Общероссийский математический портал

В. Ф. Бутузов, И. В. Неделко, О глобальной области влияния устойчивых решений с внутренними слоями, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 5, 13–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm563>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:55:42

УДК 517.956.226

В. Ф. Бутузов, И. В. Неделько

О глобальной области влияния устойчивых решений с внутренними слоями

Рассматривается начально-краевая задача для нестационарного уравнения типа реакция–диффузия с нелинейностью, имеющей два устойчивых корня. Наложенные условия обеспечивают существование устойчивого стационарного решения с внутренним переходным слоем (устойчивой контрастной структуры типа ступеньки). Исследован вопрос о том, какие начальные функции принадлежат области влияния такого решения.

Библиография: 19 названий.

§1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon^2 u_{xx} - u_t = f(u, x, \varepsilon), \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty), \quad (1.1)$$

$$u_x(a, t, \varepsilon) = u_x(b, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in (0, +\infty), \quad (1.2)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u_0(x, \varepsilon), \quad x \in \overline{D}, \quad (1.3)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $D \equiv (a, b)$. Относительно f мы предполагаем, что выполнено условие:

(A1) существуют функции $\bar{u}(x)$ и $\hat{u}(x)$ из $C^2(\overline{D})$ такие, что $\bar{u}(x) < \hat{u}(x)$, $x \in \overline{D}$, и в области $\Omega = \{(u, x) : \bar{u}(x) \leq u \leq \hat{u}(x), x \in \overline{D}\}$ функция $f(u, x, 0)$ обращается в нуль только на кривых $u = \varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, причем

$$\bar{u}(x) < \varphi_1(x) < \varphi_0(x) \equiv 0 < \varphi_2(x) < \hat{u}(x), \quad x \in \overline{D},$$

$$f_u(\varphi_i(x), x, 0) > 0, \quad i = 1, 2, \quad f_u(\varphi_0(x), x, 0) < 0, \quad x \in \overline{D},$$

$f(u, x, \varepsilon)$ – достаточно гладкая функция в области $\Omega_1 \times [0, \varepsilon_0]$, где Ω_1 – некоторая открытая область, содержащая Ω , а $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число.

Нулевые условия в (1.2), а также предположение $\varphi_0 \equiv 0$ взяты для простоты изложения. Все результаты несложно переформулировать для случая ненулевых краевых условий и $\varphi_0 \neq 0$.

Введем функцию

$$J(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(u, x, 0) du. \quad (1.4)$$

(A2) Пусть существует точка $x^* \in D$ такая, что $J(x^*) = 0$, $\frac{dJ}{dx}(x^*) < 0$.

Известно [1], что при выполнении условий (A1), (A2) для достаточно малых ε существует стационарное решение $u_s(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2), имеющее внутренний переходный слой в точке $x = x^*$, т.е. такое, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_s(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in [a, x^*), \\ \varphi_2(x), & x \in (x^*, b]. \end{cases} \quad (1.5)$$

Решения такого типа получили название *контрастных структур типа ступеньки* (КСТС). Построение асимптотического разложения КСТС описано в [1]. Отметим (см. [1]), что КСТС в задаче (1.1), (1.2) существует и в случае, когда $\frac{dJ}{dx}(x^*) > 0$.

Анализ устойчивости КСТС проведен в работах [2], [3], где условия на функцию f несущественно отличаются от (A1), (A2), и в работах [4], [5], где на функцию f налагаются некоторые дополнительные условия. Результаты по асимптотической устойчивости многомерных КСТС содержатся в работах [6], [7]. Из указанных работ следует, что при выполнении условий (A1), (A2) решение $u_s(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2) асимптотически устойчиво. В случае же, когда $\frac{dJ}{dx}(x^*) > 0$, такое решение неустойчиво.

Одной из основных проблем как с теоретической, так и с прикладной точки зрения является вопрос о том, как устроено множество начальных функций $u_0(x, \varepsilon)$ (см. (1.3)), из которых формируется при $t \rightarrow +\infty$ КСТС $u_s(x, \varepsilon)$, если выполнены условия (A1), (A2) и ε достаточно мало. Иными словами, как устроена область влияния стационарного решения $u_s(x, \varepsilon)$ в случае, когда оно асимптотически устойчиво. В настоящей работе речь идет о *глобальной области влияния* КСТС $u_s(x, \varepsilon)$, под которой будем понимать множество всех функций $u_0(x, \varepsilon)$, для каждой из которых найдется $\varepsilon' > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon']$ решение задачи (1.1)–(1.3) существует и своим пределом при $t \rightarrow +\infty$ имеет $u_s(x, \varepsilon)$. Более точное определение глобальной области влияния дано в §6.

Известно [8], что часть области влияния стационарного решения параболической задачи можно найти, используя информацию о спектре линеаризованного на этом решении оператора соответствующей эллиптической задачи. Назовем эту часть *локальной областью влияния*. В [9] показано, что локальной области влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$, возникающей в задаче (1.1), (1.2) при условиях (A1), (A2) и достаточно малых ε , принадлежат все функции $u_0(x, \varepsilon)$ (удовлетворяющие определенным условиям гладкости и условию (1.2)) такие, что $|u_0(x, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^2$, где $C > 0$ – некоторое фиксированное (при $\varepsilon \rightarrow 0$) число.

Определенные результаты, касающиеся глобальной области влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$, содержатся в работах [10], [11], где рассмотрены вопросы о формировании и распространении так называемых диффузионных волн в уравнении (1.1) при $D = (-\infty, +\infty)$. Из работы [10] следует, что в случае, когда $f \equiv u(u-1)(u-a(x))$, где $0 < a(x) < 1$, и выполнено условие (A2), глобальной области влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$ принадлежат все функции $u_0(x, \varepsilon) \equiv u_0(x)$, удовлетворяющие некоторым условиям гладкости и следующему условию: существует $\tilde{x} \in D$ такое, что $\tilde{x} < x^*$, $u_0(x) < a(x)$ при $x \in [a, \tilde{x}]$, $u_0(x) > a(x)$ при $x \in (\tilde{x}, b]$, $J(x) > 0$ при $x \in [\tilde{x}, x^*)$.

В §§2, 4, 5 нашей работы доказано, что глобальной области влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$ при выполнении условий (A1), (A2) принадлежат все функции $u_0(x, \varepsilon)$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

(A3) $u_0(x, \varepsilon) \equiv u_0(x) \in C_B^2(\overline{D}) \equiv \{v(x) \in C^2(\overline{D}) : v_x(a) = v_x(b) = 0\}$ и

$$\overline{u}(x) < u_0(x) < \widehat{u}(x), \quad x \in \overline{D};$$

(A4) $\exists x^{(-)} \in (a, x^*)$ и $\exists x^{(+)} \in (x^*, b)$ такие, что

$$u_0(x) < 0 \text{ при } x \in [a, x^{(-)}], \quad J(x) > 0 \text{ при } x \in [x^{(-)}, x^*], \quad (1.6)$$

$$u_0(x) > 0 \text{ при } x \in [x^{(+)}, b], \quad J(x) < 0 \text{ при } x \in (x^*, x^{(+)}]. \quad (1.7)$$

Отметим, что если $\varphi_0(x) \neq 0$, то неравенства в (1.6) и (1.7) для $u_0(x)$ нужно заменить соответственно на $u_0(x) < \varphi_0(x)$ и $u_0(x) > \varphi_0(x)$.

В §6 сформулирован основной результат работы – теорема 6, в которой условие (A4) существенно ослаблено (см. условие (A6) теоремы 6). В частности, оказывается (см. следствие 5 в §6), что если $J(x) > 0$ при $x \in [a, x^*)$ и $J(x) < 0$ при $x \in (x^*, b]$, то (1.6) и (1.7) в условии (A4) можно заменить требованием существования хотя бы одной точки $x^{(-)} \in [a, x^*)$ такой, что $u_0(x^{(-)}) < 0$, и хотя бы одной точки $x^{(+)} \in (x^*, b]$ такой, что $u_0(x^{(+)}) > 0$. Доказательство теоремы 6 основано на результатах §§2–5, но так как отдельного анализа требуют поведение решения на границе и поведение решения внутри области D , то по этой причине доказательство теоремы 6 приведено в заключительном §8.

Чтобы оценить, насколько полно наш основной результат характеризует глобальную область влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$, в замечании 4 (см. конец §6) приведены некоторые результаты по глобальным областям влияния стационарных решений задачи (1.1), (1.2) без внутренних переходных слоев, т.е. решений $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $u^{(2)}(x, \varepsilon)$, близких при малых ε соответственно к $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ во всей области $\overline{D}$. Как известно [1], такие решения существуют в задаче (1.1), (1.2) при выполнении условия (A1) для достаточно малых ε , причем являются асимптотически устойчивыми.

Отметим, что хотя в §§2, 4, 5, 8 мы предполагаем, что $u_0(x, \varepsilon) \equiv u_0(x)$ (см. условие (A3)), наши результаты легко распространяются на функции $u_0(x, \varepsilon)$, зависящие от ε (см. теорему 6).

Прежде чем перейти к краткому описанию основной идеи развиваемого здесь метода, сформулируем лемму о существовании решения задачи (1.1)–(1.3).

ЛЕММА 1. *Пусть выполнены условия (A1) и (A3). Тогда при достаточно малых ε задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение $u(x, t, \varepsilon) \in C^{1,0}(\overline{D} \times [0, +\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{D} \times (0, +\infty))$, причем*

$$\overline{u}(x) - C\varepsilon < u(x, t, \varepsilon) < \widehat{u}(x) + C\varepsilon, \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, +\infty),$$

где $C > 0$ – некоторое число, не зависящее от ε .

Утверждение леммы 1 следует из [12], [13] и того факта, что функции $\widehat{u} + \varepsilon z(x, \varepsilon)$ и $\overline{u} - \varepsilon z(x, \varepsilon)$, где

$$z(x, \varepsilon) = \exp\left(\frac{k(a-x)}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{k(x-b)}{\varepsilon}\right), \quad (1.8)$$

при достаточно большом $k > 0$ и достаточно малых ε являются соответственно верхним и нижним решениями задачи (1.1)–(1.3).

В §2 построено асимптотическое приближение с точностью $O(\varepsilon)$ для решения $u(x, t, \varepsilon)$ на промежутке $[0, T]$, где $T > 0$ – произвольное, но фиксированное при $\varepsilon \rightarrow 0$ число. Асимптотическое приближение с произвольной точностью на промежутке $[0, T]$ можно построить с помощью метода, предложенного в [14].

Исследование поведения решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $t \geq T$ проведено в §§4, 5, 8 с помощью метода параметрических барьеров. Основная теорема этого метода (теорема 2; ее доказательство дано в §7) и определение параметрических барьеров содержатся в §3. Суть метода состоит в том, что сначала строятся стационарные верхнее и нижнее решения задачи (1.1), (1.2), зависящие от параметра γ , изменяющегося на некотором отрезке $[\gamma_1, \gamma_2]$, причем зависимость от γ в определенном смысле равномерная (и в этом случае верхнее и нижнее решения называются *параметрическими барьерами*). Затем вводится зависимость γ от времени ($\gamma = \gamma(t)$) так, что в силу “равномерности” по γ параметрические барьеры становятся нестационарными барьерами задачи (1.1), (1.2). Это обстоятельство позволяет рассматривать параметрические барьеры при каждом γ как границы, между которыми лежит решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) при всех t , начиная с некоторого $t_0(\gamma)$. Если при каком-то $\bar{\gamma} \in [\gamma_1, \gamma_2]$ параметрические барьеры будут находиться в локальной области влияния стационарного решения задачи (1.1), (1.2), то отсюда следует, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ будет стремиться при $t \rightarrow +\infty$ к этому стационарному решению.

В заключение отметим, что представленный в работе метод позволяет исследовать глобальные области влияния стационарных решений задачи (1.1), (1.2), имеющих несколько внутренних переходных слоев. Как известно [1], такие решения задачи (1.1), (1.2) при условии (A1) существуют для достаточно малых ε (наряду с КСТС $u_s(x, \varepsilon)$), если имеется несколько точек $x^* \in (a, b)$ таких, что $J(x^*) = 0$, $\frac{dJ}{dx}(x^*) \neq 0$. Результаты по асимптотической устойчивости таких решений содержатся в работах [4], [5], [15].

§2. Асимптотическое приближение решения на конечном промежутке времени

Пусть выполнены условия (A1) и (A3). Асимптотику (нулевого порядка по ε) задачи (1.1)–(1.3) на промежутке $[0, T]$, где $T > 0$ – произвольное, но фиксированное при $\varepsilon \rightarrow 0$ число, построим в виде

$$U(x, t, \varepsilon) = \tilde{u}(x, t) + \varepsilon R_a(\xi_a, t) + \varepsilon R_b(\xi_b, t), \quad \xi_a = \frac{a-x}{\varepsilon}, \quad \xi_b = \frac{x-b}{\varepsilon}. \quad (2.1)$$

Функцию $\tilde{u}(x, t)$ определим как решение следующей задачи (x играет роль параметра, $x \in \overline{D}$):

$$-\tilde{u}_t = f(\tilde{u}, x, 0), \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$\tilde{u}(x, 0) = u_0(x). \quad (2.3)$$

Из условий (A1) и (A3) следует, что решение $\tilde{u}(x, t)$ задачи (2.2), (2.3) существует, единственно и

$$\bar{u}(x) < \tilde{u}(x, t) < \hat{u}(x), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, +\infty). \quad (2.4)$$

Определим теперь функции R_a, R_b :

$$R_a(\xi_a, t) = \tilde{u}_x(a, t) \exp(\xi_a), \quad R_b(\xi_b, t) = -\tilde{u}_x(b, t) \exp(\xi_b).$$

Умножим R_a (R_b) на срезающую функцию [1] в окрестности точки $x = a$ ($x = b$) и получившуюся функцию снова обозначим через R_a (R_b).

По построению функция $U(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varepsilon^2 U_{xx} - U_t = f(U, x, \varepsilon) + O(\varepsilon), \quad (x, t) \in D \times (0, T], \quad (2.5)$$

$$U_x(a, t, \varepsilon) = U_x(b, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (2.6)$$

$$U(x, 0, \varepsilon) = u_0(x), \quad x \in \overline{D}, \quad (2.7)$$

$$U(x, t, \varepsilon) = \tilde{u}(x, t) + O(\varepsilon), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, T]. \quad (2.8)$$

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (A1) и (A3). Тогда для любого $T > 0$, фиксированного при $\varepsilon \rightarrow 0$, существует число $C > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенству:

$$|u(x, t, \varepsilon) - \tilde{u}(x, t)| \leq C\varepsilon, \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, T]. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T > 0$ фиксировано. Рассмотрим функцию

$$w(x, t, \varepsilon) = (u(x, t, \varepsilon) - U(x, t, \varepsilon)) \exp(-kt),$$

где число $k > 0$ выбрано так, что

$$d(x, t, \varepsilon) \equiv \int_0^1 f_u(U(x, t, \varepsilon) + S(u(x, t, \varepsilon) - U(x, t, \varepsilon)), x, \varepsilon) dS + k > 1$$

при $(x, t) \in \overline{D} \times [0, T]$ и малых ε . В силу леммы 1, (2.4) и (2.8) такой выбор k возможен. Из (1.1)–(1.3) и (2.5)–(2.7) получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 w_{xx} - d(x, t, \varepsilon)w - w_t &= O(\varepsilon), \quad (x, t) \in D \times (0, T], \\ w_x(a, t, \varepsilon) &= w_x(b, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in (0, T], \\ w(x, 0, \varepsilon) &= 0, \quad x \in \overline{D}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$|w(x, t, \varepsilon)| \leq C_0 \varepsilon, \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, T],$$

где $C_0 > 0$ – некоторое число, а потому в силу (2.8) существует $C > 0$ такое, что при достаточно малых ε выполнено (2.9).

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия (A1), (A3), и пусть существует отрезок $D^{(-)} = [x_1, x_2] \subseteq [a, b] = \overline{D}$ ($D^{(+)} = [x_3, x_4] \subseteq \overline{D}$) такой, что

$$u_0(x) < 0, \quad x \in D^{(-)} \quad (u_0(x) > 0, \quad x \in D^{(+)}).$$

Тогда $\forall \eta > 0 \exists T_0 = T_0(\eta) > 0$ такое, что $\forall T \geq T_0$ при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in D^{(-)} \times [T_0, T], \\ (u(x, t, \varepsilon) &> \varphi_2(x) - \eta, \quad (x, t) \in D^{(+)} \times [T_0, T]), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\varphi_1(x) - \eta < u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, \quad (x, t) \in \overline{D} \times [T_0, T]. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 достаточно доказать, что $\forall \eta > 0 \exists T_0 > 0$ такое, что неравенства вида (2.10), (2.11) выполняются при $t \geq T_0$ для функции $\tilde{u}(x, t)$ (т.е. при $t \geq T_0$ имеют место неравенства (2.10), (2.11), в которых u заменено на $\tilde{u}$). Докажем, например, что по заданному $\eta > 0$ можно указать $T_0 > 0$ такое, что

$$\tilde{u}(x, t) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in D^{(-)} \times [T_0, +\infty). \quad (2.12)$$

Остальные неравенства вида (2.10), (2.11) для $\tilde{u}$ доказываются аналогично.

