Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Бринхис, О принципе Ферма–Лагранжа для смешанных гладко-выпуклых экстремальных задач, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 5, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 11:28:34

УДК 517.97

Я. Бринхис

О принципе Ферма–Лагранжа для смешанных гладко-выпуклых экстремальных задач

В работе показано, как сопоставить каждой весьма общей экстремальной задаче, включенной в семейство задач, простое геометрическое условие. На основе этого установлено, что проблема формулировки единого условия для гладко-выпуклой задачи допускает удовлетворительное решение. С другой стороны, доказывается необходимость нового условия оптимальности при некоторых технических предположениях.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

Начальный период развития теории экстремума связан с именами Ферма, Эйлера и Лагранжа. Впоследствии были предложены общие принципы анализа экстремальных задач. Все необходимые условия экстремума для конкретных конечномерных и бесконечномерных задач, приводившие к успеху при исследовании важных частных проблем, являлись следствиями общих принципов. Нередко эти частные случаи очень сложны. Однако во многих проблемах имеется нечто общее – в них соединены гладкая и выпуклая структуры. Тихомиров и другие предложили объединяющую версию необходимых условий оптимальности для задач со смешанной гладко-выпуклой структурой [1], [2]. Множество интересных приложений общего принципа Ферма–Лагранжа можно найти в недавней работе Магарил-Ильяева и Тихомирова [3]. Мы отсылаем также к работам Иоффе, Кларка, Мордуховича и Рокафеллара [4]–[7]. Однако теория необходимых условий оптимальности в задачах со смешанной гладко-выпуклой структурой еще не вполне завершена. Одна из проблем – как объединить эту теорию с теорией достаточных условий (включая теорию Гамильтона–Якоби). Другой вопрос – как описывать необходимые и достаточные условия для многомерных вариационных задач. В силу этих причин и важной роли необходимых условий в теории и практике оптимизации представляется интересным дать глубокое развитие принципа Ферма–Лагранжа. Для того чтобы сделать это, нужно рассмотреть два вопроса: как сформулировать общие условия и при каких предположениях можно доказать необходимость их оптимальности? Цель настоящей работы – некоторые продвижения в каждом из поставленных вопросов.

Сначала показывается, как сопоставить каждой весьма общей экстремальной задаче (включенной в семейство задач) простое геометрическое условие. Выясняется, что проблема формулировки единого условия для гладко-выпуклой задачи

допускает удовлетворительное решение. Далее мы доказываем необходимость нового условия оптимальности при некоторых технических предположениях. В итоге, новый подход охватывает и упрощает наиболее существенные результаты для гладко-выпуклого случая.

Специальные частные случаи задач чисто выпуклого (соответственно гладкого) программирования были рассмотрены в [8] и [9] (соответственно [10]). Настоящий метод доказательства предполагает рассмотрение новой общей стандартной формы экстремальных задач. Для таких задач мы переводим геометрическое условие также и в аналитическую форму.

Теперь дадим набросок нового геометрического условия экстремума, о котором пойдет речь в этой статье. Заметим, что почти любая конкретная конечномерная или бесконечномерная содержательная задача допускает следующую формализацию. Пусть X , U и Y – векторные пространства и $F: X \times U \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – некоторое отображение. Мы рассматриваем задачу минимизации $F(x, u, 0)$. Более того, введение параметра $y \in Y$ – это и есть главный путь, приводящий к задаче минимизации функции $(x, u) \rightarrow F(x, u, y)$. Пусть $(\hat{x}, \hat{u})$ – допустимая точка в данной задаче. Мы скажем, что в ней имеет место условие Ферма–Лагранжа, если существует аффинная функция $A: X \times U \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $A(x, \hat{u}, y)$ является линейризацией в точке $(\hat{x}, 0)$ функции $F(x, \hat{u}, y)$ в смысле гладкого анализа, $A(\hat{x}, u, y)$ – линейризация $F(\hat{x}, u, y)$ в $(\hat{u}, 0)$ в смысле выпуклого анализа и $(\hat{x}, \hat{u})$ – решение задачи минимизации функции $A(x, u, 0)$. Разумеется, тогда $A(x, u, 0)$ есть константа. Ясно, что это условие является далеким обобщением условия Ферма, согласно которому касательная к графику функции в точке экстремума должна быть горизонтальна. Наклон A в “ Y -направлении” есть обобщение обычных множителей Лагранжа, называемых также теневыми ценами или двойственными переменными. Мы докажем, что при некоторых дополнительных требованиях на F условие Ферма–Лагранжа необходимо для оптимальности $(\hat{x}, \hat{u})$. Таким образом, этот принцип означает, что свойство быть минимумом сохраняется при линейризации.

