsilon_0^{(k)}}{(\lambda - \lambda_0)^{m_k}} + \dots + \frac{e_0^{(k)} \varepsilon_{m_k}^{(k)} + e_1^{(k)} \varepsilon_{m_k-1}^{(k)} + \dots + e_{m_k}^{(k)} \varepsilon_0^{(k)}}{(\lambda - \lambda_0)} \right\}. \quad (3.25)$$

Доказательство теоремы 3.1 легко восстанавливается по доказательству аналогичной теоремы из [8].

Из теоремы 3.1 сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть A — секториальный оператор с компактной резольвентой $R(\lambda, A)$, допускающей в точке $\lambda_0 \in \sigma(A)$ разложение в ряд Лорана (3.3). Пусть (3.23) — произвольная каноническая система оператора A^* , соответствующая собственному значению $\bar{\lambda}_0$. Тогда

$$R_{-k}x = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, m \quad (3.26)$$

для тех и только тех $x \in X$, для которых $\langle x, \varepsilon_j^{(k)} \rangle = 0$ для любого вектора $\varepsilon_j^{(k)}$ из канонической системы (3.23).

Утверждение следствия сразу вытекает из представления (3.25) главной части ряда Лорана (3.3) для $R(\lambda, A)$.

3.3. Голоморфные полугруппы. Пусть $A: X \rightarrow X$ — секториальный оператор с компактной резольвентой. Рассмотрим в X задачу Коши:

$$\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = 0, \quad y|_{t=0} = y_0. \quad (3.27)$$

Решение этой задачи задается с помощью некоторой голоморфной полугруппы (определение голоморфной полугруппы см., например, в [10]).

В [10; § 1.3] доказана

ТЕОРЕМА 3.2. При любом $y_0 \in X$ решение $y(t)$ задачи (3.27) задается формулой $y(t) = e^{-At}y_0$, где e^{-At} — голоморфная полугруппа с производящим оператором $-A$, которая определяется формулой

$$e^{-At} = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} (\lambda E + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad (3.28)$$

где γ — контур в $\rho(-A)$ такой, что $\arg \lambda = \pm\theta$ при $\lambda \in \gamma$, $|\lambda| \geq N$ для некоторого $\theta \in (\pi/2, \pi)$ и достаточно большого N , а множество $\sigma(-A)$ лежит левее контура γ .

Такой контур γ , конечно, существует потому, что его можно выбрать принадлежащим множеству $-S_{a,\varphi}$, где $S_{a,\varphi}$ — множество (3.1), входящее в определение секториального оператора.

Пусть σ_0 — положительное число, удовлетворяющее условию

$$\sigma(-A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = -\sigma_0\} = \emptyset. \quad (3.29)$$

Нас будет интересовать случай, когда правее прямой $\{\operatorname{Re} \lambda = -\sigma_0\}$ имеются точки множества $\sigma(-A)$. Интеграл в (3.28) можно преобразовать к виду

$$e^{-At} = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_{\sigma_0}} (\lambda E + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda + \sum_j (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon} (\lambda E + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad (3.30)$$

где γ_{σ_0} — непрерывный контур, расположенный в комплексной полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq -\sigma_0\}$ и составленный из отрезка прямой $\{\operatorname{Re} \lambda = -\sigma_0\}$ и двух ветвей контура γ , выходящих при $|\lambda| \rightarrow \infty$ на лучи $\{\arg \lambda = \theta\}$ и $\{\arg \lambda = -\theta\}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$. Суммирование проводится по всем точкам $-\lambda_j \in \sigma(-A)$, находящимся правее прямой $\{\operatorname{Re} \lambda = -\sigma_0\}$. Вычислим интегралы, стоящие в сумме из (3.30). Аналогично (3.3) для $R(\lambda, -A)$ в окрестности полюса $\lambda = -\lambda_j$ имеем

$$R(\lambda, -A) = \sum_{k=m(-\lambda_j)}^{\infty} (\lambda + \lambda_j)^k R_k(-\lambda_j). \quad (3.31)$$

Вычет функции $R(\lambda, -A)e^{\lambda t}$ в точке, очевидно, вычисляется по формуле

$$\operatorname{Res} e^{\lambda t} R(\lambda, -A) = e^{-\lambda_j t} \sum_{n=1}^{m(-\lambda_j)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} R_{-n}(-\lambda_j).$$

Поэтому равенство (3.30) можно переписать в виде

$$e^{-At} = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_{\sigma}} (\lambda E + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda + \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0} e^{-\lambda_j t} \sum_{n=1}^{m(-\lambda_j)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} R_{-n}(-\lambda_j). \quad (3.32)$$

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть A – секториальный оператор с компактной резольвентой. Тогда для любого $\sigma_0 > 0$, удовлетворяющего условию (3.29), голоморфная полугруппа e^{-At} , задающая решение уравнения (3.27), допускает представление (3.32), где γ_{σ_0} – непрерывный контур, определенный ниже формулы (3.30), $-\lambda_j$ – полюсы резольвенты $R(\lambda, -A)$, у которых $\operatorname{Re}(-\lambda_j) > -\sigma_0$, R_{-n} – операторы из главной части ряда Лорана (3.31). Интеграл в правой части (3.32) допускает оценку

$$\left\| (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_{\sigma}} (\lambda E + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right\| \leq M e^{-\sigma_0 t} \quad \text{при } t \geq 0, \quad (3.33)$$

где M не зависит от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения теоремы, кроме последнего, были получены выше. Докажем оценку (3.33). Из определения контура γ_{σ_0} и формулы (3.1) следует, что при достаточно большом R

$$\gamma_{\sigma_0} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > R\} \subset -S_{a, \varphi}.$$

Из этого включения, соотношения $\gamma_{\sigma_0} \subset \rho(-A)$ и формулы (3.2), в которой A заменено на $-A$, а $S_{a, \varphi}$ на $-S_{a, \varphi}$, следует, что

$$\|(\lambda E + A)^{-1}\| \leq \frac{M_1}{1 + |\lambda|} \quad \text{при } \lambda \in \gamma_{\sigma_0}. \quad (3.34)$$

Кроме того, в соответствии с определением контура γ_{σ_0}

$$|e^{(\lambda + \sigma_0)t}| \leq C e^{(\cos \theta)|\lambda|t} \quad \text{при } \lambda \in \gamma_{\sigma_0} \text{ и } |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (3.35)$$

где $\cos \theta < 0$, так как $\theta \in (\pi/2, \pi)$. В силу (3.34), (3.35)

$$\left\| (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_{\sigma_0}} (\lambda E + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right\| \leq e^{-\sigma_0 t} \int_{\gamma_{\sigma}} \frac{M_1 C e^{(\cos \theta)|\lambda|t}}{1 + |\lambda|} |d\lambda| \leq M_2 e^{-\sigma_0 t} \quad (3.36)$$

при $t > 1$. Как известно, норма левой части равенства (3.32) ограничена равномерно по $t \in [0, 1]$. Очевидно, норма любого члена суммы, а значит, и всей суммы из правой части равенства (3.32) ограничена равномерно по $t \in [0, 1]$. Поэтому

$$\left\| (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_{\sigma_0}} (\lambda E + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right\| \leq M_2 e^{-\sigma_0 t} \quad \text{при } t \in [0, 1]. \quad (3.37)$$

Из (3.36), (3.37) следует (3.33).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Утверждение теоремы 3.3 и ее доказательство остаются в силе, если вместо (3.34) справедливо более слабое неравенство

$$\|(\lambda E - A)^{-1}\| \leq M_1 (1 + |\lambda|)^k \quad \text{при } \lambda \in \gamma_{\sigma_0} \quad (3.38)$$

с некоторым фиксированным $k \in \mathbb{R}$.

Как отмечалось выше, если $-\lambda_j$ – полюсы резольвенты $R(\lambda, -A)$, то $-\bar{\lambda}_j$ являются полюсами резольвенты сопряженного оператора $R(\lambda, -A^*)$. Обозначим через

$$\varepsilon_0^{(k)}(-\bar{\lambda}_j), \varepsilon_1^{(k)}(-\bar{\lambda}_j), \dots, \varepsilon_{m_k}^{(k)}(-\bar{\lambda}_j) \quad (k = 1, 2, \dots, N(-\bar{\lambda}_j)) \quad (3.39)$$

некоторую каноническую систему собственных и присоединенных векторов оператора A^* , соответствующих собственному значению $-\bar{\lambda}_j$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть A – секториальный оператор в банаховом пространстве X с компактной резольвентой и σ_0 удовлетворяет условию (3.29). Тогда для любого $x \in X$, для которого

$$\langle x, \varepsilon_l^{(k)}(-\bar{\lambda}_j) \rangle = 0, \quad l = 1, \dots, m_k(-\lambda_j), \quad k = 1, \dots, N(-\bar{\lambda}_j), \quad \operatorname{Re}(\bar{\lambda}_j) < \sigma_0, \quad (3.40)$$

справедлива оценка

$$\|e^{-At}x\|_X \leq M e^{-\sigma_0 t} \|x\| \quad \text{при } t \geq 0. \quad (3.41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 3.1 если x удовлетворяет (3.40), то для всех операторов $R_{-n}(-\lambda_j)$ из (3.32) справедливы равенства $R_{-n}(-\lambda_j)x = 0$. Поэтому из (3.32), (3.33) следует (3.41).

§ 4. Стабилизация линейного параболического уравнения

4.1. Постановка задачи стабилизации. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная связная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В Ω рассматривается параболическое уравнение

$$\partial_t y(t, x) - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_{x_i x_j}^2 y(t, x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \partial_{x_i} y(t, x) + c(x) y(t, x) = 0, \quad (4.1)$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $\partial_{x_i x_j}^2 = \partial^2/\partial x_i \partial x_j$, коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ – вещественнозначные дважды непрерывно дифференцируемые функции в замыкании Ω . Предполагается, что

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d,$$

где $\alpha > 0$ не зависит от $x \in \bar{\Omega}$, $|\xi|^2 = \sum \xi_i^2$. Уравнение (4.1) снабжается начальным условием

$$y(t, x)|_{t=0} = y_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.2)$$

Предполагается, что граница области $\partial\Omega$ разбита на два подмножества Γ и Γ_0 , т.е.

$$\partial\Omega = \bar{\Gamma} \cup \bar{\Gamma}_0, \quad (4.3)$$

где Γ , Γ_0 – открытые (в топологии многообразия $\partial\Omega$) множества, причем $\Gamma \neq \emptyset$, а множество Γ_0 может быть и пустым. Черта сверху означает операцию замыкания. На $\Sigma_0 = \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0$ накладывается нулевое граничное условие Дирихле, а на $\Sigma = \mathbb{R}_+ \times \Gamma$ – ненулевое условие:

$$y|_{\Sigma_0} = 0, \quad y|_{\Sigma} = u. \quad (4.4)$$

При этом предполагается, что u – управление. Пусть задано число $\sigma_0 > 0$. Задача стабилизации со скоростью σ_0 решения краевой задачи (4.1), (4.2), (4.4) состоит

в построении на Σ такого управления $u(t, x)$, что соответствующее ему решение $y(t, x)$ задачи (4.1), (4.2), (4.4) удовлетворяет неравенству

$$\|y(t, \cdot)\|_{W_p^k(\Omega)} \leq c e^{-\sigma_0 t}. \quad (4.5)$$

Здесь

$$\|z\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |\mathcal{D}^\alpha z(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $\mathcal{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$, — норма пространства

Соболева $W_p^k(\Omega)$. Величины индексов k, p в (4.5) будут уточнены ниже.

Основным условием, которое мы накладываем, является требование, чтобы управление u обладало обратной связью в смысле, аналогичном (2.12). Приведем точную формулировку этого условия.

Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, не пересекающаяся с Ω , причем границы $\partial\omega$ и $\partial\Omega$ имеют непустое пересечение, совпадающее с $\bar{\Gamma}$ (см. (4.3)):

$$\omega \cap \Omega = \emptyset, \quad \text{Int}(\partial\omega \cap \partial\Omega) \equiv \Gamma \neq \emptyset, \quad (4.6)$$

где $\text{Int } \mathcal{A}$ означает внутренность множества $\mathcal{A}$. Положим

$$G = \text{Int}(\bar{\omega} \cup \bar{\Omega}). \quad (4.7)$$

Будем предполагать, что множество ω таково, что граница ∂G области G является гладким класса C^2 $(d-1)$ -мерным многообразием:

$$\partial G \subset C^2. \quad (4.8)$$

Продолжим коэффициенты $a_{ij}(x), b_i(x), C(x)$ оператора (4.1) с $\bar{\Omega}$ на $\bar{G}$ до вещественных функций класса $C^2(\bar{G})$ $\hat{a}_{ij}(x) \equiv \hat{a}_{ji}(x), \hat{b}_i(x), \hat{c}(x)$ с сохранением условия эллиптичности:

$$A_0(x, \xi) \equiv - \sum_{i,j=1}^d \hat{a}_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \frac{\alpha}{2} |\xi|^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d, \quad (4.9)$$

где $\alpha > 0$ не зависит от $x \in \bar{G}$. В цилиндре $Q = \mathbb{R}_+ \times G$ рассмотрим параболическое уравнение

$$\partial_t z(t, x) + A(x, \mathcal{D})z(t, x) = 0, \quad (4.10)$$

где

$$A(x, \mathcal{D})z = - \sum_{i,j=1}^d \hat{a}_{ij}(x) \partial_{x_i x_j}^2 z + \sum_{i=1}^d \hat{b}_i(x) \partial_{x_i} z + \hat{c}(x)z. \quad (4.11)$$

На боковой поверхности $S = \mathbb{R}_+ \times \partial G$ цилиндра Q поставим краевое условие

$$z|_S = 0, \quad (4.12)$$

а в начальный момент времени $t = 0$ — начальное условие

$$z(t, x)|_{t=0} = z_0(x), \quad (4.13)$$

где $z_0(x)$ строится специальным образом по начальному условию $y_0(x)$ из (4.2).

Для функций, определенных на G , обозначим через γ_Ω оператор сужения на Ω , а через γ_Γ — оператор сужения на множество Γ . Очевидно, операторы

$$\gamma_\Omega: W_p^k(G) \rightarrow W_p^k(\Omega), \quad k \geq 0; \quad \gamma_\Gamma: W_p^k(G) \rightarrow W_p^{k-1/p}(\Gamma), \quad k > \frac{1}{p},$$

непрерывны, где k целое, $1 < p < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Управление $u(t, x)$ в задаче (4.1), (4.2), (4.4) *обладает обратной связью*, если при любом $t \geq 0$ справедливы соотношения

$$y(t, \cdot) = \gamma_\Omega z(t, \cdot), \quad u(t, \cdot) = \gamma_\Gamma z(t, \cdot), \quad (4.14)$$

где $y(t, x)$ – решение задачи (4.1), (4.2), (4.4), а $z(t, x)$ – решение задачи (4.10), (4.12), (4.13).

Наша цель – доказать стабилизируемость задачи (4.1), (4.2), (4.4) с произвольной наперед заданной скоростью σ_0 посредством управления с обратной связью.

4.2. Теорема о продолжении. Все результаты §3 могут быть применены к оператору (4.11), (4.12). При этом мы рассмотрим два способа выбора банахова пространства X .