Зафиксируем произвольное $\eta > 0$. Пусть

$$\delta = \min \left\{ \eta; -\frac{1}{2} \max_{D^{(-)}} u_0(x); -\frac{1}{2} \max_{D^{(-)}} \varphi_1(x) \right\}.$$

Введем функции

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= -\delta + \frac{t}{T_0} \left(\varphi_1(x) + \frac{3}{2} \delta \right), \quad (x, t) \in D^{(-)} \times [0, T_0], \\ v_2(x) &= \varphi_1(x) + \frac{1}{2} \delta, \quad (x, t) \in D^{(-)} \times [T_0, +\infty), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{2 \max_{\overline{D}} |\varphi_1(x)| + 3\delta}{m}, \quad m = \min_{\Omega^{(+)}} f(u, x, 0) > 0, \\ \Omega^{(+)} &= \left\{ (u, x) : \varphi_1(x) + \frac{1}{2} \delta \leq u \leq -\delta, x \in D^{(-)} \right\}. \end{aligned}$$

При таком выборе T_0 , как показывают простые вычисления,

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + f(v_1, x, 0) \geq \frac{1}{2} m, \quad (x, t) \in D^{(-)} \times [0, T_0].$$

Используя это неравенство и уравнение (2.2), получаем:

$$\frac{\partial(v_1 - \tilde{u})}{\partial t} + f(v_1, x, 0) - f(\tilde{u}, x, 0) \geq \frac{1}{2} m > 0$$

или

$$\frac{\partial(v_1 - \tilde{u})}{\partial t} + f_u^* \cdot (v_1 - \tilde{u}) > 0, \quad (x, t) \in D^{(-)} \times [0, T_0]. \quad (2.13)$$

Отсюда, учитывая начальное условие

$$(v_1 - \tilde{u})|_{t=0} = -\delta - u_0(x) > 0, \quad x \in D^{(-)},$$

приходим к неравенству

$$v_1 - \tilde{u} > 0, \quad (x, t) \in D^{(-)} \times (0, T_0],$$

и, следовательно,

$$\tilde{u}|_{t=T_0} < v_1|_{t=T_0} = \varphi_1(x) + \frac{1}{2} \delta = v_2(x), \quad x \in D^{(-)},$$

т.е.

$$(v_2 - \tilde{u})|_{t=T_0} > 0, \quad x \in D^{(-)}. \quad (2.14)$$

Для $v_2 - \tilde{u}$ аналогично (2.13) получаем

$$\frac{\partial(v_2 - \tilde{u})}{\partial t} + f_u^{**} \cdot (v_2 - \tilde{u}) \geq \frac{1}{2}m > 0, \quad (x, t) \in D^{(-)} \times [T_0, +\infty).$$

Отсюда и из (2.14) следует, что

$$v_2 - \tilde{u} > 0, \quad (x, t) \in D^{(-)} \times [T_0, +\infty),$$

и, значит,

$$\tilde{u}(x, t) < v_2(x) = \varphi_1(x) + \delta \leq \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in D^{(-)} \times [T_0, +\infty).$$

Тем самым (2.12) и лемма 3 доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия (A1), (A3), и пусть существует $x^{(-)} \in D$ ($x^{(+)} \in D$) такое, что

$$u_0(x^{(-)}) < 0 \quad (u_0(x^{(+)}) > 0).$$

Тогда для некоторого $\Delta > 0$ и $\forall \eta > 0 \exists T_0 = T_0(\eta) > 0$ такое, что $\forall T \geq T_0$ при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in [x^{(-)} - \Delta, x^{(-)} + \Delta] \times [T_0, T] \\ (u(x, t, \varepsilon) &> \varphi_2(x) - \eta, \quad (x, t) \in [x^{(+)} - \Delta, x^{(+)} + \Delta] \times [T_0, T]). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для доказательства следствия 1 достаточно заметить, что в силу условия $u_0(x^{(-)}) < 0$ и непрерывности $u_0(x)$ существует $\Delta > 0$ такое, что

$$u_0(x) < 0, \quad x \in [x^{(-)} - \Delta, x^{(-)} + \Delta].$$

После этого неравенство (2.15) непосредственно следует из леммы 3.

СЛЕДСТВИЕ 2. Лемма 3 остается в силе, если в (2.11) заменить $[T_0, T]$ на $[T_0, +\infty)$.

Действительно, для произвольного $\eta > 0$ возьмем $T_0 = T_0(\eta/2) > 0$. Тогда при достаточно малых ε в силу (2.11) будут выполнены неравенства

$$\varphi_1(x) - \frac{\eta}{2} < u(x, T_0, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \frac{\eta}{2}, \quad x \in \overline{D}.$$

Положим

$$\hat{v}(x, \varepsilon) = \varphi_2(x) + \frac{\eta}{2} + \varepsilon z(x, \varepsilon), \quad \bar{v}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) - \frac{\eta}{2} - \varepsilon z(x, \varepsilon),$$

где функция $z(x, \varepsilon)$ определена формулой (1.8). Для любого достаточно малого η при достаточно малых ε и достаточно большом k (см. (1.8)) функции $\hat{v}(x, \varepsilon)$ и $\bar{v}(x, \varepsilon)$ являются верхним и нижним барьерами для решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $t \geq T_0$, т.е.

$$\bar{v}(x, \varepsilon) < u(x, t, \varepsilon) < \hat{v}(x, \varepsilon), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [T_0, +\infty).$$

Отсюда, взяв ε столь малым, что $\varepsilon z(x, \varepsilon) < \eta/2$, приходим к неравенствам (2.11) для $(x, t) \in \overline{D} \times [T_0, +\infty)$.

Основной результат § 2, непосредственно вытекающий из леммы 3 и следствия 2, сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (A1), (A3), и пусть существуют $x^{(-)}$ и $x^{(+)}$ такие, что

$$a < x^{(-)} < x^{(+)} < b,$$

$$u_0(x) < 0 \quad \text{при } x \in [a, x^{(-)}], \quad u_0(x) > 0 \quad \text{при } x \in [x^{(+)}, b].$$

Тогда $\forall \eta > 0 \exists T_0 = T_0(\eta) > 0$ такое, что $\forall T \geq T_0$ при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + \eta, & (x, t) &\in [a, x^{(-)}] \times [T_0, T], \\ u(x, t, \varepsilon) &> \varphi_2(x) - \eta, & (x, t) &\in [x^{(+)}, b] \times [T_0, T], \\ \varphi_1(x) - \eta &< u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, & (x, t) &\in \overline{D} \times [T_0, +\infty). \end{aligned} \quad (2.16)$$

§3. Метод параметрических барьеров

В этом параграфе для краткости записи зависимость функций от ε не указывается. Пусть γ_1, γ_2 – некоторые числа, причем для определенности $\gamma_1 < \gamma_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функции $\beta(x, \gamma)$ и $\alpha(x, \gamma)$, $(x, \gamma) \in \overline{D} \times [\gamma_1, \gamma_2]$, назовем соответственно *верхним* и *нижним параметрическими барьерами* (ВПБ и НПБ) задачи (1.1), (1.2) при $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$, если выполнены следующие условия:

1°. $\beta(x, \gamma), \alpha(x, \gamma) \in C(\overline{D} \times [\gamma_1, \gamma_2])$; $\beta, \alpha \in \Pi$, если $(x, \gamma) \in \overline{D} \times [\gamma_1, \gamma_2]$, и $f(u, x) \in C^1(\Pi \times \overline{D})$, где Π – некоторый интервал из $\mathbb{R}^1$;

2°. либо $\beta(x, \gamma), \alpha(x, \gamma) \in C^{2,1}(\overline{D} \times [\gamma_1, \gamma_2])$, либо существуют $x_i(\gamma) \in C^1[\gamma_1, \gamma_2]$, $i = 1, 2, \dots, n$, такие, что $a < x_1(\gamma) < x_2(\gamma) < \dots < x_n(\gamma) < b$ при $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$ и

$$\begin{aligned} \beta(x, \gamma), \alpha(x, \gamma) &\in C^{2,1}([a, x_1(\gamma)] \times [\gamma_1, \gamma_2]) \cap C^{2,1}([x_1(\gamma), x_2(\gamma)] \times [\gamma_1, \gamma_2]) \\ &\cap \dots \cap C^{2,1}([x_n(\gamma), b] \times [\gamma_1, \gamma_2]), \end{aligned}$$

причем в точках $x_i(\gamma)$, $i = 1, 2, \dots, n$, при $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$ выполняются неравенства:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}(x_i(\gamma) - 0, \gamma) - \frac{\partial \beta}{\partial x}(x_i(\gamma) + 0, \gamma) \geq 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_i(\gamma) - 0, \gamma) - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_i(\gamma) + 0, \gamma) \leq 0;$$

3°. существует $\delta > 0$, которое может зависеть от ε , но не зависит от γ , такое, что

$$\varepsilon^2 \beta_{xx} - f(\beta, x) \leq -\delta, \quad \varepsilon^2 \alpha_{xx} - f(\alpha, x) \geq \delta, \quad (x, \gamma) \in \overline{D} \times [\gamma_1, \gamma_2],$$

причем в точках a, b и $x_i(\gamma)$, $i = 1, 2, \dots, n$, данные неравенства выполняются для предельных значений левых частей неравенств;

4°. $\beta_x(a, \gamma) \leq 0 \leq \beta_x(b, \gamma), \alpha_x(a, \gamma) \geq 0 \geq \alpha_x(b, \gamma), \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

1. функции $\beta(x, \gamma)$ и $\alpha(x, \gamma)$, $(x, \gamma) \in \overline{D} \times [\gamma_1, \gamma_2]$, являются соответственно ВПБ и НПБ задачи (1.1), (1.2) при $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$;
2. существует решение $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3) из $C^{1,0}(\overline{D} \times [0, +\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{D} \times (0, +\infty))$, причем $u \in \Pi$ при $(x, t) \in \overline{D} \times [0, +\infty)$, где Π – интервал из определения 1;
3. существуют $t_0 \in [0, +\infty)$ и $\overline{\gamma} \in [\gamma_1, \gamma_2]$ такие, что

$$\alpha(x, \overline{\gamma}) < u(x, t_0) < \beta(x, \overline{\gamma}), \quad x \in \overline{D}.$$

Тогда $\forall \hat{\gamma} \in [\gamma_1, \gamma_2] \exists t_1 > 0$ такое, что

$$\alpha(x, \hat{\gamma}) < u(x, t) < \beta(x, \hat{\gamma}), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [t_0 + t_1, +\infty). \quad (3.1)$$

Доказательство теоремы 2 приведено в § 7, а сама теорема будет использоваться в §§ 4, 5. Опираясь на результаты работы [16], получаем следствие из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнено условие 1 теоремы 2 и при каком-то $\overline{\gamma} \in [\gamma_1, \gamma_2]$ выполнено неравенство

$$\beta(x, \overline{\gamma}) > \alpha(x, \overline{\gamma}), \quad x \in \overline{D}.$$

Тогда существует стационарное решение $u(x) \in C^2(\overline{D})$ задачи (1.1), (1.2) такое, что

$$\alpha(x, \gamma) < u(x) < \beta(x, \gamma), \quad (x, \gamma) \in \overline{D} \times [\gamma_1, \gamma_2].$$

§ 4. Поведение решения на бесконечном промежутке времени

Неравенства (2.16) характеризуют поведение решения $u(x, t, \varepsilon)$ на бесконечном промежутке времени, начиная с момента $T_0 = T_0(\eta)$. В следующей теореме получены новые оценки для решения $u(x, t, \varepsilon)$ на бесконечном промежутке времени, начиная с некоторого T_1 , вообще говоря, большего чем T_0 , при условии, что наряду с (A1) и (A3) выполнено также требование (A4).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (A1), (A3) и (A4). Тогда $\forall \eta' > 0$ и $\forall \Delta > 0$ при достаточно малых $\varepsilon \exists T_1 = T_1(\eta', \Delta, \varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta', \quad (x, t) \in [a, x^* - \Delta] \times [T_1, +\infty), \quad (4.1)$$

$$u(x, t, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \eta', \quad (x, t) \in [x^* + \Delta, b] \times [T_1, +\infty). \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем любое $\Delta > 0$ и положим

$$\overline{\Delta} = \min \left\{ \Delta, \frac{1}{2}(x^* - x^{(-)}) \right\},$$

где $x^{(-)}$ – точка из условия (A4).

Пусть $x_\ell \in (a, x^{(-)})$ – такая точка, что

$$J(x) > 0, \quad x \in [x_\ell, x^*]. \quad (4.3)$$

В силу (A4) такая точка x_ℓ существует. Положим

$$\gamma_1 = x^{(-)} - \frac{1}{2}(x^{(-)} - x_\ell), \quad \gamma_2 = x^* - \frac{1}{2}\overline{\Delta}.$$

Тогда

$$x_\ell < \gamma_1 < \gamma_2 < x^*.$$

Будем строить ВПБ задачи (1.1), (1.2) в виде:

$$\begin{aligned}\beta(x, \gamma) &= \beta^{(-)}(x, \gamma) = \varphi_1(x) + \mu + Q_0^{(-)}(\tau, \gamma) + \mu Q_1^{(-)}(\tau, \gamma) + \varepsilon P(\xi_a), \\ x &\in [a, \gamma], \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2], \\ \beta(x, \gamma) &= \beta^{(+)}(x, \gamma) = \varphi_2(x) + \mu + Q_0^{(+)}(\tau, \gamma) + \mu Q_1^{(+)}(\tau, \gamma) + \varepsilon P(\xi_b), \\ x &\in [\gamma, b], \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2],\end{aligned}$$

где $\tau = (x - \gamma)/\varepsilon$, $\xi_a = (a - x)/\varepsilon$, $\xi_b = (x - b)/\varepsilon$, $P(x) \equiv \exp(kx)$, k и μ — положительные числа, которые будут выбраны ниже.

Функцию $Q_0^{(-)}$ определим как решение задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Q_0^{(-)} = f(\varphi_1(\gamma) + Q_0^{(-)}, \gamma, 0), \quad \tau < 0, \quad (4.4)$$

$$Q_0^{(-)}(0, \gamma) = -\varphi_1(\gamma), \quad Q_0^{(-)}(-\infty, \gamma) = 0. \quad (4.5)$$

Задача для $Q_0^{(+)}$ (при $\tau > 0$) получается из задачи для $Q_0^{(-)}$, если $\varphi_1(\gamma)$ в (4.4) и (4.5) заменить на $\varphi_2(\gamma)$, а второе условие в (4.5) заменить на $Q_0^{(+)}(+\infty, \gamma) = 0$.

В силу условия (A1) $Q_0^{(\pm)}(\tau, \gamma)$ однозначно определяются и имеют экспоненциальные оценки по переменной τ сверху и снизу [1], причем эти оценки равномерны по γ при $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$, т.е. существуют постоянные $C_i > 0$ и $\varkappa_i > 0$, $i = 1, 2$, не зависящие от γ и такие, что

$$|Q_0^{(\pm)}(\tau, \gamma)| \leq C_1 \exp(-\varkappa_1 |\tau|), \quad \tau \in \mathbb{R}^1, \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2], \quad (4.6)$$

$$|Q_0^{(\pm)}(\tau, \gamma)| \geq C_2 \exp(-\varkappa_2 |\tau|), \quad \tau \in \mathbb{R}^1, \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]. \quad (4.7)$$

Из (4.4), (4.5) следует, что

$$\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \gamma) = \left(2 \int_{\varphi_1(\gamma)}^0 f(u, \gamma, 0) du \right)^{1/2}, \quad (4.8)$$

и аналогичное выражение имеет место для $\frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \gamma)$ (нужно только $\varphi_1(\gamma)$ заменить на $\varphi_2(\gamma)$). Нетрудно показать, используя эти выражения, что существует $C_3 > 0$ такое, что

$$\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \gamma) - \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \gamma) \geq C_3 J(\gamma), \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2], \quad (4.9)$$

где функция J определена равенством (1.4).

Функцию $Q_1^{(-)}(\tau, \gamma)$ определим как решение задачи

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Q_1^{(-)} &= f_u^{(-)}(\tau, \gamma) Q_1^{(-)} + f_u^{(-)}(\tau, \gamma) - f_u^{(-)}(\gamma), \quad \tau < 0, \\ Q_1^{(-)}(0, \gamma) &= 0, \quad Q_1^{(-)}(-\infty, \gamma) = 0,\end{aligned}$$

где $f_u^{(-)}(\tau, \gamma) \equiv f_u(\varphi_1(\gamma) + Q_0^{(-)}(\tau, \gamma), \gamma, 0)$, $f_u^{(-)}(\gamma) \equiv f_u(\varphi_1(\gamma), \gamma, 0)$. Задача для $Q_1^{(+)}$ (при $\tau > 0$) получается из задачи для $Q_1^{(-)}$, если $f_u^{(-)}(\tau, \gamma)$ и $f_u^{(-)}(\gamma)$ заменить на $f_u^{(+)}(\tau, \gamma) \equiv f_u(\varphi_2(\gamma) + Q_0^{(+)}(\tau, \gamma), \gamma, 0)$ и $f_u^{(+)}(\gamma) \equiv f_u(\varphi_2(\gamma), \gamma, 0)$ соответственно, а второе граничное условие заменить на $Q_1^{(+)}(+\infty, \gamma) = 0$. Функции $Q_1^{(\pm)}(\tau, \gamma)$ однозначно определяются и имеют экспоненциальные оценки типа (4.6) [1]. Очевидно, что $Q_i^{(\pm)}(\tau, \gamma)$, $i = 0, 1$, — достаточно гладкие функции τ и γ . Отметим также, что функции $Q_i^{(\pm)}(\tau, \gamma)$, $i = 0, 1$, можно определить указанным способом не только для $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$, но и для любого значения γ из отрезка $[a, b]$. При этом сохраняются оценки вида (4.6), (4.7). Этот факт будет использован ниже при построении НПБ.

