Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Дубровина, Н. И. Дубровин, О группах кос, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 5, 53–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:29:57

УДК 512.8

Т. В. Дубровина, Н. И. Дубровин

О группах кос

В работе изучаются группы кос Артина с точки зрения правоупорядоченных групп. Строится правый порядок такой, что соответствующий конус элементов ≥ 1 конечно порожден как моноид. Выявляется структура идеалов этого конуса, которая оказывается весьма специфической, невозможной для линейно упорядоченных групп.

Доказывается также, что никакой линейный порядок на подгруппе чистых кос не может быть продолжен до правого порядка на всю группу кос.

Библиография: 8 названий.

Введение

Группы кос принадлежат к числу ярких, замечательных объектов математики; замечательных как своим органичным соединением частного и общего, так и многочисленными применениями. Действительно, группа кос $\mathcal{B}_n$ может быть задана весьма конкретно в терминах образующих $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и соотношений между ними:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad (1)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \text{если } |i - j| > 1. \quad (2)$$

Однако исторически эти группы появились в далеком 1925 году как множества всех кос на n нитях (в буквальном смысле) с фиксированными началами и концами, на которых определена операция “пришивания” начал второй косы к концам первой косы (см. [1]). Изобретатель этой конструкции Эмиль Артин имел в виду, прежде всего, содержательный пример из теории узлов, допускающий алгоритмическое решение проблемы равенства элементов. Очень скоро математики, в первую очередь алгебраисты и топологи, поняли, что значение этого объекта выходит за рамки задачи о равенстве. Появились разные представления групп кос – указанное выше в (1) и (2), матричные представления, представления автоморфизмами свободных групп (см. [2; 3.7]). Обнаружились также применения групп кос в молекулярной химии и теоретической физике.

Универсальность групп кос проявляется, прежде всего, в том, что их можно изучать содержательно с различных точек зрения. В настоящей работе группы кос рассматриваются как правоупорядоченные группы, т.е. группы с линейным порядком таким, что $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$ для любых элементов a, b, c . Сам

Работа выполнена при поддержке совместного фонда РФФИ–Германия (грант № 98-01-04110).

факт наличия правого порядка — основное достижение последних лет в теории групп кос. Сформулируем соответствующий результат. Назовем элемент $b \in \mathcal{B}_n$ σ_1 -положительным, если он может быть записан в виде $w_1\sigma_1 w_2\sigma_1 \cdots w_{k-1}\sigma_1 w_k$, где все w_i в своей записи через образующие не содержат σ_1 , т.е. принадлежат группе $U := \text{gr}\{\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}\}$. Обратный элемент к σ_1 -положительному назовем σ_1 -отрицательным.

ТЕОРЕМА ДЕХОРНОЯ (см. [3]). *Любой элемент группы $\mathcal{B}_n$ либо является σ_1 -положительным, либо σ_1 -отрицательным, либо принадлежит подгруппе U . Все три возможности попарно несовместимы.*

Из этой теоремы сразу вытекает, что множество

$$\mathcal{P} := U \cup \{\sigma_1\text{-положительные элементы}\}$$

является конусом, т.е. замкнуто относительно умножения и $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}^{-1} = \mathcal{B}_n$. Описание структуры идеалов этого конуса дано в теореме 4 (см. §2).

Группа U изоморфна группе кос $\mathcal{B}_{n-1}$ в случае, когда $n \geq 4$. Если же $n = 3$, то U — бесконечная циклическая группа. В первом случае к U снова применима теорема Дехорная, причем речь идет уже о σ_2 -положительных и отрицательных элементах. Продолжая этот процесс, мы приходим к чистому конусу Q , т.е. конусу, для которого $Q \cap Q^{-1} = \{1\}$. Посредством правила $a \leq_r b \Rightarrow ba^{-1} \in Q$ конус Q задает линейный порядок на группе кос, превращающий последнюю в правоупорядоченную группу. В нашей работе этот порядок слегка модифицируется так, что конус элементов ≥ 1 становится конечнопорожденным в категории моноидов. Это достаточно уникальное свойство (см. замечание в конце §3). Перечисленные факты составят содержание теоремы 5 (см. также следствия 6, 7).

В теории групп кос и приложениях часто упоминается подгруппа чистых кос. Это есть ядро эпиморфизма $\mathcal{B}_n \rightarrow S_n$, где S_n — группа подстановок на n символах, такого, что образующая σ_i переходит в транспозицию $(i, i+1)$. Уже давно, до теоремы Дехорной, были известны и использовались линейные порядки на группе чистых кос. Однако было замечено, что эти порядки не продолжаются до правого порядка на всю группу кос. С другой стороны, и сужение правого порядка, построенного выше, на группу чистых кос не дает линейного порядка. Встает вопрос: существует ли упорядочение группы кос, превращающее ее в правоупорядоченную группу, сужение которого на группу чистых кос дает линейный порядок? Из теоремы 11 мы получаем отрицательный ответ на этот вопрос, причем не только в случае группы чистых кос, но и в случае любой подгруппы конечного индекса.

