Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Смолянов, С. А. Шкарин, О структуре спектров линейных операторов в банаховых пространствах, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 4, 99–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm561>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:23:20

УДК 517.5

О. Г. Смолянов, С. А. Шкарин

О структуре спектров линейных операторов в банаховых пространствах

Получены дескриптивные характеристики точечного, остаточного и непрерывного спектров операторов в банаховых пространствах. В частности, получены необходимые и достаточные условия того, чтобы три попарно не пересекающиеся подмножества комплексной плоскости являлись соответственно точечным, непрерывным и остаточным спектрами некоторого непрерывного линейного оператора на сепарабельном банаховом пространстве.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Формулировки основных результатов

Если X – комплексное векторное пространство и $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – линейный оператор, определенный на линейном подпространстве D_T пространства X , то множество

$$\sigma_p(T) = \{z \in \mathbb{C} : \dim\{x \in D_T : Tx = zx\} = \nu(z) > 0\}$$

называется *точечным спектром* [1], [2] оператора T . Число $\nu(z) \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ для $z \in \sigma_p(T)$ называется *кратностью* точки спектра z . Для $n \in \overline{\mathbb{N}}$ обозначим

$$\sigma_{p,n}(T) = \{z \in \sigma_p(T) : \nu(z) = n\}, \quad \sigma_p^n(T) = \{z \in \sigma_p(T) : \nu(z) \geq n\}.$$

Заметим, что $\sigma_p(T) = \sigma_p^1(T)$ и $\sigma_p^\infty(T) = \sigma_{p,\infty}(T)$.

Если X – топологическое векторное пространство (ТВП)¹, то оператор $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ называется *замкнутым* [2], если его график $\Gamma_T = \{(x, Tx) : x \in D_T\}$ замкнут в $X \times X$, и *плотно определенным* [2], если D_T плотно в X . *Спектром* [2] линейного оператора $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ называется множество

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{array}{l} \text{оператор } T - zI \text{ имеет непрерывный} \\ \text{плотно определенный обратный} \end{array} \right\},$$

где $I: X \rightarrow X$ – тождественный оператор; *непрерывным* и *остаточным спектрами* [2] оператора T называются соответственно множества

$$\sigma_c(T) = \{z \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T) : \text{множество } (T - zI)(D_T) \text{ плотно в } X\};$$

$$\sigma_r(T) = \{z \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T) : \text{множество } (T - zI)(D_T) \text{ не плотно в } X\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01212).

¹Все ТВП в этой работе предполагаются комплексными и хаусдорфовыми.

Очевидно, $\sigma(T)$ – объединение трех попарно не пересекающихся множеств $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$.

Г. К. Калиш [3] для всякого непустого компакта $K \subset \mathbb{R}$ построил пример линейного непрерывного оператора T в сепарабельном гильбертовом пространстве такого, что $\sigma(T) = \sigma_p(T) = K$. Стоит отметить также более ранние работы Б. Секефальви-Надя [4], а также Ж. Диксмье и К. Фойаша [5]. Л. Н. Никольская [6] доказала, что множество $A \subset \mathbb{C}$ является точечным спектром линейного непрерывного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве тогда и только тогда, когда A ограничено и имеет тип F_σ . В работе [7] авторы доказали следующую теорему, которая дает необходимые и достаточные условия того, что три попарно не пересекающиеся подмножества комплексной плоскости являются точечным, непрерывным и остаточным спектрами непрерывного линейного оператора на сепарабельном гильбертовом пространстве.

ТЕОРЕМА 1. 1. Пусть T – замкнутый плотно определенный линейный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Тогда $\sigma_p^n(T)$ – множество типа F_σ для всякого $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma_c(T)$ – множество типа G_δ .

2. Если $K \subset \mathbb{C}$ – непустой компакт, $K = A \cup B \cup C$, причем $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, A_n – убывающая последовательность множеств типа F_σ , $A = A_1$, а B имеет тип G_δ , то существует линейный непрерывный оператор T в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве такой, что $\sigma_p^n(T) = A_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_c(T) = B$ и $\sigma_r(T) = C$.

3. Если $K \subseteq \mathbb{C}$ – замкнутое множество, $K = A \cup B \cup C$, причем $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, A_n – убывающая последовательность множеств типа F_σ , $A = A_1$, а B имеет тип G_δ , то существует замкнутый плотно определенный линейный оператор T в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве такой, что $\sigma_p^n(T) = A_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_c(T) = B$ и $\sigma_r(T) = C$.

Р. Кауфман [8]–[10] показал, что точечный спектр непрерывного линейного оператора в сепарабельном банаховом пространстве (БП) является ограниченным аналитическим множеством (определение см. ниже) и что всякое ограниченное аналитическое множество является спектром некоторого непрерывного линейного оператора в сепарабельном БП.

В настоящей работе рассматривается вопрос о том, какими могут быть множества $\sigma_{p,n}(T)$, $\sigma_p^n(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ для замкнутого линейного оператора T в сепарабельном банаховом пространстве.

Прежде чем сформулировать основной результат, напомним несколько определений. Топологическое пространство X называется *польским*, если оно сепарабельно и метризуемо полной метрикой. Хаусдорфово топологическое пространство называется *суслинским*, если оно является непрерывным образом польского пространства. Подмножество A польского пространства X называется *аналитическим*, если либо $A = \emptyset$, либо A является суслинским пространством в индуцированной из X топологии. Подмножество A польского пространства X называется *коаналитическим*, если множество $X \setminus A$ является аналитическим (свойства множества быть аналитическим или коаналитическим являются топологическими инвариантами). Хаусдорфово топологическое пространство называется *лузин-*

ским, если оно является непрерывным взаимно однозначным образом польского пространства (или, что то же самое, топологию на этом пространстве можно усилить так, чтобы оно превратилось в польское). Очевидно, всякое лузинское пространство является суслинским.

ТЕОРЕМА 2. 1. Если T – замкнутый плотно определенный линейный оператор в сепарабельном БП, то $\sigma_p(T)$ – аналитическое множество, множества $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ являются коаналитическими и существует множество $D \subset \mathbb{C}$ типа F_σ такое, что $\sigma_p(T) \cup D = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$.

2. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – непустой компакт, $K = A \cup B \cup C$, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, A – аналитическое множество, B – коаналитическое множество и существует множество $D \subset \mathbb{C}$ типа F_σ такое, что $A \cup D = A \cup C$. Тогда существуют сепарабельное БП X и линейный непрерывный оператор $T: X \rightarrow X$ такие, что $\sigma_p(T) = A$, $\sigma_c(T) = B$ и $\sigma_r(T) = C$.

3. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – замкнутое множество, $K = A \cup B \cup C$, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, A – аналитическое множество, B – коаналитическое множество и существует множество $D \subset \mathbb{C}$ типа F_σ такое, что $A \cup D = A \cup C$. Тогда существуют сепарабельное БП X и замкнутый плотно определенный линейный оператор T в X такие, что $\sigma_p(T) = A$, $\sigma_c(T) = B$ и $\sigma_r(T) = C$.

Теорема 2, в частности, содержит результаты Р. Кауфмана. Некоторые результаты о кратности точечных спектров операторов в сепарабельных БП содержатся в теоремах 3, 4, а также в следствии 7. Некоторые технические леммы из следующего раздела статьи используются также в работе [7]. Мы приводим их с доказательством для удобства читателя.