Случай 1. Пусть $X = L_p(G)$, $1 < p < \infty$, $H = L_2(G)$, $X^* = L_q(G)$, где $1/q + 1/p = 1$, A – оператор (4.11), его область определения задается соотношением $\mathcal{D}(A) = \{y(x) \in W_p^2(G) : y|_{\partial G} = 0\}$. Используя хорошо известные методы (см. [11]–[14]), легко показать, что этот оператор A является секториальным с компактной резольventой. При этом спектр оператора $-A$, состоящий из дискретного множества точек, лежит, за исключением конечного числа собственных значений, в секторе $\{\lambda \in \mathbb{C} : \pi - \varepsilon \leq \arg \lambda \leq \pi + \varepsilon \forall \varepsilon > 0\}$ (см., например, [14]). Так как коэффициенты оператора (4.11) вещественны, множество $\sigma(-A)$ симметрично относительно вещественной оси. Поэтому $\sigma(-A) = \sigma(-A^*)$. Пусть $\sigma_0 > 0$ – произвольное число, удовлетворяющее условию (3.29). Для $-\lambda_j \in \sigma(-A^*) = \sigma(-A)$, удовлетворяющего условию $\operatorname{Re}(-\lambda_j) > -\sigma_0$, выберем каноническую систему собственных и присоединенных функций оператора $-A^*$, которые аналогично (3.39) обозначим

$$\varepsilon_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x), \quad i = 0, 1, \dots, m_k(-\bar{\lambda}_j), \quad k = 1, 2, \dots, N(-\bar{\lambda}_j). \quad (4.15)$$

Случай 2. Пусть $X = \overset{\circ}{W}_p^1(G) \equiv \{y \in W_p^1(G) : y|_{\partial\Omega} = 0\}$, $1 < p < \infty$, $H = L_2(G)$, $H^* = W_q^{-1}(G)$, где $1/q + 1/p = 1$, A – оператор (4.11) с областью определения $\mathcal{D}(A) = \{y(x) \in W_p^3(G) : y|_{\partial\Omega} = 0, A(x\mathcal{D})y|_{\partial\Omega} = 0\}$, где $A(x, \mathcal{D})$ – оператор (4.11). Как и в случае 1, легко показать, что A – оператор с компактной резольventой, содержащей множество (3.1). Вместо (3.2) из [12] сразу следует оценка (3.38) с $k = 0$. В силу замечания 3.1 этой оценки вполне достаточно, чтобы доказать теоремы 3.3, 3.4. Легко видеть, что $\mathcal{D}(A^*) = \overset{\circ}{W}_q^1(G)$. Следует отметить, что резольventные множества $\rho(-A) = \rho(A^*)$ и спектры $\sigma(-A) = \sigma(-A^*)$ для операторов $-A$, $-A^*$ в случае 2 совпадают соответственно с резольventными множествами и спектрами операторов $-A$, $-A^*$, введенными в случае 1. Кроме того, каноническая система собственных и присоединенных функций оператора A^* в случае 2 совпадает с функциями (4.15), введенными в случае 1. Эти утверждения легко вытекают из теорем о гладкости решений эллиптических краевых задач (см. [14]).

Отметим, что и в случае 1, и в случае 2 справедливо утверждение теоремы 3.4, в которой векторы (3.39) заменены на функции (4.15).

Нам потребуется некоторое усиление утверждения о линейной независимости функций (4.15).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\omega \subset G$ – произвольная подобласть. Тогда функции (4.15), суженные на ω , линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что собственные функции $\varepsilon_0^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x)|_\omega$ с фиксированным $-\bar{\lambda}_j$, суженные на ω , линейно независимы. Пусть

$$f(x) \equiv \sum_{(k)} d_k \varepsilon_0^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x) = 0 \quad \text{при } x \in \omega, \quad (4.16)$$

где d_k – комплексные коэффициенты. Тогда

$$(\bar{\lambda}_j E + A^*)f(x) \equiv 0, \quad x \in G.$$

В силу свойства единственности продолжения с ω на G решения эллиптического уравнения (см. [15]) из этого равенства и (4.16) следует, что $f(x) \equiv 0$ при $x \in G$. Поэтому вследствие линейной независимости $\varepsilon^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x)$ на G $d_k = 0 \quad \forall k$.

2) Покажем, что собственные и присоединенные функции $\varepsilon_j^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x)|_\omega$ с фиксированным λ_j , суженные на ω , линейно независимы. Пусть

$$f(x) \equiv \sum_{k=1}^{N(-\bar{\lambda}_j)} \sum_{i=0}^{m_k} d_i^{(k)} \varepsilon_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x) = 0 \quad \text{при } x \in \omega \quad (4.17)$$

и собственные функции $\varepsilon_0^{(k)}$, $k = 1, \dots, k_1$, имеют максимальную кратность $n_1 + 1$: $m_1 = \dots = m_{k_1} = n_1$, функции $\varepsilon_0^{(k)}$, $k = k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k_2$, имеют максимальную среди оставшихся функций кратность $1 + n_2$: $m_{k_1+1} = \dots = m_{k_2} = n_2$ и т. д. Применив к (4.17) оператор $(\bar{\lambda}_j E + A^*)^{n_1}$, получим, учитывая равенство (3.24) с $\bar{\lambda}_0$, замененным на $-\bar{\lambda}_j$, что

$$\sum_{k=1}^{k_1} d_{n_1}^{(k)} \varepsilon_0^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x) = 0 \quad \text{при } x \in \omega.$$

Отсюда в силу п. 1) доказательства этой теоремы следует, что $d_{n_1}^{(k)} = 0$, $k = 1, \dots, k_1$. Применяя после этого к (4.18) оператор $(\bar{\lambda}_j E + A^*)^{n_1-1}$, получим

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{k_1} d_{n_1-1}^{(k)} \varepsilon_0^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x) = 0 & \text{при } x \in \omega, \text{ если } n_2 < n_1 - 1, \\ \sum_{k=1}^{k_2} d_{n_2}^{(k)} \varepsilon_0^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x) = 0 & \text{при } x \in \omega, \text{ если } n_2 = n_1 - 1. \end{cases}$$

Отсюда в силу п. 1) $d_{n_1-1}^{(k)} = 0$, $k = 1, \dots, k_1$, либо $d_{n_1-1}^{(k)} = 0$, $k = 1, \dots, k_2$. Применяя последовательно $(\bar{\lambda}_j E + A^*)^k$ с уменьшающимися k , получим требуемое утверждение.

3) Докажем общий случай. Пронумеруем собственные значения в порядке убывания максимально возможной кратности соответствующих собственных функций: если $m_1(-\bar{\lambda}_j; x)$ – максимально возможная кратность собственной функции, соответствующей собственному значению $-\bar{\lambda}_j$, то

$$m_1(-\bar{\lambda}_1) \geq m_1(-\bar{\lambda}_2) \geq \dots \geq m_1(-\bar{\lambda}_M).$$

Предположим, что

$$\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N(-\bar{\lambda}_j)} \sum_{i=0}^{m_k(-\bar{\lambda}_j)} d_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j) \varepsilon_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x) = 0 \quad \text{при } x \in \omega. \quad (4.18)$$

Применим к (4.18) оператор $(\bar{\lambda}_1 E + A^*)^{m_1(-\bar{\lambda}_1)+1}$. Тогда в силу (3.24) с $-\bar{\lambda}_1$ вместо $\bar{\lambda}_0$ мы получим, что члены суммы с $j = 1$ пропадут, а остальные члены преобразуются в

$$\sum_{j=2}^M \sum_{k=1}^{N(-\bar{\lambda}_j)} \sum_{i=0}^{m_k(-\bar{\lambda}_j)} d_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j) ((\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_j)E + (\bar{\lambda}_j E + A^*))^{m_1(-\bar{\lambda}_1)+1} \varepsilon_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x) = 0. \quad (4.19)$$

Применяя в (4.19) формулу бинома Ньютона, а затем (3.24) с $-\bar{\lambda}_j$ вместо $\bar{\lambda}_0$, получим

$$\sum_{j=2}^M \sum_{k=1}^{N(-\bar{\lambda}_j)} \sum_{i=0}^{m_k(-\bar{\lambda}_j)} d_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j) \sum_{l=0}^i C_{m_1(-\bar{\lambda}_1)+1}^l (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_j)^{m_1(-\bar{\lambda}_1)+1-l} \varepsilon_{i-l}^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x) = 0, \quad (4.20)$$

где C_n^l — число сочетаний из l по n . Делая во внутренней сумме замену переменных $i - l = r$, а затем меняя порядок суммирования i и r , получим

$$\sum_{j=2}^M \sum_{k=1}^{N(-\bar{\lambda}_j)} \sum_{r=0}^{m_k(-\bar{\lambda}_j)} (\Lambda_1 d(-\bar{\lambda}_j))_r^{(k)} \varepsilon_r^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x) = 0, \quad (4.21)$$

где

$$(\Lambda_1 d(-\bar{\lambda}_j))_r^{(k)} = \sum_{i=r}^{m_k(-\bar{\lambda}_j)} C_{m_1(-\bar{\lambda}_1)+1}^{i-r} d_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j) (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_j)^{m_1(-\bar{\lambda}_1)+1+r-i}, \quad j \geq 2. \quad (4.22)$$

Точно так же, применяя к (4.21)

$$(\bar{\lambda}_{M-1} E + A^*)^{m_1(-\bar{\lambda}_{M-1})+1} \circ (\bar{\lambda}_{M-2} E + A^*)^{m_1(-\bar{\lambda}_{M-2})+1} \circ \dots \circ (\bar{\lambda}_2 E + A^*)^{m_1(-\bar{\lambda}_2)+1},$$

получим в силу (3.24), что члены с $j = 2, 3, \dots, M-1$ пропадут, и мы будем иметь

$$\sum_{k=1}^{N(-\bar{\lambda}_M)} \sum_{r=0}^{m_k(-\bar{\lambda}_M)} (\Lambda_{M-1} \circ (\Lambda_{M-2} \circ \dots \circ \Lambda_1 d))_r^{(k)} \varepsilon_r^{(k)}(-\bar{\lambda}_M; x) = 0, \quad (4.23)$$

где при любом $p = 2, \dots, M-1$ отображение Λ_p определяется по формуле, аналогичной (4.22):

$$\begin{aligned} & (\Lambda_p (\Lambda_{p-1} \circ \dots \circ \Lambda_1 d))_r^{(k)} \\ &= \sum_{i=r}^{m_k(-\bar{\lambda}_j)} C_{m_1(-\bar{\lambda}_p)+1}^{i-r} (\Lambda_p (\Lambda_{p-1} \circ \dots \circ \Lambda_1 d))_i^{(k)} (-\bar{\lambda}_j) (-\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_j)^{m_1(\bar{\lambda}_p)+1+r-i} \end{aligned} \quad (4.24)$$

с $j \geq p+1$. В (4.23) сумма распространяется только на собственные и присоединенные функции, соответствующие одному собственному значению $-\bar{\lambda}_M$. Поэтому в силу п. 2) доказательства теоремы при любых (k) , r коэффициент

$$((\Lambda_{M-1} \circ \dots \circ \Lambda_1 d)(-\bar{\lambda}_M))_r^{(k)} = 0. \quad (4.25)$$

Обозначим $(\Lambda_{M-2} \circ \dots \circ \Lambda_1 d)_j^{(k)}(-\bar{\lambda}_M) = \tilde{d}_j^{(k)}(-\bar{\lambda}_M)$. Тогда в силу (4.25) и (4.24) с $p = M-1$ получим равенство

$$\sum_{i=r}^{m_k(-\bar{\lambda}_M)} C_{m_1(-\bar{\lambda}_{M-1})+1}^{i-r} (-1)^{i-r} \tilde{d}_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_M) (\bar{\lambda}_{M-1} - \bar{\lambda}_M)^{m_1(-\bar{\lambda}_{M-1})+1+r-i} = 0.$$

Взяв в этом равенстве последовательно $r = m_k(-\bar{\lambda}_M)$, $r = m_k(-\bar{\lambda}_M) - 1$, $r = m_k(-\bar{\lambda}_M) - 2$ и т. д., мы получим $\tilde{d}_i^{(k)}(\lambda_M) = 0$ при любых i, k . Из этого равенства и (4.24) с $p = M-2$ и $j = M$ аналогично предыдущему получим, что $(\Lambda_{M-3} \circ \dots \circ \Lambda_1 d)_r^{(k)}(-\bar{\lambda}_M) = 0$ при любых k, r . Повторяя эти действия несколько раз, получим в итоге, что $d_j^{(k)}(-\bar{\lambda}_M) = 0$ при любых k, j . После этого применим к (4.18) последовательно операторы $(\bar{\lambda}_p E + A^*)^{m_1(\lambda_p)+1} \circ \dots \circ (\bar{\lambda}_1 E + A^*)^{m_1(\lambda_1)+1}$ с $p = M-2, \dots, p = 1$ и, действуя, как было изложено выше, мы последовательно докажем, что $d_j^{(k)}(\lambda_p) = 0$ с $p = M-1, p = M-2, \dots, p = 2, p = 1$.

Пусть, как и раньше, $\sigma_0 > 0$ — произвольное число, удовлетворяющее условию (3.29), и для каждого λ_j , для которого

$$\operatorname{Re}(-\lambda_j) > -\sigma_0, \quad (4.26)$$

выберем каноническую систему (4.15) собственных и присоединенных функций оператора $-A^*$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\varepsilon_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x) = \overline{\varepsilon_i^{(k)}(-\lambda_j; x)}, \quad i = 0, 1, \dots, m_k, \quad k = 1, 2, \dots, N(\lambda_j). \quad (4.27)$$

Очевидно, это можно сделать из-за вещественности коэффициентов оператора (4.1). Действительно, если $\lambda_j \in \sigma(A^*)$, то и $\bar{\lambda}_j \in \sigma(A^*)$, и в силу определения (3.24) если (4.15) — каноническая система, соответствующая $-\bar{\lambda}_j$, то $\overline{\varepsilon_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j x)}$ — каноническая система, соответствующая $-\lambda_j$. В силу (4.27) каноническая система, соответствующая вещественному λ_j , состоит из вещественных функций. Если $\operatorname{Im} \lambda_j \neq 0$, то вместо функций $\varepsilon_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x)$, $\varepsilon_i^{(k)}(-\lambda_j; x) \equiv \overline{\varepsilon_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x)}$ рассмотрим функции

$$\operatorname{Re} \varepsilon_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x), \quad \operatorname{Im} \varepsilon_i^{(k)}(-\bar{\lambda}_j; x). \quad (4.28)$$

Занумеруем все функции вида (4.28), полученные из всех собственных и присоединенных функций (4.15) с собственными значениями, удовлетворяющими (4.26), следующим образом:

$$\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_K(x) \quad (4.29)$$

(собственные и присоединенные функции, соответствующие вещественным λ_j , также входят в (4.29)). Из теоремы 4.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Для любой области $\omega \subset G$ (вещественные) функции (4.29), суженные на ω , линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\sum_{j=1}^k c_j \varepsilon_j(x) = 0 \quad \text{при } x \in \omega, \quad (4.30)$$

где $c_j \in \mathbb{R}$. Если $\varepsilon_j = \operatorname{Re} \varepsilon_i^{(k)}$, $\varepsilon_{j+1} = \operatorname{Im} \varepsilon_i^{(k)}$, то, очевидно,

$$c_j \varepsilon_j + c_{j+1} \varepsilon_{j+1} = d \varepsilon_i^{(k)} + \overline{d} \overline{\varepsilon_i^{(k)}}, \quad \text{где } d = \frac{c_1 - i c_2}{2}. \quad (4.31)$$

Поэтому (4.30) можно переписать в виде (4.18). В силу теоремы 4.1 все коэффициенты $d_i^{(k)}(\lambda_j)$ из (4.18) равны нулю. Поэтому вследствие (4.31) равны нулю все коэффициенты c_i из (4.30).

Докажем теперь теорему о продолжении, которая является ключевой в решении задачи о стабилизации. В вещественном пространстве $L_p(G)$ введем подпространство

$$X_K(G) = \left\{ v(x) \in L_p(G) : \int_G v(x) \varepsilon_j(x) dx = 0, j = 1, \dots, K \right\}, \quad (4.32)$$

где $\varepsilon_j(x)$ — функции (4.29).

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть Ω и G — области в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющие (4.6), (4.7). Существует линейный непрерывный оператор продолжения

$$E_K : L_p(\Omega) \rightarrow X_K(G), \quad (4.33)$$

т.е. $(E_K v)(x) \equiv v(x)$ при $x \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать функции $(E_K v)(x)$ в виде

$$(E_K v)(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \Omega, \\ \sum_{j=1}^K c_j \varepsilon_j(x), & x \in \omega \equiv G \setminus \Omega, \end{cases} \quad (4.34)$$

где константы c_j определяются из равенств:

$$\sum_{j=1}^K c_j \int_{\omega} \varepsilon_j(x) \varepsilon_k(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \varepsilon_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4.35)$$

Равенства (4.35), очевидно, гарантируют принадлежность функции (4.34) пространству (4.32).