§1. Алгебраические вычисления

В этом параграфе мы подготовим почву для доказательства последующих теорем, установив различные (частично ранее известные) соотношения в группе кос. Обозначим $z := \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$ и

$$z_1 := z, z_2 = \sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}, \dots, z_{n-1} := \sigma_{n-1}.$$

Сначала отметим известные равенства:

$$z\sigma_1 = \sigma_2 z, z\sigma_2 = \sigma_3 z, \dots, z\sigma_{n-2} = \sigma_{n-1} z. \quad (3)$$

Действительно,

$$z\sigma_1 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 z_3 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 z_3 = \sigma_2 z,$$

здесь мы воспользовались (2), переставляя σ_1 вперед, далее применили соотношение (1). Тем самым, будут верны и равенства $z_i \sigma_i = \sigma_{i+1} z_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-2$). Тогда

$$z\sigma_i = \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1} (z_i \sigma_i) = \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1} (\sigma_{i+1} z_i) = \sigma_{i+1} \sigma_1 \cdots \sigma_{i-1} z_i = \sigma_{i+1} z,$$

что и требовалось доказать. Как элемент z переставлять с σ_{n-1} ? Ответ на этот вопрос дает следующее соотношение:

$$z^2 \sigma_{n-1} = \sigma_1 z^2. \quad (4)$$

Докажем его:

$$\begin{aligned} z^2 &= z\sigma_1 z_2 = \sigma_2 z z_2 = \sigma_2 z \sigma_2 z_3 = \sigma_2 \sigma_3 z z_3 \\ &= \cdots = \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1} z \sigma_{n-1} = \sigma_1^{-1} z \cdot z \cdot \sigma_{n-1}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает (4).

Как следствие соотношений (3), (4) получаем, что *элемент z^n централен*. Действительно, при $1 \leq i < n-1$ имеем:

$$\begin{aligned} z^n \sigma_i &= z^{1+i} z^{n-1-i} \sigma_i = z^{1+i} \sigma_{n-1} z^{n-1-i} = z^{i-1} z^2 \sigma_{n-1} z^{n-1-i} \\ &= z^{i-1} \sigma_1 z^2 z^{n-1-i} = \sigma_i z^{i-1} z^2 z^{n-1-i} = \sigma_i z^n. \end{aligned}$$

Если же $i = n-1$, то

$$z^n \sigma_{n-1} = z^{n-2} \sigma_1 z^2 = \sigma_{n-1} z^{n-2} z^2 = \sigma_{n-1} z^n.$$

Итак, z^n коммутирует с каждым из образующих σ_i , следовательно, z^n принадлежит центру группы $\mathcal{B}_n$ (в действительности, порождает этот центр).

Теперь будем решать уравнение

$$z^{n-1} = X \cdot z \cdot X \quad (5)$$

в группе U .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Элемент*

$$X = (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_2 \sigma_3) \sigma_2$$

является решением (корнем) уравнения (5), при этом X может быть записан также в виде

$$X = \sigma_{n-1}(\sigma_{n-2} \sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала равенство

$$(\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_2 \sigma_3) \sigma_2 = \sigma_{n-1}(\sigma_{n-2} \sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}). \quad (6)$$

Заметим, что левый сомножитель в левой части (6), так же как и правый сомножитель в правой части, — это не что иное, как элемент z_2 . Теперь сформулируем правило изменения индексов у σ_i , которое следует из равенств $\sigma_{i+1} z_2 = z_2 \sigma_i$ ($i = 2, 3, \dots, n-2$): пусть $w = \sigma_{j_1} \sigma_{j_2} \cdots \sigma_{j_m}$, где все j_i — натуральные числа от 2 до $n-2$, тогда

$$z_2 w = \sigma_{j_1+1} \sigma_{j_2+1} \cdots \sigma_{j_m+1} z_2 \quad (7)$$

(т.е. ко всем индексам надо прибавить 1 и сохранить порядок сомножителей). Следовательно,

$$z_2(\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_2 \sigma_3) \sigma_2 = (\sigma_3 \sigma_4 \cdots \sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_3 \sigma_4) \sigma_3 z_2.$$

Подставляя это в (6) и сокращая справа на z_2 , мы видим, что равенство (6) эквивалентно следующему:

$$(\sigma_3 \sigma_4 \cdots \sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_3 \sigma_4) \sigma_3 = \sigma_{n-1}(\sigma_{n-2} \sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_3 \sigma_4 \cdots \sigma_{n-1}).$$

Мы получили то же равенство (6), только в группе кос $\text{gr}\{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}\}$, и к нему, следовательно, применима та же самая процедура. Повторяя эту процедуру $n-3$ раз, приходим к верному равенству $\sigma_{n-1} = \sigma_{n-1}$, эквивалентному (6). Итак, (6) доказано.