§ 2. Свойства частей спектра линейного оператора

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X – хаусдорфово ТВП, $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – линейный оператор и график Γ_T оператора T является суслинским пространством (в индуцированной из $X \times X$ топологии). Тогда множество $\sigma_p^n(T)$ является аналитическим при любом $n \in \overline{\mathbb{N}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда множество

$$A = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), z) \in \Gamma_T^n \times \mathbb{C} : y_j = zx_j \text{ при } 1 \leq j \leq n\} \quad (1)$$

замкнуто в суслинском пространстве $\Gamma_T^n \times \mathbb{C}$ и, значит, само является суслинским. Легко видеть, что множество

$$B = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), z) \in A : \text{векторы } x_1, \dots, x_n \text{ линейно независимы}\} \quad (2)$$

открыто в суслинском пространстве A и, значит, B является суслинским. Очевидно, отображение

$$\varphi: B \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), z) = z, \quad (3)$$

непрерывно и $\varphi(B) = \sigma_p^n(T)$. Непрерывный образ суслинского пространства является суслинским. Следовательно, $\sigma_p^n(T)$ – аналитическое множество. Множество $\sigma_p^\infty(T)$ тоже является аналитическим (см. [11]) как пересечение счетного числа аналитических множеств $\sigma_p^n(T)$, $n \in \mathbb{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – суслинское ТВП и $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – замкнутый линейный оператор. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество $\sigma_p^n(T)$ является аналитическим.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку всякое аналитическое подмножество $\mathbb{C}$ измеримо по Лебегу и обладает свойством Бэра (т.е. является симметрической разностью открытого множества и множества первой категории), для линейного оператора с суслинским графиком множества $\sigma_p^n(T)$ и $\sigma_{p,n}(T)$ измеримы по Лебегу и обладают свойством Бэра при всех $n \in \mathbb{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X – хаусдорфово ТВП и $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – линейный оператор, график которого является объединением счетного числа метризуемых компактов. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество $\sigma_p^n(T)$ имеет тип F_σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и A, B – множества, определяемые равенствами (1) и (2). В силу замкнутости A в пространстве $\Gamma_T^n \times \mathbb{C}$, которое является объединением счетного числа метризуемых компактов, A само является объединением счетного числа метризуемых компактов. Поскольку открытое подмножество метризуемого компакта является объединением счетного числа метризуемых компактов, имеем, что открытое в A множество B является объединением счетного числа метризуемых компактов. Пусть теперь $\varphi: B \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывная функция, определяемая соотношением (3). Непрерывный образ компакта – компакт; следовательно, множество $\varphi(B) = \sigma_p^n(T)$ σ -компактно и, значит, имеет тип F_σ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть хаусдорфово ТВП X является объединением счетного числа метризуемых компактов и $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – замкнутый линейный оператор. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество $\sigma_p^n(T)$ имеет тип F_σ .

Если X – хаусдорфово локально выпуклое пространство (ЛВП), то символом X' будем обозначать пространство всех непрерывных линейных функционалов на X . Для $y \in X'$ и $x \in X$ вместо $y(x)$ будем писать (x, y) . Если $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – плотно определенный линейный оператор, то символом T' будем обозначать сопряженный оператор $T': D_{T'} \subseteq X' \rightarrow X'$. То есть $D_{T'}$ – это множество тех $\varphi \in X'$, для которых функционал $x \mapsto (Tx, \varphi)$ на D_T непрерывен в индуцированной из X топологии, а единственное непрерывное продолжение этого функционала на X и есть $T'\varphi$. Заметим, что оператор T' всегда замкнут при наделении X' *-слабой топологией $\sigma(X', X)$ (см. [12]).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть X – метризуемое сепарабельное ЛВП и $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – плотно определенный линейный оператор. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество $\sigma_p^n(T')$ имеет тип F_σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база окрестностей нуля в X . Тогда X' является объединением последовательности $U_n^\circ = \{y \in X' : |(x, y)| \leq 1 \text{ для всех } x \in U_n\}$ – поляр множеств U_n в X' . По теореме Алаоглу [12] U_n° компактны в топологии $\sigma(X', X)$. В силу сепарабельности X компакты $(U_n^\circ, \sigma(X', X))$ метризуемы [12]. Кроме того, оператор T' замкнут при наделении X' топологией $\sigma(X', X)$. Осталось применить следствие 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X – ЛВП, $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – плотно определенный замкнутый линейный оператор. Тогда $\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_p(T')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \sigma_r(T)$. Тогда линейное пространство $(T - zI)(X)$ не плотно в X . По теореме Хана–Банаха [12] существует $y \in X' \setminus \{0\}$ такой, что $((T - zI)x, y) = 0$ и, значит, $(Tx, y) = (x, zy)$ при всех $x \in X$. Значит, $y \in D_{T'}$ и $T'y = zy$. Стало быть, $z \in \sigma_p(T')$. Пусть теперь $z \in \sigma_p(T')$. Тогда найдется $y \in D_{T'} \setminus \{0\}$ такой, что $T'y = zy$. Следовательно, $(Tx, y) = (x, T'y) = (x, zy) = (zx, y)$ и, значит, $((T - zI)x, y) = 0$ для всякого $x \in D_T$. Тем самым, $(T - zI)(D_T) \subseteq \ker y$. Стало быть, множество $(T - zI)(D_T)$ не плотно в X . Значит, $z \in \sigma_r(T) \cup \sigma_p(T)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть X – сепарабельное метризуемое суслинское ЛВП, $T: X \rightarrow X$ – линейный непрерывный оператор. Тогда $\sigma_p^n(T)$ – аналитическое множество для всякого $n \in \bar{\mathbb{N}}$ и $\sigma_r(T)$ – коаналитическое множество. Кроме того, существует множество $D \subseteq \mathbb{C}$ типа F_σ такое, что $\sigma_p(T) \cup D = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналитичность $\sigma_p^n(T)$ вытекает из следствия 1. По следствию 3 $D = \sigma_p(T')$ – множество типа F_σ . По предложению 3 $\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) = \sigma_p(T) \cup D$. Следовательно, множество $\sigma_r(T) = D \setminus \sigma_p(T)$ является коаналитическим (см. [11; §39]) как разность борелевского и аналитического множеств.

Для ТВП X и $n \in \mathbb{N}$ символом $G_n(X)$ обозначим множество всех n -мерных линейных подпространств X , наделенное следующей топологией τ_n . Если $L \in G_n(X)$ и $x_1, \dots, x_n$ – базис в L , то найдется открытая окрестность нуля U в X такая, что для всех $y_j \in x_j + U$ ($1 \leq j \leq n$) векторы $y_1, \dots, y_n$ линейно независимы. Пусть $W(L, U) \subseteq G_n(X)$ – множество линейных оболочек всевозможных наборов векторов $y_1, \dots, y_n$, где $y_j \in x_j + U$, $1 \leq j \leq n$. Множество всех таких $W(L, U)$ (здесь L фиксировано, а U – нет) образует базу топологии τ_n в точке L . Заметим, что $G_n(X)$ – это аналог многообразия Грассмана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть X – хаусдорфово ТВП и $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – линейный оператор. Пусть также $n \in \mathbb{N}$ и топологическое пространство $G_n(\Gamma_T)$ является лузинским. Тогда множество $\sigma_{p,n}(T)$ является коаналитическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что множество

$$C = \{(L, z) \in G_n(\Gamma_T) \times \mathbb{C} : y = zx \text{ для всех } x, y \in X \text{ таких, что } (x, y) \in L\}$$

является замкнутым подмножеством лузинского пространства $G_n(\Gamma_T) \times \mathbb{C}$ и, значит, само является лузинским. Очевидно, отображение $\psi: C \rightarrow \mathbb{C}$, задаваемое формулой $\psi(L, z) = z$, непрерывно. Из определения C и ψ следует, что $\psi(C) = \sigma_p^n(T)$ и что $\sigma_{p,n}(T)$ совпадает с множеством комплексных чисел, имеющих ровно один прообраз при отображении ψ . Согласно теореме Н. Н. Лузина (см. [11; §39, теорема 1]) если $f: U \rightarrow V$ – борелевское отображение польского пространства U в сепарабельное метризуемое пространство V , то множество точек V , имеющих ровно один прообраз в U при отображении f , является коаналитическим. Так как C является взаимно однозначным непрерывным образом польского пространства, из приведенной теоремы Лузина следует коаналитичность $\sigma_{p,n}(T)$.