Пусть $a_{ij} = \int_{\omega} \varepsilon_i(x) \varepsilon_j(x) dx$. Тогда матрица $A = \|a_{ij}\|$ положительно определена. Действительно, для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_K) \in \mathbb{R}^K$

$$(A\alpha, \alpha) = \sum_{i,j=1}^K a_{ij} \alpha_i \alpha_j = \int_{\omega} \left| \sum_{i=1}^K \alpha_i \varepsilon_i(x) \right|^2 dx \geq 0.$$

При этом если достигается равенство, то $\sum_{i=1}^K \alpha_i \varepsilon_i(x) \equiv 0$ при $x \in \omega$, откуда в силу следствия 4.1 $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, N$. Поэтому матрица A имеет обратную A^{-1} и неизвестные $c = (c_1, \dots, c_K)$ системы (4.35) определяются по формуле

$$c = A^{-1}\hat{v}, \quad \text{где} \quad \hat{v} = \left(- \int_{\Omega} v(x) \bar{e}_1(x) dx, \dots, - \int_{\Omega} v(x) \bar{e}_N(x) dx \right). \quad (4.36)$$

Очевидно, оператор (4.34), (4.36) является непрерывным оператором продолжения из $L_p(\Omega)$ в $X_K(G)$.

Рассмотрим теперь в вещественном пространстве $\mathring{W}_p^1(G)$ подпространство

$$X_K^1(G) = \left\{ v(x) \in \mathring{W}_p^1(G) : \int_G v(x) \varepsilon_j(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, K \right\}, \quad (4.37)$$

где $\varepsilon_j(x)$ — функции (4.29), и докажем аналог теоремы 4.2 о продолжении, заменив пространство (4.32) на (4.37), а $L_p(\Omega)$ — на пространство типа $W_p^1(\Omega)$. Чтобы определить это пространство, уточним сначала условия (4.3), (4.6), (4.7) на области Ω , G и ω . Будем предполагать, что

$$\partial\Omega \in C^\infty, \quad \partial G \in C^2, \quad \partial\omega \cap \partial\Omega = \Gamma \quad \text{и} \quad \partial\Gamma = \partial\Gamma_0 = \bar{\Gamma} \cap \bar{\Gamma}_0 \in C^2. \quad (4.38)$$

Очевидно, граница $\partial\omega$ не является гладкой. Будем предполагать, что она состоит из объединения бесконечно гладких $(d-1)$ -мерных компонент $\partial G \setminus \partial\Omega$, Γ и $(d-2)$ -мерной компоненты $\partial\Gamma$, являющейся сингулярностью границы $\partial\omega$.² Введем локальные координаты на $\partial\omega$ в окрестности $\partial\Gamma$ так, чтобы x_1 было геодезическим расстоянием в Γ до $\partial\Gamma$, x_2 было геодезическим расстоянием в $\partial G \setminus \partial\Omega$ до $\partial\Gamma$ и $(x_3, \dots, x_d)$ были локальными координатами на $\partial\Gamma$. Будем предполагать, что в локальных координатах $x_1, y, x_3, \dots, x_d$, введенных в ω , где y — расстояние в объемлющем пространстве до $\partial\Omega$, x_2 определяется формулой

$$x_2 = x_1^2. \quad (4.39)$$

Отметим, что выбор ω находится в нашей власти, так как построение ω является одним из элементов решения задачи стабилизации. Соотношение (4.39) не противоречит предположению о C^2 -гладкости $\partial\Omega$ и ∂G , и поэтому область ω , удовлетворяющая (4.39), может быть легко пристроена к Γ . Введем пространство

$$W_p^1(\Omega; \Gamma) = \{ u(x) \in W_p^1(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0, \quad u(x) = (\gamma_\Omega v), \quad \text{где} \quad v \in \mathring{W}_p^1(G) \}, \quad (4.40)$$

где γ_Ω — оператор сужения функции $v \in \mathring{W}_p^1(G)$ на Ω . Норма в этом пространстве определяется соотношением

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega; \Gamma)} = \inf_L \|Lu\|_{\mathring{W}_p^1(G)},$$

где нижняя грань берется по всем продолжениям функции u до функции из $\mathring{W}_p^1(G)$.

² Конечно, возможен случай, когда граница $\partial\Omega$ состоит из непересекающихся компонент Γ и Γ_0 . Эта ситуация значительно проще рассматриваемой, и ради краткости она здесь специально обсуждаться не будет.

ЛЕММА 4.1. *Пространство (4.40) является замкнутым подпространством пространства $\widehat{W}_p^1(\Omega) \equiv \{u(x) \in W_p^1(\Omega) : \gamma_{\Gamma_0} u = 0\}$, не совпадающим при $p > 2$ с $\widehat{W}_p^1(\Omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в равенстве $u(x) = \gamma_{\Omega} v(x)$ из (4.40) v можно заменить на $v + w$, где $w \in \overset{\circ}{W}_p^1(\omega)$ при $x \in \omega$ и $w \equiv 0$ при $x \in \Omega$, то, как легко видеть, существует линейный непрерывный оператор продолжения $R: W_p^1(\Omega; \Gamma) \rightarrow \overset{\circ}{W}_p^1(G)$.

Пусть $u_n \in W_p^1(\Omega, \Gamma)$ и $u_n \rightarrow u$ в $W_p^1(\Omega)$. Так как последовательность $\|Ru_n\|_{\overset{\circ}{W}_p^1(G)}$ ограничена, то, переходя, если надо, к подпоследовательности,

получим, что $Ru_n \rightarrow \widehat{v}$ слабо в $\overset{\circ}{W}_p^1(G)$. Очевидно, $\gamma_{\Omega} \widehat{v} = u$ и, значит, $u \in W_p^1(\Omega, \Gamma)$.

Пусть $u \in W_p^1(\Omega, \Gamma)$ и $u = \gamma_{\Omega} v$ с $v \in \overset{\circ}{W}_p^1(G)$. Очевидно, при почти всех $x' = (x_3, \dots, x_d)$ справедливо включение $v(x_1, x_2, x') \in W_p^1(B_{\varepsilon})$, где в силу (4.39)

$$B_{\varepsilon} = \{x_1 \in (0, \varepsilon), 0 \leq x_2 \leq x_1^2\}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Так как $v(x_1, x_1^2, x') = 0$ и в силу теоремы вложения Соболева $v(x_1, x_2, x') \in C^{\alpha}(B_{\varepsilon})$, где $0 \leq \alpha < 1 - 2/p$, то

$$|u(x_1, 0, x')| = |v(x_1, 0, x')| \leq d(x') x_1^{2\alpha}, \quad (4.41)$$

где $d(x') \in L_p(\Gamma)$. На $\partial\Omega$ рассмотрим функцию $\varphi(x)$, равную нулю на Γ_0 , в окрестности $\partial\Gamma_0 = \partial\Gamma$ равную x_1^{β} , где x_1 — геодезическое расстояние в Γ до Γ_1 , а $\beta > 1 - 2/p$ и $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция в Γ . Непосредственное вычисление норм $W_p^{1-1/p}$ для функции x^{β} показывает, что при $\beta > 1 - 2/p$ имеет место $x^{\beta} \in W_p^{1-1/p}(0, 1)$. Так как всегда можно выбрать $\alpha \in (0, 1 - 2/p)$ и $\beta > 1 - 2/p$ так, что $\beta < 2\alpha$, то из (4.41) следует второе утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Утверждение леммы 4.1 и ее доказательство сохраняются, если включения в (4.38) заменить на $\partial\Omega \in C^{\gamma}$, $\partial G \in C^{\gamma}$, $\partial\Gamma \in C^{\gamma}$, где $\gamma > 1$.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть Ω и G — области в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющие (4.6), (4.7), (4.38). Существует линейный непрерывный оператор продолжения*

$$E_K^1: W_p^1(\Omega, \Gamma) \rightarrow X_K^1(G). \quad (4.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω_{ε} — пересечение ε -окрестности Ω и ω , $\omega_1 = \omega \setminus \omega_{\varepsilon}$. Положим $\psi_0 \in C^{\infty}(G)$, $\psi_0(x) = 1$ при $x \in \Omega$, $\psi_0(x) = 0$ при $x \in \omega_1$, а $\psi_1(x) = 1 - \psi_0(x)$. Пусть, как в лемме 4.1, $R: W_p^1(\Omega; \Gamma) \rightarrow \overset{\circ}{W}_p^1(G)$ — оператор продолжения. Для $v(x) \in W_p^1(\Omega; \Gamma)$ аналогично (4.34) положим

$$(E_K^1 v)(x) = \psi_0(x) Rv(x) + \psi_1(x) \sum_{j=1}^k c_j \varepsilon_j(x), \quad (4.43)$$

где константы c_j определяются из равенства

$$\sum_{j=1}^k c_j \int_{\omega} \varepsilon_j(x) \varepsilon_k(x) \psi_1(x) dx = - \int_G \psi_0(x) Rv(x) \varepsilon_k(x) dx, \quad k = 1, \dots, K. \quad (4.44)$$

Так же, как в теореме 4.2, устанавливается обратимость матрицы $A = \|a_{ij}\|$, где

$$a_{ij} = \int_{\omega} \varepsilon_i(x) \varepsilon_j(x) \psi_1(x) dx,$$

и тем самым однозначно определяются коэффициенты c_j из (4.43).

4.3. Результаты о стабилизации. Докажем основные теоремы этого параграфа о стабилизируемости посредством граничного управления с обратной связью (см. определение 4.1).

ТЕОРЕМА 4.4. *Для любого начального условия $y_0 \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, и любого $\sigma_0 > 0$ существует управление u , заданное на части границы $\Sigma = R_+ \times \Gamma$, с обратной связью такое, что решение $y(t, x)$ задачи (4.1), (4.2), (4.4) удовлетворяет неравенству:*

$$\|y(t, \cdot)\|_{L_p(\Omega)} \leq ce^{-\sigma_0 t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (4.45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — оператор (4.11), (4.12), действующий в пространстве $X = L_p(G)$, где $1 < p < \infty$. Как отмечалось в п. 4.2 (случай 1), этот оператор является секториальным с компактной резольвентой, причем спектры операторов $-A$ и его сопряженного $-A^*$ совпадают: $\sigma(-A) = \sigma(-A^*)$ и состоят из дискретного множества точек $-\lambda_j$. Допустим, что число σ_0 удовлетворяет условию (3.29). Если это не так, то немного увеличим σ_0 , добившись (3.29). Пусть (3.39) — множество собственных и присоединенных векторов оператора $-A^*$, соответствующих собственным значениям $-\bar{\lambda}_j$ с $\operatorname{Re}(-\bar{\lambda}_j) > -\sigma_0$. По (3.39) строим функции (4.28), (4.29), а по этим функциям строим пространство (4.32). Пусть $y_0 \in L_p(\Omega)$ — заданное начальное условие задачи (4.1), (4.2), (4.4). Снабдим задачу (4.10), (4.12) начальным условием

$$z(t, x) \big|_{t=0} = z_0(x) \equiv (E_K y_0)(x), \quad (4.46)$$

где E_K — оператор продолжения, построенный в теореме 4.2. Так как $E_K y_0 \in X_K(G)$, вектор $x = E_K y_0$ удовлетворяет условию (3.40) теоремы 3.4. В силу этой теоремы, примененной к задаче (4.10), (4.12), (4.46), решение этой задачи удовлетворяет оценке (3.41), которая совпадает с оценкой

$$\|z(t, \cdot)\|_{L_p(G)} \leq ce^{-\sigma_0 t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (4.47)$$

Пусть $\gamma_\Omega, \gamma_\Gamma$ — операторы сужения функции, заданной в области G , соответственно на область Ω и часть Γ границы $\partial\Omega$. Тогда, очевидно, пара

$$(y(t, x), u(t, x)) = (\gamma_\Omega z(t, x), \gamma_\Gamma z(t, x)) \quad (4.48)$$

является решением задачи (4.1), (4.3), (4.4), причем в силу (4.47) справедлива оценка (4.45). Согласно определению 4.1 управление $u(t, x)$, определенное в (4.48), является управлением с обратной связью.

ТЕОРЕМА 4.5. *Для любого начального условия $y_0 \in W_p^1(\Omega, \Gamma)$, $1 < p < \infty$, и любого $\sigma_0 > 0$ существует управление u с обратной связью, заданное на Σ и такое, что решение $y(t, x)$ задачи (4.1), (4.2), (4.4) удовлетворяет неравенству*

$$\|y(t, \cdot)\|_{W_p^1(\Omega)} \leq ce^{-\sigma_0 t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (4.49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично теореме 4.4 обозначим через A оператор (4.11), (4.12), действующий в пространстве $X = \overset{\circ}{W}_p^1(G)$. Снабдим задачу (4.10), (4.12) начальным условием

$$z|_{t=0} = z_0(x) = (E_K^1 y_0)(x), \quad (4.50)$$

где E_K^1 – оператор продолжения, построенный в теореме 4.3, а $y_0(x) \in W_p^1(\Omega, \Gamma)$ – начальное условие задачи (4.1), (4.2), (4.4). Применяя теорему 3.4 и замечание 3.1, получим, что решение $z(t, x)$ задачи (4.10), (4.12), (4.50) удовлетворяет оценке

$$\|z(t, \cdot)\|_{W_p^1(G)} \leq c e^{-\sigma_0 t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

откуда пара (y, u) , определенная в (4.48), является решением задачи (4.1), (4.2), (4.4), удовлетворяющим (4.49) и обладающим управлением с обратной связью.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Предложенный метод позволяет решить задачу стабилизации уравнения (4.1) с оценкой (4.5) с любым натуральным k . Нужно только правильно выбирать подходящие функциональные пространства. Например, для $k = 2$ надо брать $X = X^2 = W_p^2(G) \cap \overset{\circ}{W}_p^1(G)$ при $k = 3$, $X = X^3 = \{v(x) \in W_p^3(\Omega) : v|_{\partial G} = 0, A(x, \mathcal{D})v(x)|_{\partial G} = 0\}$, где $A(x, \mathcal{D})$ – оператор (4.11) и т.д. Вместо пространства (4.40) нужно брать пространство $W_p^k(\Omega, \Gamma) = \gamma_\Omega X^k$, $k = 2, 3$, где X^k определены выше. При этом нужно усилить требования гладкости на коэффициенты операторов (4.1), (4.11) и на границы $\partial\Omega, \partial G$.

4.4. Подавление непредусмотренных флуктуаций. Покажем, что определение 4.1 управления с обратной связью вполне согласуется с исходными физическими представлениями об обратной связи. Согласно этим представлениям управление с обратной связью должно реагировать на непредусмотренные внешние воздействия и подавлять нежелательные возмущения решения, возникающие из-за этих флуктуаций.

Пусть для определенности $X = W_p^1(G)$, $1 < p < \infty$, и (y, u) – решение задачи (4.1), (4.2), (4.4), построенное в теореме 4.5. Предположим, что $y(t, x)$, $x \in \Omega$, подвергается предусмотренным внешним воздействиям, в результате которых нарушается оценка (4.49). Построим управление, стабилизирующее решение и в этом случае, однако с оценкой

$$\|y(t, \cdot)\|_{W_p^1(\Omega)} < c e^{-\sigma_1 t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (4.51)$$

где $\sigma_1 < \sigma_0$, а константа c та же, что и в (4.49).

Итак, пусть в результате внешнего воздействия решение $y(t, x)$ исказилось, превратившись в $\tilde{y}(t, x)$, причем $\tilde{y}(t, x)$ удовлетворяет (4.1), (4.4) с u , полученным из (4.48). Это решение $\tilde{y}$ уже не удовлетворяет (4.49) и, более того, в некоторый момент времени t_1 оно перестает удовлетворять (4.51).

Применим к $\tilde{y}(t_1, x)$ оператор E_K^1 , построенный в теореме 4.3. Это возможно, так как $\tilde{y}$ удовлетворяет (4.4) с u , полученным из (4.48), и поэтому функция

$$\tilde{z}(x) = \begin{cases} \tilde{y}(t_1, x), & x \in \Omega, \\ z(t_1, x), & x \in \omega, \end{cases}$$

с $z(t_1, x)$ из (4.48), очевидно, принадлежит $\overset{\circ}{W}_p^1(G)$, а следовательно, $\tilde{y}(t_1, x) \in W_p^1(\Omega, \Gamma)$.

Пусть $z_1(t, x)$, $t > t_1$, — решение задачи (4.10), (4.12) с начальным условием

$$z_1(t, x)|_{t=t_1} = E_K^1 \tilde{y}(t_1, x). \quad (4.52)$$

При $t > t_1$ заменим пару (y, u) , полученную из (4.48), на

$$(y_1(t, x), u_1(t, x)) = (\gamma_\Omega z_1(t, x), \gamma_\Gamma z_1(t, x)). \quad (4.53)$$

Очевидно, $y_1(t, x)$ будет удовлетворять оценке, аналогичной (4.49).