Далее,

$$\begin{aligned} z^{n-1} &= z^{n-2} \sigma_1 (\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}) = z^{n-3} (\sigma_1 \sigma_2) (\sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}) \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}) \\ &= z^{n-3} (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 (\sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}) (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}) \\ &= z (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 \cdot \sigma_{n-1} (\sigma_{n-2} \sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}), \end{aligned}$$

где использовались лишь соотношения (2). Теперь

$$z(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 = (\sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_2 \sigma_3) \sigma_2 z$$

по правилу преобразования индексов (7), примененному к элементу z вместо z_2 . Это и заканчивает доказательство предложения.

Заметим, что $X = z_{n-1} z_{n-2} \cdots z_2$ согласно определению элементов z_i . Конечно, элементы $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ также являются образующими группы $\mathcal{B}_n$. Справедливы соотношения между ними:

$$z_2 z_1 z_{n-1} = z_1^2, \quad z_3 z_1^2 z_{n-2} = z_1^3, \quad \dots, \quad z_{n-1} z_1^{n-2} z_2 = z_1^{n-1}, \quad (8)$$

которые, в свою очередь, легко следуют из равенств

$$z_2 z_1 = z_1 \sigma_1 \cdots \sigma_{n-3} \sigma_{n-2}, \quad z_3 z_1^2 = z_1 \sigma_1 \cdots \sigma_{n-4} \sigma_{n-3}, \quad \dots, \quad z_{n-1} z_1^{n-2} = z_1^{n-1} \sigma_1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеет место соотношение*

$$(z_{n-1}z_{n-2} \cdots z_i)^2 = z_i^{n-i+1} \quad (9)$$

для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$. В частности, $X^2 = z_2^{n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить равенство (9) для $i = 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} (z_{n-1}z_{n-2} \cdots z_1)^2 &= z_{n-1}z_{n-2} \cdots z_3(z_2z_1z_{n-1})z_{n-2} \cdots z_2z_1 \\ &= z_{n-1}z_{n-2} \cdots z_3z_1^2z_{n-2} \cdots z_2z_1 \\ &= z_{n-1}z_{n-2} \cdots z_4z_1^3z_{n-3} \cdots z_3z_1 \\ &= \cdots = z_{n-1}z_1^{n-2}z_2 \cdot z_1 = z_1^{n-1} \cdot z_1 = z_1^n, \end{aligned}$$

где применены равенства (8).

Обозначим

$$y_1 := z_1, y_2 := z_2^{-1}, \dots, y_{n-1} = z_{n-1}^{(-1)^n}.$$

С учетом этих обозначений, а также предложений 1 и 2 получаем следующую систему:

$$\begin{cases} (y_2y_3^{-1} \cdots y_{n-1}^{(-1)^{n-1}})y_1^{n-1}(y_2y_3^{-1} \cdots y_{n-1}^{(-1)^{n-1}}) = y_1, \\ (y_2y_3^{-1} \cdots y_{n-1}^{(-1)^{n-1}})^2 = y_2^{n-1}. \end{cases} \quad (10)$$

§ 2. Специальный конус $\mathcal{P}$

Сначала напомним основные определения и факты из статьи [4]. Пусть P – конус в абстрактной группе G . Нетрудно видеть, что в нем все правые, так же как и левые идеалы линейно упорядочены по включению. Следовательно, множество $J(P)$ всех необратимых элементов конуса будет единственным максимальным правым и левым идеалом. Его мы будем называть *радикалом конуса P* . Идеал J конуса P называется *первичным (вполне первичным)*, если из включения $aPb \subseteq J$ ($ab \in J$) для элементов $a, b \in P$ следует, что либо $a \in J$, либо $b \in P$. По вполне первичному идеалу можно локализовать: $P_J := P \cup (P \setminus J)^{-1}$. Получаем *надконус* конуса P такой, что $J(P_J) = J$. Пусть конус P имеет ранг 1, т.е. содержит единственный вполне первичный идеал $J(P)$. Тогда могут встретиться лишь три попарно несовместимых случая.