Наконец, упомянем возможную гибкость этой реализации принципа Ферма–Лагранжа: ограничения не задаются явно, допустимое множество подвергается изменению нестандартным образом и минимизируемый функционал также изменяется. Во всех существующих реализациях рассматривались лишь стандартные возмущения ограничений типа равенств.

Для некоторых конкретных и интересных задач принцип Ферма–Лагранжа может использоваться как эвристический прием: например, в случаях, где неизвестны условия, при которых принцип Ферма–Лагранжа является необходимым условием оптимальности. В сочетании с другими методами это нередко ведет к полному и строгому решению задачи (можно сослаться, например, на статью [3]). Поэтому небезынтересно заметить, что условие Ферма–Лагранжа, определяемое в настоящей статье, имеет большую общность в сравнении с прежними версиями принципа Ферма–Лагранжа.

Результаты работы затрагивают следующие две связанные проблемы, имеющие большой интерес. Необходимость приводимых условий экстремума доказыва-

ется при возможно более слабых предположениях. Эвристические соображения, о которых говорилось выше, подтверждают эти допущения. Кроме того, представляет большой интерес найти важные задачи, которые можно было бы полностью исследовать, применяя новые условия, а не существующую гладко-выпуклую теорию. Нужно заметить, что соответствующие задачи гладко-выпуклой оптимизации также еще открыты.

Автор многим обязан плодотворным дискуссиям с В. М. Тихомировым по теории экстремальных задач и благодарен ему за уточнения аналитической формулировки принципа Ферма–Лагранжа.

§ 2. Постановка задачи и формулировка результатов

Напомним некоторые стандартные обозначения. Для любой функции h на множестве S со значениями в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ через Γ_h мы обозначаем “конечную часть” графика h , так что $\Gamma_h = \{(s, r) \in S \times \mathbb{R} : r = h(s)\}$. Пусть $\text{epi } h$ означает надграфик h : $\text{epi } h = \{(s, r) \in S \times \mathbb{R} : r \geq h(s)\}$. Вектор x из нормированного пространства X называют *касательным* к подмножеству $M \subseteq X$ в точке $m \in M$, если существует отображение r из сегмента $[-1, 1]$ в X такое, что $m + \lambda x + r(\lambda) \in M$ для всех $\lambda \in [-1, 1]$ и $|r(\lambda)| = o(|\lambda|)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Множество $T_m M$ всех касательных векторов к множеству M в точке m называют *касательным пространством* к M в m .

Мы рассматриваем далее следующие объекты: X и Y – банаховы пространства, U – множество, снабженное тривиальной топологией, F – функция из декартова произведения $X \times U \times Y$ в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (она называется *возмущенной функцией*) и $(\hat{x}, \hat{u})$ – элемент $X \times U$ такой, что $F(\hat{x}, \hat{u}, 0) \in \mathbb{R}$.

Будет удобно ввести следующие сокращенные обозначения. Мы пишем $\hat{r} = F(\hat{x}, \hat{u}, 0)$. Через $F(\hat{u})$ обозначается функция из $X \times Y$ в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, определенная следующим образом: $F(\hat{u})(x, y) = F(x, \hat{u}, y)$ для всех $(x, y) \in X \times Y$. Пусть $F(x)$, $x \in X$, – это функция из $U \times Y$ в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, равная по определению $F(x)(u, y) = F(x, u, y) - \hat{r}$ для всех $(u, y) \in U \times Y$. Пусть σ (соответственно τ) – естественная проекция из $X \times Y \times \mathbb{R}$ (соответственно $U \times Y \times \mathbb{R}$) на $Y \times \mathbb{R}$. Пусть S и C – подмножества $Y \times \mathbb{R}$, определенные так: $S = \sigma(T_{(\hat{x}, 0, \hat{r})} \Gamma_{F(\hat{u})})$ и $C = \tau(\text{epi } F(\hat{x}))$.

Пусть α – нетривиальный элемент двойственного пространства $(Y \times \mathbb{R})^*$. Мы скажем, что для F в точке $(\hat{x}, \hat{u})$ выполнено *условие Ферма–Лагранжа*, если $\alpha(S) = 0$ и $\alpha(C) \subseteq \mathbb{R}_+$. Можно записать $\alpha = (\eta, \eta_0)$, где $\eta \in Y^*$ и $\eta_0 \in \mathbb{R}$. Из $\alpha(C) \subseteq \mathbb{R}_+$ следует, что $\eta_0 \geq 0$. Пусть π – проекция из $Y \times \mathbb{R}$ на Y . Мы скажем, что выполнено *условие регулярности*, если начало координат O_Y лежит во внутренней части подмножества $\pi(S + C) \subseteq Y$.