Если $y_1(t, x)$ также подверглось внешнему воздействию, превратившись в $\tilde{y}_1(t, x)$, и эта функция в момент t_2 перестала удовлетворять (4.51), мы, повторяя предыдущую конструкцию, строим решение $(y_2(t, x), u_2(t, x))$ при $t > t_2$. Эта конструкция повторяется после каждого непредусмотренного внешнего воздействия на решение.

Пусть $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ — моменты времени, когда из-за внешних воздействий перестает удовлетворяться неравенство (4.51), и пусть

$$(y_i(t, x), u_i(t, x)) = (\gamma_\Omega z_i(t, x), \gamma_\Gamma z_i(t, x)), \quad (4.54)$$

где $z_i(t, x)$, $t > t_i$, — решение задачи (4.10), (4.12) с начальным условием

$$z_i(t, x)|_{t=t_i} = E_K^1 \tilde{y}_{i-1}(t_i, x). \quad (4.55)$$

Тогда решением задачи стабилизации системы (4.1), (4.2), подверженной непредусмотренным внешним воздействиям, является пара функций

$$(\hat{y}(t, x), \hat{u}(t, x)) = (y_i(t, x), u_i(t, x)) \quad \text{при } t \in (t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.56)$$

где $t_0 = 0$, $(y_0(t, x), u_0(t, x))$ — пара функций, определенных (4.48), а (y_i, u_i) , $i = 1, 2, \dots$, определены формулой (4.54). Легко видеть, что пару $(\hat{y}, \hat{u})$, определенную в (4.56), можно задать формулой

$$(\hat{y}(t, x), \hat{u}(t, x)) = (\gamma_\Omega \hat{z}(t, x), \gamma_\Gamma \hat{z}(t, x)), \quad (4.57)$$

где $\hat{z}(t, x)$ — решение следующей краевой задачи:

$$\partial_t \hat{z}(t, x) + A(x, \mathcal{D}) \hat{z}(t, x) = f + \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t - t_i) w_i(x), \quad (4.58)$$

$$\hat{z}|_S = 0, \quad \hat{z}|_{t=0} = E_K^1 y_0(x), \quad (4.59)$$

где $A(x, \mathcal{D})$ — оператор (4.11), f — символическое обозначение непредусмотренных внешних воздействий на систему³,

$$w_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega, \\ E_K^1 \tilde{y}_{i-1}(t_i, x) - z_{i-1}(t_i, x), & x \in \omega. \end{cases}$$

Назовем *частотой воздействия на систему* число

$$\tau = \left[\min_{i=0,1,2,\dots} (t_{i+1} - t_i) \right]^{-1}. \quad (4.60)$$

³ Нам неизвестен явный вид f . Мы знаем лишь, что f воздействует на систему (4.1), (4.2) (и поэтому $f|_{\mathbb{R}_+ \times (\omega \cup \bar{\Gamma})} = 0$), в результате чего возникают моменты времени t_i , когда нарушается оценка (4.51).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Решение (4.56) задачи стабилизации системы (4.1), (4.2), (4.4), подверженной внешним воздействиям, удовлетворяет оценке (4.51), если частота τ воздействия на систему удовлетворяет условию*

$$\tau < \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\ln(M \|E_K^1\|)}, \quad (4.61)$$

где σ_0, σ_1 — константы из (4.49), (4.51), M — константа из оценки (3.41), в которой A — это оператор (4.11), действующий в пространстве $X = \overset{\circ}{W}_p^1(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из определения следует, что

$$\|\tilde{y}_{i-1}(t_i, \cdot)\|_{W_p^1(\Omega, \Gamma)} = ce^{-\sigma_1 t_i}. \quad (4.62)$$

Поэтому в силу (4.55) и (3.41)

$$\begin{aligned} \|z_i(t_{i+1}, \cdot)\|_{\overset{\circ}{W}_p^1(G)} &\leq M e^{-\sigma_0(t_{i+1}-t_i)} \|z_i(t_i, \cdot)\|_{\overset{\circ}{W}_p^1(G)} \\ &\leq M e^{-\sigma_0(t_{i+1}-t_i)} \|E_K^1\| ce^{-\sigma_1 t_i}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Чтобы определение t_{i+1} было возможно, достаточно, чтобы правая часть неравенства (4.63) была меньше величины (4.62), в которой i заменено на $i+1$, т.е.

$$M e^{-\sigma_0(t_{i+1}-t_i)} \|E_K^1\| ce^{-\sigma_1 t_i} < ce^{-\sigma_1 t_{i+1}}.$$

Это неравенство эквивалентно оценке

$$t_{i+1} - t_i > \frac{\ln(M \|E_K^1\|)}{\sigma_0 - \sigma_1},$$

которая следует из (4.61) в силу определения (4.60) частоты τ .

§ 5. Инвариантное многообразие квазилинейного параболического уравнения

Начнем с напоминания необходимых нам фактов.

5.1. Инвариантные многообразия полугрупп операторов. В банаховом пространстве X рассмотрим полугруппу нелинейных операторов $S_t: X \rightarrow X$, $t \in \mathbb{R}_+$, у которой 0 — стационарная точка: $S_t 0 = 0 \quad \forall t \geq 0$. Положим $S = S_1$ и будем считать, что справедливо разложение

$$Su = Lu + B(u), \quad (5.1)$$

где L — ограниченный линейный, а B — нелинейный операторы, удовлетворяющие следующим условиям: L обладает двумя инвариантными замкнутыми подпространствами X_+ и X_- :

$$X_+ \cap X_- = \{0\}, \quad X = X_+ + X_-, \quad LX_+ \subset X_+, \quad LX_- \subset X_-.$$

Соответствующие проекторы на X_+ и X_- обозначаются Π_+ и Π_- :

$$\Pi_+ u = u_+ \in X_+, \quad \Pi_- u = u_- \in X_-, \quad \Pi_+ + \Pi_- = E,$$

где, напомним, E – единичный оператор. Обозначим через L_+ и L_- сужение L на X_+ и X_- соответственно. Предполагается, что существуют такая константа $r > 0$ и числа $0 < \varepsilon_+ < 1$, $0 < \varepsilon_- < 1$, что

$$\|L_-\| \leq r(1 - \varepsilon_-), \quad \|L_+^{-1}\| \leq r^{-1}(1 - \varepsilon_+), \quad (5.2)$$

где $L_+^{-1}: X_+ \rightarrow X_+$ – оператор, обратный к L_+ . (Существование L_+^{-1} , естественно, предполагается.) Предполагается, что $B(u)$ дифференцируем по Фреше, причем

$$B(0) = 0, \quad B'(0) = 0, \quad \|B'(u)\| \leq \mu \quad \forall u \in X, \quad (5.3)$$

где $B'(u)$ – производная по Фреше оператора B в точке u . Предполагается также, что оператор B' – класса C^α с некоторым $0 < \alpha \leq 1$, т.е.

$$\|B'\|_\alpha \equiv \sup_{0 \leq \|u-v\| \leq 1} \frac{\|B'(u) - B'(v)\|_X}{\|u-v\|_X^\alpha} \leq c_0. \quad (5.3')$$

Будет установлено существование инвариантного относительно S многообразия M_- (т.е. $SM_- \subset M_-$), представимого в виде графика

$$M_- = \{u \in X : u = u_- + g(u_-), \quad u_- \in X_-\}, \quad (5.4)$$

где $g: X_- \rightarrow X_+$ – оператор-функция класса $C^{1+\alpha}$, причем

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0 \quad (5.5)$$

и, кроме того,

$$\|g'(v)\|_X \leq q, \quad \|g'\|_\alpha \leq c_0. \quad (5.6)$$

Множество операторов $g: X_- \rightarrow X_+$ класса $C^{1+\alpha}$, удовлетворяющих условиям (5.5), (5.6), будем обозначать $G_q^\alpha(c_0)$, или короче, G_q^α . Отметим, что условия (5.5) означают, что многообразие (5.4) касается подпространства X_- в нуле.

Известно (см. [16; гл. 5, § 2], [10]), что справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $0 < q \leq 1$ и число μ в условии (5.3) достаточно мало. Тогда существует единственная функция $g \in G_q^\alpha$ такая, что многообразие M_- , определяемое формулой (5.4), инвариантно относительно S , т.е. $SM_- \subset S$. Если q и μ достаточно малы, то справедлива оценка*

$$\|S^k u\|_X \leq r^k \|u\| \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad u \in M_-, \quad (5.7)$$

где r – константа из (5.2).

Нам понадобится следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Полугруппа линейных ограниченных операторов $S_t: X \rightarrow X$ называется *почти устойчивой*, если выполнены следующие условия:

- 1) S_t ограничены в X по норме при $0 \leq t \leq T$ константой, зависящей от T ;
- 2) $\langle S_t u, \varphi \rangle$ непрерывно по $t \quad \forall u \in X, \forall \varphi \in \Phi^*$, где Φ^* – всюду плотное множество в X^* ;
- 3) существует $r_0 \subset (0, 1)$ такое, что вне круга $|\zeta| \leq r_0$ имеется лишь конечное множество $\sigma_+ = \{\zeta_1, \dots, \zeta_N\}$ точек спектра оператора S_1 ;
- 4) инвариантное подпространство оператора S_1 , соответствующее σ_+ , конечномерно.

Имеет место также следующая теорема (см. [16; гл. 5, § 2]).

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть S_t – полугруппа операторов, действующих в X , причем $S_t(u)$ – класса $C^{1+\alpha}$ по u , $S_t(0) = 0$ и $\partial_u S_t(0) \equiv S'_t(0) = e^{-At}$ – линейная почти устойчивая полугруппа. Пусть r и $S = S_t|_{t=1}$ удовлетворяют всем условиям, наложенным в теореме 5.1, причем

$$\|S_\tau u\|_X \leq c \|u\|_X \quad \forall \tau \in (0, 1), \quad (5.8)$$

где c не зависит от u при $\|u\| \leq R$. Тогда M_- инвариантно относительно S_t .

5.2. Квазилинейное параболическое уравнение. Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение в пространственной области $G \subset \mathbb{R}^d$ с границей ∂G класса $C^{2+\alpha}$, где $0 < \alpha \leq 1$:

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} + \mathcal{A}(x, y(t, x)) = g(x), \quad x \in G, \quad t > 0. \quad (5.9)$$

Здесь

$$\mathcal{A}(x, y(t, x)) = - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} + b(x, y(t, x), \nabla y(t, x)) - a_0(x, y), \quad (5.10)$$

где $\nabla y = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_d} \right) = \text{grad } y$, $a_{ij}(x) \in C^3(\overline{G})$, $b(x, y, p) \in C^3(\overline{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, $a_0(x, y) \in C^3(\overline{G} \times \mathbb{R})$, $g(x) \in C^\alpha(\overline{G})$, причем

$$b(x, u, 0) = 0, \quad b(x, 0, \xi)|_{\partial G} = 0, \quad (5.10')$$

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x, v) \xi_i \xi_j \geq \gamma_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d. \quad (5.10'')$$

На решение $y(t, x)$ накладывается нулевое граничное условие

$$y|_{\partial G} = 0. \quad (5.11)$$

Пусть $\hat{y}(x) \in C^3(\overline{G})$ – стационарное решение задачи (5.9), (5.11), т.е.

$$\mathcal{A}(x, \hat{y})(x) = g(x), \quad x \in G; \quad \hat{y}|_{\partial G} = 0. \quad (5.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Так как никаких условий, кроме гладкости и эллиптичности, на функции a_{ij} , b , a_0 не накладывается, то вопрос о разрешимости “в целом” задачи (5.12) при любом $g \in C^\delta(\bar{G})$ открыт и поэтому выполнение условия (5.12) постулируется. Построить примеры, когда (5.12) выполнено, очень просто: достаточно взять любую функцию $\hat{y} \in C^{2+\delta}(\bar{G})$, равную нулю на границе ∂G , и, подставив ее в левую часть уравнения (5.12), найти $g(x)$.

Наша цель состоит в построении в окрестности стационарного решения $\hat{y}(x)$ устойчивого инвариантного многообразия M_- . Это многообразие будет построено с помощью теорем 5.1 и 5.2.

Сделаем в уравнении (5.9) замену

$$y(t, x) = \hat{y}(x) + z(t, x). \quad (5.13)$$

Подставляя (5.13) в (5.9) и вычитая из полученного уравнения равенство (5.12), будем иметь:

$$\frac{\partial z(t, x)}{\partial t} + \mathcal{A}(\hat{y} + z) - \mathcal{A}(\hat{y}) = 0.$$

Выделив в этом уравнении линейную часть, получим

$$\frac{\partial z(t, x)}{\partial t} + A(x, \mathcal{D})z(t, x) + F(x, z(t, x)) = 0. \quad (5.14)$$

Здесь

$$A(x, \mathcal{D})z = \mathcal{A}'(x, \hat{y}(x))z = - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^d \hat{b}_j(x) \frac{\partial z}{\partial x_j} + \hat{c}(x)z \quad (5.15)$$

— эллиптический оператор с коэффициентами

$$\hat{b}_j(x) = \left. \frac{\partial b(x, \hat{y}(x), p)}{\partial p_j} \right|_{p=\nabla \hat{y}(x)}, \quad \hat{c}(x) = \left(\frac{\partial b(x, y, \nabla \hat{y})}{\partial y} - \frac{\partial a_0(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{y=\hat{y}(x)}, \quad (5.15')$$

а нелинейный член F определяется соотношением

$$F(x, z(x)) = \mathcal{A}(x, \hat{y}(x) + z(x)) - \mathcal{A}(x, \hat{y}(x)) - \mathcal{A}'(x, \hat{y}(x))z(x). \quad (5.16)$$

Правую часть равенства (5.16) легко выразить через функции a_{ij} , b , a_0 из (5.10) и их производные. Мы не будем этого делать. Отметим лишь следующее очевидное свойство оператора F :

$$F(x, z)|_{z=0} = 0, \quad F'_z(x, z)|_{z=0} = 0, \quad (5.17)$$

где F'_z — производная по Фреше оператора F по функциональному переменному z . Из приведенных выше предположений о гладкости функций a_{ij} и b из (5.9) и гладкости стационарного решения $\hat{y}(x)$ легко следует, что оператор $F: C^{2+\alpha}(\bar{G}) \rightarrow C^\alpha(\bar{G})$, определенный в (5.16), принадлежит классу $C^{1+\alpha}$. На решение z уравнения (5.14) наложим граничное условие

$$z(t, x)|_{\partial G} = 0 \quad (5.18)$$

и начальное условие

$$z|_{t=0} = z_0(x). \quad (5.19)$$

Приведем некоторые факты о разрешимости задачи (5.14), (5.18), (5.19) в гёльдеровых классах функций. Напомним, что норма пространства $C^{2+\delta}(\overline{G})$ состоит из суммы $C(G)$ -норм функции и ее первых и вторых производных плюс гёльдеровы нормы вида (5.3') для всех вторых производных. Для функций $u(y)$, $y = (t, x)$, определенных на пространственно-временном цилиндре $Q_T = (0, T) \times G$, норма пространства $C^{\delta/2, \delta}(Q_T)$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{\delta/2, \delta}(Q_T)} &= \|u\|_{C^0(\overline{Q_T})} + [u]_{\delta/2, \delta; Q_T}, \\ [u]_{\delta/2, \delta; Q_T} &= \sup_{y_1 \neq y_2, y_i \in Q_T} \frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{\rho^\delta(y_1, y_2)}, \end{aligned}$$

где $\rho(y_1, y_2) = |t_1 - t_2|^{1/2} + |x_1 - x_2|$. Норма пространства $C^{1+\delta/2, 2+\delta}(Q_T)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{1+\delta/2, 2+\delta}(Q_T)} &= \|u\|_{C^0(\overline{Q_T})} + [\partial_t u]_{\delta/2, \delta; Q_T} + \|\partial_t u\|_{C^0(\overline{Q_T})} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^d ([\partial_{x_i} \partial_{x_j} u]_{\delta/2, \delta; Q_T} + \|\partial_{x_i} \partial_{x_j} u\|_{C(\overline{Q_T})}). \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала линейную задачу

$$\partial_t z(t, x) + A(x, \mathcal{D})z(t, x) = h(t, x) \quad (5.20)$$

при условиях (5.18), (5.19). Положим

$$C_0^{\delta/2, \delta}(Q_T) = \{u(t, x) \in C^{\delta/2, \delta}(Q_T) : u|_\Sigma = 0\}, \quad (5.21)$$

$$C_0^{1+\delta/2, 2+\delta}(Q_T) = \{u(t, x) \in C^{1+\delta/2, 2+\delta}(Q_T) : u|_\Sigma = 0, A(x, \mathcal{D})u|_\Sigma = 0\}, \quad (5.22)$$

$$C_0^{2+\delta}(Q_T) = \{u(x) \in C^{2+\delta}(G) : u|_{\partial G} = 0, A(x, \mathcal{D})u|_{\partial G} = 0\}. \quad (5.23)$$

В [17], [18] доказана

ТЕОРЕМА 5.3. *При любых $T > 0$, $h \in C_0^{\delta/2, \delta}(G_T)$, $z_0 \in C_0^{2+\delta}(G)$ существует единственное решение $z \in C_0^{1+\delta/2, 2+\delta}(G_T)$ задачи (5.18)–(5.20). При этом*

$$\|z\|_{C^{1+\delta/2, 2+\delta}(Q_T)} \leq c_T (\|h\|_{C^{\delta/2, \delta}(Q_T)} + \|z_0\|_{C^{2+\delta}(G_T)}), \quad (5.24)$$

где c_T зависит от $T > 0$, но не зависит от h , z_0 .