ЛЕММА 1. Пусть X – лузинское ЛВП. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ пространство $G_n(X)$ является лузинским.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество

$$Y = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n : \text{векторы } x_1, \dots, x_n \text{ линейно независимы}\}$$

наделено индуцированной из X^n топологией. Тогда Y открыто в лузинском пространстве X^n и, значит, само является лузинским (борелевское подмножество лузинского пространства является лузинским пространством [11; §39, замечание 1]). Для всякого $x \in Y$ пусть $L_x \in G_n(X)$ – линейная оболочка векторов $x_1, \dots, x_n$. В силу конечномерности L_x и локальной выпуклости X существует замкнутое линейное подпространство $M_x \subset X$ такое, что X является прямой суммой ЛВП L_x и M_x . Выберем открытую окрестность нуля U_x в M_x такую, что векторы $x_1 + z_1, \dots, x_n + z_n$ линейно независимы для любых $z_j \in U_x$. Пусть $A_x = \{y \in Y : y_j - x_j \in U_x \text{ при всех } j\} \subset Y$. Очевидно, A_x гомеоморфно U_x^n и, значит, является лузинским. С другой стороны, отображение $y \mapsto L_y$ из A_x в $G_n(X)$ – гомеоморфизм на образ и множество $B_x = \{L_y : y \in A_x\}$ является открытой окрестностью L_x в $G_n(X)$. Всякое лузинское пространство является линделёфовым [1]. Поэтому из открытого покрытия $\{A_x : x \in Y\}$ пространства Y можно выбрать счетное подпокрытие $\{A_{x_j} : j \in \mathbb{N}\}$. Тогда

$$G_n(X) = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{x_m} = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m,$$

$$\text{где } K_1 = B_{x_1} \text{ и } K_m = B_{x_m} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} B_{x_j} \right) \quad \text{при } m \geq 2.$$

Каждое K_m является лузинским как замкнутое подмножество лузинского пространства B_{x_m} , и множества K_m попарно не пересекаются. Поскольку класс лузинских пространств замкнут относительно счетных дизъюнктивных объединений, имеем, что пространство $G_n(X)$ лузинское.

Из предложения 5 и леммы 1 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть X – хаусдорфово ЛВП, $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – линейный оператор, причем график Γ_T оператора T является лузинским пространством. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество $\sigma_{p,n}(T)$ является коаналитическим.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть X – хаусдорфово ТВП, $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – линейный оператор, причем топологию на графике Γ_T оператора T можно усилить так, чтобы Γ_T превратился в полное сепарабельное метризуемое ТВП. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество $\sigma_{p,n}(T)$ является коаналитическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо лишь заметить, что если Y – метризуемое полное сепарабельное ТВП, то пространство $G_n(Y)$ является польским. Значит, топологию на $G_n(\Gamma_T)$ можно усилить так, чтобы $G_n(\Gamma_T)$ превратилось в польское пространство. То есть пространство $G_n(\Gamma_T)$ является лузинским. Осталось применить предложение 5.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть X – полное метризуемое ТВП и $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – замкнутый линейный оператор. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество $\sigma_{p,n}(T)$ является коаналитическим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть X – сепарабельное рефлексивное БП и $T: D_T \subseteq X \rightarrow X$ – плотно определенный замкнутый линейный оператор. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество $\sigma_p^n(T)$ имеет тип F_σ , а множество $\sigma_c(T)$ имеет тип G_δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку замкнутость в сильной и слабой топологиях для выпуклых подмножеств БП эквивалентны, имеем, что график оператора T замкнут относительно слабой топологии на $X \times X$. Замкнутые шары в сепарабельном рефлексивном БП метризуемы и компактны в слабой топологии (см. [12]). Значит, X в слабой топологии является объединением счетного числа метризуемых компактов. По следствию 2 множество $\sigma_p^n(T)$ имеет тип F_σ для всякого $n \in \mathbb{N}$. По следствию 3 множество $\sigma_p(T')$ имеет тип F_σ . По предложению 3 $\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_p(T')$. Таким образом, множество $\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$ имеет тип F_σ . В силу замкнутости $\sigma(T)$ множество $\sigma_c(T) = \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T))$ имеет тип G_δ .

Напомним, что БП X называется квазирефлексивным, если $\dim X''/X < +\infty$. В частности, любое рефлексивное БП является квазирефлексивным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть X – сепарабельное квазирефлексивное БП и $T: X \rightarrow X$ – непрерывный линейный оператор. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество $\sigma_p^n(T)$ имеет тип F_σ , а множество $\sigma_c(T)$ имеет тип G_δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор $S: X''/X \rightarrow X''/X$, определяемый равенством $S(x + X) = T''x + X$. Корректность этого определения вытекает из соотношения $T''|_X = T$. Из определения S видно, что если $x \in X'' \setminus X$ – собственный вектор оператора T'' , то $x + X$ – собственный вектор оператора S с тем же собственным значением. Значит, для всякого $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$\sigma_p^n(T'') \setminus \sigma(S) \subseteq \sigma_p^n(T) \subseteq \sigma_p^n(T'') \cup \sigma(S). \quad (4)$$

Так как X сепарабельно и X''/X конечномерно, X'' сепарабельно. Поскольку БП с сепарабельным сопряженным сепарабельно, X' тоже сепарабельно. Значит, по следствию 3 множество $\sigma_p^n(T'')$ имеет тип F_σ . В силу конечномерности X''/X множество $\sigma(S)$ конечно. Тогда по (4) множество $\sigma_p^n(T)$ имеет тип F_σ . По следствию 3 множество $\sigma_p(T')$ имеет тип F_σ . По предложению 3 $\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_p(T')$. Стало быть, множество $\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$ имеет тип F_σ . Значит, множество $\sigma_c(T) = \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T))$ имеет тип G_δ .

Следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – метризуемое лузинское ЛВП и $T: D_T \subset X \rightarrow X$ – замкнутый плотно определенный оператор. Тогда

- (а) множество $\sigma_p^n(T)$ является аналитическим для всякого $n \in \overline{\mathbb{N}}$, множества $\sigma_r(T)$ и $\sigma_{p,n}(T)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ являются коаналитическими, причем существует множество D типа F_σ такое, что $\sigma_p(T) \cup D = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$;

- (b) если множество $\sigma_{p,\infty}(T)$ борелевское, то множества $\sigma_r(T)$, $\sigma_p^n(T)$ и $\sigma_{p,n}(T)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ являются борелевскими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть (а) теоремы вытекает из предложения 4 и следствия 4. Если множество $\sigma_{p,\infty}(T)$ борелевское, то по (а) для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\sigma_p^n(T)$ является аналитическим и коаналитическим как счетное объединение коаналитических множеств $\sigma_{p,k}(T)$, $n \leq k \leq \infty$. Согласно теореме Суслина (см. [11; § 39, следствие 1]) если множество одновременно является аналитическим и коаналитическим, то оно борелевское. Следовательно, множество $\sigma_p^n(T)$ является борелевским для всякого n . Значит, множества $\sigma_r(T) = D \setminus \sigma_p^1(T)$ и $\sigma_{p,n}(T) = \sigma_p^n(T) \setminus \sigma_p^{n+1}(T)$ ($n \in \mathbb{N}$) являются борелевскими.

§ 3. Операторы с заданными спектрами в сепарабельном банаховом пространстве

Следующая конструкция сходна с конструкцией из работы [8].

Пусть M – множество. Символом E_M обозначим линейное пространство формальных линейных комбинаций элементов M (= свободное линейное пространство над M):

$$E_M = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_k : n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}, x_k \in M \right\}.$$

Для всякой метрики d на M пусть $\mathcal{L}(M, d)$ – линейное пространство ограниченных липшицевых функций $\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}$ с нормой

$$p_d(\varphi) = \max\{\mathbf{C}(\varphi); \text{Lip}_d(\varphi)\}, \quad \text{где } \mathbf{C}(\varphi) = \sup\{|\varphi(x)| : x \in M\} \quad \text{и} \\ \text{Lip}_d(\varphi) = \inf\{c > 0 : |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq cd(x, y) \text{ при всех } x, y \in M\}.$$

В следующих двух формулах предполагается, что $\xi = \sum_{k=1}^n c_k x_k \in E_M$. Норму $\|\cdot\|_d$ на E_M определим равенством

$$\|\xi\|_d = \sup\{|\langle \xi, \varphi \rangle| : \varphi \in \mathcal{L}(M, d), p_d(\varphi) \leq 1\}, \quad \text{где } \langle \xi, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^n c_k \varphi(x_k). \quad (5)$$

Для функции $\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}$ линейный оператор T_φ в E_M определим равенством

$$T_\varphi \xi = \sum_{k=1}^n c_k \varphi(x_k) x_k. \quad (6)$$

Пусть $(X_{M,d}, \|\cdot\|_d)$ – пополнение нормированного пространства $(E_M, \|\cdot\|_d)$.

ЛЕММА 2. 1. Если $x, y \in M$ и $d(x, y) \leq 2$, то $\|x - y\|_d = d(x, y)$. Естественное вложение M в нормированное пространство $(E_M, \|\cdot\|_d)$ является гомеоморфизмом и БП $X_{M,d}$ является сепарабельным, если метрическое пространство (M, d) сепарабельно. Если $(\overline{M}, d)$ – пополнение метрического пространства (M, d) , то $X_{M,d} = X_{\overline{M},d}$.

2. Если $f \in \mathcal{L}(M, d)$, то линейный функционал $\langle \cdot, f \rangle$ ограничен относительно нормы $\|\cdot\|_d$ и норма этого функционала равна $p_d(f)$. Тем самым

функционал $\langle \cdot, f \rangle$ продолжается до непрерывного линейного функционала на БП $X_{M,d}$ (это продолжение мы снова будем обозначать $\langle \cdot, f \rangle$).

3. Для всякого $f \in \mathcal{L}(M, d)$ линейный оператор T_f ограничен относительно нормы $\|\cdot\|_d$ и $\|T_f\| \leq 2p_d(f)$. Тем самым оператор T_f продолжается до непрерывного линейного оператора в БП $X_{M,d}$ (это продолжение мы снова будем обозначать T_f).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Справедливость неравенства $\|x - y\|_d \leq d(x, y)$ для всех $x, y \in M$ немедленно следует из (5). Пусть $x, y \in M$ и $d(x, y) \leq 2$. Очевидно, функция φ , определяемая равенствами $\varphi(z) = 1 - d(x, z)$ при $d(x, z) \leq 2$ и $\varphi(z) = -1$ при $d(x, z) > 2$, принадлежит $\mathcal{L}(M, d)$ и $p_d(\varphi) \leq 1$. Значит, по (5) $\|x - y\|_d \geq |\langle x - y, \varphi \rangle| = d(x, y)$. Равенство $d(x, y) = \|x - y\|_d$ при $d(x, y) \leq 2$ доказано. Остальные утверждения первой части леммы вытекают из этого равенства элементарно. Часть 2 леммы немедленно вытекает из (5).

3. Пусть $\xi = \sum_{k=1}^n c_k x_k \in E_M$ и $\varphi \in \mathcal{L}(M, d)$, $p_d(\varphi) \leq 1$. Заметим, что

$$\sup_{x \in M} |f(x)\varphi(x)| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| \sup_{x \in M} |\varphi(x)| \leq p_d(f)p_d(\varphi) \leq p_d(f)$$

и

$$\begin{aligned} |f(x)\varphi(x) - f(y)\varphi(y)| &\leq |f(x)(\varphi(x) - \varphi(y))| + |(f(x) - f(y))\varphi(y)| \\ &\leq 2p_d(f)p_d(\varphi)d(x, y) \leq 2p_d(f)d(x, y), \end{aligned}$$

значит, $p_d(f\varphi) \leq 2p_d(f)$. В силу (6) и (5) $|\langle T_f \xi, \varphi \rangle| = |\langle \xi, f\varphi \rangle| \leq p_d(f\varphi)\|\xi\|_d \leq 2p_d(f)\|\xi\|_d$. Следовательно, $\|T_f\| \leq 2p_d(f)\|\xi\|_d$.

Ключевым моментом этого параграфа является доказательство того, что если метрическое пространство (M, d) полно и сепарабельно и $f \in \mathcal{L}(M, d)$, то для оператора T_f в БП $X_{M,d}$ выполняются равенства $\sigma_{p,n}(T_f) = \{z \in \mathbb{C} : |f^{-1}(z)| = n\}$.

Введем еще одно определение. Пусть $\xi \in X_{M,d}$. Символом U_ξ обозначим множество тех $x \in M$, у которых есть такая открытая окрестность O_x в метрическом пространстве (M, d) , что для всякой $\varphi \in \mathcal{L}(M, d)$ с $\text{supp } \varphi \subset O_x$ выполняется равенство² $\langle \xi, \varphi \rangle = 0$. Множество $M \setminus U_\xi$ назовем *носителем* ξ и будем обозначать $\text{supp}_{M,d} \xi$. Очевидно, что множество $\text{supp}_{M,d} \xi$ замкнуто для любого $\xi \in X_{M,d}$. Если $\xi = \sum_{k=1}^n c_k x_k \in E_M$ и $x_j \neq x_k$ при $j \neq k$, $c_k \neq 0$ при всех k , то $\text{supp}_{M,d} \xi = \{x_1, \dots, x_n\}$. В случае $\xi \in E_M$ вместо $\text{supp}_{M,d} \xi$ будем просто писать $\text{supp } \xi$. Если $x \in M$, $A \subset M$, то символом $d(x, A)$ будем обозначать расстояние от точки x до множества A : $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$.