Умножим теперь функции $Q_i^{(\pm)}$ и P на соответствующие срезающие функции [1] и сохраним за полученными функциями старые обозначения $Q_i^{(\pm)}$ и P .

Заметим, что в силу (4.9):

$$\varepsilon[\beta_x^{(-)}(\gamma, \gamma) - \beta_x^{(+)}(\gamma, \gamma)] \geq C_3 J(\gamma) + O(\mu) + O(\varepsilon), \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2].$$

Из этого неравенства, (4.3) и неравенств $x_\ell < \gamma_1 < \gamma_2 < x^*$ следует, что при достаточно малых ε и μ

$$\beta_x^{(-)}(\gamma, \gamma) - \beta_x^{(+)}(\gamma, \gamma) > 0, \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]. \quad (4.10)$$

Выберем $k > 0$ столь большим, что

$$\beta_x(a, \gamma) \leq 0 \leq \beta_x(b, \gamma), \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]. \quad (4.11)$$

Наконец, согласно построению функции $\beta^{(-)}(x, \gamma)$ существуют постоянные $C_4 > 0$ и $C_5 > 0$ такие, что при достаточно малых ε и μ выполняется неравенство

$$\varepsilon^2 \beta_{xx}^{(-)} - f(\beta^{(-)}, x, \varepsilon) \leq -\mu f_u(\varphi_1(x), x, 0) + C_4 \varepsilon + C_5 \mu^2, \quad x \in [a, \gamma], \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2], \quad (4.12)$$

причем в силу равномерности по γ экспоненциальной оценки Q -функций постоянные C_4 и C_5 можно считать не зависящими от γ . Аналогично

$$\varepsilon^2 \beta_{xx}^{(+)} - f(\beta^{(+)}, x, \varepsilon) \leq -\mu f_u(\varphi_2(x), x, 0) + O(\varepsilon) + O(\mu^2), \quad x \in [\gamma, b], \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]. \quad (4.13)$$

Так как $f_u(\varphi_i(x), x, 0) > 0$, $i = 1, 2$ (см. (A1)), то из (4.12) и (4.13) следует, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε существует $\delta > 0$, не зависящее от γ и такое, что

$$\varepsilon^2 \beta_{xx} - f(\beta, x, \varepsilon) \leq -\delta, \quad (x, \gamma) \in \overline{D} \times [\gamma_1, \gamma_2], \quad (4.14)$$

причем в точке $x = \gamma$ неравенство (4.14) выполняется для предельных значений левой части (4.14) с одной и с другой стороны от этой точки.

Неравенства (4.10), (4.11) и (4.14) показывают, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε функция $\beta(x, \gamma)$ является ВПБ задачи (1.1), (1.2) при $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$.

Пользуясь равномерными экспоненциальными оценками Q -функций, нетрудно показать, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε выполнены неравенства:

$$\beta(x, \gamma) > \varphi_1(x) + \frac{1}{2}\mu, \quad (x, \gamma) \in \overline{D} \times [\gamma_1, \gamma_2], \quad (4.15)$$

$$\beta(x, \gamma_1) > \varphi_2(x) + \frac{1}{2}\mu, \quad x \in [x^{(-)}, b], \quad (4.16)$$

$$\beta(x, \gamma_2) < \varphi_1(x) + \frac{3}{2}\mu, \quad x \in [a, x^* - \Delta]. \quad (4.17)$$

Аналогичным образом можно построить НПБ $\alpha(x, \gamma)$ задачи (1.1), (1.2) в виде:

$$\begin{aligned} \alpha(x, \gamma) &= \alpha^{(-)}(x, \gamma) = \varphi_1(x) - \mu + Q_0^{(-)}(\tilde{\tau}, \tilde{x}(\gamma)) - \mu Q_1^{(-)}(\tilde{\tau}, \tilde{x}(\gamma)) - \varepsilon P(\xi_a), \\ &\quad x \in [a, \tilde{x}(\gamma)], \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2], \\ \alpha(x, \gamma) &= \alpha^{(+)}(x, \gamma) = \varphi_2(x) - \mu + Q_0^{(+)}(\tilde{\tau}, \tilde{x}(\gamma)) - \mu Q_1^{(+)}(\tilde{\tau}, \tilde{x}(\gamma)) - \varepsilon P(\xi_b), \\ &\quad x \in [\tilde{x}(\gamma), b], \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2], \end{aligned}$$

где $Q_i^{(\pm)}$ ($i = 0, 1$) и P – те же функции, что и в выражении для $\beta^{(\pm)}(x, \gamma)$, $\tilde{\tau} = (x - \tilde{x}(\gamma))/\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\gamma) &= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left\{ \left[\left(x^* + \frac{1}{2}\Delta \right) - \frac{1}{2} \left(x^{(+)} + x_r \right) \right] \gamma \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(x^{(+)} + x_r \right) \gamma_2 - \left(x^* + \frac{1}{2}\Delta \right) \gamma_1 \right\}, \end{aligned}$$

γ_1 и γ_2 – те же числа, которые использовались в определении функции $\beta(x, \gamma)$, $\tilde{\Delta} = \min\{\Delta, (x^{(+)} - x^*)/2\}$, $x_r \in (x^{(+)}, b)$ – такая точка, что $J(x) < 0$ при $x \in (x^*, x_r]$. В силу (A4) такая точка x_r существует. Заметим, что при изменении γ от γ_1 до γ_2 функция $\tilde{x}(\gamma)$ изменяется от $(x^{(+)} + x_r)/2$ до $(x^* + \tilde{\Delta}/2)$. Функция $\alpha(x, \gamma)$ для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε удовлетворяет неравенствам

$$\alpha(x, \gamma) < \varphi_2(x) - \frac{1}{2}\mu, \quad (x, \gamma) \in \overline{D} \times [\gamma_1, \gamma_2], \quad (4.18)$$

$$\alpha(x, \gamma_1) < \varphi_1(x) - \frac{1}{2}\mu, \quad x \in [a, x^{(+)}], \quad (4.19)$$

$$\alpha(x, \gamma_2) > \varphi_2(x) - \frac{3}{2}\mu, \quad x \in [x^* + \Delta, b]. \quad (4.20)$$

Зафиксируем теперь $\eta' > 0$ и возьмем $\mu > 0$ таким, что

$$\mu < \frac{1}{2}\eta' \quad (4.21)$$

и при достаточно малых ε ВПБ $\beta(x, \gamma)$ и НПБ $\alpha(x, \gamma)$ удовлетворяют неравенствам (4.15)–(4.17) и (4.18)–(4.20) соответственно.

Для числа $\eta = \mu/2$ в силу теоремы 1 существует $T_0 > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) - \frac{1}{2}\mu &< u(x, T_0, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \frac{1}{2}\mu, & x \in \overline{D}, \\ u(x, T_0, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + \frac{1}{2}\mu, & x \in [a, x^{(-)}], \\ u(x, T_0, \varepsilon) &> \varphi_2(x) - \frac{1}{2}\mu, & x \in [x^{(+)}, b]. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (4.15), (4.16), (4.18), (4.19), приходим к неравенствам

$$\alpha(x, \gamma_1) < u(x, T_0, \varepsilon) < \beta(x, \gamma_1), \quad x \in \overline{D}. \quad (4.22)$$

В силу теоремы 2 существует $t_1 > 0$ такое, что

$$\alpha(x, \gamma_2) < u(x, t, \varepsilon) < \beta(x, \gamma_2), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [T_0 + t_1, +\infty).$$

Из этих неравенств в силу (4.17), (4.20) и (4.21) получаем неравенства (4.1), (4.2) с $T_1 = T_0 + t_1$. Ясно, что $T_1 = T_1(\eta', \Delta, \varepsilon)$.

Теорема 3 доказана.

Результаты теоремы 3 и теоремы 1 (см. § 2) можно усилить, заменив η и η' в (2.16) и (4.1), (4.2) на величину порядка ε^{n+1} , а T_0 в (2.16) и T_1 в (4.1), (4.2) – на некоторое $T_2 = T_2(\Delta, n, \varepsilon)$. С этой целью рассмотрим упоминавшиеся в § 1 стационарные решения $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2) без внутренних переходных слоев, близкие при малых ε к функциям $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ соответственно на всем отрезке $\overline{D} \equiv [a, b]$. В [1] для этих решений построены и обоснованы $\forall n \geq 0$ асимптотики $U_n^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $U_n^{(2)}(x, \varepsilon)$, имеющие вид:

$$\begin{aligned} U_n^{(1)}(x, \varepsilon) &= \overline{u}_n^{(-)}(x, \varepsilon) + L_{n+1}^{(-)}(\xi_a, \varepsilon) + P_{n+1}^{(-)}(\xi_b, \varepsilon), & x \in \overline{D}, \\ U_n^{(2)}(x, \varepsilon) &= \overline{u}_n^{(+)}(x, \varepsilon) + L_{n+1}^{(+)}(\xi_a, \varepsilon) + P_{n+1}^{(+)}(\xi_b, \varepsilon), & x \in \overline{D}, \end{aligned}$$

где

$$\overline{u}_n^{(-)}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \overline{u}_i^{(-)}(x), \quad \overline{u}_n^{(+)}(x, \varepsilon) = \varphi_2(x) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \overline{u}_i^{(+)}(x), \quad (4.23)$$

$$L_{n+1}^{(\pm)}(\xi_a, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i L_i^{(\pm)}(\xi_a), \quad P_{n+1}^{(\pm)}(\xi_b, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i P_i^{(\pm)}(\xi_b), \quad (4.24)$$

$$\xi_a = \frac{a-x}{\varepsilon}, \quad \xi_b = \frac{x-b}{\varepsilon}.$$

Функции $\overline{u}_i^{(\pm)}$ (регулярные члены асимптотики) определяются как решения линейных алгебраических уравнений, например

$$\overline{u}_1^{(-)}(x) = -\frac{f_\varepsilon(\varphi_1(x), x, 0)}{f_u(\varphi_1(x), x, 0)};$$

функции $L_i^{(\pm)}(\xi_a)$ и $P_i^{(\pm)}(\xi_b)$ являются решениями линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при $\xi_a \leq 0$ и $\xi_b \leq 0$ соответственно, они имеют экспоненциальные оценки вида $|L_i^{(\pm)}(\xi_a)| \leq C \exp(\kappa \xi_a)$, а при $\xi_a = 0$ и $\xi_b = 0$ удовлетворяют условиям:

$$\frac{dL_i^{(\pm)}}{d\xi_a}(0) = \frac{d\bar{u}_{i-1}^{(\pm)}}{dx}(a), \quad \frac{\partial P_i^{(\pm)}}{d\xi_b}(0) = -\frac{d\bar{u}_{i-1}^{(\pm)}}{dx}(b),$$

откуда следует, что $U_n^{(1)}$ и $U_n^{(2)}$ будут удовлетворять граничным условиям (1.2), если функции $L_i^{(\pm)}$ и $P_i^{(\pm)}$ умножить на срезающие функции, что и будем предполагать сделанным.

Для удобства результат из [1] о существовании и асимптотике решений $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2) сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 4. Пусть выполнено условие (A1). Тогда при достаточно малых ε существуют стационарные решения $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ из $C^2(\bar{D})$ задачи (1.1), (1.2) такие, что $\forall n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|u^{(1)}(x, \varepsilon) - U_n^{(1)}(x, \varepsilon)\|_{C(\bar{D})} &= O(\varepsilon^{n+1}), \\ \|u^{(2)}(x, \varepsilon) - U_n^{(2)}(x, \varepsilon)\|_{C(\bar{D})} &= O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

СЛЕДСТВИЕ 4. В неравенствах (2.16), (4.1), (4.2) можно заменить $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ соответственно.

Усилением результатов теоремы 3 и теоремы 1 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия (A1), (A3) и (A4). Тогда для любых $n \geq 0$ и $\bar{\Delta} > 0$ при достаточно малых ε существуют $T_2 = T_2(\Delta, n, \varepsilon) > 0$ и число $\bar{C}_n > 0$, не зависящее от ε , такие, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < u^{(1)}(x, \varepsilon) + \bar{C}_n \varepsilon^{n+1}, \quad (x, t) \in [a, x^* - \Delta] \times [T_2, +\infty), \quad (4.26)$$

$$u(x, t, \varepsilon) > u^{(2)}(x, \varepsilon) - \bar{C}_n \varepsilon^{n+1}, \quad (x, t) \in [x^* + \Delta, b] \times [T_2, +\infty), \quad (4.27)$$

$$u^{(1)}(x, \varepsilon) - \bar{C}_n \varepsilon^{n+1} < u(x, t, \varepsilon) < u^{(2)}(x, \varepsilon) + \bar{C}_n \varepsilon^{n+1}, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T_2, +\infty). \quad (4.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta > 0$ фиксировано. Докажем неравенство (4.26). Положим

$$\bar{\Delta} = \min \left\{ \Delta, \frac{1}{2}(x^* - x^{(-)}) \right\}, \quad \bar{x} = x^* - \frac{1}{2}\bar{\Delta},$$

где $x^{(-)}$ – точка из условия (A4), и введем $\forall n \geq 0$ функцию $\beta_n(x, \varepsilon)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_n(x, \varepsilon) &= \beta_n^{(-)}(x, \varepsilon) = \bar{u}_{n+1}^{(-)}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} + L_{n+2}^{(-)}(\xi_a, \varepsilon) \\ &\quad + Q_{n+1}^{(-)}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} q_{\beta}^{(-)}(\tau), \quad x \in [a, \bar{x}], \\ \beta_n(x, \varepsilon) &= \beta_n^{(+)}(x, \varepsilon) + v_{n\beta}(\tau, \varepsilon) = \bar{u}_{n+1}^{(+)}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} + P_{n+2}^{(+)}(\xi_b, \varepsilon) \\ &\quad + Q_{n+1}^{(+)}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{n+1} q_{\beta}^{(+)}(\tau) + v_{n\beta}(\tau, \varepsilon), \quad x \in [\bar{x}, b], \end{aligned}$$

где $\overline{u}_{n+1}^{(\pm)}(x, \varepsilon)$, $L_{n+2}^{(-)}(\xi_a, \varepsilon)$, $P_{n+2}^{(+)}(\xi_b, \varepsilon)$ определены формулами (4.23), (4.24),

$$Q_{n+1}^{(\pm)}(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i Q_i^{(\pm)}(\tau), \quad \tau = \frac{x - \overline{x}}{\varepsilon},$$

$Q_i^{(-)}(\tau)$ и $Q_i^{(+)}(\tau)$ – погранслойные функции из асимптотических разложений таких решений краевых задач:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_{xx}^{(-)} &= f(u^{(-)}, x, \varepsilon), & x \in (a, \overline{x}), \\ u_x^{(-)}(a, \varepsilon) &= 0, & u^{(-)}(\overline{x}, \varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u_{xx}^{(+)} &= f(u^{(+)}, x, \varepsilon), & x \in (\overline{x}, b), \\ u^{(+)}(\overline{x}, \varepsilon) &= 0, & u_x^{(+)}(b, \varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

которые близки при малых ε соответственно к $\varphi_1(x)$ на $[a, \overline{x}]$ и к $\varphi_2(x)$ на $(\overline{x}, b]$. Алгоритм построения $Q_i^{(\pm)}(\tau)$ подробно описан в [1], в частности задача для $Q_0^{(-)}(\tau)$ имеет вид (4.4), (4.5) при $\gamma = \overline{x}$. Все функции $Q_i^{(\pm)}(\tau)$ однозначно определяются (при $i \geq 1$ как решения линейных задач) и имеют экспоненциальные оценки типа (4.6) [1].

Функции $q_\beta^{(-)}$, $q_\beta^{(+)}$ – погранслойные добавки, появляющиеся при построении верхних решений указанных краевых задач методом, описанным в [17]. Например, функция $q_\beta^{(-)}(\tau)$ определяется как решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} q_\beta^{(-)} &= f_u^{(-)}(\tau) q_\beta^{(-)} + f_u^{(-)}(\tau) - \overline{f}_u^{(-)} - \Pi^{(-)}(\tau), & \tau < 0, \\ q_\beta^{(-)}(0) &= 0, & q_\beta^{(-)}(-\infty) = 0, \end{aligned}$$

где $f_u^{(-)}(\tau) \equiv f_u(\varphi_1(\overline{x}) + Q_0^{(-)}(\tau), \overline{x}, 0)$, $\overline{f}_u^{(-)} \equiv f_u(\varphi_1(\overline{x}), \overline{x}, 0)$, а $\Pi^{(-)}(\tau) > 0$ – функция, которая имеет экспоненциальную оценку и выбирается так, что при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\beta_n^{(-)}(x, \varepsilon) - \beta_{n+1}^{(-)}(x, \varepsilon) \geq \tilde{C}_n \varepsilon^{n+1}, \quad x \in [a, \overline{x}], \quad (4.29)$$

где $\tilde{C}_n$ – положительное число, не зависящее от ε .