Рассмотрим теперь задачу (5.14), (5.18), (5.19). Из теоремы 5.3 выводится

ТЕОРЕМА 5.4. *Для любого $T > 0$ существует такое $r > 0$, что для любого $z_0 \in Z_r^{2+\delta} \equiv \{z_0 \in C_0^{2+\delta}(G) : \|z_0\|_{C^{2+\delta}(G)} < r\}$ существует единственное решение $z \in C_0^{1+\delta/2, 2+\delta}(Q_T)$ задачи (5.14), (5.18), (5.19). При этом разрешающий оператор Θ , сопоставляющий начальному условию z_0 решение z задачи (5.14), (5.18), (5.19), непрерывен на $Z_r^{2+\delta}$ и принадлежит гёльдеровому классу $C^{1+\lambda}(Z_r^{2+\delta})$ (определение $C^{1+\alpha}$ см. в (5.3')).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой об обратном операторе, являющейся следствием теоремы о неявной функции (удобную для нас формулировку см. в [16; гл. VIII, § 1]. Действительно, рассмотрим оператор, соответствующий задаче (5.14), (5.18), (5.19), т.е.

$$\widehat{A} \equiv (\partial_t + A(x, \mathcal{D}) + F(x, \cdot), \gamma_0): C_0^{1+\delta/2, 2+\delta}(Q_T) \rightarrow C_0^{\delta/2, \delta}(Q_T) \times C_0^{2+\delta}(G), \quad (5.25)$$

где $\gamma_0 z = z|_{t=0}$. Покажем, что если $z \in C_0^{1+\delta/2, 2+\delta}(Q)$, то $\widehat{A}(z) \in C_0^{\delta/2, \delta}(Q_T) \times C_0^{2+\delta}(G)$. Требуемая гладкость у $\widehat{A}(z)$, очевидно, имеется. Необходимо проверить выполнение граничных условий. Равенства $\partial_t z|_{\Sigma} = 0$, $A(x, \mathcal{D})z|_{\Sigma} = 0$ следуют из определения (5.22). Учитывая определение (5.16) оператора F и (5.15), достаточно показать, что

$$\Xi \equiv (\mathcal{A}(x, \widehat{y}(x) + z(t, x)) - \mathcal{A}(x, \widehat{y}(x)))|_{\Sigma} = 0. \quad (5.26)$$

Так как $z|_{\Sigma} = 0$ и $\widehat{y}|_{\Sigma} = 0$ (см. (5.12)), то вследствие (5.10), (5.10'), (5.15), (5.15')

$$\Xi = - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\Sigma} = A(x, \mathcal{D})z|_{\Sigma} = 0,$$

что доказывает (5.26). В силу (5.22), (5.23) если $v \in C_0^{1+\delta/2, 2+\delta}(Q)$, то $\gamma v \in C_0^{2+\delta}(G)$. Непосредственно из предположений о гладкости функций a_{ij} , b , a_0 , определяющих оператор (5.9), следует, что (5.25) – оператор класса $C^{1+\alpha}$. В силу теоремы 5.3 оператор

$$\widehat{A}'(z)|_{z=0} = (\partial_t + A(x, \mathcal{D}), \gamma_0): C_0^{1+\delta/2, 2+\delta}(Q) \rightarrow C_0^{\delta/2, \delta}(Q) \times C_0^{2+\delta}(G)$$

осуществляет изоморфизм соответствующих пространств. Тем самым, проверены все условия теоремы об обратном операторе, и из этой теоремы следует существование оператора $\mathcal{R}$, обратного оператору (5.25). При этом $\mathcal{R}(h, z_0)$ определен в некоторой окрестности нуля пространства $C_0^{\delta/2, \delta}(Q_T) \times C_0^{2+\delta}(G_T)$ и принадлежит классу $C^{1+\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$). Очевидно, оператор

$$\Theta(z_0) = \mathcal{R}(0, z_0) \quad (5.27)$$

удовлетворяет всем требованиям теоремы 5.4.

Пусть $\gamma_\tau u = u|_{t=\tau}$ – оператор сужения при $t = \tau$. Введем семейство операторов

$$S_t(z_0) = \gamma_t \Theta(z_0) = \gamma_t \mathcal{R}(0, z_0), \quad (5.28)$$

где $\mathcal{R}$ – обратный к оператору (5.25).

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть T и $Z_r^{2+\delta}$ такие же, как в теореме 5.4. Тогда семейство операторов (5.28), определенное при $z_0 \in Z_r^{2+\delta}$, является полугруппой на $(0, T)$: $S_{t_1}(S_{t_2}(z_0)) = S_{t_1+t_2}(z_0)$ при $t_1, t_2, t_1+t_2 \in (0, T)$. При каждом $t \in (0, T)$ оператор $S_t(z_0)$ является по z_0 оператором класса $C^{1+\alpha}$. В частности, производная Фреше по z_0 при $z_0 = 0$: $S'_t(z_0)|_{z_0=0}$ является полугруппой операторов, задающей разрешающий оператор линейной задачи (5.20) с $h = 0$, (5.18), (5.19).

Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 5.4. Полугрупповое свойство операторов (5.28) справедливо потому, что операторы A и F из (5.14) не зависят явно от t .

5.3. Инвариантное многообразие квазилинейного уравнения. В окрестности стационарной точки $\hat{z} = 0$ полугруппы операторов $S(t)$, определенной формулой (5.28), построим для $S(t)$ инвариантное многообразие M_- . Полугруппа $S(t)$ является разрешающим оператором задачи (5.14), (5.18), (5.19) и определена в окрестности $Z_r^{2+\delta}$ нуля пространства $C_0^{2+\delta}(G)$.

Чтобы применить теоремы 5.1, 5.2, аналогично [19], [16] заменим в (5.14) F на оператор F_ε с малой нормой, совпадающей с F в окрестности нуля.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| < \frac{1}{2}$, $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq 1$, $1 \geq \varphi(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^1$. Положим

$$\psi_\varepsilon(u) = \varphi\left(\left\|\frac{u}{\varepsilon}\right\|_{W_p^2(G)}\right), \quad \text{где } p > \frac{d}{1-\delta}, \quad p \geq 2. \quad (5.29)$$

Введем оператор

$$F_\varepsilon(x, z(\cdot)) = F(x, z(\cdot))\psi_\varepsilon(z): C^{2+\delta}(G) \rightarrow C^\delta(G), \quad (5.30)$$

где F – оператор (5.16).

ЛЕММА 5.1. *Оператор (5.30) обладает свойствами: 1) существует такое $c > 0$, не зависящее от ε , что $F_\varepsilon(x, z(\cdot)) \equiv F(x, z(\cdot))$ при $\|z\|_{C^{2+\delta}} < \varepsilon/c$ и $F_\varepsilon(x, z) \equiv 0$ при $\|z\|_{W_p^2} > \varepsilon$; 2) оператор F_ε имеет по z гладкость $C^{1+\alpha}$ и при этом*

$$\|F'_\varepsilon(z)\| \leq c\varepsilon, \quad \|F'_\varepsilon\|_\alpha = \sup_{0 < \|w-v\|_{C^{2+\delta}} \leq \gamma} \frac{\|F'_\varepsilon(w) - F'_\varepsilon(v)\|_{C^\delta}}{\|w-v\|_{C^{2+\delta}}^\alpha} \leq c\varepsilon^{1-\alpha}, \quad (5.31)$$

где $F'_\varepsilon: C^{2+\delta}(G) \rightarrow C^\delta(G)$ – производная по Фреше оператора (5.30) и $\|F'_\varepsilon\|$ – норма этой производной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как вложение $C^{2+\delta}(G) \subset W_p^2$ непрерывно, то утверждение 1) сразу следует из свойств функции φ , задающей в (5.29) функционал ψ_ε . В силу (5.16), (5.10), (5.15)

$$\begin{aligned} F(x, z(\cdot)) &= b(x, \hat{y} + z, \nabla \hat{y} + \nabla z) - b(x, \hat{y}, \nabla \hat{y}) - \sum_{j=1}^d \frac{\partial b}{\partial p_j}(x, \hat{y}(x), p) \Big|_{p=\nabla \hat{y}} \frac{\partial z}{\partial x_j} \\ &\quad - \frac{\partial b}{\partial y}(x, y, \nabla \hat{y}) \Big|_{y=\hat{y}} z(x) + a(x, \hat{y} + z) - a(x, \hat{y}) - \frac{\partial a}{\partial y}(x, \hat{y})z. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для z с достаточно малой нормой $\|z\|_{C^{1+\delta}}$

$$\|F(z)\|_{C^\delta} \leq c(\|z\|_{C^\delta(G)}^2 + \|\nabla z\|_{C^\delta(G)}^2), \quad \|F'(z)\| \leq c(\|z\|_{C^\delta(G)} + \|\nabla z\|_{C^\delta(G)}). \quad (5.32)$$

Так как $p \geq 2$, то функционал $\|u\|_{W_p^2(G)}$ при $u \neq 0$ дважды дифференцируем на $C^{2+\delta}(G)$. Поэтому функционал $\psi_\varepsilon(u)$ из (5.29) дважды дифференцируем в любой точке $u \in C^{2+\delta}(G)$. При этом

$$\psi_\varepsilon(u) \leq 1, \quad \|\psi'_\varepsilon(u)\| \leq \frac{c_1}{\varepsilon} \quad \forall u \in C^{2+\delta}(G), \quad (5.33)$$

где c_1 не зависит от ε . В силу (5.29) и непрерывности вложения $W_p^2(G) \subset C^{1+\delta}(G)$, вытекающего из $1 - \delta > d/p$,

$$\psi_\varepsilon(u) = 0, \quad \psi'_\varepsilon(u) = 0 \quad \text{при} \quad \|u\|_{C^{1+\delta}(G)} \geq c_2\varepsilon, \quad (5.34)$$

где c_2 не зависит от ε . Из (5.30), (5.32)–(5.34) следует (5.31).

Вместо уравнения (5.14) рассмотрим уравнение

$$\partial_t z(t, x) + A(x, \mathcal{D})z(t, x) + F_\varepsilon(x, z(t, x)) = 0, \quad (5.35)$$

где F_ε – оператор (5.30). Справедлива

ЛЕММА 5.2. *Для любого $T > 0$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ задача (5.35), (5.18), (5.19) при любом $z_0 \in C^{2+\delta}(G)$ имеет единственное решение $z(t, x) \in C^{1+\frac{\delta}{2}, 2+\delta}(Q_T)$. Полугруппа $S_t(z_0)$, соответствующая задаче (5.35), (5.18), (5.19), т.е. определенная соотношением $S_t(z_0) = z(t, \cdot)$, где z – решение указанной задачи, при каждом $t \in (0, T)$ принадлежит классу $C^{1+\alpha}$ по z_0 . При этом при достаточно больших z_0*

$$S_t(z_0) = (S'_t(z)|_{z=0})z_0 = S'_t(0)z_0, \quad (5.36)$$

где $S'_t(z)|_{z=0}$ – производная по z , взятая в точке 0. Если же $\|z_0\|_{C^{2+\delta}}$ достаточно мало, то решения задач (5.35), (5.18), (5.19) и (5.14), (5.18), (5.19) совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор

$$(\partial_t + A(x, \mathcal{D}) + F_\varepsilon, \gamma_0): C_0^{1+\frac{\delta}{2}, 2+\delta}(Q_T) \rightarrow C_0^{\frac{\delta}{2}, \delta}(Q_t) \times C_0^{2+\delta}(G), \quad (5.37)$$

связанный с задачей (5.35), (5.18), (5.19). В силу теоремы 5.3 линейная часть этого оператора $(\partial_t + A, \gamma_0)$ имеет непрерывный обратный, который мы обозначим Θ_0 : $(\partial_t + A, \gamma_0)^{-1} = \Theta_0$. Тогда, как известно,

$$(\partial_t + A + F_\varepsilon, \gamma_0)^{-1} = (E + \Theta_0(F_\varepsilon, 0))^{-1}\Theta_0 = \Theta_0 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-\Theta_0(F_\varepsilon, 0))^k \right) \Theta_0. \quad (5.38)$$

Так как в силу леммы 5.1 оператор F_ε имеет малую норму, ряд в (5.38) сходится при достаточно малых ε , что доказывает существование оператора $(\partial_t + A + F_\varepsilon, \gamma_0)^{-1}$. Используя обозначения леммы 5.2 из (5.38), получим равенство

$$\begin{aligned} S_t(z_0) &= \gamma_t(\partial_t + A + F_\varepsilon, \gamma_0)^{-1}(0, z_0) \\ &= S'_t(0)z_0 + \gamma_t \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-\Theta_0(F_\varepsilon, 0))^k S'_t(0)z_0 \right). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Так как операторы F_ε и $S'_t(0)$ класса $C^{1+\alpha}$, то в силу (5.39) оператор $S_t(z_0)$ при достаточно малых ε также будет класса $C^{1+\alpha}$ по z_0 . Кроме того, если z_0 настолько велико, что при любых $t \in (0, T)$ имеет место $\|S'_t(0)z_0\|_{W_p^2(G)} \geq \varepsilon$, то из (5.39) сразу следует, что при любых $t \in (0, T)$ имеет место $S_t(z_0) = S'_t(0)z_0$. Последнее утверждение леммы вытекает из утверждения 1) леммы 5.1 и единственности решения задач (5.14), (5.18), (5.19) и (5.35), (5.18), (5.19).

В дальнейшем нам понадобится следующее простое следствие формулы (5.39).

СЛЕДСТВИЕ 5.1. При любом $t \in (0, T)$ справедливо равенство

$$S_t(z_0) = S'(0)z_0 + B_{t,\varepsilon}(z_0), \quad (5.40)$$

где операторы $S_t(z_0), S'_t(0)z_0$ определены в лемме 5.2, а $B_{t,\varepsilon}$ при каждом $t \in (0, T)$ – нелинейный оператор класса $C^{1+\alpha}$ по z_0 , причем производная этого оператора по z : $B'_{t,\varepsilon}(z_0)$ удовлетворяет оценкам:

$$\|B'_{t,\varepsilon}(z_0)\| \leq C_1(\varepsilon), \quad \|B'_{t,\varepsilon}(z_0)\|_\alpha \leq C_2(\varepsilon), \quad (5.41)$$

где $C_1(\varepsilon) \rightarrow 0, C_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $B_{t,\varepsilon}$ равным второму члену правой части равенства (5.39). Все утверждения следствия вытекают из (5.39), леммы 5.1 и теоремы 5.3.

Исследуем теперь оператор $S'_t(0)$.

ЛЕММА 5.3. Семейство операторов $S'_t(0): C_0^{2+\delta}(G) \rightarrow C_0^{2+\delta}(G)$ определено при всех $t \geq 0$ и является почти устойчивой полугруппой (см. определение 5.1). Более того, при каждом $t = t_0$ для любого $r_0 \in (0, 1)$ вне круга $|\zeta| \leq r_0$ имеется лишь конечное множество $\sigma_+ = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ точек спектра оператора $S'_{t_0}(0)$. Пусть X_+ – инвариантное подпространство, соответствующее σ_+ , $\Pi_+: C_0^{2+\delta} \rightarrow X_+$ – проектор на X_+ и $X_- = (E - \Pi_+)C_0^{2+\delta}$ – дополнительное инвариантное подпространство. Пусть $L_{t_0}^+ = S'_{t_0}|_{X_+}: X_+ \rightarrow X_+$, $L_{t_0}^- = S'_{t_0}|_{X_-}: X_- \rightarrow X_-$. У оператора $L_{t_0}^+$ существует обратный оператор $(L_{t_0}^+)^{-1}$. При некотором t_0 существуют константы $\hat{r}, \varepsilon_+, \varepsilon_- \in (0, 1)$ такие, что

$$\|L_{t_0}^-\| \leq \hat{r}(1 - \varepsilon_-), \quad \|(L_{t_0}^+)^{-1}\| \leq \hat{r}^{-1}(1 - \varepsilon_+). \quad (5.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.39) следует, что $S'_t(0)$ соответствует задаче

$$\partial z(t, x) + A(x, \mathcal{D})z = 0 \quad (5.43)$$

с условиями (5.18), (5.19), где $A(x, \mathcal{D})z$ – оператор (5.15), т.е. $z(t, \cdot) = S'_t(0)z_0$.