Напомним еще одно стандартное определение. Пусть k – отображение открытого множества W банахова пространства A в другое банахово пространство B и $v \in W$. Тогда говорят, что k *строго дифференцируемо* в v , если найдется непрерывное линейное отображение $L: A \rightarrow B$ такое, что $\|k(s) - k(t) - L(s - t)\| = o(\|s - t\|)$ при $s, t \rightarrow v$. Отображение L определяется единственным образом. Его называют *строгой производной* k в v и обозначают через $k'(v)$.

Теперь сформулируем условия, налагаемые на F и $(\hat{x}, \hat{u})$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ 2.1. Пусть Z – банахово пространство, V – окрестность $\hat{x}$ в X и g – отображение из $V \times U \times Y \times \mathbb{R}$ в Z , удовлетворяющее следующим условиям:

- (i) $\Gamma_F \cap (V \times U \times Y \times \mathbb{R}) = \text{zero } g$ – нулевое множество g ;
- (ii) $g(x, u, y, r)$ строго дифференцируемо в (x, y, r) ;
- (iii) оператор $g'_{y,r}(\hat{x}, u, y, r)$ сюръективен для всех $(\hat{x}, u, y, r) \in \text{zero } g$;
- (iv) $\dim(Y \times \mathbb{R})/S < +\infty$;
- (v) $\tau(\text{epi } F(x))$ – выпуклое подмножество $Y \times \mathbb{R}$ для всех $x \in V$.

Заметим, что в силу теоремы о касательном пространстве (см. теорему 3.1) из условий (i)–(iii) следует, что S – замкнутое линейное подпространство $Y \times \mathbb{R}$.

Переходим к формулировке основного результата.

ТЕОРЕМА 2.2. Принцип Ферма–Лагранжа для смешанных гладко-выпуклых задач (геометрическая формулировка). Пусть для F и $(\hat{x}, \hat{u})$ выполнены предположения 2.1. Тогда если $(\hat{x}, \hat{u})$ – локальный минимум функции $F(x, u, 0)$, то найдется нетривиальный элемент $\alpha = (\eta, \eta_0)$ в $(Y \times \mathbb{R})^*$ такой, что выполнены условия Ферма–Лагранжа для F и $(\hat{x}, \hat{u})$ с множителями $\alpha = (\eta, \eta_0)$. При этом соотношение $\eta_0 > 0$ для любого α имеет место в том и только том случае, если выполнено условие регулярности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Покажем, какая связь существует между этим результатом и предыдущим его описанием в §1. Допустим, U наделено структурой векторного пространства, и пусть аффинная функция A на $X \times U \times Y$ непрерывно зависит от y . Мы скажем, что A – смешанная гладко-выпуклая линеаризация F в точке $(\hat{x}, \hat{u}, 0)$, если

$$\begin{aligned} F(\hat{x}, \hat{u}, 0) &= A(\hat{x}, \hat{u}, 0), \\ T_{(\hat{x}, 0, \hat{r})} \Gamma_{F(\hat{u})} &\subseteq T_{(\hat{x}, 0, \hat{r})} \Gamma_{A(\hat{u})} \end{aligned}$$

и

$$\text{epi } F(\hat{x}) \subseteq \text{epi } A(\hat{x}).$$

Здесь $A(\hat{u})$ (соответственно $A(\hat{x})$) определена так же, как $F(\hat{u})$ (соответственно $F(\hat{x})$). Пусть $\alpha \in (Y \times \mathbb{R})^*$ определен соотношением:

$$\alpha(y, r) = r + \hat{r} - A(\hat{x}, \hat{u}, y) \quad \forall y \in Y, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Тогда условие Ферма–Лагранжа выполнено для F и $(\hat{x}, \hat{u})$ с множителями α тогда и только тогда, когда A – смешанная гладко-выпуклая линеаризация A в $(\hat{x}, \hat{u}, 0)$ и если, кроме того, $A(x, u, 0)$ достигает минимума в $(\hat{x}, \hat{u})$.

Необходимые условия для экстремальных задач всегда приводятся в аналитической форме. Теперь мы хотим выразить наши геометрические условия в эквивалентной аналитической форме. Если A и B – нормированные пространства и $\Lambda: A \rightarrow B$ – непрерывный линейный оператор, то сопряженный оператор $\Lambda^*: B^* \rightarrow A^*$ определен соотношением $\langle \Lambda^* b^*, a \rangle = \langle b^*, \Lambda a \rangle$ для всех $b^* \in B^*$ и $a \in A$.