ЛЕММА 3. Пусть (M, d) – полное сепарабельное метрическое пространство и $\xi \in X_{M,d}$. Тогда если $A = \text{supp}_{M,d} \xi$ – конечное множество, то $\xi \in E_M$ (т.е. ξ – линейная комбинация элементов A). В частности, если $\text{supp}_{M,d} \xi = \emptyset$, то $\xi = 0$.

²Здесь и ниже $\text{supp } \varphi = \{x \in M : \varphi(x) \neq 0\}$ – носитель функции φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сперва случай $A = \emptyset$. Предположим, что $\xi \neq 0$. Поскольку $\text{supp}_{M,d} \xi = \emptyset$, для каждого $x \in M$ существует окрестность O_x точки x такая, что $\langle \xi, \varphi \rangle = 0$ при всех $\varphi \in \mathcal{L}(M, d)$ таких, что $\text{supp } \varphi \subseteq O_x$. Выберем для каждого $x \in M$ функцию $\varphi_x \in \mathcal{L}(M, d)$ так, чтобы $\text{supp } \varphi \subseteq O_x$, $\varphi_x(y) \geq 0$ при всех $y \in M$, $p_d(\varphi_x) \leq 1$ и $\varphi_x(y) > 0$ при всех y из некоторой окрестности U_x точки x . В силу сепарабельности метрического пространства (M, d) существует последовательность $x_n \in M$ такая, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_{x_n} = M$. Положим $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varphi_{x_n}$. Очевидно, $\varphi \in \mathcal{L}(M, d)$, $p_d(\varphi) \leq 1$, $\varphi(y) > 0$ при всех $y \in M$. Пусть $\psi \in \mathcal{L}(M, d)$. Тогда $\langle T_{\varphi}, \psi \rangle = \langle \xi, \varphi \psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, \varphi_{x_n} \psi \rangle = 0$, так как $\text{supp } \varphi_{x_n} \psi \subseteq O_{x_n}$. В силу произвольности ψ имеем, что

$$T_{\varphi} \xi = 0. \quad (7)$$

Следующий прием используется в работе [8]. Выберем индуктивно последовательность $\varphi_n \in \mathcal{L}(M, d)$ (считая, что $\varphi_0 \equiv 1$) такую, что

- 1) $\|T_{\varphi_1 \dots \varphi_n} \xi\|_d \geq \|\xi\|_d$ при всех $n \in \mathbb{N}$;
- 2) множество $\text{supp } \varphi_n$ содержится в объединении конечного числа шаров в (M, d) радиуса $1/n$.

Пусть $n \geq 1$ и φ_j при $j < n$, удовлетворяющие требуемым условиям, уже выбраны. Положим $\eta = T_{\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}} \xi$. По предположению индукции $\|\eta\|_d \geq \|\xi\|_d > 0$. В силу плотности E_M в $X_{M,d}$ найдется $\gamma = \sum_{j=1}^m c_j x_j \in E_M$ такой, что $\|\gamma - \eta\|_d \leq \|\eta\|_d / (6n)$. Положим

$$\varphi_n = \begin{cases} 2(1 - nd(x, \{x_1, \dots, x_m\})), & \text{если } d(x, \{x_1, \dots, x_m\}) \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{если } d(x, \{x_1, \dots, x_m\}) > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Очевидно, $\text{supp } \varphi_n$ содержится в объединении шаров с центрами в $x_1, \dots, x_m$ радиуса $1/n$. Легко видеть, что $p_d(\varphi_n) = 2n$. По лемме 2

$$\|T_{\varphi_n}(\gamma - \eta)\| \leq 2p_d(\varphi_n)\|\gamma - \eta\|_d \leq \frac{\|\eta\|_d}{3}.$$

С другой стороны, $T_{\varphi_n}(\gamma - \eta) = T_{\varphi_n} \gamma - T_{\varphi_n} \eta = 2\gamma - T_{\varphi_n} \eta$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|T_{\varphi_1 \dots \varphi_n} \xi\|_d &= \|T_{\varphi_n} \eta\|_d \geq 2\|\gamma\|_d - \|T_{\varphi_n}(\gamma - \eta)\|_d \\ &\geq 2\|\eta\|_d - 2\|\gamma - \eta\|_d - \frac{\|\eta\|_d}{3} \geq 2\|\eta\|_d - \frac{\|\eta\|_d}{2} \geq \|\eta\|_d \geq \|\xi\|_d. \end{aligned}$$

То есть φ_n удовлетворяет всем требуемым условиям. Построение последовательности φ_n завершено. Пусть $U_k = \{x \in M : \varphi(x) > 1/k\}$. В силу условия 2), открытости U_k и равенства $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ найдутся $k, n \in \mathbb{N}$ такие, что $\text{supp}(\varphi_1 \dots \varphi_n) \subseteq U_k$. Из определения U_k следует, что функция $1/\varphi$ ограничена и липшицева на U_k . Поскольку всякую ограниченную липшицеву функцию можно с подмножества метрического пространства продолжить до ограниченной липшицевой функции на все пространство, существует $f \in \mathcal{L}(M, d)$ такая, что

$f(x) = 1/\varphi(x)$ при $x \in U_k$. Тогда $\varphi_1 \dots \varphi_n = \varphi_1 \dots \varphi_n f \varphi$. Из условия 1) и равенства (7) имеем, что $0 \neq T_{\varphi_1 \dots \varphi_n} \xi = T_{\varphi_1 \dots \varphi_n} f \varphi \xi = T_{\varphi_1 \dots \varphi_n} f T_{\varphi} \xi = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\xi = 0$.

Пусть теперь $A = \{x\}$ — одноточечное множество. Если функция $\varphi \in \mathcal{L}(M, d)$ обращается в нуль в окрестности x , то $\text{supp}_{M, d} T_{\varphi} \xi = \emptyset$ и по уже доказанному свойству $T_{\varphi} \xi = 0$. Выберем $\xi_n \in E_M$ так, чтобы $\|\xi_n - \xi\|_d \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ пусть $\varphi_k \in \mathcal{L}(M, d)$ определяется равенством

$$\varphi_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } d(x, y) \geq \frac{1}{n}; \\ 1 & \text{при } d(x, y) \leq \frac{1}{2n}; \\ 2nd(x, y) - 1 & \text{при } \frac{1}{2n} \leq d(x, y) \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Ввиду только что сделанного замечания, $T_{\varphi_n} \xi = \xi$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. В силу непрерывности оператора T_{φ_n} имеем, что $\|T_{\varphi_n} \xi_k - \xi\|_d \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Значит, для всякого $k \in \mathbb{N}$ можно выбрать $n_k \in \mathbb{N}$ такое, что $\|\xi - \eta_k\|_d < 1/k$, где $\eta_k = T_{\varphi_{n_k}} \xi_{n_k}$. Из определения φ_k видно, что $\text{supp } \eta_k$ содержится в шаре радиуса $1/k$ с центром в x . Значит, $d(x, \text{supp } \eta_k) \rightarrow 0$. Если x — изолированная точка M , то условие $d(x, \text{supp } \eta_k) \rightarrow 0$ означает, что $\text{supp } \eta_k = \{x\}$ при достаточно больших k . Поскольку $\eta_k \in E_M$, $\eta_k = c_k x$ при достаточно больших k . Следовательно, $\xi = cx$, где $c = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$. Если x — предельная точка M , то можно считать, что $x \notin \text{supp } \eta_k$ при всех k (если $x \in \text{supp } \eta_k$, можно в разложении $\eta_k = \sum_{1 \leq j \leq N_k} c_j^k x_j^k$ заменить x на близкую точку так, чтобы условия $\|\eta_k - \xi\|_d < 1/k$ и $d(x, \text{supp } \eta_k) \leq 1/k$ не нарушились). Положим $n_1 = 1$, $A_1 = \text{supp } \eta_1$ и $\varepsilon_1 = d(x, A_1)$. Из соотношения $x \notin A_1$ следует, что $\varepsilon_1 > 0$. Выберем индуктивно строго возрастающую последовательность натуральных чисел n_k так, чтобы носитель $\eta_{n_{k+1}}$ содержался в шаре с центром в x радиуса $\varepsilon_k/2$, где $\varepsilon_k = d(x, \text{supp } \eta_{n_k})$. Последовательность положительных чисел ε_k при этом автоматически убывает. Пусть $\tau \in \mathcal{L}(M, d)$. На множестве $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k = \text{supp } \xi_{n_k}$, зададим функцию