Умножим функции $Q_i^{(\pm)}$, $q_\beta^{(\pm)}$, $L_i^{(-)}$, $P_i^{(+)}$ на соответствующие срезающие функции [1], не изменяя при этом их обозначений, и определим функцию $v_{n\beta}(\tau, \varepsilon)$:

$$v_{n\beta} = [\beta_n^{(-)}(\overline{x}, \varepsilon) - \beta_n^{(+)}(\overline{x}, \varepsilon)] \zeta(\tau),$$

где $\zeta(\tau) \in C^\infty[0, +\infty)$, $\zeta(\tau) = 1$ при $0 \leq \tau \leq 1$, $\zeta(\tau) = 0$ при $\tau \geq 2$ и $0 \leq \zeta(\tau) \leq 1$ при $1 \leq \tau \leq 2$. Функция $v_{n\beta}$ обеспечивает непрерывность $\beta_n(x, \varepsilon)$ при $x = \overline{x}$. Заметим, что $v_{n\beta} = O(\varepsilon^{n+2})$, $\beta_n(x, \varepsilon) \in C(\overline{D}) \cap C^2[a, \overline{x}] \cap C^2[\overline{x}, b]$, а в точке $x = \overline{x}$ при достаточно малых ε справедливо неравенство

$$\varepsilon [\beta_{nx}^{(-)}(\overline{x}, \varepsilon) - \beta_{nx}^{(+)}(\overline{x}, \varepsilon)] \geq C_0 J(\overline{x}) + O(\varepsilon) > 0, \quad (4.30)$$

где $C_0 > 0$ — некоторое число. Неравенство (4.30) доказывается так же, как (4.10).

Из самого способа построения функции $\beta_n(x, \varepsilon)$ при достаточно малых ε следуют соотношения (см. также [17]):

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \beta_{nxx} - f(\beta_n, x, \varepsilon) &= -[f_u(\varphi_1(x), x, 0) + \Pi^{(-)}(\tau)]\varepsilon^{n+1} + O(\varepsilon^{n+2}) < 0, \\ x &\in [a, \bar{x}], \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \beta_{nxx} - f(\beta_n, x, \varepsilon) &= -[f_u(\varphi_2(x), x, 0) + \Pi^{(+)}(\tau)]\varepsilon^{n+1} + O(\varepsilon^{n+2}) < 0, \\ x &\in [\bar{x}, b], \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\beta_{nx}(a, \varepsilon) = \beta_{nx}(b, \varepsilon) = 0, \quad (4.33)$$

где $\Pi^{(+)}(\tau) > 0$ — функция, аналогичная упомянутой выше функции $\Pi^{(-)}(\tau)$.

Зафиксируем $n \geq 0$ и введем функцию

$$\hat{v}(x, t, \varepsilon) \equiv \beta_n(x, \varepsilon) + \frac{\mu}{\varepsilon} \theta(x, \varepsilon) \exp(-\mu t),$$

где $\theta(x, \varepsilon) \equiv \beta_0(x, \varepsilon) - \beta_1(x, \varepsilon)$, причем $\mu > 0$ выберем настолько малым (но фиксированным при $\varepsilon \rightarrow 0$), что при достаточно малых ε будут выполнены неравенства

$$\varepsilon^2 \hat{v}_{xx} - \hat{v}_t - f(\hat{v}, x, \varepsilon) < 0, \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty), \quad (4.34)$$

$$\hat{v}_x(\bar{x} - 0, t, \varepsilon) \geq \hat{v}_x(\bar{x} + 0, t, \varepsilon), \quad t \in [0, +\infty) \quad (4.35)$$

(в точке $x = \bar{x}$ неравенство (4.34) будет выполнено для предельных значений левой части (4.34) с одной и другой стороны от $\bar{x}$). Покажем для (4.34), что такой выбор μ возможен. Разлагая $f(\hat{v}, x, \varepsilon)$ по формуле Тейлора с центром разложения $(\beta_n, x, \varepsilon)$, получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \hat{v}_{xx} - \hat{v}_t - f(\hat{v}, x, \varepsilon) &= \{\varepsilon^2 \beta_{nxx} - f(\beta_n, x, \varepsilon)\} \\ &+ \left\{ \frac{\mu}{\varepsilon} [\varepsilon^2 \theta_{xx} - f_u(\beta_n, x, \varepsilon) \theta] \exp(-\mu t) \right\} \\ &+ \left\{ -\frac{\mu^2}{\varepsilon} \theta \left[-1 + \frac{1}{2} f_{uu}^* \cdot \frac{\theta}{\varepsilon} \exp(-\mu t) \right] \exp(-\mu t) \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Первое из трех слагаемых, заключенных в фигурные скобки в правой части (4.36), при достаточно малых ε отрицательно в силу (4.31), (4.32). Третье слагаемое в силу очевидной оценки $\theta(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ при достаточно малых ε не превосходит по абсолютной величине функции $C_6 \mu^2 \exp(-\mu t)$, где $C_6 > 0$ не зависит от ε и μ .

Оценим функцию $\varepsilon^2 \theta_{xx} - f_u(\beta_n, x, \varepsilon) \theta$, входящую во второе слагаемое в правой части (4.36). Вычитая из равенств (4.31), (4.32) при $n = 0$ эти же равенства при $n = 1$ и учитывая, что $[f_u(\varphi_i(x), x, 0) + \Pi^{(-)}(\tau)] \geq C > 0$, получаем

$$\varepsilon^2 \theta_{xx} - [f(\beta_0, x, \varepsilon) - f(\beta_1, x, \varepsilon)] \leq -C\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (4.37)$$

Так как

$$f(\beta_0, x, \varepsilon) - f(\beta_1, x, \varepsilon) = f_u(\beta_1, x, \varepsilon) \theta + \frac{1}{2} f_{uu}^* \cdot \theta^2 = f_u(\beta_n, x, \varepsilon) \theta + O(\varepsilon^2) \quad \forall n \geq 0,$$

то из (4.37) при достаточно малых ε следует:

$$\varepsilon^2 \theta_{xx} - f_u(\beta_n, x, \varepsilon) \theta \leq -C\varepsilon + O(\varepsilon^2) \leq -C_7\varepsilon,$$

где $C_7 > 0$ не зависит от ε . Вследствие этого второе слагаемое в правой части (4.36) при достаточно малых ε не превосходит отрицательной функции $-C_7\mu \exp(-\mu t)$, и, таким образом, мы приходим к неравенству

$$\varepsilon^2 \hat{v}_{xx} - \hat{v}_t - f(\hat{v}, x, \varepsilon) \leq [-C_7\mu + C_6\mu^2] \exp(-\mu t),$$

откуда следует, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε выполняется (4.34).

Далее, в силу (4.33)

$$\hat{v}_x(a, t, \varepsilon) = \hat{v}_x(b, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in [0, +\infty). \quad (4.38)$$

Из (4.29) при $n = 0$ имеем:

$$\beta_0(x, \varepsilon) - \beta_1(x, \varepsilon) = \theta(x, \varepsilon) \geq \tilde{C}_0\varepsilon.$$

Отсюда и из неубывания функций $Q_0^{(\pm)}(\tau)$ (см. [1]) следует, что существует константа $C_8 > 0$ такая, что при достаточно малых ε

$$\hat{v}(x, 0, \varepsilon) > \varphi_1(x) + C_8, \quad x \in \overline{D}. \quad (4.39)$$

В силу экспоненциальной оценки Q -функций типа (4.6), неравенства $\theta(x, \varepsilon) \geq \tilde{C}_0\varepsilon$ и выбора $\overline{x}$ существует постоянная $C_9 > 0$ такая, что при достаточно малых ε

$$\hat{v}(x, 0, \varepsilon) > \varphi_2(x) + C_9, \quad x \in [x^* - \overline{\Delta}/4, b]. \quad (4.40)$$

Объединяя теперь утверждения теорем 3 и 1, получаем, что (для $\eta' = C_8$, $\Delta = \overline{\Delta}/4$ и $\eta = C_9$) при достаточно малых ε существует $T'_1 = \max\{T_1, T_0\}$ такое, что (см. (4.1) и (2.16))

$$\begin{aligned} u(x, T'_1, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + C_8, & x \in [a, x^* - \overline{\Delta}/4], \\ u(x, T'_1, \varepsilon) &< \varphi_2(x) + C_9, & x \in \overline{D}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.39), (4.40) имеем неравенство

$$u(x, T'_1, \varepsilon) < \hat{v}(x, 0, \varepsilon), \quad x \in \overline{D}. \quad (4.41)$$

Соотношения (4.34), (4.35), (4.38) и (4.41) показывают, что функция $\hat{v}(x, t - T'_1, \varepsilon)$ является (негладким) верхним барьером для решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) при $t \geq T'_1$, т.е.

$$u(x, t, \varepsilon) < \hat{v}(x, t - T'_1, \varepsilon), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [T'_1, +\infty). \quad (4.42)$$

Но в силу экспоненциальной оценки Q -функций, выбора $\overline{x}$, а также леммы 4 существует постоянная $\overline{C}_n > 0$ такая, что при достаточно малых ε

$$\hat{v}(x, t, \varepsilon) < u^{(1)}(x, \varepsilon) + \overline{C}_n \varepsilon^{n+1}, \quad (x, t) \in [a, x^* - \Delta] \times \left[\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right).$$

Отсюда и из (4.42) следует, что

$$u(x, t, \varepsilon) < u^{(1)}(x, \varepsilon) + \overline{C}_n \varepsilon^{n+1}, \quad (x, t) \in [a, x^* - \Delta] \times \left[T_1' + \frac{1}{\varepsilon}, +\infty \right),$$

т.е. неравенство (4.26) выполняется для $T_2 = T_1' + 1/\varepsilon > 0$.

Доказательство неравенства (4.27) проводится аналогично.

Неравенства (4.28) можно доказать при помощи верхнего $\widehat{v}(x, t)$ и нижнего $\overline{v}(x, t)$ решений задачи (1.1), (1.2) следующего вида:

$$\widehat{v}(x, t) = u^{(2)}(x, \varepsilon) + \mu \exp(-\mu t), \quad \overline{v}(x, t) = u^{(1)}(x, \varepsilon) - \mu \exp(-\mu t),$$

где $\mu > 0$ — достаточно малое, но фиксированное при $\varepsilon \rightarrow 0$ число. При этом надо воспользоваться следствием 4.

Теорема 4 доказана.

§ 5. Предельный переход к стационарному решению при $t \rightarrow \infty$

Пусть выполнены условия (A1)–(A4).

5.1. Построение асимптотики специального вида. Рассмотрим функцию

$$U(x, \tau, \gamma, \varepsilon) = U^{(-)}(x, \gamma, \varepsilon) = \overline{u}_3^{(-)}(x, \varepsilon) + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i \widetilde{Q}_i^{(-)}(\tau, \gamma), \quad x \in [a, x_\gamma],$$

$$U(x, \tau, \gamma, \varepsilon) = U^{(+)}(x, \gamma, \varepsilon) = \overline{u}_3^{(+)}(x, \varepsilon) + \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i \widetilde{Q}_i^{(+)}(\tau, \gamma), \quad x \in [x_\gamma, b],$$

где $\overline{u}_3^{(\pm)}(x, \varepsilon)$ определены формулами (4.23),

$$\tau = \frac{x - x_\gamma}{\varepsilon}, \quad x_\gamma = \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i \lambda_i(\gamma), \quad \lambda_0(\gamma) = x^* - \gamma,$$

функции $\widetilde{Q}_i^{(\pm)}$ и $\lambda_i(\gamma)$ определим ниже, $\gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]$. Значение γ_0 мы уточним ниже, а пока будем считать, что точки $x^* - \gamma_0$ и $x^* + \gamma_0$ принадлежат интервалу $(x^{(-)}, x^{(+)})$, где $x^{(-)}$ и $x^{(+)}$ — точки из условия (A4).

Используя алгоритм метода пограничных функций [1], определим $\widetilde{Q}_i^{(\pm)}$, $i = \overline{0, 3}$, и $\lambda_i(\gamma)$, $i = 1, 2, 3$, так, чтобы равенства

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 U_{xx}^{(-)} - f(U^{(-)}, x, \varepsilon) &= 0, & x \in [a, x_\gamma], & \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0], \\ \varepsilon^2 U_{xx}^{(+)} - f(U^{(+)}, x, \varepsilon) &= 0, & x \in [x_\gamma, b], & \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0], \\ U^{(-)}(x_\gamma, \gamma, \varepsilon) &= U^{(+)}(x_\gamma, \gamma, \varepsilon) = 0, & \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0], \end{aligned}$$

выполнялись с точностью $O(\varepsilon^4)$, т.е. во всех приближениях по ε от нулевого до третьего порядка, а равенство

$$\varepsilon U_x^{(-)}(x_\gamma, \gamma, \varepsilon) = \varepsilon U_x^{(+)}(x_\gamma, \gamma, \varepsilon), \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0], \quad (5.1)$$

выполнялось во всех приближениях по ε до третьего порядка включительно, кроме, может быть, нулевого приближения.

Для функций $\tilde{Q}_0^{(\pm)}(\tau, \gamma)$ получаются такие же задачи, как и для функций $Q_0^{(\pm)}(\tau, \gamma)$ в доказательстве теоремы 3, но с той разницей, что в задаче (4.4), (4.5) для $Q_0^{(-)}$ и аналогичной задаче для $Q_0^{(+)}$ нужно γ заменить на $\lambda_0(\gamma)$. Поэтому для $\frac{\partial \tilde{Q}_0^{(\pm)}}{\partial \tau}(0, \gamma)$ имеют место выражения типа (4.8), и мы получаем равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \gamma) - \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \gamma) \\ &= \sqrt{2} \left(\left(\int_{\varphi_1(\lambda_0(\gamma))}^0 f(u, \lambda_0(\gamma), 0) du \right)^{1/2} - \left(\int_{\varphi_2(\lambda_0(\gamma))}^0 f(u, \lambda_0(\gamma), 0) du \right)^{1/2} \right), \end{aligned}$$

из которого при указанных ограничениях на γ_0 ($x^* \pm \gamma_0 \in (x^{(-)}, x^{(+)})$) в силу (A4) следуют неравенства

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \gamma) - \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \gamma) > 0 \quad \text{при } \gamma \in (0, \gamma_0], \\ & \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \gamma) - \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \gamma) < 0 \quad \text{при } \gamma \in [-\gamma_0, 0). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Тем самым (5.1) в нулевом приближении по ε , т.е. равенство

$$\frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \gamma) = \frac{\partial \tilde{Q}_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \gamma),$$

выполняется только при $\gamma = 0$.

Для $\tilde{Q}_1^{(-)}$ имеем задачу:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \tilde{Q}_1^{(-)} = f_u^{(-)}(\tau, \gamma) \tilde{Q}_1^{(-)} + f_1^{(-)}(\tau, \gamma), \quad \tau < 0, \\ & \tilde{Q}_1^{(-)}(0, \gamma) = -\varphi_{1x}(\lambda_0(\gamma)) \lambda_1(\gamma) - \bar{u}_1^{(-)}(\lambda_0(\gamma)), \quad \tilde{Q}_1^{(-)}(-\infty, \gamma) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_1^{(-)}(\tau, \gamma) &= f_u^{(-)}(\tau, \gamma) (\bar{u}_1^{(-)}(\lambda_0(\gamma)) + \varphi_{1x}(\lambda_0(\gamma))(\tau + \lambda_1(\gamma))) \\ &\quad + f_x^{(-)}(\tau, \gamma)(\tau + \lambda_1(\gamma)) + f_\varepsilon^{(-)}(\tau, \gamma). \end{aligned}$$

Обозначения $f_u^{(-)}(\tau, \gamma)$, $f_x^{(-)}(\tau, \gamma)$ и $f_\varepsilon^{(-)}(\tau, \gamma)$ здесь использованы для соответствующих производных функции $f(u, x, \varepsilon)$, вычисленных в точке $(\varphi_1(\lambda_0(\gamma)) + \tilde{Q}_0^{(-)}(\tau, \gamma), \lambda_0(\gamma), 0)$. Аналогичная задача имеет место для $\tilde{Q}_1^{(+)}$ при $\tau > 0$. Известно [1], что $\tilde{Q}_1^{(\pm)}$ однозначно определяются из этих задач, выражаются в явном виде и зависят линейно от неизвестной пока функции $\lambda_1(\gamma)$.

Из (5.1) в первом приближении по ε получаем равенство

$$\frac{\partial \tilde{Q}_1^{(-)}}{\partial \tau}(0, \gamma) + \varphi_{1x}(\lambda_0(\gamma)) = \frac{\partial \tilde{Q}_1^{(+)}}{\partial \tau}(0, \gamma) + \varphi_{2x}(\lambda_0(\gamma)).$$

Отсюда, используя явные выражения для $\tilde{Q}_1^{(\pm)}(\tau, \gamma)$, приходим к равенству

$$I(\gamma)\lambda_1(\gamma) = \Phi_1(\gamma), \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} I(\gamma) = & \left[\frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, \gamma) \right]^{-1} \int_{\varphi_1(\lambda_0(\gamma))}^0 f_x(u, \lambda_0(\gamma), 0) du \\ & + \left[\frac{\partial \tilde{Q}_0^{(+)}}{\partial \tau}(0, \gamma) \right]^{-1} \int_0^{\varphi_2(\lambda_0(\gamma))} f_x(u, \lambda_0(\gamma), 0) du, \end{aligned}$$

$\Phi_1(\gamma)$ – известная функция.

Заметим, что в силу условия (A2):

$$I(0) = \left[\frac{\partial \tilde{Q}_0^{(-)}}{\partial \tau}(0, 0) \right]^{-1} \frac{dJ}{dx}(x^*) < 0.$$

Возьмем γ_0 столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$I(\gamma) < 0, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]. \quad (5.4)$$

Теперь можно выбрать $\lambda_1(\gamma)$ так, чтобы (5.1) было выполнено в первом приближении по ε , т.е. чтобы было выполнено равенство (5.3). Для этого нужно положить

$$\lambda_1(\gamma) = \frac{\Phi_1(\gamma)}{I(\gamma)}.$$

Продолжая построение в соответствии с алгоритмом из [1], определим $\tilde{Q}_2^{(\pm)}$, λ_2 и $\tilde{Q}_3^{(\pm)}$, λ_3 , причем $\lambda_i(\gamma)$, $i = 2, 3$, будут найдены из условия, что (5.1) выполняется в i -м приближении по ε . Для $\lambda_i(\gamma)$, $i = 2, 3$, получаются уравнения типа (5.3), однозначно разрешимые в силу (5.4).