Пункт 1) определения 5.1, т.е. ограниченность константой, зависящей лишь от T , нормы операторов $S'_t(0): C_0^{2+\delta}(G) \rightarrow C_0^{2+\delta}(G)$ при $t \in (0, T)$ следует из теоремы 5.3. Пусть $(C_0^{2+\delta}(G))^*$ – пространство, сопряженное к $C_0^{2+\delta}(G)$, с соотношением двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$, порожденным скалярным произведением в $L_2(G)$. Так как $C_0^{2+\delta}(G)$ плотно в $L_2(G)$, то $L_2(G)$ плотно в $(C_0^{2+\delta}(G))^*$. Так как, очевидно, функция $\langle S'_t(0)z_0, \varphi \rangle$ непрерывна по t для любых $z_0 \in C_0^{2+\delta}(G), \varphi \in L_2(G)$, то п. 2) определения 5.1 также выполнен. Мы не будем проверять пп. 3), 4) определения 5.1, так как они вытекают из последующих утверждений леммы 5.3, к доказательству которых мы и переходим.

В п. 4.2 отмечалось, что оператор $A = A(x, \mathcal{D}): L_p(G) \rightarrow L_p(G)$ является секториальным с компактной резольвентой, поэтому полугруппа e^{-At} соответствует задаче (5.43), (5.18), (5.19) с начальным условием $z_0 \in L_p(G)$. Вложение

$C_0^{2+\delta}(G) \subset L_p(G)$ непрерывно и плотно, поэтому $S'_t(0)z_0$ является сужением полугруппы e^{-At} на $C_0^{2+\delta}(G)$. Следовательно, формула (3.28) справедлива и для полугруппы $S'_t(0)z_0$:

$$S'_t(0)z_0 = e^{-At}z_0 = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma} (\lambda E + A)^{-1} z_0 e^{\lambda t} d\lambda, \quad z_0 \in C_0^{2+\delta}(G), \quad (5.44)$$

где γ — контур, описанный после формулы (3.28). Очевидно, спектр оператора $S'_t(0)$ совпадает со спектром оператора e^{-At} . Очевидно, что $-\lambda_j \in \sigma(-A)$ ($-\lambda$ — точка спектра оператора $-A$) в том и только том случае, когда $e^{-\lambda_j t} \in \sigma(e^{-At})$. Так как оператор $-A = -A(x, D): L_p(G) \rightarrow L_p(G)$ секториальный, то для любого $-\sigma_0 < 0$ имеется не более конечного числа точек спектра $-\lambda_j$ оператора $-A$, для которых

$$\operatorname{Re}(-\lambda_j t_0) > -\sigma_0 t_0.$$

Поэтому, положив $r_0 = e^{-\sigma_0 t_0} \in (0, 1)$, получаем, что число точек спектра $\zeta_j = e^{-\lambda_j t_0}$ оператора e^{-At_0} , лежащих вне круга $|\zeta| \leq r_0$, не более чем конечно.

Будем предполагать, что на окружности $|\zeta| = r_0$ нет собственных значений ζ_j оператора e^{-At_0} . Вычислим оператор проектирования $\Pi_+: C_0^{2+\delta}(G) \rightarrow X_+$ на подпространство X_+ , порожденное собственными и присоединенными векторами оператора e^{-At_0} , соответствующими собственным значениям ζ_j с $|\zeta_j| > r_0$. В соответствии с общим определением [20], [7]

$$\Pi_+ = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} (\zeta E - e^{-At_0})^{-1} d\zeta, \quad (5.45)$$

где $\Gamma = \{\zeta \in \mathbb{C}^1 : |\zeta| = r_0\} \cup \{\zeta \in \mathbb{C}^1 : |\zeta| = R\}$, а $R > 0$ столь велико, что вне круга $|\zeta| < R$ нет собственных значений оператора e^{-At_0} ; обход внешнего контура идет против часовой стрелки, а внутреннего — по часовой стрелке.

Выражая $(\zeta E - e^{-At_0})^{-1}$ через резольвенту оператора $-A$ с помощью формулы, аналогичной (3.30), подставляя это выражение в (5.45) и применяя теорему Фубини, получим

$$\Pi_+ = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = (2\pi i)^{-2} \int_{\gamma_{\sigma_0}} d\lambda (\lambda E + A)^{-1} \int_{\Gamma} (\zeta - e^{-\lambda t_0})^{-1} d\zeta,$$

$$I_2 = (2\pi i)^{-2} \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0} \int_{|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon} d\lambda (\lambda E + A)^{-1} \int_{\Gamma} (\zeta - e^{-\lambda t_0})^{-1} d\zeta.$$

Пусть γ_{σ_0} — контур, описанный после формулы (3.30), λ_j — собственные значения оператора A , $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Так как при $\lambda \in \gamma_{\sigma_0}$ функция $f(\zeta) = (\zeta - e^{-\lambda t_0})^{-1}$ аналитична внутри области, ограниченной контуром Γ , то в силу теоремы Коши $I_1 = 0$. Если же λ лежит на окружности $|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon$ с достаточно малым ε , то функция $f(\zeta) = (\zeta - e^{-\lambda t_0})^{-1}$ имеет внутри контура Γ полюс первого порядка. Поэтому, используя разложение (3.31), получим

$$\Pi_+ = I_2 = (2\pi i)^{-1} \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0} \int_{|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon} (\lambda E + A)^{-1} d\lambda = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0} R_{-1}(-\lambda_j), \quad (5.46)$$

где $R_{-1}(\lambda_j)$ – операторы из разложения (3.31). Из (5.46) сразу следует конечномерность пространства $X_+ = \Pi_+ C_0^{2+\delta}(G)$. Так как Π_+ и e^{-At_0} коммутируют, то оператор сужения e^{-At_0} на $X_+ = \Pi_+ C_0^{2+\delta}(G)$, который мы обозначим через L_+ , можно определить с помощью формулы

$$L_+ = \Pi_+ e^{-At_0} = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} (\zeta E - e^{-At_0})^{-1} \zeta d\zeta. \quad (5.47)$$

Проводя с (5.47) те же операции, что и при выводе из (5.45) формулы (5.46), после чего рассуждая, как при выводе (3.32), получим

$$\begin{aligned} L_+ &= \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0} \int_{|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon} (\lambda E + A)^{-1} \frac{e^{\lambda t_0}}{2\pi i} d\lambda \\ &= \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0} e^{-\lambda_j t_0} \sum_{n=1}^{m(-\lambda_j)} \frac{t_0^{n-1} R_{-n}(-\lambda_j)}{(n-1)!}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Сравнивая (5.46), (5.48) и (3.32) и учитывая (3.6), легко видеть, что сужение e^{-At_0} на $X_- = (E - \Pi_+) C_0^{2+\delta}(G)$ определяется формулой

$$L_- = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_{\sigma_0}} (\lambda E + A)^{-1} e^{\lambda t_0} d\lambda, \quad (5.49)$$

где контур γ_{σ_0} описан после (3.30). Как уже отмечалось в замечании 3.1, для оценки оператора L_- нам не нужно доказывать оценку типа (3.2), входящую в определение секториального оператора. Достаточно доказать, что для $\lambda \in \gamma_{\sigma_0}$

$$\|(\lambda E + A)^{-1} f\|_{C^{2+\delta}(G)} \leq c |\lambda|^{\delta/2} \|f\|_{C^{2+\delta}(G)} \quad (5.50)$$

с константой c , не зависящей от λ и f . Оценка (5.50) доказана в [8; гл. 4, § 4.4]. Используя (5.50) и определение контура γ_{σ} , легко оценить оператор $L_- : X_- \rightarrow X_-$, определенный в (5.49), следующим образом:

$$\|L_-\| \leq c e^{-\sigma_0 t_0}. \quad (5.51)$$

Положим

$$L_+^{-1} = (2\pi i)^{-1} \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0} \int_{|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon/2} (\lambda E + A)^{-1} e^{-\lambda t_0} d\lambda. \quad (5.52)$$

Взяв суперпозицию операторов (5.52), (5.48) и воспользовавшись тождеством Гильберта для резольвент, получим

$$\begin{aligned} L_+^{-1} L_+ &= \sum_{\substack{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0 \\ \operatorname{Re} \lambda_k < \sigma_0}} \int_{|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon} \int_{|\mu + \lambda_k| = \varepsilon/2} (\lambda E + A)^{-1} (\mu E + A)^{-1} \frac{e^{(\lambda - \mu) t_0}}{(2\pi i)^2} d\lambda d\mu \\ &= \sum_{\substack{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0 \\ \operatorname{Re} \lambda_k < \sigma_0}} \int_{|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon} \int_{|\mu + \lambda_k| = \varepsilon/2} e^{(\lambda - \mu) t_0} \frac{(\lambda E + A)^{-1} + (\mu E + A)^{-1}}{(2\pi i)^2 (\mu - \lambda)} d\lambda d\mu. \end{aligned} \quad (5.53)$$

При $\lambda_j \neq \lambda_k$ и $|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon$, $|\mu + \lambda_k| = \varepsilon/2$ имеем

$$\int_{|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon} e^{(\lambda - \mu)t_0} (\mu - \lambda)^{-1} d\lambda = \int_{|\mu + \lambda_k| = \varepsilon/2} e^{(\lambda - \mu)t_0} (\mu - \lambda)^{-1} d\mu = 0.$$

Если же $\lambda_j = \lambda_k$, то при $|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon$, $|\mu + \lambda_j| = \varepsilon/2$

$$\int_{|\mu + \lambda_j| = \varepsilon/2} e^{(\lambda - \mu)t_0} (\mu - \lambda)^{-1} d\mu = 0, \quad \int_{|\lambda + \lambda_j| = \varepsilon} e^{(\lambda - \mu)t_0} (\mu - \lambda)^{-1} d\lambda = -2\pi i.$$

Применяя эти равенства в совокупности с теоремой Фубини к правой части в (5.53), получим, учитывая (5.46), что

$$L_+^{-1} L_+ = (2\pi i)^{-1} \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0} \int_{|\mu + \lambda_j| = \varepsilon/2} (\mu E + A)^{-1} d\mu = \Pi_+ = E,$$

так как Π_+ совпадает с единичным оператором на X_+ . Поэтому оператор L_+ обратим и обратный оператор определяется формулой (5.52). Из (5.52) аналогично (5.48) следует

$$L_+^{-1} = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0} e^{\lambda_j t_0} \sum_{n=1}^{m(-\lambda_j)} \frac{t_0^{n-1}}{(n-1)!} R_{-n}(-\lambda_j). \quad (5.54)$$

Из (5.54) сразу следует, что

$$\|L_+^{-1}\| \leq c_1 e^{(\sigma_0 - \delta)t_0}, \quad (5.55)$$

где c_1 не зависит от t_0 , а $\delta > 0$ — достаточно малое число. В силу (5.51), (5.55) при достаточно большом t_0 , очевидно, неравенства (5.42) выполняются при $\hat{r} = e^{-(\sigma_0 - \delta/2)t_0}$ и некоторых $\varepsilon_+, \varepsilon_- \in (0, 1)$.

Теперь мы сможем доказать основную теорему этого параграфа.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть $T > t_0$, где t_0 — число из леммы 5.3, а $r > 0$ таково, что в соответствии с теоремой 5.4 при $t \in (0, T)$, $z_0 \in Z_r^{2+\delta} = \{z \in C_0^{2+\delta}(G), \|z\|_{C_0^{2+\delta}} < r\}$ определена полугруппа операторов $S_t(z_0)$, задающая решение задачи (5.14), (5.18), (5.19). Пусть $\sigma_0 > 0$ — любое число, удовлетворяющее условию (3.29), в котором $\sigma(-A)$ — спектр оператора $-A$, а A — оператор (5.15), (5.18). Тогда в окрестности $Z_r^{2+\delta}$ нуля определено многообразие M_- , инвариантное относительно полугруппы S_t , т.е. при любом $z_0 \in M_-$ функция $t \rightarrow S_t(z_0)$ определена и $S_t(z_0) \in M_-$ при любом $t > 0$. Более того, справедлива оценка

$$\|S_t(z_0)\| \leq c e^{-\sigma_0 t} \|z_0\|_{C^{2+\delta}(G)}, \quad z_0 \in M_-. \quad (5.56)$$

Многообразие M_- определяется формулой (5.4), в которой $X = C_0^{2+\delta}(G)$, X_- , X_+ определены в лемме 5.3, а оператор-функция $g: X_- \rightarrow X_+$ удовлетворяет условиям (5.5), (5.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить справедливость всех предположений теорем 5.1, 5.2. В силу леммы 5.2 уравнение (5.14) можно заменить на (5.35), в котором нелинейный оператор F_ε определен формулой (5.30), а полугруппу S_t — полугруппой, соответствующей уравнению (5.35). Эту новую полугруппу мы будем обозначать старым символом S_t . Положим $S = S_{t_0}$, где t_0 определено в лемме 5.3. Тогда равенство (5.1) будет иметь вид (5.40), в котором $t = t_0$. В силу следствия 5.1 и леммы 5.3 операторы $L = S'(0)$ и $B(u) = B_{t_0, \varepsilon}(z_0)$ удовлетворяют всем предположениям теорем 5.1, 5.2. Из этих теорем следуют все утверждения доказываемой теоремы.

§6. Стабилизация квазилинейного параболического уравнения

Как и в линейном случае, основным шагом при стабилизации является правильное продолжение начального условия в расширенную область. Чтобы это сделать, нам потребуются некоторые технические сведения.

6.1. Еще о проекторе Π_+ . Исследуем чуть подробнее проектор Π_+ , определенный в (5.45). В силу (5.46)

$$\Pi_+ = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma} R_{-1}(-\lambda_j), \quad (6.1)$$

где $R_{-1}(-\lambda_j)$ — коэффициент при $(\lambda + \lambda_j)^{-1}$ в разложении в ряд Лорана (3.31) резольвенты $R(\lambda, -A)$ в окрестности собственного значения $-\lambda_j$. Из разложения (3.25) следует, что

$$\begin{aligned} R_{-1}(-\lambda_j)v = & \sum_{(k)} (e_0^{(k)}(-\lambda_j)\langle v, \varepsilon_{m_k}^{(k)}(-\bar{\lambda}_j) \rangle + e_1^{(k)}(-\lambda_j)\langle v, \varepsilon_{m_k-1}^{(k)}(-\bar{\lambda}_j) \rangle \\ & + \dots + e_{m_k}^{(k)}(-\lambda_j)\langle v, \varepsilon_0^{(k)}(-\bar{\lambda}_j) \rangle), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\langle v, v^* \rangle$ — значение функционала $v^* \in X^*$ на векторе $v \in X$, $\{e_l^{(k)}(-\lambda_j)\}$ — каноническая система собственных и присоединенных векторов оператора $-A$, соответствующих собственному значению $-\lambda_j$, а $\{\varepsilon_l^{(k)}(-\bar{\lambda}_j)\}$ — каноническая система собственных и присоединенных векторов оператора $-A^*$, соответствующих собственному значению $-\bar{\lambda}_j$. (Каноническая система $\{e_l^{(k)}(-\lambda_j)\}$ построена по канонической системе $\{\varepsilon_l^{(k)}(-\bar{\lambda}_j)\}$ в теореме 3.1.) При этом $X = C_0^{2+\delta}(\bar{G})$ и это пространство предполагается комплекснозначным, A — оператор (5.15), A^* — формально сопряженный оператор к (5.15), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в комплексном пространстве $L_2(G)$, так как в качестве v^* мы берем только собственные и присоединенные функции оператора $A^*(x, D)$.