$$f(y) = \begin{cases} \tau(y), & \text{если } y \in A_k \text{ и } k \text{ нечетно;} \\ \tau(x), & \text{если } y \in A_k \text{ и } k \text{ четно.} \end{cases}$$

Из ограниченности τ вытекает ограниченность f . Проверим, что функция f липшицева. Пусть $y, z \in A$. Если $y \in A_k, z \in A_m$ и k, m четны, то $|f(y) - f(z)| = 0$. Если $y \in A_k, z \in A_m$ и k, m нечетны, то $|f(y) - f(z)| = |\tau(y) - \tau(z)| \leq p_d(\tau)d(y, z)$. Если числа k и m разной четности, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что k нечетно, а m четно. Тогда $|f(y) - f(z)| = |\tau(y) - \tau(x)| \leq p_d(\tau)d(x, y)$. Если $k < m$, то $d(x, y) \geq \varepsilon_k$ и $d(z, x) \leq \varepsilon_k/2$. Значит, $d(y, z) \geq d(x, y)/2$. Если $k > m$, то $d(x, z) \geq \varepsilon_m$ и $d(x, y) \leq \varepsilon_m/2$. Тем самым $d(y, z) \geq d(x, y)$. Итак, в любом случае $d(x, y) \leq 2d(y, z)$. Следовательно, $|f(y) - f(z)| \leq 2p_d(\tau)d(y, z)$. Липшицевость f доказана. Всякая липшицева ограниченная функция продолжается с подмножества метрического пространства до липшицевой ограниченной функции на все пространство. Следовательно, существует $\bar{f} \in \mathcal{L}(M, d)$ такая, что $\bar{f}|_A = f$. По (5) и определению f имеем, что $\langle \eta_k, \bar{f} \rangle f = \tau(x) \langle \eta_k, 1 \rangle$ при четных k и $\langle \xi_{n_k}, \bar{f} \rangle f = \langle \xi_{n_k}, \tau \rangle$ при

нечетных k . Переходя в последних равенствах к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем, что $\tau(x)\langle \xi, 1 \rangle = \langle \xi, \tau \rangle$. Следовательно, $\langle \xi - \langle \xi, 1 \rangle x, \tau \rangle = 0$ при всех $\tau \in \mathcal{L}(M, d)$. Значит, $\xi = \langle \xi, 1 \rangle x$. Итак, в любом случае $\xi = cx$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$.

Пусть теперь $\text{supp}_{M,d} \xi = \{x_1, \dots, x_n\}$. Выберем разбиение единицы $\{R_j : 1 \leq j \leq n\}$, состоящее из элементов $\mathcal{L}(M, d)$ так, чтобы для всякого j функция R_j равнялась тождественно единице в некоторой окрестности точки x_j и тождественно равнялась нулю в окрестностях x_i при $i \neq j$. Положим $\xi_j = T_{R_j} \xi$. Тогда легко видеть, что $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j$ и $\text{supp}_{M,d} \xi_j = \{x_j\}$. По уже доказанному свойству элементов $X_{M,d}$ с однотоочечным носителем имеем, что $\xi_j = c_j x_j$ при всех j . Следовательно, $\xi = \sum_{j=1}^n c_j x_j \in E_M$.

ЛЕММА 4. Пусть (M, d) – полное сепарабельное метрическое пространство и $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ – липшицева функция. Тогда замыкание Γ множества $\{(x, y) \in E_M^2 : y = T_f x\}$ в $X_{M,d}^2$ (T_f – оператор в E_M , определяемый равенством (6)) является графиком плотно определенного (и автоматически замкнутого) линейного оператора в БП $X_{M,d}$ (этот оператор мы будем обозначать тем же символом T_f).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi_n \in E_M$ ($n \in \mathbb{N}$) и $\eta \in X_{M,d}$ таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n\|_d = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_f \xi_n - \eta\|_d = 0.$$

Для доказательства того, что Γ – график линейного оператора, достаточно проверить, что $\eta = 0$. Для всякого $x \in M$ выберем окрестность O_x точки x в M так, чтобы функция $f|_{O_x}$ была ограничена. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(M, d)$ и $\text{supp } \varphi \subseteq O_x$. Тогда $\varphi f \in \mathcal{L}(M, d)$ и в силу соотношений $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n\|_d = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_f \xi_n - \eta\|_d = 0$ выполняется равенство $\langle \eta, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_f \xi_n, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \xi_n, f \varphi \rangle = 0$. Следовательно, $\text{supp}_{M,d} \eta = \emptyset$. По лемме 3 $\eta = 0$. Тем самым замыкание множества $\{(x, y) \in E_M^2 : y = T_f x\}$ в $X_{M,d}^2$ является графиком линейного оператора T_f в БП $X_{M,d}$. Очевидно, $E_M \subseteq D_{T_f}$. Значит, оператор T_f плотно определен.

ЛЕММА 5. Пусть (M, d) – полное сепарабельное метрическое пространство и $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ – липшицева функция. Тогда для замкнутого плотно определенного оператора T_f (см. лемму 4) на БП $X_{M,d}$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma(T_f) &= \overline{f(M)}, \quad \sigma_p(T_f) = f(M), \quad \sigma_c(T_f) = \overline{f(M)} \setminus f(M) \quad \text{и} \\ \sigma_{p,n}(T_f) &= \{z \in \mathbb{C} : |f^{-1}(z)| = n\} \quad \text{для всякого } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(M)}$. Рассмотрим функцию $g_z(x) = (f(x) - z)^{-1}$. Тогда $g_z \in \mathcal{L}(M, d)$. По лемме 2 оператор T_{g_z} в БП $X_{M,d}$ непрерывен. По (6)

$$\begin{aligned} (Tf - zI)T_{g_z} &= T_{f-z}T_{g_z} = T_{(f-z)g_z} = T_1 = I, \\ T_{g_z}(Tf - zI) &= T_{g_z}T_{f-z} = T_{g_z(f-z)} = T_1 = I. \end{aligned}$$

Следовательно, $z \notin \sigma(T)$. Итак, $\sigma(T) \subseteq \overline{f(M)}$. Если $z \in f(M)$, то найдется $x \in M$ такой, что $f(x) = z$. Тогда по (6) $Tf x = f(x)x = zx$. Значит, $z \in \sigma_p(T)$.