Итак, функция $U(x, \tau, \gamma, \varepsilon)$ полностью построена, причем функции $\tilde{Q}_i^{(\pm)}$ имеют экспоненциальные оценки типа (4.6), а $\tilde{Q}_0^{(\pm)}$ имеют также экспоненциальные оценки снизу типа (4.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что входящие в $U(x, \tau, \gamma, \varepsilon)$ слагаемые при $\gamma = 0$ представляют собой члены асимптотики (без пограничных членов в окрестности точек $x = a$ и $x = b$) для КСТС $u_s(x, \varepsilon)$ (см. § 1), которая построена в [1].

5.2. Построение параметрических барьеров. Используя введенную в п. 5.1 функцию $U(x, \tau, \gamma, \varepsilon)$, построим верхний параметрический барьер (ВПБ) $\tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon) = & \tilde{\beta}^{(-)}(x, \gamma, \varepsilon) = U(x, \tau_\beta, \gamma, \varepsilon) \\ & + \varepsilon^3 (1 + Q^{(-)}(\tau_\beta, \gamma)) + L_4^{(-)}(\xi_a, \varepsilon), \quad x \in [a, x_\beta], \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon) = & \tilde{\beta}^{(+)}(x, \gamma, \varepsilon) = U(x, \tau_\beta, \gamma, \varepsilon) \\ & + \varepsilon^3 (1 + Q^{(+)}(\tau_\beta, \gamma)) + P_4^{(+)}(\xi_b, \varepsilon) + v_\beta(\tau_\beta, \varepsilon), \quad x \in [x_\beta, b], \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $\tau_\beta = (x - x_\beta)/\varepsilon$, $x_\beta = x_\gamma - \varepsilon^3 \sigma$, $\gamma \in [0, \gamma_0]$, $\sigma > 0$.

Функция $U(x, \tau, \gamma, \varepsilon)$ определена в п. 5.1, причем $U = U^{(-)}(x, \gamma, \varepsilon)$ в (5.5) и $U = U^{(+)}(x, \gamma, \varepsilon)$ в (5.6), функции $L_4^{(-)}(\xi_a, \varepsilon)$ и $P_4^{(+)}(\xi_b, \varepsilon)$ заданы формулами (4.24), функция v_β будет выбрана ниже. Остановимся на построении функций $Q^{(\pm)}$ и выборе $\sigma > 0$.

Считая, что $\gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]$, определим функции $Q^\pm(\tau, \gamma)$ как решения следующих задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Q^{(-)} &= f_u^{(-)}(\tau, \gamma) Q^{(-)} + f_u^{(-)}(\tau, \gamma) (1 - \sigma \varphi_{1x}(\lambda_0(\gamma))) \\ &\quad - f_x^{(-)}(\tau, \gamma) \sigma - f_u^{(-)}(\gamma), \quad \tau < 0, \\ Q^{(-)}(0, \gamma) &= \varphi_{1x}(\lambda_0(\gamma)) \sigma, \quad Q^{(-)}(-\infty, \gamma) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Q^{(+)} &= f_u^{(+)}(\tau, \gamma) Q^{(+)} + f_u^{(+)}(\tau, \gamma) (1 - \sigma \varphi_{2x}(\lambda_0(\gamma))) \\ &\quad - f_x^{(+)}(\tau, \gamma) \sigma - f_u^{(+)}(\gamma) \quad \tau > 0, \\ Q^{(+)}(0, \gamma) &= \varphi_{2x}(\lambda_0(\gamma)) \sigma, \quad Q^{(+)}(+\infty, \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь $f_u^{(-)}(\gamma) \equiv f_u(\varphi_1(\lambda_0(\gamma)), \lambda_0(\gamma), 0)$; остальные обозначения в (5.7) – те же, что в п. 5.1. Аналогично, $f_u^{(+)}(\gamma) \equiv f_u(\varphi_2(\lambda_0(\gamma)), \lambda_0(\gamma), 0)$, а $f_u^{(+)}(\tau, \gamma)$ и $f_x^{(+)}(\tau, \gamma)$ обозначают производные функции f , вычисленные в точке $(\varphi_2(\lambda_0(\gamma)) + \tilde{Q}_0^{(+)}(\tau, \gamma), \lambda_0(\gamma), 0)$.

Как и при получении уравнения (5.3), можно показать, что

$$\frac{\partial Q^{(-)}}{\partial \tau}(0, \gamma) - \frac{\partial Q^{(+)}}{\partial \tau}(0, \gamma) = -I(\gamma) \sigma + \Phi(\gamma),$$

где $\Phi(\gamma)$ – известная функция. Возьмем столь большое $\sigma > 0$, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\partial Q^{(-)}}{\partial \tau}(0, \gamma) - \frac{\partial Q^{(+)}}{\partial \tau}(0, \gamma) > 0, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0], \quad (5.8)$$

что возможно в силу (5.4). Теперь функции $Q^{(\pm)}(\tau, \gamma)$ полностью определены.

Умножим $\tilde{Q}^{(\pm)}$, входящие в $U(x, \tau, \gamma, \varepsilon)$, а также $Q_i^{(\pm)}$, $L_4^{(-)}$ и $P_4^{(+)}$, входящие в (5.5) и (5.6), на соответствующие срезающие функции и определим функцию $v_\beta(\tau, \varepsilon)$, исходя из условия $\tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon) \in C(\overline{D} \times [0, \gamma_0])$, точно таким же способом, как мы определили функцию $v_{n\beta}$ в § 4 (см. доказательство теоремы 4). Тогда $v_\beta = O(\varepsilon^4)$. Итак, функция $\tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon)$ полностью определена.

Из (5.2) и (5.8) следует, что при достаточно малых ε

$$\tilde{\beta}_x^{(-)}(x_\beta, \gamma, \varepsilon) - \tilde{\beta}_x^{(+)}(x_\beta, \gamma, \varepsilon) \geq 0, \quad \gamma \in [0, \gamma_0]. \quad (5.9)$$

Кроме того, функция $\tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon)$ построена таким образом, что при достаточно малых ε выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \tilde{\beta}_{xx} - f(\tilde{\beta}, x, \varepsilon) &= -\varepsilon^3 f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon^4) < 0, \\ x &\in [a, x_\beta], \quad \gamma \in [0, \gamma_0], \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \tilde{\beta}_{xx} - f(\tilde{\beta}, x, \varepsilon) &= -\varepsilon^3 f_u(\varphi_2(x), x, 0) + O(\varepsilon^4) < 0, \\ x &\in [x_\beta, b], \quad \gamma \in [0, \gamma_0]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Наконец,

$$\tilde{\beta}_x(a, \gamma, \varepsilon) = \tilde{\beta}_x(b, \gamma, \varepsilon) = 0, \quad \gamma \in [0, \gamma_0]. \quad (5.12)$$

Соотношения (5.9)–(5.12) показывают, что $\tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon)$ при $\gamma \in [0, \gamma_0]$ и достаточно малых ε является ВПБ задачи (1.1), (1.2).

Аналогично функции $\tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon)$ определим функцию $\tilde{\alpha}(x, \gamma, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(x, \gamma, \varepsilon) &= U(x, \tau_\alpha, \gamma, \varepsilon) - \varepsilon^3(1 + Q^{(-)}(\tau_\alpha, \gamma)) + L_4^{(-)}(\xi_a, \varepsilon), \quad x \in [a, x_\alpha], \\ \tilde{\alpha}(x, \gamma, \varepsilon) &= U(x, \tau_\alpha, \gamma, \varepsilon) - \varepsilon^3(1 + Q^{(+)}(\tau_\alpha, \gamma)) \\ &\quad + P_4^{(+)}(\xi_b, \varepsilon) + v_\alpha(\tau_\alpha, \varepsilon), \quad x \in [x_\alpha, b], \end{aligned}$$

где $\tau_\alpha = (x - x_\alpha)/\varepsilon$, $x_\alpha = x_\gamma + \varepsilon^3\sigma$, $\gamma \in [-\gamma_0, 0]$.

Умножим функции $\tilde{Q}_i^{(\pm)}$, $Q^{(\pm)}$, $L_4^{(-)}$ и $P_4^{(+)}$ на соответствующие срезающие функции и определим функцию $v_\alpha(\tau_\alpha, \varepsilon)$ аналогично функции $v_\beta(\tau_\beta, \varepsilon)$.

Теперь нетрудно доказать, что $\tilde{\alpha}(x, \gamma, \varepsilon)$ при $\gamma \in [-\gamma_0, 0]$ (или, что то же самое, $\tilde{\alpha}(x, -\gamma, \varepsilon)$ при $\gamma \in [0, \gamma_0]$) и достаточно малых ε является НПБ (нижним параметрическим барьером) задачи (1.1), (1.2).

Для удобства записи введем обозначения:

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma) \equiv \tilde{\beta}(x, \gamma, \varepsilon), \quad \alpha_\varepsilon(x, \gamma) \equiv \tilde{\alpha}(x, -\gamma, \varepsilon), \quad \gamma \in [0, \gamma_0].$$

Рассмотрим свойства функций β_ε и α_ε .

Докажем, что для любого фиксированного $C > 0$ при достаточно малых ε

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) > u^{(1)}(x, \varepsilon) + C\varepsilon^4, \quad x \in \overline{D}, \quad (5.13)$$

где $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ – решение задачи (1.1), (1.2) из леммы 4.

Рассмотрим сначала отрезок $[a, x_\beta^0 - \delta]$, где $x_\beta^0 = x_{\gamma_0} - \varepsilon^3\sigma$, а $\delta > 0$ – сколько угодно малое, но фиксированное при $\varepsilon \rightarrow 0$ число. На этом отрезке в силу экспоненциальной оценки функции $\tilde{Q}_i^{(-)}$ и $Q^{(-)}$ при достаточно малых ε будут меньше любой степени ε , и поэтому, используя (5.5) и (4.25), получаем

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) - u^{(1)}(x, \varepsilon) = \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad x \in [a, x_\beta^0 - \delta], \quad (5.14)$$

откуда следует, что для любого фиксированного числа $C > 0$ при достаточно малых ε неравенство (5.13) выполняется для $x \in [a, x_\beta^0 - \delta]$.

Далее рассмотрим отрезок $[\tilde{x}, x_\beta^0]$, где $\tilde{x} = x_\beta^0 - k\varepsilon|\ln \varepsilon|$, $k > 0$ – число, которое выберем ниже. Так как $\tilde{Q}_0^{(-)}(\tau_\beta, \gamma_0)$ имеет экспоненциальную оценку снизу типа (4.7):

$$\tilde{Q}_0^{(-)}(\tau_\beta, \gamma_0) \geq C_2 \exp(\kappa_2 \tau_\beta),$$

то на отрезке $[\tilde{x}, x_\beta^0]$, т.е. при $-k|\ln \varepsilon| \leq \tau_\beta \leq 0$, имеем

$$\tilde{Q}_0^{(-)}(\tau_\beta, \gamma_0) \geq C_2 \varepsilon^{k\kappa_2}.$$

Возьмем $k > 0$ столь малым, что $m = k\kappa_2 < 1$. Тогда получим

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) - u^{(1)}(x, \varepsilon) \geq C_2 \varepsilon^m + O(\varepsilon), \quad x \in [\tilde{x}, x_\beta^0],$$

откуда следует (5.13) для $x \in [\tilde{x}, x_\beta^0]$.

На отрезке $[x_\beta^0 - \delta, \tilde{x}]$ имеем: $\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) = \varphi_1(x) + O(\varepsilon^M)$, где $0 < M < 1$, $u^{(1)}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) + O(\varepsilon)$. Поэтому, вычитая из (5.10) уравнение

$$\varepsilon^2 u_{xx}^{(1)} - f(u^{(1)}, x, \varepsilon) = 0,$$

нетрудно получить для функции

$$v = \beta_\varepsilon(x, \gamma_0) - u^{(1)}(x, \varepsilon) - C\varepsilon^4$$

с произвольной постоянной $C > 0$ следующее неравенство

$$\varepsilon^2 v_{xx} - [f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon^M)]v < -\varepsilon^3 f_u(\varphi_1(x), x, 0) + O(\varepsilon^4), \quad x \in [x_\beta^0 - \delta, \tilde{x}].$$

При достаточно малых ε из этого неравенства, неравенства $f_u(\varphi_1(x), x, 0) > 0$ (см. (A1)) и граничных неравенств

$$v|_{x=x_\beta^0 - \delta} > 0, \quad v|_{x=\tilde{x}} > 0,$$

вытекающих из того факта, что (5.13) выполняется в точках $x_\beta^0 - \delta$ и $\tilde{x}$, следует, что $v > 0$ при $x \in [x_\beta^0 - \delta, \tilde{x}]$, т.е. (5.13) выполняется на отрезке $[x_\beta^0 - \delta, \tilde{x}]$. Таким образом, (5.13) доказано для $x \in [a, x_\beta^0]$. На отрезке $[x_\beta^0, b]$ для любой фиксированной постоянной $C > 0$ при достаточно малых ε неравенство (5.13) также имеет место, поскольку на этом отрезке $\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) = \varphi_2(x) + \tilde{Q}_0^{(+)}(\tau_\beta, \gamma_0) + O(\varepsilon)$, $u^{(1)}(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) + O(\varepsilon)$ и $\varphi_2(x) + \tilde{Q}_0^{(+)}(\tau_\beta, \gamma_0) \geq 0$, а $\varphi_1(x) < 0$.

Итак, (5.13) доказано.

Аналогично (5.14) на отрезке $[x^* - \gamma_0/2, b]$ получается неравенство

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) - u^{(2)}(x, \varepsilon) = \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),$$

где $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ – решение задачи (1.1), (1.2) из леммы 4.

Отсюда следует, что для любого $C > 0$, не зависящего от ε , при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\beta_\varepsilon(x, \gamma_0) > u^{(2)}(x, \varepsilon) + C\varepsilon^4, \quad x \in \left[x^* - \frac{\gamma_0}{2}, b\right]. \quad (5.15)$$

Воспользуемся теперь теоремой 4, согласно которой для $n = 3$ и $\Delta = \gamma_0/2$ при достаточно малых ε существуют $T_2 = T_2(\gamma_0/2, 3, \varepsilon)$ и число $\overline{C}_3 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} u(x, T_2, \varepsilon) &< u^{(2)}(x, \varepsilon) + \overline{C}_3 \varepsilon^4, \quad x \in \left[x^* - \frac{\gamma_0}{2}, b\right], \\ u(x, T_2, \varepsilon) &< u^{(1)}(x, \varepsilon) + \overline{C}_3 \varepsilon^4, \quad x \in \left[a, x^* - \frac{\gamma_0}{2}\right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Поскольку число C в (5.13) и (5.15) можно взять равным $\overline{C}_3$ из (5.16), то из (5.13), (5.15) и (5.16), очевидно, следует, что при достаточно малых ε

$$u(x, T_2, \varepsilon) < \beta_\varepsilon(x, \gamma_0), \quad x \in \overline{D}. \quad (5.17)$$

Аналогично можно доказать неравенство

$$u(x, T_2, \varepsilon) > \alpha_\varepsilon(x, \gamma_0), \quad x \in \overline{D}. \quad (5.18)$$

Из (5.17) и (5.18) в силу теоремы 2 и следствия 3 получаем следующий результат.

ЛЕММА 5. Пусть выполнены условия (A1)–(A4). Тогда при достаточно малых ε имеют место следующие утверждения:

1. существует $T_3 = T_3(\varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_\varepsilon(x, 0) < u(x, t, \varepsilon) < \beta_\varepsilon(x, 0), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [T_3, +\infty); \quad (5.19)$$

2. существует стационарное решение $u_s(x, \varepsilon) \in C^2(\overline{D})$ задачи (1.1), (1.2), представляющее собой КСТС, т.е. удовлетворяющее предельному равенству (1.5), и такое, что

$$\alpha_\varepsilon(x, 0) < u_s(x, \varepsilon) < \beta_\varepsilon(x, 0), \quad x \in \overline{D}. \quad (5.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что для справедливости утверждения 2 леммы 5 не требуется условий (A3) и (A4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Функции, аналогичные $\alpha_\varepsilon(x, 0)$ и $\beta_\varepsilon(x, 0)$, были построены ранее в работе [18] для уравнения $\varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, \varepsilon)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^2$. Там же доказано (но другим способом, нежели у нас) утверждение о существовании КСТС в указанном уравнении при условиях типа (A1), (A2) в двумерном случае, а также представлен метод построения верхних и нижних решений произвольного порядка точности по ε путем модификации формальной асимптотики решения.

Иным способом существование КСТС $u_s(x, \varepsilon)$ в задаче (1.1), (1.2) доказано в [1], где построена и обоснована асимптотика произвольного порядка по ε для $u_s(x, \varepsilon)$.

Из работы [7] следует, что при достаточно малых ε задача (1.1), (1.2) не имеет других стационарных решений, лежащих между $\alpha_\varepsilon(x, 0)$ и $\beta_\varepsilon(x, 0)$, кроме $u_s(x, \varepsilon)$. Поэтому в [1], [6], [7] и лемме 5 речь идет об одном и том же стационарном решении задачи (1.1), (1.2).