ЛЕММА 6.1. *Функции $e_l^{(k)}(-\lambda_j)$, $\varepsilon_l^{(k)}(-\bar{\lambda}_j)$ из (6.2) удовлетворяют равенству*

$$\langle e_{l_1}^{(k_1)}(-\lambda_{j_1}), \varepsilon_{l_2}^{(k_2)}(-\bar{\lambda}_{j_2}) \rangle \equiv \int_G e_{l_1}^{(k_1)}(-\lambda_{j_1}, x) \overline{\varepsilon_{l_2}^{(k_2)}(-\bar{\lambda}_{j_2}, x)} dx = \delta_{k_2, l_2, \lambda_{j_2}}^{k_1, l_1, \lambda_{j_1}}, \quad (6.3)$$

где символ Кронекера $\delta_{k_2, l_2, \lambda_{j_2}}^{k_1, l_1, \lambda_{j_1}}$ равен 1, если $k_1 = k_2$, $l_1 = l_2$, $\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2}$, а в остальных случаях он равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (5.45), а также из (6.1) следует, что Π_+ — проектор (см. [20], [7]). Поэтому для $e_l^{(k)}(-\lambda_j)$ с $\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0$ справедливо равенство

$$\Pi_+ e_l^{(k)}(-\lambda_j) = e_l^{(k)}(-\lambda_j). \quad (6.4)$$

Так как в силу теоремы 4.1 функции $e_l^{(k)}(-\lambda_j, x)$ линейно независимы, то из (6.1), (6.2), (6.4) следует (6.3).

В дальнейшем нам понадобится рассматривать оператор (6.1) в вещественном пространстве $C_0^{2+\delta}(G)$. Отметим, что так как оператор $A(x, D)$ имеет вещественные коэффициенты, то $-\lambda_j$ и $-\bar{\lambda}_j$ одновременно являются или не являются собственными значениями оператора $-A(x, D)$, а $e_l^{(k)}(-\lambda_j)$ в том и только том случае является собственной (или присоединенной) функцией оператора $-A(x, D)$, если собственной (или присоединенной) относительно $-\bar{\lambda}_j$ является функция $\overline{e_l^{(k)}(-\lambda_j, x)}$, что следует из (3.21). Аналогичное утверждение справедливо относительно собственных значений и собственных и присоединенных функций оператора $-A^*(x, D)$. Если $\{e_l^{(k)}(-\lambda_j)\}$ — канонический набор собственных и присоединенных функций для $-\lambda_j$ с $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$, то в качестве канонического набора для $-\bar{\lambda}_j$ возьмем $\overline{e_l^{(k)}(-\lambda_j)}$, убрав канонический набор, который был раньше. Такие же изменения сделаем и для $\{\varepsilon_l^{(k)}(-\lambda_j)\}$. Очевидно, что при этом оператор $R_{-1}(-\bar{\lambda}_j)$ с $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$, определенный с помощью (6.2) по новым каноническим наборам, не изменится.

Определим сужение оператора (6.1) на вещественное пространство $C_0^{2+\delta}(G)$ с помощью функций

$$\operatorname{Re} e_l^{(k)}(-\lambda_j, x), \quad \operatorname{Im} e_l^{(k)}(-\lambda_j, x), \quad (6.5)$$

$$\operatorname{Re} \varepsilon_l^{(k)}(-\bar{\lambda}_j, x), \quad \operatorname{Im} \varepsilon_l^{(k)}(-\bar{\lambda}_j, x) \quad (6.6)$$

с $\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma$.

ЛЕММА 6.2. *Сужение оператора (6.1) на вещественное пространство $C_0^{2+\delta}(G)$ представимо в виде*

$$(\Pi_+ v)(x) = \sum_{j=1}^K e_j(x) \int_G v(x) \varepsilon_j(x) dx, \quad (6.7)$$

где $\{e_j\}$ — это соответствующим образом перенумерованный и перенормированный набор функций (6.5), а $\{\varepsilon_j\}$ — перенумерованный и перенормированный набор (6.6). При этом

$$\int_G e_j(x) \varepsilon_k(x) dx = \delta_{k,j}, \quad (6.8)$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем перенумерацию функций

$$e_l^{(k)}(-\lambda_j, x) = \operatorname{Re} e_l^{(k)}(-\lambda_j, x) + i \operatorname{Im} e_l^{(k)}(-\lambda_j, x).$$

В силу (3.21) можно считать, что все собственные и присоединенные функции, соответствующие вещественным собственным значениям $-\lambda_j$, являются вещественными. Перенумеруем сначала эти собственные и присоединенные функции, обозначив их $e_j(x)$, $j = 1, \dots, N_1$. Для вектора с $\operatorname{Im} \lambda_j \neq 0$ проведем следующую нумерацию: $e_j(x) = e_j^1(x) + ie_j^2(x)$, $\bar{e}_j(x) = e_j^1(x) - ie_j^2(x)$. В точности такую же перенумерацию проведем для функций $\varepsilon_l^{(k)}(-\lambda_j, x)$. Тогда соотношение (6.3) можно переписать в виде

$$\int_G e_j(x) \varepsilon_k(x) dx = \delta_{k,j}, \quad 1 \leq k, j \leq N_1, \quad (6.9)$$

$$\int_G e_j \varepsilon_k^i dx = \int_G e_j^i(x) \varepsilon_j(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq j \leq N_1, \quad N_1 + 1 \leq k \leq N_2, \quad (6.10)$$

$$\int_G e_j^i \varepsilon_k^l dx = \frac{1}{2} \delta_{j,k} \delta_{i,l}, \quad i, l = 1, 2, \quad N_1 + 1 \leq k, j \leq N_2; \quad (6.11)$$

при этом (6.11) вытекает из равенств:

$$\int_G (e_j^1 + ie_j^2)(\varepsilon_k^1 - \varepsilon_k^2) dx = \delta_{k,j}, \quad \int_G (e_j^1 + ie_j^2)(\varepsilon_k^1 + \varepsilon_k^2) dx = 0.$$

Легко видеть, что для вещественной функции $v(x)$

$$\begin{aligned} & (e_j^1(x) + ie_j^2(x)) \int_G v(y) (\varepsilon_j^1(y) - ie_j^2(y)) dy + (e_j^1 - ie_j^2) \int_G v(\varepsilon_j^1 + ie_j^2) dy \\ &= 2e_j^1 \int_G v \varepsilon_j^1 dy + 2e_j^2 \int_G v \varepsilon_j^2 dy. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Поэтому если теперь очевидным образом перенумеровать функции $\sqrt{2} e_j^1$, $\sqrt{2} e_j^2$, $j = N_1 + 1, \dots, N_2$, а также функции $\sqrt{2} \varepsilon_j^1$, $\sqrt{2} \varepsilon_j^2$, $j = N_1 + 1, \dots, N_2$, то в силу (6.12) будет выполнено (6.7), а вследствие (6.9)–(6.11) мы получим (6.8).

ЛЕММА 6.3. Пусть $\{e_j(x)\}$ – функции из леммы 6.2. Для любой подобласти ω' области G функции $e_j(x)|_{\omega'}$, суженные на ω' , линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала в точности так же, как в теореме 4.1, мы доказываем, что набор собственных и присоединенных функций $\{e_l^{(k)}(\lambda_j, x)\}$ с $\operatorname{Re} \lambda_j < \sigma_0$, суженных на ω' , линейно независимы. Затем, повторяя доказательство следствия 4.1, получим утверждение леммы.

6.2. Теорема о продолжении. Пусть, как и в п. 4.1, выполнены условия (4.3), (4.6), (4.7) на области G и Ω . Мы предполагаем, что $\partial\Omega$ и ∂G – границы класса $C^{2+\delta}$. Наша цель – доказать теорему о продолжении, аналогичную теореме из п. 4.2, которую можно было бы использовать для стабилизации квазилинейных уравнений. Введем пространство функций, с которого будет осуществляться продолжение:

$$C_0^{2+\delta}(\Omega, \Gamma) = \{z_0(x) \in C^{2+\delta}(\Omega) : z_0(x) = \gamma_\Omega z(x), \text{ где } z_0(x) \in C_0^{2+\delta}(G)\}, \quad (6.13)$$

где $C_0^{2+\delta}(G)$ – пространство (5.23), а γ_Ω – оператор сужения функции $z \in C_0^{2+\delta}(G)$ на Ω . Определение (6.13) удобно для использования, однако не является конструктивным. Приведем условия на функцию $z_0(x)$, $x \in \Omega$, гарантирующие включение $z_0(x) \in C_0^{2+\delta}(\Omega, \Gamma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть множества $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Gamma}_0$ (см. (4.3)) не пересекаются: $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Gamma}_0 = \emptyset$. Тогда

$$C_0^{2+\delta}(\Omega, \Gamma) = \{z_0 \in C^{2+\delta}(\Omega) : z_0|_{\Gamma_0} = A(x, D)z_0|_{\Gamma_0} = 0\}. \quad (6.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно с помощью теоремы Уитни продолжить функцию $z_0(x)$, $x \in \Omega$, принадлежащую пространству (6.14), до функции $z_0(x) \in C_0^{2+\delta}(G)$. В силу условия граница множества $\omega = G \setminus \Omega$ состоит из компоненты Γ , соприкасающейся с Ω , и некоторой внешней компоненты. Мы продолжим $y(x)$ через Γ в ω до некоторой функции гладкости $C^{2+\delta}$ и умножим полученную функцию на срезающую функцию, равную 1 в Ω и в окрестности Γ и нулю вне бóльшей окрестности Γ , пересеченной с ω . Очевидно, полученная функция z принадлежит $C_0^{2+\delta}(G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Gamma}_0 \neq \emptyset$ и

$$\partial\Omega \in C^\infty, \partial G \in C^{2+\delta}, \partial\omega \cap \partial\Omega = \Gamma \text{ и } \partial\Gamma = \partial\Gamma_0 = \bar{\Gamma} \cap \bar{\Gamma}_0 \in C^\infty. \quad (6.15)$$

Предположим, что функция $z_0(x) \in C^{2+\delta}(\Omega)$ удовлетворяет условиям:

- (i) $z_0|_{\Gamma_0} = 0$, $A(x, \mathcal{D})z_0|_{\Gamma_0} = 0$, где $A(x, \mathcal{D})$ — оператор (5.15);
- (ii) для любой точки $x_0 \in \partial\Gamma$ $\partial_n z_0(x_0) = 0$. При этом

$$|z_0(x)| \leq c|x - x_0|^{4+3\delta}, \quad |\partial_n z_0(x)| \leq c|x - x_0|^{2+2\delta}, \quad (6.16)$$

где ∂_n — производная по нормали к $\partial\Omega$, а c не зависит от δ .

Тогда $z_0 \in C_0^{2+\delta}(\Omega, \Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проблема состоит в гладком продолжении функции $y(x)$ с Ω на пересечение ω с малой окрестностью $\partial\Gamma$, обозначаемую ω_0 , чтобы и на $\bar{\omega}_0 \cap \partial G$ были выполнены условия (i) предложения 6.2. Вне ω_0 продолжение z_0 строится, как в предложении 6.1. В ω_0 введем координаты (x_0, x, y) следующим образом: y точки $P \in \omega_0$ — это точка пересечения $\partial\Gamma$ с двумерной плоскостью $Q(P)$, проходящей через P и ортогональной $\partial\Gamma$, x — это длина кривой $Q(P) \cap \Gamma$ от точки x_0 до основания перпендикуляра $n(P)$, опущенного из P на кривую $Q(P) \cap \Gamma$ (и лежащего в $Q(P)$), y — это длина перпендикуляра $n(P)$. В этих координатах кривая $Q(P) \cap (\partial G \setminus \bar{\Gamma}_0)$ записывается в виде графика функции $y(x_0, x)$. Мы предполагаем, что $\partial G \setminus \bar{\Gamma}_0 \in C^\infty$ и в окрестности $\partial\Gamma$ $\partial G \in C^{2+\delta}$. Поэтому функция $y(x_0, x)$ бесконечно дифференцируема по x_0 и имеет вид

$$y(x_0, x) = z(x_0, x)x^{2+\delta}, \quad (6.17)$$

где $z(x_0, x) \in C^\infty$ и $z(x_0, x) \geq \varepsilon > 0$.

На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = 1 + \lambda^{2+\delta}(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2), \quad (6.18)$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2 подобраны так, что $f(0) = 1$ и $f'(0) = f''(0) = f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ и $f \in C^{2+\delta}$. Определим в ω_0 функцию

$$\varphi(x_0, x, y) = f\left(\frac{y}{y(x_0, x)}\right), \quad (6.19)$$

где $y(x_0, x)$, f — функции (6.17), (6.18), а (x_0, x, y) — координаты, введенные выше.

Продолжим функцию $z_0(x)$ с помощью теоремы Уитни до функции $\tilde{z} \in C^{2+\delta}(\Omega \cup \omega_0)$ и умножим в ω_0 $\tilde{z}$ на функцию (6.19). Продолженную таким образом функцию обозначим через z :

$$z(P) = \begin{cases} z_0(P) & \text{при } P \in \Omega, \\ \varphi(x_0, x, y)\tilde{z}(x_0, x, y) & \text{при } P = (x_0, x, y) \in \omega_0. \end{cases} \quad (6.20)$$

В силу свойств функции (6.18)

$$z|_{\partial G \cap \overline{\omega_0}} = 0, \quad A(x, \mathcal{D})z|_{\partial G \cap \overline{\omega_0}} = 0.$$

Поэтому для того чтобы доказать предложение, достаточно показать, что $z \in C^{2+\alpha}(\Omega \cup \omega_0)$. В силу (6.17), (6.19)

$$|\varphi(x_0, x, y)| \leq \text{const}, \quad |\partial_{x_0} \varphi(x_0, x, y)| = \left| f' \left(\frac{y}{y(x_0, x)} \right) \frac{y}{y^2(x_0, x)} \frac{\partial y(x_0, x)}{\partial x_0} \right| \leq \text{const},$$

где ∂_{x_0} — производная вдоль некоторого направления на многообразии $\partial\Gamma$. Аналогично

$$|\partial_{x_0}^2 \varphi(x_0, x, y)| \leq \text{const},$$

где $\partial_{x_0}^2$ — любая частная производная второго порядка вдоль $\partial\Gamma$. Точно так же

$$\begin{aligned} |\partial_x \varphi(x_0, x, y)| &\leq cx^{-1}, \quad |\partial_{xx} \varphi| \leq cx^{-2}, \quad |\partial_{xx_0} \varphi| \leq cx^{-1}, \\ |\partial_y \varphi| &\leq cx^{-(2+\delta)}, \quad |\partial_{yy} \varphi| \leq cx^{-2(2+\delta)}, \quad |\partial_{xy} \varphi| \leq cx^{-(3+\delta)}, \quad |\partial_{x_0 y} \varphi| \leq cx^{-(2+\delta)}, \end{aligned}$$

где x — введенная выше локальная координата.