Таким образом, $f(M) \subseteq \sigma_p(T_f)$. Из включения $f(M) \subseteq \sigma_p(T_f) \subseteq \sigma(T_f) \subseteq \overline{f(M)}$ и замкнутости $\sigma(T_f)$ следует, что $\sigma(T_f) = \overline{f(M)}$. Пусть $\xi \in X_{M,d}$, $z \in \mathbb{C}$ и $T_f \xi = z\xi$. Если $x \in M$ и $f(x) \neq z$, то в силу непрерывности f найдется $\varepsilon > 0$ и окрестность O_x точки x такие, что $|f(y) - z| \geq \varepsilon$ при всех $y \in O_x$. Если $\varphi \in \mathcal{L}(M, d)$ и $\text{supp } \varphi \subseteq O_x$, то положим

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(y)}{f(y) - z} & \text{при } y \in O_x; \\ 0 & \text{при } y \in M \setminus O_x. \end{cases}$$

Так как $|f(y) - z| \geq \varepsilon$ при всех $y \in O_x$ и $\text{supp } \varphi \subseteq O_x$, имеем, что $\psi \in \mathcal{L}(M, d)$. Кроме того, $\varphi = (f - z)\psi$. Следовательно, $\langle \xi, \varphi \rangle = \langle \xi, (f - z)\psi \rangle = \langle (T_f - zI)\xi, \psi \rangle = \langle 0, \psi \rangle = 0$. Таким образом, $x \notin \text{supp}_{M,d} \xi$. Итак, $\text{supp}_{M,d} \xi \subseteq f^{-1}(z)$. Теперь если $z \notin f(M)$, то $\text{supp}_{M,d} \xi = \emptyset$ и $\xi = 0$ по лемме 3. Стало быть, $\sigma_p(T) \subseteq f(M)$. Противоположное включение было доказано раньше, значит, $\sigma_p(T) = f(M)$. Если же $f^{-1}(z) = \{x_1, \dots, x_n\}$ состоит ровно из n элементов, то из леммы 3 и включения $\text{supp}_{M,d} \xi \subseteq f^{-1}(z)$ вытекает, что $\xi \in E_M$ и ξ является линейной комбинацией векторов x_j , $1 \leq j \leq n$. С другой стороны, так как всякая линейная комбинация этих векторов принадлежит $\ker(T_f - zI)$, то $\ker(T_f - zI)$ совпадает с линейной оболочкой векторов $x_1, \dots, x_n$. Следовательно, $z \in \sigma_{p,n}(T_f)$. Если множество $f^{-1}(z)$ бесконечно, то $\ker(T_f - zI)$ содержит бесконечное линейно независимое множество $f^{-1}(z)$. Следовательно, $z \in \sigma_{p,\infty}(T_f)$. Из последних соотношений вытекает, что $\sigma_{p,n}(T_f) = \{z \in \mathbb{C} : |f^{-1}(z)| = n\}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$.

Осталось показать, что $\sigma_c(T_f) = \overline{f(M)} \setminus f(M)$. Из уже доказанных соотношений следует, что $\sigma_c(T_f) \cup \sigma_r(T_f) = \overline{f(M)} \setminus f(M)$. Значит, нам достаточно доказать, что для всякого $z \in \overline{f(M)} \setminus f(M)$ линейное пространство $(T_f - zI)(D_{T_f})$ плотно в $X_{M,d}$. В силу плотности E_M , совпадающего с линейной оболочкой M , в $X_{M,d}$ для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что $M \subseteq (T_f - zI)(D_{T_f})$. Пусть $x \in M$. Тогда $f(x) \neq z$ и $x = (T_f - zI) \frac{x}{f(x) - z} \in (T_f - zI)(X_{M,d})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Часть 1 теоремы 2 вытекает из уже доказанной теоремы 3. Докажем части 2 и 3. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — замкнутое множество, $K = A \cup B \cup C$, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, A — аналитическое множество, B — коаналитическое множество и существует множество $D \subset \mathbb{C}$ типа F_σ такое, что $A \cup D = A \cup C$. Если $A = \emptyset$, то множество $B = K \setminus D$ имеет тип G_δ , и по теореме 1 требуемый оператор существует даже на сепарабельном гильбертовом пространстве. Пусть $A \neq \emptyset$. В силу аналитичности A существует польское пространство M и непрерывное отображение $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что $f(M) = A$. Пусть ρ — полная метрика, задающая топологию M . Положим $d(x, y) = \rho(x, y) + |f(x) - f(y)|$. Тогда d — тоже полная метрика, задающая топологию M , причем функция f липшицева относительно d . По лемме 2 БП $X_{M,d}$ сепарабельно. Рассмотрим сперва случай, когда множество K ограничено. По лемме 2 линейный оператор $T_f: X_{M,d} \rightarrow X_{M,d}$ ограничен. По лемме 5 $\sigma(T_f) = \overline{A}$, $\sigma_p(T_f) = f(M) = A$ и $\sigma_c(T_f) = \overline{A} \setminus A$. По теореме 1 в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве H существует линейный непрерывный оператор Λ такой, что $K = \sigma(\Lambda)$, $\sigma_p(\Lambda) = \emptyset$, $\sigma_r(\Lambda) = D$ и $\sigma_c(\Lambda) = K \setminus D$. Пусть теперь $X = X_{M,d} \times H$ и оператор T в БП X определяется

равенством $T(x, h) = (T_f x, \Lambda h)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_p(T) &= \sigma_p(T_f) \cup \sigma_p(\Lambda) = A, & \sigma_r(T) &= (\sigma_r(T_f) \cup \sigma_r(\Lambda)) \setminus \sigma_p(T) \\ & & &= D \setminus A = C, \\ \sigma(T) &= \sigma(T_f) \cup \sigma(\Lambda) = K, & \sigma_c(T) &= \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)) \\ & & &= K \setminus (A \cup C) = B. \end{aligned} \quad (8)$$

То есть оператор T является искомым. Часть 2 теоремы доказана.

Если множество K неограничено, то по лемме 4 оператор T_f в БП $X_{M,d}$ замкнут и плотно определен. По лемме 5 $\sigma(T_f) = \overline{A}$, $\sigma_p(T_f) = f(M) = A$ и $\sigma_c(T_f) = \overline{A} \setminus A$. По теореме 1 в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве H существует плотно определенный замкнутый линейный оператор Λ такой, что $K = \sigma(\Lambda)$, $\sigma_p(\Lambda) = \emptyset$, $\sigma_r(\Lambda) = D$ и $\sigma_c(\Lambda) = K \setminus D$. Пусть $X = X_{M,d} \times H$ и замкнутый плотно определенный оператор T в X определяется следующим образом: $D_T = D_{T_f} \times D_\Lambda$, $T(x, h) = (T_f x, \Lambda h)$. Тогда выполняются соотношения (8). То есть оператор T является искомым. Часть 3 теоремы доказана.

Теорему 2 можно несколько усилить. Для этого докажем два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 6. Пусть A – аналитическое подмножество $\mathbb{C}$, $B \subseteq A$ – коаналитическое множество и существует борелевское множество $C \subseteq \mathbb{C}$ такое, что $B \subseteq C \subseteq A$. Тогда существуют польское пространство X и непрерывное отображение $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что $f(X) = A$ и $\{z \in \mathbb{C} : |f^{-1}(z)| = 1\} = B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Лузина [11; §33, замечание 1] всякое борелевское подмножество польского пространства является лузинским. Значит, существуют польское пространство Y и непрерывное инъективное отображение $g: Y \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что $g(Y) = C$. Множество $A \setminus B$ является аналитическим как разность аналитического и коаналитического множеств. Следовательно, существуют польское пространство Z и непрерывное отображение $h: Z \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что $h(Z) = A \setminus B$. Пусть теперь X – дизъюнктное объединение Y и Z , в котором Y и Z наделены своей исходной топологией и являются открытозамкнутыми. Тогда X – польское пространство. Непосредственно проверяется, что отображение $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, определяемое равенствами $f|_Y = g$ и $f|_Z = h$, обладает всеми требуемыми свойствами.