5.3. Предельный переход при $t \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия (A1)–(A4). Тогда при достаточно малых ε для решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x, t, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon)\|_{C(\overline{D})} = 0, \quad (5.21)$$

где $u_s(x, \varepsilon)$ – стационарное решение задачи (1.1), (1.2) из леммы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функции

$$\begin{aligned} \widehat{v}_\varepsilon(x, t) &\equiv u_s(x, \varepsilon) + \theta(x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon \mu t), \\ \overline{v}_\varepsilon(x, t) &\equiv u_s(x, \varepsilon) - \theta(x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon \mu t), \end{aligned}$$

где $\theta(x, \varepsilon) \equiv \beta_\varepsilon(x, 0) - \alpha_\varepsilon(x, 0)$, функции β_ε и α_ε – те же, что в лемме 5, $\mu > 0$ – не зависящее от ε число, которое будет уточнено ниже.

Из (5.19) и (5.20) следует, что

$$\overline{v}_\varepsilon(x, 0) < u(x, T_3, \varepsilon) < \widehat{v}_\varepsilon(x, 0).$$

Далее, аналогично тому, как было установлено (4.34) в теореме 4, нетрудно доказать, что при достаточно малом μ (не зависящем от ε) и достаточно малых ε выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \widehat{v}_{\varepsilon xx} - \widehat{v}_{\varepsilon t} - f(\widehat{v}_{\varepsilon}, x, \varepsilon) &< 0, \\ \varepsilon^2 \overline{v}_{\varepsilon xx} - \overline{v}_{\varepsilon t} - f(\overline{v}_{\varepsilon}, x, \varepsilon) &> 0, \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty),\end{aligned}$$

причем в точках $x = x_\beta$ и $x = x_\alpha$ эти неравенства выполняются для предельных значений левых частей неравенств с одной и другой стороны от этих точек.

Кроме того, в силу (5.9) и аналогичного неравенства для $\alpha_\varepsilon(x, 0)$ в точке x_α функции $\widehat{v}_\varepsilon$ и $\overline{v}_\varepsilon$ удовлетворяют в точках x_β и x_α (т.е. в точках негладкости $\widehat{v}_\varepsilon$ и $\overline{v}_\varepsilon$) неравенствам типа (4.35) (с нужными знаками неравенств для верхнего и нижнего барьеров).

Наконец, $\widehat{v}_\varepsilon$ и $\overline{v}_\varepsilon$ удовлетворяют краевым условиям (1.2).

Из перечисленных фактов следует, что при достаточно малом μ и достаточно малых ε функции $\widehat{v}_\varepsilon(x, t - T_3)$ и $\overline{v}_\varepsilon(x, t - T_3)$ являются верхним и нижним барьерами для решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) при $t \geq T_3$, т.е.

$$\overline{v}_\varepsilon(x, t - T_3) < u(x, t, \varepsilon) < \widehat{v}_\varepsilon(x, t - T_3), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [T_3, +\infty). \quad (5.22)$$

Зафиксируем такое $\mu > 0$, чтобы при достаточно малых ε было выполнено (5.22). Из (5.22), очевидно, следует (5.21).

Теорема 5 доказана.

§ 6. Глобальная область влияния (основной результат)

Пусть при $\varepsilon \in (0, \varepsilon']$, где $\varepsilon' > 0$ – некоторое число, задача (1.1), (1.2) имеет стационарное решение $u_\varepsilon(x) \in C^2(\overline{D})$.

Введем множество $G(u_\varepsilon)$ следующим образом: $u_0(x, \varepsilon) \in G(u_\varepsilon)$, если найдется $\varepsilon'' \in (0, \varepsilon']$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon'']$ существует решение $u_\varepsilon(x, t) \in C^{1,0}(\overline{D} \times [0, +\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{D} \times (0, +\infty))$ задачи (1.1)–(1.3) и $\|u_\varepsilon(x, t) - u_\varepsilon(x)\|_{C(\overline{D})} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Заметим, что $u_\varepsilon(x) \in G(u_\varepsilon)$, а потому $G(u_\varepsilon)$ всегда непусто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $G(u_\varepsilon)$ назовем *глобальной областью влияния* стационарного решения $u_\varepsilon(x)$ задачи (1.1), (1.2).

Теперь, используя замечание 2, сделанное после леммы 5, теорему 5 можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 5'. Пусть выполнены условия (A1) и (A2). Тогда при достаточно малых ε существует стационарное решение $u_s(x, \varepsilon)$ из $C^2(\overline{D})$ задачи (1.1), (1.2), представляющее собой КСТС, т.е. удовлетворяющее предельному равенству (1.5). Глобальной области влияния $G(u_s)$ этого стационарного решения принадлежат все функции $u_0(x)$, удовлетворяющие условиям (A3) и (A4).

Небольшое усложнение доказательства (см. §8) позволяет получить более сильный результат в отношении $G(u_s)$. При этом нам понадобится еще одно требование, относящееся к функции $J(x)$, определенной формулой (1.4), а именно

(A5) пусть множество D_0 всех точек x , в которых $J(x) = 0$, состоит из конечного числа отрезков и (или) точек.

Таким образом, требование (A5) исключает весьма специальный случай, когда D_0 состоит из бесконечного числа непересекающихся отрезков и (или) точек. Заметим, что в силу условия (A2) множество D_0 непусто и множество $\overline{D} \setminus D_0$ также непусто.

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены условия (A1) и (A2). Тогда при достаточно малых ε существует стационарное решение $u_s(x, \varepsilon)$ из $C^2(\overline{D})$ задачи (1.1), (1.2), представляющее собой КСТС, т.е. удовлетворяющее предельному равенству (1.5). При выполнении условия (A5) в отношении глобальной области влияния $G(u_s)$ этого решения справедливы следующие утверждения:

1. функция $u_0(x, \varepsilon) \equiv u_0(x)$ принадлежит $G(u_s)$, если она удовлетворяет условиям (A3) и (A6) существуют $x^{(-)} \in (a, x^*)$ и $x^{(+)} \in (x^*, b)$ такие, что

$$u_0(x^{(-)}) < 0 \text{ и } u_0(x) < 0 \text{ во всех точках } x \in [a, x^*), \text{ где } J(x) \leq 0,$$

$$u_0(x^{(+)}) > 0 \text{ и } u_0(x) > 0 \text{ во всех точках } x \in (x^*, b], \text{ где } J(x) \geq 0;$$
2. $u_0(x, \varepsilon) \in G(u_s)$, если найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ $u_0(x, \varepsilon) \in C_B^2(\overline{D})$ (см. (A3)) и существуют $\overline{u}_0(x)$ и $\widehat{u}_0(x)$, удовлетворяющие условиям (A3), (A6) и такие, что

$$\overline{u}_0(x) < u_0(x, \varepsilon) < \widehat{u}_0(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1].$$

Утверждение 1 теоремы 6 доказано в § 8, утверждение 2 является следствием утверждения 1 и результатов работ [12], [13].

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть выполнены условия (A1)–(A3) и (A2)' $J(x) > 0$ при $x \in [a, x^*)$, $J(x) < 0$ при $x \in (x^*, b]$; (A6)' существуют $x^{(-)} \in (a, x^*)$ и $x^{(+)} \in (x^*, b)$ такие, что $u_0(x^{(-)}) < 0$, $u_0(x^{(+)}) > 0$.

Тогда $u_0(x) \in G(u_s)$.

Сформулируем также теорему для случая $u_0(x) \notin G(u_s)$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены условия (A1)–(A3) и одно из следующих условий:

- (A7) $u_0(x) > 0$, $x \in [a, x^*)$ ($u_0(x) < 0$, $x \in [x^*, b]$);
- (A7)' существует $x_\ell \in [a, x^*)$ такое, что $u_0(x_\ell) > 0$ и $J(x_\ell) < 0$ (существует $x_r \in (x^*, b]$ такое, что $u_0(x_r) < 0$ и $J(x_r) > 0$).

Тогда существуют $\eta > 0$, $T \geq 0$ и $\overline{x} \in [a, b]$ такие, что при достаточно малых ε

$$|u(\overline{x}, t, \varepsilon) - u_s(\overline{x}, \varepsilon)| \geq \eta, \quad t \in [T, +\infty),$$

т.е. $u_0(x) \notin G(u_s)$.

Утверждение теоремы 7 непосредственно следует из леммы 8 (см. § 8).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Представленный в работе метод позволяет получить результаты, относящиеся к глобальным областям влияния стационарных решений $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ и $u^{(2)}(x, \varepsilon)$ задачи (1.1), (1.2), которые не имеют внутренних переходных слоев (см. лемму 4).

Рассмотрим, например, случай, когда выполнены условия (A1), (A3) и условие (A2)' из следствия 5. Оказывается, что в этом случае функция $u_0(x)$ принадлежит глобальной области влияния решения $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ ($u^{(2)}(x, \varepsilon)$), если она удовлетворяет условию

$$u_0(x) < 0, \quad x \in [x^*, b] \quad (\text{соответственно } u_0(x) > 0, \quad x \in [a, x^*]). \quad (6.1)$$

Это утверждение можно доказать на основе лемм 7 и 8 (см. § 8). Оно, как и теорема 7, показывает, что множество начальных функций, удовлетворяющих условиям (A3), (A6), достаточно полно характеризует глобальную область влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$.

В особенности это касается случая, когда наряду с условиями (A1) и (A2) выполнено условие (A2)' (достаточно сравнить условие (A6)' из следствия 5 и (6.1)). Вместе с тем мы не можем утверждать, что теоремы 6, 7 полностью снимают вопрос о глобальной области влияния КСТС $u_s(x, \varepsilon)$, так как, например, они не дают ответа на вопрос о принадлежности $u_0(x)$ глобальной области влияния, если $u_0(x) \leq 0, x \in [x^*, b]$ (или $u_0(x) \geq 0, x \in [a, x^*]$).

§ 7. Доказательство теоремы 2

Без ограничения общности можно считать, что $t_0 = 0$ (если $t_0 \neq 0$, то нужно перейти к задаче для функции $v(x, t) \equiv u(x, t + t_0)$).

Пусть $\hat{\gamma} \in [\gamma_1, \gamma_2]$ фиксировано. Положим

$$T_\beta = \frac{2(\gamma_2 - \gamma_1)}{\delta} \sup_{\overline{D} \times [\gamma_1, \gamma_2]} \left| \frac{\partial \beta}{\partial \gamma}(x, \gamma) \right|, \quad (7.1)$$

где $\delta > 0$ взято из условия 3° определения параметрических барьеров. Аналогично, заменив $\frac{\partial \beta}{\partial \gamma}$ на $\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}$, введем T_α и положим

$$t_1 = \max\{T_\beta, T_\alpha\}. \quad (7.2)$$

Введем функции:

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, t) &= \beta(x, \gamma(t)), \quad \bar{v}(x, t) = \alpha(x, \gamma(t)), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, t_1], \\ \gamma(t) &= \bar{\gamma} + \frac{t}{t_1}(\hat{\gamma} - \bar{\gamma}), \quad t \in [0, t_1]. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Докажем, что при выполнении условий теоремы 2 выполняются неравенства

$$\bar{v}(x, t) < u(x, t) < \hat{v}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, t_1], \quad (7.4)$$

$$\bar{v}(x, t_1) < u(x, t) < \hat{v}(x, t_1), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [t_1, +\infty). \quad (7.5)$$

Из (7.5) в силу (7.3) непосредственно следует (3.1), т.е. утверждение теоремы 2.

Мы докажем (7.4). Неравенства (7.5) можно доказать аналогичным образом, опираясь на неравенства (7.4), взятые при $t = t_1$.

В силу условия 3 данной теоремы и (7.3) (напомним, что $t_0 = 0$) выполнены неравенства

$$\bar{v}(x, 0) < u(x, 0) < \hat{v}(x, 0), \quad x \in \bar{D}.$$

Поэтому если (7.4) не выполнено, то существует $T \in (0, t_1]$ такое, что

$$\bar{v}(x, t) < u(x, t) < \hat{v}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, T), \quad (7.6)$$

$$\exists P \in \bar{D}: \hat{v}(P, T) = u(P, T) \quad (7.7)$$

$$\text{либо } \bar{v}(P, T) = u(P, T).$$

Для определенности будем считать, что выполнено (7.7).

Введем функцию

$$w(x, t) = (\hat{v}(x, t) - u(x, t)) \exp(-At),$$

где A — положительное число, которое будет выбрано ниже.

Простые вычисления с учетом условий 3°, 4° определения параметрических барьеров, (7.1) и (7.2) приводят к следующим соотношениям для функции w :

$$\varepsilon^2 w_{xx} + c(x, t)w - \frac{\partial w}{\partial t} \leq -\frac{\delta}{2} \exp(-At), \quad (x, t) \in \bar{D} \times (0, T], \quad (7.8)$$

$$w_x(a, t) \leq 0 \leq w_x(b, t), \quad t \in (0, T], \quad (7.9)$$

где

$$c(x, t) \equiv -A - \int_0^1 f_u(u + s(\hat{v} - u), x) ds,$$

причем для $x = a$, $x = b$ и на кривых $x = x_i(\gamma(t))$ неравенство (7.8) выполняется для предельных значений левой части неравенства. Выберем $A > 0$ столь большим, что

$$c(x, t) < 0, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, T]. \quad (7.10)$$

Из (7.6), (7.7) следует:

$$w(x, t) > 0, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, T), \quad (7.11)$$

$$\exists P \in \bar{D}: w(P, T) = 0. \quad (7.12)$$

Введем обозначения

$$\bar{x}_i(t) \equiv x_i(\gamma(t)), \quad i = 1, \dots, n; \quad \bar{x}_0(t) \equiv a, \quad \bar{x}_{n+1}(t) \equiv b.$$

Возможны два случая: либо точка P совпадает с $\bar{x}_i(T)$ при некотором i , $1 \leq i \leq n$, либо $P \neq \bar{x}_i(T)$ ни при каком i от 1 до n .

Пусть $P = \bar{x}_i(T)$ при некотором i , причем $1 \leq i \leq n$. Возьмем $\rho > 0$ настолько малым, что $\bar{x}_j(T) \notin D_\rho \equiv (P - \rho, P + \rho)$ при $j \neq i$, $j = 0, 1, \dots, n + 1$. Введем обозначения

$$W^{(-)}(t) \equiv w(\bar{x}_i(t) - 0, t), \quad W^{(+)}(t) \equiv w(\bar{x}_i(t) + 0, t).$$

Заметим, что в силу условия 1° определения параметрических барьеров

$$W^{(-)}(t) = W^{(+)}(t), \quad t \in [0, T], \quad (7.13)$$

а следствием (7.11), (7.12) является неравенство

$$W_t^{(\pm)}(T) \leq 0. \quad (7.14)$$

Докажем, что

$$w_t^{(-)} \equiv \frac{\partial w}{\partial t}(P - 0, T) \leq 0, \quad w_t^{(+)} \equiv \frac{\partial w}{\partial t}(P + 0, T) \leq 0. \quad (7.15)$$

При этом мы будем пользоваться тем, что в силу условия 2° определения ВПБ

$$\frac{\partial w}{\partial x}(P - 0, T) \equiv w_x^{(-)} \geq w_x^{(+)} \equiv \frac{\partial w}{\partial x}(P + 0, T). \quad (7.16)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\frac{d\bar{x}_i}{dt}(T) = 0$. Так как

$$W_t^{(\pm)}(T) = w_x^{(\pm)} \frac{d\bar{x}_i}{dt}(T) + w_t^{(\pm)}, \quad (7.17)$$

то в данном случае $w_t^{(\pm)} = W_t^{(\pm)}(T)$, и поэтому неравенства (7.15) выполняются в силу (7.14).

Пусть теперь $\frac{d\bar{x}_i}{dt}(T) > 0$. Воспользуемся тем, что в силу (7.11), (7.12) $w_x^{(+)} \geq 0$. Тогда из (7.17) и (7.14) получим

$$w_t^{(+)} \leq 0. \quad (7.18)$$

Из (7.13) и (7.17) следует, что

$$w_t^{(-)} = w_t^{(+)} - \frac{d\bar{x}_i}{dt}(T)(w_x^{(-)} - w_x^{(+)}).$$

Отсюда в силу (7.18) и (7.16) получаем

$$w_t^{(-)} \leq 0,$$

и тем самым (7.15) доказано.

Случай $\frac{d\bar{x}_i}{dt}(T) < 0$ рассматривается аналогично.

Выберем теперь $\rho > 0$ столь малым, что

$$\varepsilon^2 \bar{w}_{xx} + \bar{c}(x) \bar{w} < -\frac{\delta}{4} \exp(-AT) < 0, \quad x \in D_\rho \setminus P, \quad (7.19)$$

где $\bar{w}(x) \equiv w(x, T)$, $\bar{c}(x) \equiv c(x, T) < 0$. Это можно сделать в силу (7.8), (7.15) и условия 2° определения ВПБ. Из принципа максимума для слабых решений эллиптических уравнений [19] следует, что (7.16), (7.19) и неравенство $\bar{w}(x) \geq 0$, справедливое при $x \in D_\rho$ в силу (7.11), противоречат нашему предположению $w(P) = 0$ в точке $P = \bar{x}_i(T)$.

Если предположить, что точка P в (7.7) не совпадает ни с одной из точек $\bar{x}_i(T)$, $i = 1, \dots, n$, то противоречие можно получить аналогичным образом с помощью классического принципа максимума для решений эллиптических уравнений. Полученное противоречие доказывает справедливость (7.4).

Теорема 2 доказана.