Будем использовать краткие обозначения: $\hat{g}'_x$ вместо $g'_x(\hat{x}, \hat{u}, 0, \hat{r})$ и аналогично $\hat{g}'_{y,r}, \hat{g}'_r$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4 Принцип Ферма–Лагранжа для смешанных гладко-выпуклых задач (аналитическая формулировка). Пусть для F и $(\hat{x}, \hat{u})$ выполнены предположения 2.1. Пусть $(\hat{x}, \hat{u})$ – локальный минимум в задаче о минимизации, $r \in \mathbb{R}$ при ограничениях $g(x, u, 0, r) = 0$ для некоторых $x \in X$ и $u \in U$. Тогда найдется нетривиальный элемент $\zeta \in Z^*$ такой, что

$$\widehat{g}'_x \zeta = 0 \quad \text{и} \quad \min_{c \in C} (\widehat{g}'_{y,r} \zeta)(c) = 0.$$

Более того, $\widehat{g}'_r \zeta > 0$ для любого такого ζ в том и только том случае, если следующее подмножество образа $\widehat{g}'_{x,y,r}$

$$\{\widehat{g}'_{x,y,r}(0, y, 0) : \exists u \in U, r \in \mathbb{R} \text{ такие, что } g(\hat{x}, u, y, r) = 0\}$$

содержит начало координат.

Непосредственное приложение этого результата ведет к такому следствию. Речь идет о важной теореме (P) (см. [2; с. 48]). В [2] показано, что из теоремы (P) вытекают многие известные необходимые условия экстремума в конкретных экстремальных проблемах.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть X, Y – банаховы пространства, V – открытое подмножество X , U – множество, f (соответственно h) – отображение из $V \times U$ в $\mathbb{R}$ (соответственно в Y). Пусть $(\hat{x}, \hat{u})$ – локальный минимум в задаче минимизации $f(x, u)$ при ограничении $h(x, u) = 0$. Пусть функция Лагранжа имеет вид $\mathcal{L}(x, u, \eta, \eta_0) = \eta_0 f(x, u) + \eta(h(x, u))$ для всех $x \in V$, $u \in U$, $\eta \in Y^*$ и $\eta_0 \in \mathbb{R}$. Пусть также выполняются следующие условия:

1. $f(x, u)$ и $h(x, u)$ строго дифференцируемы по x ;
2. образ производной $h'_x(\hat{x}, \hat{u})$ есть замкнутое подпространство в Y конечной коразмерности;
3. подмножество $\{(h(x, u), f(x, u) + t) : u \in U, t \geq 0\}$ из $Y \times \mathbb{R}$ выпукло для всех $x \in V$.

Тогда существуют $\hat{\eta} \in Y^*$ и $\hat{\eta}_0 \in \mathbb{R}_+$, не равные одновременно нулю и такие, что имеют место следующие два соотношения.

- (i) Условие стационарности: вектор $\hat{x}$ стационарен для задачи минимизации $\mathcal{L}(x, \hat{u}, \hat{\eta}, \hat{\eta}_0)$. Это означает, что

$$\hat{\eta}_0 f'_x(\hat{x}, \hat{u}) + \hat{\eta} \circ h'_x(\hat{x}, \hat{u}) = 0.$$

- (ii) Принцип минимума: элемент $\hat{u}$ является решением задачи $\mathcal{L}(\hat{x}, u, \hat{\eta}, \hat{\eta}_0) \rightarrow \min, u \in U$.

Более того, каждый такой $\hat{\eta}_0$ не равен нулю, если и только если внутренность $h(\hat{x}, U)$ как подмножество Y содержит начало координат.

§ 3. Доказательство теорем

В этом параграфе будет доказана теорема 2.2. Следствие 2.5 и утверждение в замечании 2.3 непосредственно вытекают из теоремы о касательном пространстве, которую мы напомним ниже. Предложение 2.4 следует из теоремы 2.2 посредством теоремы 3.1 и леммы об аннуляторе ядра регулярного оператора (см. [11; с. 81]).

ТЕОРЕМА 3.1 [11; с. 109]. Пусть X и Y – банаховы пространства, U – окрестность точки x_0 в X , F – отображение из U в Y такое, что $F(x_0) = 0$. Если F строго дифференцируемо в x_0 и при этом линейное отображение $F'(x_0)$ сюръективно, то нулевое множество F имеет касательное пространство в точке x_0 , совпадающее с ядром $F'(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Пусть F и $(\hat{x}, \hat{u})$ те же, что в §2. Предположим, что $(\hat{x}, \hat{u})$ – локальный минимум функции $F(x, u, 0)$, и пусть Z, V и g удовлетворяют предположениям 2.1.

Доказательство теоремы разбивается на три шага.