ЛЕММА 7. Пусть A_n – убывающая последовательность аналитических подмножеств $\mathbb{C}$, причем множества $A_n \setminus A_{n+1}$ являются коаналитическими и для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует борелевское множество $B_n \subseteq \mathbb{C}$ такое, что

$$A_n \setminus A_\infty \subseteq B_n \subseteq A_n, \quad \text{где} \quad A_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k. \quad (9)$$

Тогда существуют польское пространство X и непрерывное отображение $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что $f(X) = A_1$ и $\{z \in \mathbb{C} : |f^{-1}(z)| = n\} = A_n \setminus A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 6 для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдутся польское пространство X_n и непрерывное отображение $f_n: X_n \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что $f_n(X_n) = A_n$ и $\{z \in \mathbb{C} : |f_n^{-1}(z)| = 1\} = A_n \setminus A_\infty$. Пусть теперь X – дизъюнктное объединение X_n , в котором каждое X_n наделено своей исходной топологией и открыто-замкнуто. Тогда X – польское пространство. Непосредственно проверяется, что отображение $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, определяемое равенствами $f|_{X_n} = f_n$, является искомым.

ТЕОРЕМА 4. 1. Если T – замкнутый плотно определенный линейный оператор в сепарабельном БП, то $\sigma_p^n(T)$ – аналитическое множество для всякого $n \in \overline{\mathbb{N}}$, множества $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$ и $\sigma_{p,n}(T)$ для всякого $n \in \mathbb{N}$ являются коаналитическими и существует множество $D \subset \mathbb{C}$ типа F_σ такое, что $\sigma_p(T) \cup D = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$.

2. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – непустой компакт, $K = A \cup B \cup C$, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, A_n – убывающая последовательность аналитических множеств, $A = A_1$, причем множества $A_n \setminus A_{n+1}$ являются коаналитическими для всякого $n \in \mathbb{N}$, B – коаналитическое множество, существует множество $D \subset \mathbb{C}$ типа F_σ такое, что $A \cup D = A \cup C$, и для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует борелевское множество $B_n \subseteq \mathbb{C}$ такое, что выполняется соотношение (9). Тогда существуют сепарабельное БП X и линейный непрерывный оператор $T: X \rightarrow X$ такие, что $\sigma_p^n(T) = A_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_c(T) = B$ и $\sigma_r(T) = C$.

3. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – замкнутое множество, $K = A \cup B \cup C$, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, A_n – убывающая последовательность аналитических множеств, $A = A_1$, причем множества $A_n \setminus A_{n+1}$ являются коаналитическими для всякого $n \in \mathbb{N}$, B – коаналитическое множество, существует множество $D \subset \mathbb{C}$ типа F_σ такое, что $A \cup D = A \cup C$, и для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует борелевское множество $B_n \subseteq \mathbb{C}$ такое, что выполняется соотношение (9). Тогда существуют сепарабельное БП X и замкнутый плотно определенный линейный оператор T в X такие, что $\sigma_p^n(T) = A_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_c(T) = B$ и $\sigma_r(T) = C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 4 такое же, как доказательство теоремы 2, только вместо произвольной непрерывной функции, определенной на польском пространстве и имеющей образ A , надо взять функцию, существование которой утверждается в лемме 7.

СЛЕДСТВИЕ 7. 1. Пусть T – замкнутый плотно определенный линейный оператор в сепарабельном БП и множество $\sigma_{p,\infty}(T)$ борелевское (например, пустое). Тогда множества $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$, $\sigma_p^n(T)$ и $\sigma_{p,n}(T)$ для всякого $n \in \mathbb{N}$ являются борелевскими и существует множество $D \subset \mathbb{C}$ типа F_σ такое, что $\sigma_p(T) \cup D = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$.

2. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – непустой компакт, $K = A \cup B \cup C$, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, A_n – убывающая последовательность борелевских множеств, $A = A_1$, B и C – борелевские множества, причем существует множество $D \subset \mathbb{C}$ типа F_σ такое, что $A \cup D = A \cup C$. Тогда существуют сепарабельное БП X и линейный непрерывный оператор $T: X \rightarrow X$ такие, что $\sigma_p^n(T) = A_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_c(T) = B$ и $\sigma_r(T) = C$.

3. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – замкнутое множество, $K = A \cup B \cup C$, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$, A_n – убывающая последовательность борелевских множеств,

$A = A_1$, B и C – борелевские множества, причем существует множество $D \subset \mathbb{C}$ типа F_σ такое, что $A \cup D = A \cup C$. Тогда существуют сепарабельное БП X и замкнутый плотно определенный линейный оператор T в X такие, что $\sigma_p^n(T) = A_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_c(T) = B$ и $\sigma_r(T) = C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть 1 вытекает из теоремы 3, а части 2 и 3 – из теоремы 4.

В заключение отметим две интересные нерешенные задачи.

ПРОБЛЕМА 1. Какие множества могут получаться в качестве $\sigma_p^n(T)$, $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ для линейного непрерывного оператора T в том или ином конкретном сепарабельном БП X ?

Для $X = l_p$ или $X = L_p[0, 1]$ при $1 < p < \infty$ ответ такой же, как для гильбертова пространства, но, например, для $X \in \{c_0, l_1, L_1[0, 1], C[0, 1]\}$ полное описание наборов множеств $(\sigma_p^n(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T))$ авторам неизвестно.

ПРОБЛЕМА 2. Можно ли избавиться от условия существования множеств B_n в теореме 4?

Авторы благодарят А. М. Степина за ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
3. Kalisch G. K. On operators on separable Banach spaces with arbitrary prescribed point spectrum // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 34. № 1. P. 207–208.
4. Szökefalvi-Nagy B. Contribution en Hongrie a la theorie spectrale les transformations // Czechoslovak. Math. J. 1956. V. 6. № 2. P. 166–176.
5. Dixmier J., Foias C. Sur le spectre ponctuel d'un operateur // Hilbert space operators and operator algebras. Proc. Internat. Conf. (Hungary, Tihany, 1970). Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. № 5. Amsterdam: North-Holland, 1970. P. 127–133.
6. Никольская Л. Н. Строение точечного спектра линейных операторов // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 1. С. 149–158.
7. Смолянов О. Г., Шкарин С. А. О структуре спектров линейных операторов в гильбертовом пространстве // Избранные вопросы математики, механики и их приложений. М.: Изд-во МГУ, 1999. С. 289–302.
8. Kaufman R. Lipschitz spaces and Souslin sets // J. Funct. Anal. 1981. V. 42. № 3. P. 271–273.
9. Kaufman R. Representation of Souslin sets by operators // Integral Equations and Operator Theory. 1984. V. 7. № 6. P. 808–814.
10. Kaufman R. On some operators on c_0 // Israel J. Math. 1985. V. 50. № 4. P. 353–356.
11. Куратовский К. Общая топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
12. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: stas@graal.math.msu.su

Поступила в редакцию
14.12.2000