§ 8. Доказательство теоремы 6

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия (A1), (A3), и пусть существует отрезок $D^{(-)} = [x_1, x_2]$ ($D^{(+)} = [x_3, x_4]$) такой, что $a < x_1 < x_2 < b$ ($a < x_3 < x_4 < b$), $u_0(x_2) < 0$ ($u_0(x_3) > 0$) и $J(x) > 0$ при $x \in D^{(-)}$ ($J(x) < 0$ при $x \in D^{(+)}$). Тогда $\forall \eta > 0$ при достаточно малых $\varepsilon \exists T = T(\eta, \varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + \eta, & (x, t) &\in D^{(-)} \times [T, +\infty) \\ (u(x, t, \varepsilon) &> \varphi_2(x) - \eta, & (x, t) &\in D^{(+)} \times [T, +\infty)). \end{aligned} \quad (8.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение леммы, т.е. утверждение, относящееся к неравенству (8.1). Второе утверждение (в скобках) доказывается аналогично.

Пусть $\Delta > 0$ – число из следствия 1 (§2) для $x^{(-)} = x_2$, которое мы уменьшим, если потребуется, так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} a &< x_1 - \Delta < x_1 + \Delta < x_2 - \Delta < x_2 + \Delta < b, \\ u_0(x) &< 0 & \text{при } x \in [x_2 - \Delta, x_2 + \Delta], \\ J(x) &> 0 & \text{при } x \in [x_1 - \Delta, x_2 + \Delta]. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Введем функцию

$$\beta(x, \mu, \nu) = \varphi_1(x) + \mu + Q_0^{(1)}(\tau_1, \nu) + \mu Q_1^{(1)}(\tau_1, \nu) + Q_0^{(2)}(\tau_2) + \mu Q_1^{(2)}(\tau_2), \quad x \in [\nu, x_2 + \Delta],$$

где $\mu > 0$ – число, которое уточним ниже, $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$, $\nu_1 = x_1 - \Delta$, $\nu_2 = x_2 - \Delta$, $\tau_1 = (x - \nu)/\varepsilon$, $\tau_2 = (x - (x_2 + \Delta))/\varepsilon$, а функции $Q_i^{(j)}$ ($i = 0, 1$; $j = 1, 2$) определим следующим образом.

Функция $Q_0^{(1)}(\tau_1, \nu)$ является решением задачи (ν играет роль параметра, $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^{(1)}}{\partial \tau_1^2} &= f\left(\varphi_1(\nu) + Q_0^{(1)}, \nu, 0\right), & \tau_1 &> 0, \\ Q_0^{(1)}(0, \nu) &= \varphi_2(\nu) - \varphi_1(\nu), & Q_0^{(1)}(+\infty, \nu) &= 0. \end{aligned}$$

Так как в силу (8.2) $J(\nu) > 0$ при $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$, то функция $Q_0^{(1)}(\tau_1, \nu)$ определяется однозначно, является положительной монотонно убывающей функцией τ_1 при

$\tau_1 \geq 0$ и имеет равномерные по $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ экспоненциальные оценки сверху и снизу типа (4.6), (4.7).

Функцию $Q_1^{(1)}(\tau_1, \nu)$ определим как решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_1^{(1)}}{\partial \tau_1^2} &= f_u(\tau_1, \nu) Q_1^{(1)} + [f_u(\tau_1, \nu) - \bar{f}_u(\nu)], \quad \tau_1 > 0, \\ Q_1^{(1)}(0, \nu) &= 0, \quad Q_1^{(1)}(+\infty, \nu) = 0, \end{aligned}$$

где $f_u(\tau, \nu) = f_u(\varphi_1(\nu) + Q_0^{(1)}(\tau, \nu), \nu, 0)$, $\bar{f}_u(\nu) = f_u(\varphi_1(\nu), \nu, 0)$. Функция $Q_1^{(1)}(\tau_1, \nu)$ допускает явное представление и имеет равномерную по $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ экспоненциальную оценку типа (4.6).

Функции $Q_i^{(2)}(\tau_2)$, $\tau_2 \leq 0$, $i = 0, 1$, определяются аналогично функциям $Q_i^{(2)}$ и обладают аналогичными свойствами.

Умножим функции $Q_i^{(j)}$ на соответствующие срезающие функции.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем на протяжении всего параграфа, не оговаривая каждый раз это обстоятельство, будем считать, что функции, зависящие от растянутых переменных (Q - и P -функции), умножены на соответствующие срезающие функции.

По самому построению функция $\beta(x, \mu, \nu)$ удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon^2 \beta_{xx} - f(\beta, x, \varepsilon) = -\mu \bar{f}_u(x) + O(\varepsilon) + O(\mu^2), \quad x \in [\nu, x_2 + \Delta], \quad \nu \in [\nu_1, \nu_2],$$

откуда следует, что существует постоянная $C_0 > 0$, не зависящая от ε , μ и ν , такая, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\varepsilon^2 \beta_{xx} - f(\beta, x, \varepsilon) < -C_0 \mu, \quad x \in [\nu, x_2 + \Delta], \quad \nu \in [\nu_1, \nu_2]. \quad (8.3)$$

Используя экспоненциальные оценки функций $Q_i^{(j)}$, нетрудно доказать, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε имеет место неравенство

$$\beta(x, \mu, \nu) > \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in [\nu, x_2 + \Delta], \quad \nu \in [\nu_1, \nu_2]. \quad (8.4)$$

Отметим также очевидные равенства

$$\beta(x, \mu, \nu)|_{x=\nu} = \varphi_2(\nu) + \mu, \quad \beta(x, \mu, \nu)|_{x=x_2+\Delta} = \varphi_2(x_2 + \Delta) + \mu, \quad \nu \in [\nu_1, \nu_2], \quad (8.5)$$

и воспользуемся следствиями 1 и 2 из леммы 3, согласно которым существует $T_0 = T_0(\mu/2) > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, T_0, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \frac{\mu}{2}, \quad x \in [x_2 - \Delta, x_2 + \Delta], \quad (8.6)$$

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \mu, \quad (x, t) \in \overline{D} \times [T_0, +\infty). \quad (8.7)$$

Введем функцию

$$w(x, t, \mu, \varepsilon) = [\beta(x, \mu, \nu(t)) - u(x, t, \varepsilon)] \exp(-A(t - T_0)), \\ x \in [\nu(t), x_2 + \Delta], \quad t \in [T_0, T],$$

где

$$\nu(t) = \nu_2 + \frac{t - T_0}{T - T_0}(\nu_1 - \nu_2),$$

а величины A и $T = T(\mu, \varepsilon)$ уточним ниже. Очевидно, что

$$\nu_1 \leq \nu(t) \leq \nu_2 \quad \text{при} \quad t \in [T_0, T], \quad \nu(T_0) = \nu_2, \quad \nu(T) = \nu_1.$$

Используя (8.3), нетрудно получить неравенство

$$\varepsilon^2 w_{xx} - w_t - Bw < \left(-C_0 \mu - \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \cdot \frac{\nu_1 - \nu_2}{T - T_0} \right) \exp(-A(t - T_0)), \\ x \in [\nu(t), x_2 + \Delta], \quad t \in [T_0, T],$$

где $B = B(x, t, \varepsilon, \mu) = A + \int_0^1 f_u(u + s(\beta - u), x, \varepsilon) ds$ и, следовательно, $B > 0$, если взять достаточно большое $A > 0$.

Из вида $\beta(x, \mu, \nu)$ следует, что $\frac{\partial \beta}{\partial \nu}$ имеет оценку

$$\left| \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \right| \leq \frac{C_1}{\varepsilon},$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от ε , ν и μ (для ограниченного интервала изменения μ). Поэтому если взять $T = T(\mu, \varepsilon)$ такое, что

$$T > T_0 + \frac{C_1(\nu_2 - \nu_1)}{C_0 \mu \varepsilon},$$

то для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε будет выполнено неравенство

$$\varepsilon^2 w_{xx} - w_t - Bw < 0, \quad x \in [\nu(t), x_2 + \Delta], \quad t \in [T_0, T]. \quad (8.8)$$

Из (8.4) и (8.6) имеем:

$$w(x, T_0, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in [\nu(T_0), x_2 + \Delta], \quad (8.9)$$

а из (8.5) и (8.7) получаем:

$$w(x, t, \mu, \varepsilon)|_{x=\nu(t)} > 0, \quad w(x, t, \mu, \varepsilon)|_{x=x_2+\Delta} > 0, \quad t \in [T_0, T]. \quad (8.10)$$

Из (8.8)–(8.10) очевидным образом следует, что

$$w(x, t, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in [\nu(t), x_2 + \Delta], \quad t \in [T_0, T],$$

в частности, при $t = T$ имеем неравенство

$$w(x, T, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in [\nu(T), x_2 + \Delta] = [\nu_1, x_2 + \Delta] = [x_1 - \Delta, x_2 + \Delta],$$

откуда получаем

$$u(x, T, \varepsilon) < \beta(x, \mu, \nu(T)) = \beta(x, \mu, \nu_1), \quad x \in [x_1 - \Delta, x_2 + \Delta]. \quad (8.11)$$

Из (8.5) и (8.7) следует, что

$$u(x_1 - \Delta, t, \varepsilon) < \beta(x_1 - \Delta, \mu, \nu_1), \quad t \in [T, +\infty), \quad (8.12)$$

$$u(x_2 + \Delta, t, \varepsilon) < \beta(x_2 + \Delta, \mu, \nu_1), \quad t \in [T, +\infty). \quad (8.13)$$

Неравенства (8.11)–(8.13) и (8.3), взятое при $\nu = \nu_1$, показывают, что функция $\beta(x, \mu, \nu_1)$ является стационарным верхним барьером для решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $(x, t) \in [x_1 - \Delta, x_2 + \Delta] \times [T, +\infty)$, т.е.

$$u(x, t, \varepsilon) < \beta(x, \mu, \nu_1), \quad (x, t) \in [x_1 - \Delta, x_2 + \Delta] \times [T, +\infty). \quad (8.14)$$

Рассматривая выражение для $\beta(x, \mu, \nu_1)$ и учитывая экспоненциальные оценки функций $Q_i^{(j)}$, приходим к выводу, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε выполнено неравенство

$$\beta(x, \mu, \nu_1) < \varphi_1(x) + \frac{3}{2}\mu, \quad x \in D^{(-)} = [x_1, x_2]. \quad (8.15)$$

Возьмем теперь столь малое $\eta > 0$, чтобы для $\mu = \eta/2$ при достаточно малых ε были выполнены неравенства (8.14) и (8.15).

Тогда из (8.14) и (8.15) получим неравенство (8.1):

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in D^{(-)} \times [T, +\infty).$$

Лемма 6 доказана.

В следующей лемме содержится такое же утверждение, как и в лемме 6, но для случая, когда $x_1 = a$ ($x_4 = b$).

ЛЕММА 7. Пусть выполнены условия (A1), (A3), и пусть существует x_2 (x_3) такое, что $a < x_2 < b$ ($a < x_3 < b$), $u_0(x_2) < 0$ ($u_0(x_3) > 0$) и $J(x) > 0$ при $x \in [a, x_2]$ ($J(x) < 0$ при $x \in [x_3, b]$). Тогда $\forall \eta > 0$ при достаточно малых $\varepsilon \exists T_1 = T_1(\eta, \varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + \eta, & (x, t) &\in [a, x_2] \times [T_1, +\infty) \\ (u(x, t, \varepsilon) &> \varphi_2(x) - \eta, & (x, t) &\in [x_3, b] \times [T_1, +\infty)). \end{aligned} \quad (8.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только первое утверждение, т.е. относящееся к неравенству (8.16).

Как и в доказательстве леммы 6, введем функцию $\beta(x, \mu, \nu)$ с тем лишь отличием, что теперь $\nu_1 = a$. С помощью этой функции так же, как при доказательстве леммы 6, для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε приходим к неравенству (8.11), которое теперь имеет вид

$$u(x, T, \varepsilon) < \beta(x, \mu, a), \quad x \in [a, x_2 + \Delta], \quad (8.17)$$

и неравенству (8.13), которое теперь имеет вид

$$u(x_2 + \Delta, t, \varepsilon) < \beta(x_2 + \Delta, \mu, a), \quad t \in [T, +\infty), \quad (8.18)$$

где $T = T(\mu, \varepsilon) > 0$.

Возьмем произвольное $\eta > 0$ и положим

$$\eta_0 = \min\{\eta, \varphi_2(a) - \varphi_1(a)\}.$$

Введем функцию

$$\tilde{\beta}(x, \mu, \gamma) = \varphi_1(x) + \mu + \tilde{Q}_0(\tau_1, \gamma) + \mu \tilde{Q}_1(\tau_1, \gamma) + \overset{(2)}{Q}_0(\tau_2) + \mu \overset{(2)}{Q}_1(\tau_2), \quad x \in [a, x_2 + \Delta], \quad (8.19)$$

где $\tau_1 = (x - a)/\varepsilon$, $\gamma \in [0, \gamma_0]$, $\gamma_0 = \varphi_2(a) - \varphi_1(a) - \eta_0/2$, функции $\overset{(2)}{Q}_i(\tau_2)$, $i = 0, 1$, и число $\mu > 0$ — те же самые, что и в выражении для $\beta(x, \mu, \nu)$, а функции $\tilde{Q}_i(\tau_1, \gamma)$ определим следующим образом.

Функция $\tilde{Q}_0(\tau_1, \gamma)$ является решением задачи (γ играет роль параметра, $\gamma \in [0, \gamma_0]$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{Q}_0}{\partial \tau_1^2} &= f(\varphi_1(a) + \tilde{Q}_0, a, 0), \quad \tau_1 > 0, \\ \tilde{Q}_0(0, \gamma) &= \varphi_2(a) - \varphi_1(a) - \gamma, \quad \tilde{Q}_0(+\infty, \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (8.20)$$

При любом $\gamma \in [0, \gamma_0]$ функция $\tilde{Q}_0(\tau_1, \gamma)$ положительна, монотонно убывает при $\tau_1 \geq 0$ и имеет равномерные по $\gamma \in [0, \gamma_0]$ экспоненциальные оценки сверху и снизу типа (4.6), (4.7). Из (8.20) следует, что

$$\frac{\partial \tilde{Q}_0}{\partial \tau_1}(0, \gamma) = - \left(2 \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a) - \gamma} f(u, a, 0) du \right)^{1/2} \equiv -\sqrt{2} J_\gamma(a).$$

Так как по условию леммы

$$J_0(a) = (J(a))^{1/2} = \left(\int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} f(u, a, 0) du \right)^{1/2} > 0$$

и выполнено (A1), то $J_\gamma(a) > 0$ при $\gamma \in [0, \gamma_0]$, и поэтому

$$\frac{\partial \tilde{Q}_0}{\partial \tau_1}(0, \gamma) \leq -k < 0 \quad \text{при } \gamma \in [0, \gamma_0], \quad (8.21)$$

где $k = k(\gamma_0) > 0$ – некоторая постоянная.

Заметим, что

$$\tilde{Q}_0(\tau_1, 0) = \overset{(1)}{Q}_0(\tau_1, a), \quad (8.22)$$

где $\overset{(1)}{Q}_0(\tau_1, a)$ – функция, входящая в выражение для $\beta(x, \mu, \nu)$ при $\nu = a$.

Функция $\tilde{Q}_1(\tau_1, \gamma)$ определяется аналогично функции $\overset{(1)}{Q}_1(\tau_1, \nu)$ из выражения для $\beta(x, \mu, \nu)$, в частности

$$\tilde{Q}_1(\tau_1, 0) = \overset{(1)}{Q}_1(\tau_1, a). \quad (8.23)$$

В силу (8.22) и (8.23)

$$\tilde{\beta}(x, \mu, 0) = \beta(x, \mu, a),$$

и поэтому неравенство (8.17) можно переписать в виде

$$u(x, T, \varepsilon) < \tilde{\beta}(x, \mu, 0), \quad x \in [a, x_2 + \Delta]. \quad (8.24)$$

Из (8.21) следует, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε имеет место неравенство

$$\tilde{\beta}_x(a, \mu, \gamma) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \tilde{Q}_0}{\partial \tau_1}(0, \gamma) + \mu \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial \tau_1}(0, \gamma) \right] + O(1) < 0, \quad \gamma \in [0, \gamma_0]. \quad (8.25)$$

Кроме того, по самому построению для функции $\tilde{\beta}(x, \mu, \gamma)$ для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε имеет место неравенство вида (8.3):

$$\varepsilon^2 \tilde{\beta}_{xx} - f(\tilde{\beta}, x, \varepsilon) < -\tilde{C}_0 \mu, \quad x \in [a, x_2 + \Delta], \quad \gamma \in [0, \gamma_0], \quad (8.26)$$

где $\tilde{C}_0 > 0$ – не зависящая от ε , μ и γ постоянная, а также очевидное равенство

$$\tilde{\beta}(x_2 + \Delta, \mu, \gamma) = \varphi_2(x_2 + \Delta) + \mu = \beta(x_2 + \Delta, \mu, a), \quad \gamma \in [0, \gamma_0]. \quad (8.27)$$

Введем функцию

$$\tilde{w}(x, t, \mu, \varepsilon) = [\tilde{\beta}(x, \mu, \gamma(t)) - u(x, t, \varepsilon)] \exp(-\tilde{A}(t - T)), \quad (x, t) \in [a, x_2 + \Delta] \times [T, T_1],$$

где

$$\gamma(t) = \frac{t - T}{T_1 - T} \gamma_0,$$

а величины $\tilde{A}$ и T_1 выбираются далее аналогично тому, как выбирались A и T в доказательстве леммы 6. Заметим, что $\gamma(T) = 0$, $\gamma(T_1) = \gamma_0$.