Шаг 1. Предположим, что условие регулярности не удовлетворяется. Мы применяем стандартную теорему отделимости в конечномерном пространстве, согласно которой любое выпуклое множество может быть отделено от любой точки, не лежащей в его (относительной) внутренней. Значит, в силу предположений 2.1 (iv) и 2.1 (v) получаем, что существует нетривиальный линейный функционал β на $(Y \times \mathbb{R})/(S + 0 \times \mathbb{R})$ такой, что $\beta(t) \geq 0$ для всех t из образа C при канонической проекции из $Y \times \mathbb{R}$ в $(Y \times \mathbb{R})/(S + 0 \times \mathbb{R})$. Композиция β и этой проекции дает нетривиальный непрерывный линейный функционал α на $Y \times \mathbb{R}$ с $\alpha(S) = 0$, $\alpha(0 \times \mathbb{R}) = 0$ и $\alpha(C) \subseteq \mathbb{R}_+$. Это доказывает теорему в рассматриваемом случае.

Начиная с этого момента допустим, что условие регулярности выполнено.

Шаг 2. Докажем, что если $(\bar{y}, \bar{r}) \in S$ и $(\bar{y}, \bar{r}) \in C$, то $\bar{r} \geq \bar{r}$. Пусть заданы $(\bar{y}, \bar{r}) \in S$ и $(\bar{y}, \bar{r}) \in C$. Выберем $\bar{x}$ и $\bar{u}$ так, чтобы $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{r}) \in T_{(\bar{x}, 0, \bar{r})} \Gamma_{F(\bar{u})}$ и $(\bar{u}, \bar{y}, \bar{r}) \in \text{epi } F(\bar{x})$. Допустим (как это нужно для доказательства), что $(\bar{u}, \bar{y}, \bar{r}) \in \Gamma_{F(\bar{x})}$, так что $\hat{r} + \bar{r} = F(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$ или, что равносильно, $g(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}, \hat{r} + \bar{r}) = 0$. Пусть m – размерность $(Y \times \mathbb{R})/(S + 0 \times \mathbb{R})$. Идентифицируем $(Y \times \mathbb{R})/(S + 0 \times \mathbb{R})$ с $\mathbb{R}^m$. Пусть $\{z_1, \dots, z_{2^m}\}$ – вершины нетривиального куба T в $\mathbb{R}^m$ с центром в начале координат, который целиком лежит в образе C в $(Y \times \mathbb{R})/(S + 0 \times \mathbb{R})$. Это возможно в силу условия регулярности. Очевидно, что соответствующие векторы удовлетворяют таким условиям:

- (α) $\sum_{i=1}^{2^m} z_i = 0$;
- (β) $\{z_i\}_{i=1}^{2^m}$ порождает все пространство $\mathbb{R}^m$;
- (γ) для любого $i \in \{1, \dots, 2^m\}$ существуют $\tilde{u}_i \in U$, $\tilde{y}_i \in Y$, $\tilde{r}_i \in \mathbb{R}$ такие, что $F(\bar{x}, \tilde{u}_i, \tilde{y}_i) = \tilde{r}_i$, $g(\bar{x}, \tilde{u}_i, \tilde{y}_i, \tilde{r}_i) = 0$ и при этом образ $(\tilde{y}_i, \tilde{r}_i)$ в $(Y \times \mathbb{R})/(S + 0 \times \mathbb{R})$ совпадает с z_i .

Выберем такие элементы $\tilde{u}_i, \tilde{y}_i, \tilde{r}_i$ для всех $i \in \{1, \dots, 2^m\}$. Определим функ-

цию μ на $\mathbb{R}^{2^m+2}$ соотношением

$$\mu(\alpha_0, \alpha'_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^m}) = \alpha_0 + 2^m \alpha'_0 + \sum_{i=1}^{2^m} \alpha_i$$

для всех $(\alpha_0, \alpha'_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^m}) \in \mathbb{R}^{2^m+2}$. В итоге определяется отображение $\Psi = (\Psi_i)_{i=0}^{2^m+2}$ из декартова произведения $\mathbb{R}^{2^m+2} \times V \times (Y \times \mathbb{R})^{2^m+2}$ в $Y \times Z^{2^m+2}$:

$$\begin{aligned} & [\Psi(\alpha, x, (y_j, r_j)_{j=1}^{2^m+2})]_i \\ &= \begin{cases} (1 - \mu(\alpha))y_{2^m+1} + \sum_{j=1}^{2^m} (\alpha'_0 + \alpha_j)y_j + \alpha_0 y_{2^m+2}, & \text{если } i = 0, \\ g(x, \tilde{u}_i, y_i, r_i), & \text{если } 1 \leq i \leq 2^m, \\ g(x, \hat{u}, y_{2^m+1}, r_{2^m+1}), & \text{если } i = 2^m + 1, \\ g(x, \bar{u}, y_{2^m+2}, r_{2^m+2}), & \text{если } i = 2^m + 2, \end{cases} \end{aligned}$$

для всех $\alpha = (\alpha_0, \alpha'_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^m}) \in \mathbb{R}^{2^m+2}$, $x \in V$ и $(y_j, r_j) \in Y \times \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, 2^m + 2\}$.