Отметим, что в силу условия (i) предложения 6.2 и равенства $\partial_n z_0(x_0) = 0$ имеет место $\partial_{nn} z_0(x_0) = 0$ при $x_0 \in \partial\Gamma$, где ∂_{nn} — вторая производная по нормали к $\partial\Omega$. Из этого равенства и включения $z_0 \in C^{2+\delta}(\Omega)$ следует, что

$$|\partial_{nn} z_0(x)| \leq c|x - x_0|^\delta \quad \forall x \in \Gamma. \quad (6.21)$$

Из приведенных выше оценок для φ и ее производных, оценок (6.16), (6.21) и включения $\tilde{z} \in C^{2+\delta}(\Omega \cup \omega_0)$ следует, что функция (6.20) принадлежит $C^{2+\delta}(\Omega \cup \omega_0)$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть M_- — инвариантное многообразие, построенное в окрестности нуля пространства $C_0^{2+\delta}(G)$ в теореме 5.6. Тогда в шаре $B_\varepsilon^{2+\delta}(\Omega) = \{y_0(x) \in C_0^{2+\delta}(\Omega, \Gamma) : \|y_0\|_{C^{2+\delta}(\Omega)} < \varepsilon\}$ достаточно малого радиуса ε из пространства $C_0^{2+\delta}(\Omega, \Gamma)$ определен непрерывный оператор

$$\text{Ext}: B_\varepsilon^{2+\delta}(\Omega) \rightarrow M_-, \quad (6.22)$$

который является оператором продолжения функции с Ω на G :

$$(\text{Ext } z)(x) \equiv z(x), \quad x \in \Omega. \quad (6.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению пространства $C_0^{2+\delta}(\Omega, \Gamma)$ существует непрерывный оператор продолжения

$$R_0: C_0^{2+\delta}(\Omega, \Gamma) \rightarrow C_0^{2+\delta}(G)$$

(т.е. $(R_0 z)(x) \equiv x, x \in \Omega$). Пусть $\varphi(x) \in C^\infty(\overline{G})$, $\varphi(x) \equiv 1$ при $x \in \Omega$ и $\varphi(x) \equiv 0$ вне малой окрестности Ω . Положим $Rz = \varphi R_0 z$. Очевидно, $R: C_0^{2+\delta}(\Omega, \Gamma) \rightarrow C_0^{2+\delta}(G)$ – также оператор продолжения. Введем оператор продолжения

$$Qz = \begin{cases} z(x), & x \in \Omega, \\ Rz(x) + w(x), & x \in \omega, \end{cases} \quad (6.24)$$

где w – некоторая функция с носителем в ω , которая строится по z . Ее построение будет описано ниже. Наконец, искомый оператор Ext определим формулой

$$\text{Ext } z = \Pi_- Qz + g(\Pi_- Qz), \quad (6.25)$$

где $\Pi_- = E - \Pi_+$, E – единичный оператор, Π_+ – оператор (6.7) проектирования на $X_+ = \Pi_+ C_0^{2+\delta}(G)$, $X_- = \Pi_- C_0^{2+\delta}(G)$, $g: X_- \rightarrow X_+$ – отображение, построенное в теоремах 5.1, 5.6. По определению (5.4) многообразия M_- справедливо включение $\text{Ext } z \in M_-$. Поэтому нам достаточно добиться выполнения равенства

$$(\text{Ext } z)(x) \equiv z(x), \quad x \in \Omega, \quad (6.26)$$

указывающего, что (6.25) – это оператор продолжения. В силу (6.7) и леммы 6.3 $\{e_j(x)\}$ – это базис, порождающий X_+ , и поэтому отображение $g(u)$ представимо в виде

$$g(u) = \sum_{j=1}^K e_j g_j(u).$$

Поэтому, учитывая (6.7), равенство (6.25) можно переписать в виде

$$\text{Ext } z = Qz(x) - \sum_{j=1}^K e_j(x) \int_G Qz(y) \varepsilon_j(y) dy + \sum_{j=1}^K e_j(x) g_j(\Pi_- Qz). \quad (6.27)$$

Из (6.26), (6.27) следует равенство

$$\int_G Qz(x) \varepsilon_j(x) dx = g_j(\Pi_- Qz), \quad j = 1, \dots, K. \quad (6.28)$$

Пусть $\psi(x) \in C^\infty(\overline{G})$, $\psi(x) = 1$ вне малой окрестности Ω и $\psi(x) = 0$ при $x \in \Omega$. Будем искать функцию $w(x)$ из (6.24) в виде

$$w(x) = \psi(x) \sum_{k=1}^K c_k \varepsilon_k(x). \quad (6.29)$$

Чтобы найти константы $(c_1, \dots, c_K) = \vec{c}$, подставим (6.29) в (6.28), учитывая (6.24), (6.7). В результате получим равенство

$$\vec{z} + A\vec{c} = \vec{g}(Rz - (\vec{e}, \vec{z}) + \psi((\vec{c}, \vec{e}) - (\vec{e}, A\vec{c}))), \quad (6.30)$$

в котором использованы обозначения: $\vec{z} = (z_1, \dots, z_K)$, $A = \|a_{jk}\|$, где

$$z_j = \int_G Rz(x)\varepsilon_j(x) dx, \quad a_{jk} = \int_G \psi(x)\varepsilon_j(x)\varepsilon_k(x) dx, \quad \vec{g}(u) = (g_1(u), \dots, g_K(u)),$$

$$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_K(x)), \quad \vec{e} = (e_1(x), \dots, e_K(x)), \quad (\vec{c}, \vec{e}) = \sum_{j=1}^K c_j e_j(x).$$

Так же, как в теореме 4.2, устанавливается, что матрица A положительно определена, а значит, обратима. Применяя к обеим частям равенства (6.30) матрицу A^{-1} , получим равенство

$$\vec{c} = G_z(\vec{c}), \quad (6.31)$$

где отображение $G_z: R^K \rightarrow R^K$ определяется соотношением

$$G_z(\vec{c}) = A^{-1}\vec{g}(Rz - (\vec{e}, \vec{z}) + \psi((\vec{c}, \vec{\varepsilon}) - (\vec{e}, A\vec{c}))) - A^{-1}\vec{z}. \quad (6.32)$$

В силу теорем 5.1, 5.6 отображение $A^{-1}\vec{g}: R^K \rightarrow R^K$ принадлежит классу $C^{1+\alpha}$ и $A^{-1}\vec{g}(0) = 0$, $A^{-1}\vec{g}'(0) = 0$. Поэтому при достаточно малых $\|\vec{c}_1\|_{R^K}$, $\|\vec{c}_2\|_{R^K}$ и малой $\|z\|_{C^{2+\alpha}(G)}$ в силу теоремы о среднем получим из (6.32)

$$\begin{aligned} \|G_z(\vec{c}_1) - G_z(\vec{c}_2)\| &\leq \gamma_0 \sup_{\beta \in [0,1]} \|A^{-1}\vec{g}'(Rz - (\vec{e}, \vec{z}) + \psi(\beta\vec{c}_1 + (1-\beta)\vec{c}_2, \vec{\varepsilon}) \\ &\quad - \psi(\vec{e}, A(\beta\vec{c}_1 + (1-\beta)\vec{c}_2)))\| \|\vec{c}_1 - \vec{c}_2\| \\ &\leq \gamma(z, \vec{c}_1, \vec{c}_2) \|\vec{c}_1 - \vec{c}_2\|, \end{aligned}$$

где $\gamma(z, \vec{c}_1, \vec{c}_2) \leq \gamma_1(\|z\|_{C^{2+\delta}(G)}^\alpha + \|\vec{c}_1\|_{R^K}^\alpha + \|\vec{c}_2\|_{R^K}^\alpha)$, а $\gamma_1 > 0$ — константа. Поэтому отображение G_z является сжатым при достаточно малых $\|z\|_{C^{2+\alpha}(G)}$ и $\|\vec{c}_j\|$, $j = 1, 2$. Значит, в силу принципа сжатых отображений [21] уравнение (6.31) при малых $\|z\|_{C^{2+\alpha}(G)}$ имеет единственное решение $\vec{c} = (c_1, \dots, c_K)$, малое по норме. При таких $\vec{z}$, $\vec{c}_j$ оператор Ext, определенный соотношениями (6.25), (6.24), (6.29), является искомым оператором продолжения.

6.3. Теорема о стабилизации. Начнем с постановки задачи. Пусть $\Omega \subset R^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , состоящей из двух подмножеств Γ и Γ_0 (см. (4.3)). В Ω рассматривается квазилинейное параболическое уравнение

$$\partial_t y(t, x) + \mathcal{A}(x, y(t, x)) = g(x), \quad (6.33)$$

где

$$\mathcal{A}(x, y(t, x)) = - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} y(t, x) + b(x, y(t, x), \nabla y(t, x)) - a_0(x, y(t, x)) \quad (6.34)$$

с функциями $a_{ij}(x)$, $b(x, y, p)$, $a_0(x, y)$ класса C^3 , удовлетворяющими условиям (5.10'), (5.10''). На функцию $y(t, x)$ накладываются граничные условия

$$y|_{\Sigma_0} = 0, \quad y|_{\Sigma} = 0, \quad (6.35)$$

где $\Sigma_0 = \mathbb{R}_+ \times \Gamma_0$, $\Sigma = \mathbb{R}_+ \times \Gamma$, а функция $u = u(t, x)$ является управлением.

Задача о стабилизации в случае квазилинейного уравнения (6.33) состоит в следующем. Пусть заданы стационарное решение $\hat{y}(x)$ уравнения (6.33):

$$\mathcal{A}(x, \hat{y}(x)) = g(x), \quad \hat{y}|_{x \in \Gamma_0} = 0, \quad (6.36)$$

а также положительное число σ_0 . Для каждого начального условия $y_0(x)$ задачи (6.33), (6.35):

$$y(t, x)|_{t=0} = y_0(x), \quad (6.37)$$

достаточно близкого к $\hat{y}(x)$:

$$\|\hat{y} - y_0\|_{C^{2+\delta}(\Omega)} < \varepsilon, \quad (6.38)$$

требуется найти такое управление $u(t, x)$, заданное на Σ , чтобы решение y задачи (6.33), (6.35), (6.37) удовлетворяло оценке

$$\|y(t, \cdot) - \hat{y}\|_{C^{2+\delta}(\Omega)} \leq c \|y_0 - \hat{y}\|_{C^{2+\delta}(\Omega)} e^{-\sigma_0 t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (6.39)$$

При этом управление u должно быть с обратной связью в смысле, аналогичном определению 4.1 (ниже это понятие будет точно сформулировано).

Как и в п. 4.1, введем область G , являющуюся расширением Ω (см. (4.6), (4.7)). Вместо условия (4.8) будем предполагать, что выполнены условия (6.15).

Наложим на стационарное решение $\hat{y}$ из (6.36)

УСЛОВИЕ 6.1. *Решение $\hat{y}(x) \in C^{2+\delta}(\Omega)$ задачи (6.36) может быть продолжено с Ω на G до функции $\hat{y}(x) \in C^{2+\delta}(G)$, удовлетворяющей условию $\hat{y}(x)|_{\partial G} = 0$ (продолженная функция также обозначается $\hat{y}(x)$).*

В случае $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Gamma}_0 = \emptyset$ условию 6.1 удовлетворяет любое стационарное решение $\hat{y} \in C^{2+\delta}(\Omega)$ задачи (6.36). Это доказывается так же, как предложение 6.1. В случае $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Gamma}_0 \neq \emptyset$ справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Пусть $\bar{\Gamma} \cap \bar{\Gamma}_0 = \partial\Gamma$ — $(d-2)$ -мерное многообразие класса C^∞ . Если $z \in C^{2+\delta}(\bar{\Omega})$, $z|_{\Gamma_0} = 0$ и для любых $x_0 \in \partial\Gamma$, $x \in \Gamma$*

$$|z(x)| \leq c |x - x_0|^{4+3\delta}, \quad (6.40)$$

где константа $c > 0$ не зависит от x и x_0 , то z можно непрерывно продолжить до функции $Lz(x) \in C^{2+\delta}(G)$, для которой $Lz(x)|_{\partial G} = 0$.

Доказательство по существу совпадает с доказательством предложения 6.2. При этом вместо функции (6.18) можно использовать функцию $f(\lambda) = 1 - \lambda^{2+\delta}$, $\lambda \in (0, 1)$. Отметим, что любая функция $z \in C^{2+\delta}(\bar{\Omega})$, $z|_{\Gamma_0} = 0$, удовлетворяет (6.40), если она в окрестности $\partial\Gamma$ непрерывна вплоть до границы вместе с производными до пятого порядка включительно (если $\delta < \frac{1}{3}$).

Учитывая условие 6.1, будем считать, что функция $\hat{y}(x)$ продолжена до функции из $C^{2+\delta}(G)$, удовлетворяющей условию $\hat{y}|_{\partial G} = 0$. Продолжим функции $a_{ij}(x)$ с Ω на G , $b(x, y, p)$ с $\Omega \times \mathbb{R}^2$ на $G \times \mathbb{R}^2$, $a_0(x, u)$ с $\Omega \times \mathbb{R}$ на $G \times \mathbb{R}$ с сохранением условий гладкости, а также условий (5.10'), (5.10''). Таким образом, оператор (6.34) оказался продолженным на область G . Подставляя в левую часть уравнения (6.36), продолженную на G , функцию $\hat{y}(x)$, получим естественное продолжение правой части $g(x)$ до функции из $C^\delta(G)$. При этом $\hat{y}(x)$ оказалась стационарным решением задачи (5.12).

Будем предполагать, что начальное условие y_0 задачи (6.33), (6.35), (6.37) представимо в виде

$$y_0(x) = \hat{y}(x) + z_0(x), \quad (6.41)$$

где $\hat{y}$ — стационарное решение задачи (6.36), а $z_0 \in C_0^{2+\delta}(\Omega, \Gamma)$ (см. (6.13)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Управление u в задаче (6.33), (6.35), (6.37) обладает обратной связью, если оно вместе с решением y определяется соотношением

$$(y(t, \cdot), u(t, \cdot)) = (\gamma_\Omega \tilde{y}(t, \cdot), \gamma_\Gamma \tilde{y}(t, \cdot)), \quad (6.42)$$

где $\tilde{y}(t, x)$ удовлетворяет в области G соотношениям:

$$\partial_t \tilde{y}(t, x) + \mathcal{A}(x, \tilde{y}(t, x)) = g(x), \quad \tilde{y}|_{\partial G} = 0. \quad (6.43)$$

Докажем основную теорему этой работы.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\hat{y} \in C^{2+\delta}(\Omega)$ – стационарное решение задачи (6.36), удовлетворяющее условию 6.1. Тогда для любого $\sigma_0 > 0$ существует такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, что при любом начальном условии $y_0 \in C^{2+\delta}(\Omega)$, удовлетворяющем (6.38) и представимом в виде (6.41), где $z_0 \in C_0^{2+\delta}(\Omega, \Gamma)$ (см. (6.13)), существует управление u , обладающее обратной связью, такое, что решение $y(t, x)$ задачи (6.33), (6.35), (6.37) принадлежит $C^{1+\delta/2, 2+\delta}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ и удовлетворяет оценке (6.39).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 6.1, применим к функции $z_0(x)$ из (6.41) оператор (6.22) и для (6.43) возьмем начальное условие

$$\tilde{y}(t, x)|_{t=0} = y_1(x), \quad \text{где } y_1(x) = \hat{y}(x) + \text{Ext } z_0(x). \quad (6.44)$$

Решение $\tilde{y}(t, x)$ задачи (6.43), (6.44) будем искать в виде $\tilde{y}(t, x) = \hat{y}(x) + z(t, x)$. Как показано в п. 5.2, функция $z(t, x)$ удовлетворяет уравнению (5.14), граничному условию (5.18) и начальному условию

$$z(t, x)|_{t=0} = \text{Ext } z_0(x). \quad (6.45)$$

Так как в силу теоремы 6.1 $\text{Ext } z_0$ принадлежит M_- (M_- – устойчивое инвариантное многообразие задачи (5.14), (5.18)), то вследствие теоремы 5.6 решение $S(t)(\text{Ext } z_0) = z(t, \cdot)$ задачи (5.14), (5.18), (6.45) удовлетворяет оценке (5.56). В силу теоремы 5.5 решение $\tilde{y}(t, x) = \hat{y}(x) + z(t, x)$ задачи (6.43), (6.44) принадлежит $C^{1+\delta/2, 2+\delta}(\mathbb{R}_+ \times G)$. Из (6.42), (5.56) следует оценка (6.39), а также все остальные утверждения теоремы 6.2.

Отметим, что, как и в п. 4.4, простая модификация предложенной здесь конструкции управления с обратной связью позволяет стабилизировать решение квазилинейного уравнения (6.33) в окрестности стационарного решения и в случае, когда в правой части (6.33) могут возникнуть непредусмотренные флуктуации.

Список литературы

1. *Фурсиков А. В., Эмануилов О. Ю.* Точная управляемость уравнений Навье–Стокса и Буссинеска // УМН. 1999. Т. 54. №3. С. 93–146.
2. *Lions J.-L.* Exact controllability, stabilizability, and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30. P. 1–68.
3. *Lagnese J. E.* Boundary stabilization of thin plates. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.
4. *Komornik V.* Rapid boundary stabilization of linear distributed systems // SIAM J. Control Optim. 1997. V. 35. P. 1591–1613.
5. *Coron J.-M.* On null asymptotic stabilization of the two-dimensional incompressible Euler equations in a simply connected domains // SIAM J. Control Optim. 1999. V. 37. №6. P. 1874–1896.
6. *Balogh A., Krstic M.* Burger's equation with nonlinear boundary feedback: H^1 -stability, well-posedness and simulation // Math. Probl. in Engineering. 2000. V. 6. P. 189–200.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
8. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26. №4. С. 15–41.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
10. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
11. *Агмон Ш., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: ИЛ, 1962.
12. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. 1962. V. 15. P. 119–147.
13. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. №3. С. 53–161.
14. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
15. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
16. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
17. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева О. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
18. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера. Новосибирск: Научная книга, 1998.
19. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
20. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
21. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
31.08.2000