Используя (8.26), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \tilde{w}_{xx} - \tilde{w}_t - \tilde{B} \tilde{w} &< \left(-\tilde{C}_0 \mu - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \gamma} \cdot \frac{\gamma_0}{T_1 - T} \right) \exp(-\tilde{A}(t - T)), \\ (x, t) &\in [a, x_2 + \Delta] \times [T, T_1], \end{aligned}$$

где $\tilde{B} = \tilde{A} + \int_0^1 f_u(u + s(\tilde{\beta} - u), x, \varepsilon) ds > 0$ при достаточно большом $\tilde{A} > 0$.

Производная $\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \gamma}$ имеет оценку $\left| \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \gamma} \right| \leq \tilde{C}_1$, где $\tilde{C}_1 > 0$ – постоянная, не зависящая от ε , γ и μ (для ограниченного интервала изменения μ). Поэтому если взять $T_1 = T_1(\mu, \varepsilon)$ такое, что

$$T_1 > T + \frac{\tilde{C}_1 \gamma_0}{\tilde{C}_0 \mu},$$

то будет выполнено неравенство

$$\varepsilon^2 \tilde{w}_{xx} - \tilde{w}_t - \tilde{B} \tilde{w} < 0, \quad (x, t) \in [a, x_2 + \Delta] \times [T, T_1]. \quad (8.28)$$

Из (8.24) имеем неравенство

$$\tilde{w}(x, T, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in [a, x_2 + \Delta], \quad (8.29)$$

а из (8.25) и (1.2) получаем

$$\tilde{w}_x(a, t, \mu, \varepsilon) < 0, \quad t \in [T, T_1]. \quad (8.30)$$

Наконец, (8.27) и (8.18) дают неравенство

$$\tilde{w}(x_2 + \Delta, t, \mu, \varepsilon) > 0, \quad t \in [T, T_1]. \quad (8.31)$$

Из (8.28)–(8.31) очевидным образом следует, что

$$\tilde{w}(x, t, \mu, \varepsilon) > 0, \quad (x, t) \in [a, x_2 + \Delta] \times [T, T_1],$$

в частности

$$\tilde{w}(x, T_1, \mu, \varepsilon) > 0, \quad x \in [a, x_2 + \Delta],$$

откуда получаем

$$u(x, T_1, \varepsilon) < \beta(x, \mu, \gamma(T_1)) = \beta(x, \mu, \gamma_0), \quad x \in [a, x_2 + \Delta]. \quad (8.32)$$

Далее, используя (8.32), (8.18) и соотношения (8.25)–(8.27), взятые при $\gamma = \gamma_0$, приходим к выводу, что для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε функция $\tilde{\beta}(x, \mu, \gamma_0)$ является стационарным верхним барьером для решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $(x, t) \in [a, x_2 + \Delta] \times [T_1, +\infty)$, т.е.

$$u(x, t, \varepsilon) < \tilde{\beta}(x, \mu, \gamma_0), \quad (x, t) \in [a, x_2 + \Delta] \times [T_1, +\infty). \quad (8.33)$$

Поскольку $0 \leq \tilde{Q}_0(\tau_1, \gamma_0) \leq \eta_0/2 \leq \eta/2$, а функции $\tilde{Q}_i^{(2)}(\tau_2)$ в силу экспоненциальных оценок сколь угодно малы при достаточно малых ε на отрезке $[a, x_2]$, то для любого достаточно малого μ при достаточно малых ε будет выполнено неравенство

$$\tilde{\beta}(x, \mu, \gamma_0) < \varphi_1(x) + \eta, \quad x \in [a, x_2]. \quad (8.34)$$

Зафиксируем столь малое $\mu > 0$, чтобы при достаточно малых ε выполнялись неравенства (8.33) и (8.34). Тогда из (8.33) и (8.34) следует (8.16):

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in [a, x_2] \times [T_1, +\infty).$$

Очевидно, что $T_1 = T_1(\eta, \varepsilon)$. Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. Пусть выполнены условия (A1), (A3), и пусть существует отрезок $D^{(-)} = [x_1, x_2]$ ($D^{(+)} = [x_3, x_4]$) такой, что

1. $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, $u_0(x) < 0$, $x \in D^{(-)}$ ($a \leq x_3 < x_4 \leq b$, $u_0(x) > 0$, $x \in D^{(+)}$);
2. если $x_1 \neq a$, то $J(x_1) > 0$; если $x_2 \neq b$, то $J(x_2) > 0$ (если $x_3 \neq a$, то $J(x_3) < 0$; если $x_4 \neq b$, то $J(x_4) < 0$).

Тогда $\forall \eta > 0 \exists T_0 = T_0(\eta) > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} u(x, t, \varepsilon) &< \varphi_1(x) + \eta, & (x, t) \in D^{(-)} \times [T_0, +\infty) \\ (u(x, t, \varepsilon) &> \varphi_2(x) - \eta, & (x, t) \in D^{(+)} \times [T_0, +\infty)). \end{aligned} \quad (8.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение леммы, т.е. утверждение, относящееся к неравенству (8.35). Рассмотрим сначала случай, когда $a < x_1 < x_2 < b$. Из условий леммы следует, что существует $\Delta > 0$ такое, что $a \leq x_1 - \Delta < x_2 + \Delta \leq b$,

$$u_0(x) < 0 \text{ при } x \in [x_1 - \Delta, x_2 + \Delta], \quad (8.36)$$

$$J(x_1 - \Delta) > 0, \quad J(x_2 + \Delta) > 0. \quad (8.37)$$

В силу (8.36) согласно следствию 2 из леммы 3 $\forall \eta > 0 \exists T_0 = T_0(\eta/2) > 0$ такое, что при достаточно малых ε решение $u(x, t, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам

$$u(x, T_0, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \frac{\eta}{2}, \quad x \in [x_1 - \Delta, x_2 + \Delta], \quad (8.38)$$

$$u(x_1 - \Delta, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, \quad u(x_2 + \Delta, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, \quad t \in [T_0, +\infty). \quad (8.39)$$

Введем функцию

$$\beta(x, \eta) = \varphi_1(x) + \eta + Q_0^{(1)}(\tau_1) + \eta Q_1^{(1)}(\tau_1) + Q_0^{(2)}(\tau_2) + \eta Q_1^{(2)}(\tau_2), \quad (8.40)$$

где $\tau_1 = (x - x_1 + \Delta)/\varepsilon$, $\tau_2 = (x - x_2 - \Delta)/\varepsilon$, а функции $Q_i^{(j)}$ ($i = 0, 1; j = 1, 2$) определяются так же, как в доказательстве леммы 6, в частности при их определении используются неравенства (8.37).

Используя (8.38) и (8.39), нетрудно проверить (это делается таким же образом, как в доказательствах лемм 6 и 7), что для любого достаточно малого η при достаточно малых ε функция $\beta(x, \eta)$ является стационарным верхним барьером для решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $(x, t) \in [x_1 - \Delta, x_2 + \Delta] \times [T_0, +\infty)$. Возьмем срезающие функции, на которые домножаются $Q_i^{(j)}$, такими, что $Q_i^{(j)} = 0$ при $x \in D^{(-)} = [x_1, x_2]$. Тогда $\beta(x, \eta) = \varphi_1(x) + \eta$ при $x \in D^{(-)}$, и поэтому из неравенства

$$u(x, t, \varepsilon) < \beta(x, \eta), \quad (x, t) \in [x_1 - \Delta, x_2 + \Delta] \times [T_0, +\infty),$$

непосредственно следует (8.35).

Если $x_1 = a$, $x_2 \neq b$, то верхний барьер β можно взять в виде

$$\beta(x, \eta) = \varphi_1(x) + \frac{2}{3}\eta + \varepsilon P\left(\frac{a-x}{\varepsilon}\right) + \overset{(2)}{Q}_0(\tau_2) + \frac{2}{3}\eta \overset{(2)}{Q}_1(\tau_2), \quad (8.41)$$

где $P(\xi) = \exp(k\xi)$, $k > 0$ выбирается столь большим, чтобы выполнялось неравенство $\beta_x(a, \eta) \leq 0$, а функции $\overset{(2)}{Q}_i(\tau_2)$ – те же самые, что и в (8.40).

Если $x_1 \neq a$, $x_2 = b$, то верхний барьер β можно получить из (8.41), заменив $\overset{(2)}{Q}_i(\tau_2)$ на $\overset{(1)}{Q}_i(\tau_1)$, а аргумент $(a-x)/\varepsilon$ функции P на $(x-b)/\varepsilon$.

Наконец, если $x_1 = a$, $x_2 = b$, то верхний барьер β можно взять в виде

$$\beta(x, \eta) = \varphi_1(x) + \frac{2}{3}\eta + \varepsilon \left[P\left(\frac{a-x}{\varepsilon}\right) + P\left(\frac{x-b}{\varepsilon}\right) \right].$$

В каждом из перечисленных случаев нетрудно доказать, что для любого достаточно малого η при достаточно малых ε функция $\beta(x, \eta)$ действительно является стационарным верхним барьером для решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $(x, t) \in D^{(-)} \times [T_0, +\infty)$, откуда непосредственно следует (8.35).

Лемма 8 доказана.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть выполнены условия (A1)–(A3), (A5) и (A6). Тогда существуют $\bar{x}^{(-)} \in (a, x^*)$ и $\bar{x}^{(+)} \in (x^*, b)$ такие, что

1. $u_0(\bar{x}^{(-)}) < 0$ и $J(x) > 0$, $x \in [\bar{x}^{(-)}, x^*)$; $u_0(\bar{x}^{(+)}) > 0$ и $J(x) < 0$, $x \in (x^*, \bar{x}^{(+)})$;
2. $\forall \eta > 0$ при достаточно малых $\varepsilon \exists T = T(\eta, \varepsilon) > 0$ такое, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенствам

$$u(x, t, \varepsilon) < \varphi_1(x) + \eta, \quad (x, t) \in [a, \bar{x}^{(-)}] \times [T, +\infty), \quad (8.42)$$

$$u(x, t, \varepsilon) > \varphi_2(x) - \eta, \quad (x, t) \in [\bar{x}^{(+)}, b] \times [T, +\infty), \quad (8.43)$$

$$\varphi_1(x) - \eta < u(x, t, \varepsilon) < \varphi_2(x) + \eta, \quad (x, t) \in \bar{D} \times [T, +\infty). \quad (8.44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 – очевидное следствие условий (A2) и (A6). Докажем (8.42) (неравенство (8.43) доказывается аналогично, а неравенства (8.44) доказаны в следствии 2, см. §2). Возможны два случая.

1) $J(x) > 0$ при $x \in [a, \bar{x}^{(-)}]$. В этом случае (8.42) следует непосредственно из леммы 7.

2) Существует $x \in [a, \bar{x}^{(-)}$ такое, что $J(x) \leq 0$. В этом случае, двигаясь от a к $\bar{x}^{(-)}$, выделим на отрезке $[a, \bar{x}^{(-)}$ такие сегменты $[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2i-1}, x_{2i}], \dots, [x_{2n-1}, x_{2n}]$, на которых $J(x) \leq 0$. В силу условия (A5) этих сегментов конечное число. Некоторые из них могут вырождаться в точку, в таком случае $x_{2i-1} = x_{2i}$. Оставшаяся часть отрезка $[a, \bar{x}^{(-)}$ состоит из промежутков $[a, x_1], (x_2, x_3), \dots, (x_{2n}, \bar{x}^{(-)})$ (если $x_1 = a$, то $[a, x_1] = \emptyset$). На этих промежутках $J(x) > 0$.

Рассмотрим сегменты $[x_{2i-1}, x_{2i}]$, $i = 1, \dots, n$, на которых $J(x) \leq 0$. В силу условия (A6) имеем:

$$u_0(x) < 0, \quad x \in [x_{2i-1}, x_{2i}].$$

Следовательно, существует достаточно малое $\Delta > 0$ такое, что $u_0(x) < 0$ при $x \in [x_{2i-1} - \Delta, x_{2i} + \Delta]$ и $J(x_{2i-1} - \Delta) > 0$, $J(x_{2i} + \Delta) > 0$, $i = 1, \dots, n$ (если $x_1 = a$, то для $i = 1$ имеем: $u_0(x) < 0$ при $x \in [a, x_2 + \Delta]$ и $J(x_2 + \Delta) > 0$).

Отсюда согласно лемме 8 следует, что для любого $\eta > 0$ существует такое $T = T(\eta) > 0$, что при достаточно малых ε неравенство из (8.42) выполняется для $(x, t) \in [x_{2i-1} - \Delta, x_{2i} + \Delta] \times [T, +\infty)$, $i = 1, \dots, n$ (если $x_1 = a$, то для $i = 1$ нужно заменить $x_1 - \Delta$ на a).

Удалим теперь из отрезка $[a, \bar{x}^{(-)}]$ все интервалы $(x_{2i-1} - \Delta, x_{2i} + \Delta)$, на которых выполнено неравенство из (8.42) (если $x_1 = a$, то для $i = 1$ удалим промежуток $[a, x_2 + \Delta]$). Останутся сегменты $[a, x_1 - \Delta]$, $[x_{2i} + \Delta, x_{2i+1} - \Delta]$, $i = 1, \dots, n$, где $x_{2n+1} - \Delta \equiv \bar{x}^{(-)}$, а сегмент $[a, x_1 - \Delta]$ считается пустым множеством, если $x_1 = a$.

В силу нашего построения для этих сегментов выполнены неравенства

$$J(x) > 0, \quad x \in [a, x_1 - \Delta], \quad u_0(x_1 - \Delta) < 0 \quad (\text{если } x_1 \neq a), \quad (8.45)$$

$$J(x) > 0, \quad x \in [x_{2i} + \Delta, x_{2i+1} - \Delta], \quad u_0(x_{2i+1} - \Delta) < 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.46)$$

Из (8.45) следует в силу леммы 7, что для любого $\eta > 0$ при достаточно малых ε неравенство из (8.42) выполняется для $(x, t) \in [a, x_1 - \Delta] \times [T, +\infty)$ (вообще говоря, со своим $T = T(\eta, \varepsilon) > 0$), а из (8.46) следует в силу леммы 6, что для любого $\eta > 0$ при достаточно малых ε неравенство из (8.42) выполняется для $(x, t) \in [x_{2i} + \Delta, x_{2i+1} - \Delta] \times [T, +\infty)$, $i = 1, \dots, n$ (также, вообще говоря, со своим $T = T(\eta, \varepsilon) > 0$).

Объединяя полученные в п. 2) результаты, имеем, что $\forall \eta > 0$ при достаточно малых $\varepsilon \exists T = T(\eta, \varepsilon) > 0$ такое, что выполняется неравенство (8.42).

Теорема 1' доказана.

Далее, считая выполненными условия (A1)–(A3), (A5) и (A6) и опираясь на теорему 1' (вместо теоремы 1), нетрудно доказать утверждения теорем 3, 4 и леммы 5 аналогично тому, как это сделано в §§ 4, 5. После этого теорема 6 доказывается в точности так же, как теорема 5.

Список литературы

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
2. Васильева А. Б. Об устойчивости контрастных структур // Матем. моделирование. 1991. Т. 3. № 4. С. 114–123.
3. Васильева А. Б., Никитин А. Г. Асимптотический метод исследования контрастных структур и его приложения к теории гидромагнитного динамо // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. № 2. С. 61–71.
4. Angenent S., Mallet-Paret J., Peletier L. Stable transition layers in a semilinear boundary value problems // J. Differential Equations. 1987. V. 67. № 2. P. 212–242.
5. Hale J., Sakamoto K. Existence and stability of transition layers // Japan J. Indust. Appl. Math. 1988. V. 5. № 3. P. 367–405.
6. Бутузов В. Ф., Неделько И. В. Устойчивость контрастных структур типа ступеньки в двумерном случае // Докл. РАН. 1999. Т. 366. № 3. С. 1–4.
7. Бутузов В. Ф., Неделько И. В. Об устойчивости многомерных контрастных структур // Математические методы и приложения. Труды шестых математических чтений МГСУ, 25–30 января 1998 года. М.: МГСУ, 1999. С. 1–6.
8. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.

9. Васильева А. Б., Бутузова М. В. Об устойчивости стационарных решений с пограничными и внутренними слоями // Математические методы и приложения. Труды третьих математических чтений МГСУ, 24–29 января 1995 года. М.: МГСУ, 1995. С. 81–86.
10. Fife P., Hsiao L. Generation and propagation of internal layers // Nonlinear Anal. 1988. V. 12. № 1. P. 19–41.
11. Fife P. Diffusive waves in inhomogeneous media // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1989. V. 32. № 2. P. 291–315.
12. Amann H. Periodic solutions of semilinear parabolic equations // Nonlinear analysis: collection of papers in honor of Erich Rothe. New York: Academic Press, 1978. P. 1–29.
13. Amann H. Existence and stability of solutions for semilinear parabolic systems and applications to some diffusion reaction equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1978. V. 81. № 1. P. 35–47.
14. Треногин В. А. Об асимптотике решения почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем // УМН. 1961. Т. 16. № 1. С. 163–169.
15. Васильева А. Б. Контрастные структуры с двумя переходными слоями и их устойчивость // ЖВМ и МФ. 1992. Т. 32. № 10. С. 1582–1593.
16. Гудков В. В., Клоков Ю. А., Лепин А. Я., Пономарев В. Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинанте, 1973.
17. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 719–722.
18. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
19. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
19.01.2000