Заметим, что вектор $w = (0, \hat{x}, (\tilde{y}_i, \tilde{r}_i)_{i=1}^{2^m}, (0, \hat{r}), (\bar{y}, \hat{r} + \bar{r}))$ лежит в нулевом множестве Ψ .

УТВЕРЖДЕНИЕ. $T_w \text{ zero } \Psi = \text{Ker } \Psi'(w)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Ввиду теоремы 3.1 достаточно показать, что $\Psi'(w)$ сюръективно. Выберем $(\check{y}, \check{r}) \in S$ так, чтобы $\sum_{i=1}^{2^m} \tilde{y}_i = \check{y}$, это возможно в силу (α) и (γ). Из определения Ψ немедленно следует, что $\Psi'_w(\alpha, x, (y_i, r_i)_{i=1}^{2^m+2})$ – это вектор v , компоненты которого таковы:

$$v_i = \begin{cases} y_{2^m+1} + \alpha'_0 \check{y} + \sum_{j=1}^{2^m} \alpha_j \tilde{y}_j + \alpha_0 \bar{y}, & \text{если } i = 0, \\ g'(\hat{x}, \tilde{u}_i, \tilde{y}_i, \tilde{r}_i)(x, y_i, r_i), & \text{если } 1 \leq i \leq 2^m, \\ g'(\hat{x}, \hat{u}, 0, \hat{r})(x, y_{2^m+1}, r_{2^m+1}), & \text{если } i = 2^m + 1, \\ g'(\hat{x}, \bar{u}, \bar{y}, \hat{r} + \bar{r})(x, y_{2^m+2}, r_{2^m+2}), & \text{если } i = 2^m + 2. \end{cases}$$

Здесь g' означает $g'_{x,y,r}$. Выберем произвольно $y^{(0)} \in Y$, $r^{(1)} \in Z^{2^m}$, $r^{(2)} \in Z$ и $r^{(3)} \in Z$. Покажем, что при соответствующем выборе $(\alpha, x, (y_i, r_i)_{i=1}^{2^m+2})$ вектор v равен $(y^{(0)}, r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)})$. Сначала мы выбираем $(\alpha, x, (y_i, r_i)_{i=1}^{2^m+2}) = 0$. Далее мы используем предположение 2.1 (iii) для изменения y_{2^m+1} и r_{2^m+1} таким образом, чтобы третья координата v равнялась $r^{(2)}$. Затем мы используем (β) и (γ) и изменяем α_i ($1 \leq i \leq 2^m$) таким образом, чтобы первая координата стала равной $y^{(0)}$ с точностью до элемента образа S при канонической проекции из $Y \times \mathbb{R}$ в Y . По следствию из теоремы 3.1 этот образ равен образу $\text{Ker } g'(\hat{x}, \hat{u}, 0, \hat{r})$ при естественной проекции из $X \times Y \times \mathbb{R}$ в Y . Так что, изменяя $(x, y_{2^m+1}, r_{2^m+1})$ подходящим образом, мы сможем достичь того, что первая координата равна $y^{(0)}$, а третья останется равной $r^{(2)}$. Наконец, в силу предположения 2.1 (iii) мы можем

изменить (y_i, r_i) для $1 \leq i \leq 2^m$ и $i = 2^m + 2$ таким образом, что вторая координата станет равной $r^{(1)}$, а последняя $-r^{(3)}$. Это завершает доказательство утверждения.

Продолжим доказательство теоремы 2.2. По $(\check{y}, \check{r}) \in S$ найдем $\check{x}$ такое, что

$$g'(\hat{x}, \hat{u}, 0, \hat{r})(\check{x}, \check{y}, \check{r}) = 0.$$

Выберем произвольный элемент $(\alpha'_0, \alpha_0) \in \mathbb{R}^2$. Определим $(x, y_{2^m+1}, r_{2^m+1})$ в $X \times Y \times \mathbb{R}$ как линейную комбинацию $-\alpha'_0(\check{x}, \check{y}, \check{r}) - \alpha_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{r})$. Положим $\alpha_i = 0$, $1 \leq i \leq 2^m$, и выберем (y_i, r_i) так, чтобы $g'(\hat{x}, \tilde{u}_i, \tilde{y}_i, \tilde{r}_i)(x, y_i, r_i) = 0$ для всех $i = 1, \dots, 2^m$. Выберем (y_{2^m+2}, r_{2^m+2}) так, что $g'(\hat{x}, \bar{u}, \bar{y}, \hat{r} + \bar{r})(x, y_{2^m+1}, r_{2^m+2}) = 0$. Этот выбор может быть осуществлен в силу предположения 2.1 (iii). Положим $\alpha = (\alpha_0, \alpha'_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^m})$. Можно проверить (используя также и доказанное утверждение), что $(\alpha, x, (y_i, r_i)_{i=1}^{2^m+2})$ лежит в касательном пространстве в точке w нуль-множества Ψ .

Таким образом, по определению касательного пространства существуют функции $\rho_0(\cdot)$, $\rho'_0(\cdot)$, $\rho_i(\cdot)$, $1 \leq i \leq 2^m$, из $[-1, 1]$ в $\mathbb{R}$ (будем обозначать $\rho = (\rho_0, \rho'_0, \rho_1, \dots, \rho_{2^m})$), $r(\cdot)$ из $[-1, 1]$ в V , $\sigma_i(\cdot)$, $1 \leq i \leq 2^m + 2$, из $[-1, 1]$ в Y , $\tau_i(\cdot)$, $1 \leq i \leq 2^m + 2$, из $[-1, 1]$ в $\mathbb{R}$ такие, что

$$0 = \Psi[w + \lambda(\alpha, x, (y_i, r_i)_{i=1}^{2^m+2}) + (\rho(\lambda), r(\lambda), (\sigma_i(\lambda), \tau_i(\lambda))_{i=1}^{2^m+2})] \quad (1)$$

для любого $\lambda \in [-1, 1]$.

Тогда для любого $\lambda \in [-1, 1]$ следующие элементы лежат в $\tau(\text{epi } F(\hat{x} + \lambda x + r(\lambda)))$:

$$\begin{aligned} t_i &= (\tilde{y}_i + \lambda y_i + \sigma_i(\lambda), \tilde{r}_i - \hat{r} + \lambda r_i + \tau_i(\lambda)) \quad \forall i \in \{1, \dots, 2^m\}, \\ t_{2^m+1} &= (\lambda y_{2^m+1} + \sigma_{2^m+1}(\lambda), \lambda r_{2^m+1} + \tau_{2^m+1}(\lambda)) \end{aligned}$$

и

$$t_{2^m+2} = (\bar{y} + \lambda y_{2^m+2} + \sigma_{2^m+2}(\lambda), \bar{r} + \lambda r_{2^m+2} + \tau_{2^m+2}(\lambda)).$$

Теперь выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $F(x, u, 0) \geq F(\hat{x}, \hat{u}, 0)$ для всех $(x, u) \in X \times U$, если $|x - \hat{x}| < \varepsilon$. Выберем $\alpha_0 = 1$ и произвольное число $\alpha'_0 > 0$. Тогда найдется $\lambda_{(1)} = \lambda_{(1)}(\alpha'_0) \in (0, 1)$ такое, что для всех $\lambda \in (0, \lambda_{(1)})$:

- (i) $|(\hat{x} + \lambda x + r(\lambda)) - \hat{x}| < \varepsilon$,
- (ii) $\gamma_{2^m+1} = 1 - \lambda(\alpha_0 + 2^m \alpha'_0) - \rho_0(\lambda) - 2^m \rho'_0(\lambda) - \sum_{i=1}^{2^m} \rho_i(\lambda) \in (0, 1)$,
- (iii) $\gamma_i = \lambda \alpha'_0 + \rho'_0(\lambda) + \rho_i(\lambda) \in (0, 1) \quad \forall i \in \{1, \dots, 2^m\}$,
- (iv) $\gamma_{2^m+2} = \lambda \alpha_0 + \rho_0(\lambda) \in (0, 1)$.

Из предположения 2.1 (v) следует, что для всех $\lambda \in (0, \lambda_{(1)})$ элемент

$$\sum_{i=1}^{2^m+2} \gamma_i t_i$$

лежит в $\tau(\text{epi } F(\hat{x} + \lambda x + r(\lambda)))$. Это означает, что его Y -координата есть 0, а это есть первая компонента векторного уравнения (1).

Используя локальную минимальность $(\hat{x}, \hat{u})$, получаем, что вторая координата этого элемента ≥ 0 . Разделим эту вторую координату на λ и перейдем к пределу при $\lambda \downarrow 0$:

$$r_{2^m+1} + \alpha'_0 \sum_{i=1}^{2^m} (\tilde{r}_i - \bar{r}) + \bar{\bar{r}} \geq 0.$$

Напомним, что $r_{2^m+1} = -\alpha'_0 \bar{r} - \bar{r}$ и что $\alpha'_0 > 0$ произвольно. Переходя к пределу при $\alpha'_0 \downarrow 0$, получаем $\bar{\bar{r}} \geq \bar{r}$. Это завершает второй шаг доказательства теоремы 2.2.

Шаг 3. Докажем теорему при условии регулярности. Пусть i – каноническая проекция из $Y \times \mathbb{R}$ в $(Y \times \mathbb{R})/S$. Докажем, что $i(C)$ и $i(0 \times (-\infty, 0))$ – непересекающиеся выпуклые подмножества $(Y \times \mathbb{R})/S$. Выпуклость следует из предположения 2.1 (v). Доказательство того, что они не пересекаются, проведем от противного. Пусть найдутся $(\bar{y}, \bar{r}) \in C$, $r < 0$, $(\bar{y}, \bar{r}) \in S$ и $(\bar{y}, \bar{r}) = (0, r) + (\bar{y}, \bar{r})$. Тогда $\bar{\bar{r}} < \bar{r}$. Но с другой стороны, в силу шага 2 имеем $\bar{\bar{r}} \geq \bar{r}$. Пришли к противоречию. Применим к $i(C)$ и $i(0 \times (-\infty, 0))$ хорошо известный факт, что в конечномерном пространстве два непересекающихся выпуклых множества могут быть разделены гиперплоскостью. Отсюда следует, что существует нетривиальная линейная функция β на $(Y \times \mathbb{R})/S$ такая, что $\beta(i(c)) \geq \beta(i(0, r))$ для всех $c \in C$ и всех $r < 0$. Устремляя r к нулю ($r \uparrow 0$), получаем, что $\beta(i(c)) \geq 0$ для всех $c \in C$. Теперь рассмотрим нетривиальный непрерывный линейный функционал α на $Y \times \mathbb{R}$, определенный соотношением $\alpha = \beta \circ i$. Для любого $s \in S$ получим $\alpha(s) = \beta(i(s)) = \beta(0) = 0$. Более того, для любого $c \in C$ имеем: $\alpha(c) = \beta(i(c)) \geq 0$. Таким образом, условие Ферма–Лагранжа выполнено для F и $(\hat{x}, \hat{u})$ с множителями $\alpha = (\eta, \eta_0)$, $\eta \in Y^*$, $\eta_0 \in \mathbb{R}$. Для того чтобы доказать, что $\eta_0 > 0$, снова применим метод “от противного”. Пусть $\eta_0 = 0$. Возьмем любой элемент $y \in Y$. В силу условия регулярности найдутся $\varepsilon > 0$, $(c_1, c_2) \in C$, $(s_1, s_2) \in S$ и $t \in \mathbb{R}$ такие, что $(\varepsilon y, 0) + (s_1, s_2) + (0, t) = (c_1, c_2)$. Откуда (используя то, что $\alpha(s) = 0$) следует, что $\varepsilon \eta(y) = \eta(c_1) \geq 0$, значит, $\eta(y) > 0$. Но так как $y \in Y$ произвольно и $\eta \neq 0$, мы приходим к противоречию.

Список литературы

1. Иoffee А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
2. Tikhomirov V. M. Fundamental principles of the theory of extremal problems. Chichester: J. Willey & Sons, 1986.
3. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 12. С. 73–106.
4. Ioffe A. D. Euler–Lagrange and Hamiltonian formalisms in dynamic optimization // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349. № 7. P. 2871–2900.
5. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
6. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.
7. Rockafellar R. T. Equivalent subgradient versions of Hamiltonian and Euler–Lagrange equations in variational analysis // SIAM J. Control Optim. 1996. V. 34. № 4. P. 1300–1314.

8. *Brinkhuis J.* Vertical halfspaces as solutions of dual extremal problems // Econometric Institute Rotterdam, report 9540/B, 1005; Pure Math. Appl. (to appear).
9. *Brinkhuis J.* Extremal problems and inclusion of perturbations in halfspaces // Pure Math. Appl. 1999. V. 10. №2. P. 183–196.
10. *Brinkhuis J.* On a geometrical construction on the multiplier rule // Econometric Institute Rotterdam, report 9721/B; Indag. Math. (N.S.). (to appear).
11. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

Эконометрический институт
университета Эразма Роттердамского
Rotterdam. The Netherlands
E-mail: `brinkhuis@few.eur.nl`

Поступила в редакцию
02.08.2000