Случай 1. Конус P инвариантен, т.е. равенство $Pa = aP$ верно для любого $a \in G$. В этом случае главные P -идеалы образуют архимедову линейно упорядоченную группу.

Случай 2. Конус P почти простой, т.е. его радикал является единственным собственным двусторонним идеалом (пример см. в [5]).

Случай 3. Конус P специальный, т.е. существует первичный идеал I , строго содержащийся в радикале и поэтому не являющийся вполне первичным. Тогда $\cap I^n = \emptyset$ и все идеалы конуса P перечислены в следующей цепочке:

$$P \supset J(P) \supset I \supseteq I \cdot J(P) \supset I^2 \supseteq I^2 \cdot J(P) \supset \cdots \supset I^m \supseteq I^m \cdot J(P). \quad (11)$$

В частности, между $J(P)$ и I нет других двусторонних идеалов.

Третий случай допускает окончательную классификацию в соответствии со структурой идеалов конуса P , но затрагивать мы ее в нашей работе не будем. Далее $\mathcal{P}$ – конус в группе кос $\mathcal{B}_n$, построенный во введении.

ЛЕММА 3. *Элемент z кофинален, т.е. для любого элемента a группы $\mathcal{B}_n$ найдется натуральное число m такое, что $z^m \in a\mathcal{P}$ и $z^m \in \mathcal{P}a$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы $z, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ являются образующими группы кос. Пусть $a = w_1 z^{\varepsilon_1} w_2 z^{\varepsilon_2} \dots w_k z^{\varepsilon_k} w_{k+1}$, где все w_i принадлежат U , а $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Тогда $m = kn$ – искомое число, так как

$$z^m a^{-1} = a^{-1} z^m = w_{k+1}^{-1} z^{n-\varepsilon_k} \dots z^{n-\varepsilon_1} w_1^{-1},$$

где мы воспользовались центральностью элемента z^n . Ясно теперь, что $z^m a^{-1} \in \mathcal{P}$, и результат доказан.

ТЕОРЕМА 4. *Конус $\mathcal{P}$ специальный, и $z^n \mathcal{P}$ – первичный, но не вполне первичный идеал.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, $z^n \mathcal{P}$ – идеал, так как элемент z^n централен. Во-вторых, $\bigcap_{m=1}^{\infty} (z^n \mathcal{P})^m = \emptyset$, как следует из леммы 3. В третьих, $J(\mathcal{P}) = \mathcal{P}z\mathcal{P}$, что вытекает сразу из определения конуса $\mathcal{P}$. Если B – вполне первичный идеал конуса $\mathcal{P}$, то найдем сначала $m \in \mathbb{N}$ такое, что $z^m \in B$ (лемма 3). Пользуясь вполне первичностью, заключаем, что элемент z также принадлежит идеалу B . Тогда B обязан совпадать с радикалом. Доказано, что ранг конуса $\mathcal{P}$ равен 1.

Далее, σ_2 – обратимый элемент конуса $\mathcal{P}$, но

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \in J(\mathcal{P}).$$

Это значит, в частности, что $\sigma_1 \mathcal{P} \neq \mathcal{P} \sigma_1$. Следовательно, конус $\mathcal{P}$ не инвариантен. Но он и не почти простой. Остается одна возможность: конус $\mathcal{P}$ специален.

Пусть I – первичный идеал конуса $\mathcal{P}$, отличный от радикала. Он же будет максимальным двусторонним идеалом, не равным $J(\mathcal{P})$. Тогда $I \supseteq z^n \mathcal{P}$. Докажем, что здесь имеет место равенство.

Из предложения 1 следует, что $\mathcal{P}z^{n-1}\mathcal{P} = \mathcal{P}z\mathcal{P} = J(\mathcal{P})$. Отсюда вытекает, что $z^{n-1} \notin I$, тем самым, $z^{n-1}\mathcal{P} \supseteq I$. Кроме того, из последних двух равенств заключаем, что $J(\mathcal{P})^2 = J(\mathcal{P})$. Следовательно, правый идеал вида $I^m J(\mathcal{P})$ не может быть главным. Тогда если предположить, что $I \neq z^n \mathcal{P}$, то $I^2 \supseteq z^n \mathcal{P}$, как следует из цепочки (11) и замечания выше. Это приводит, однако, к противоречию с тем, что $n \geq 3$:

$$z^n \mathcal{P} \subseteq I^2 \subseteq z^{n-1} I \subseteq z^{2n-2} \mathcal{P} \Rightarrow z^{2-n} \in \mathcal{P}.$$

Противоречие показывает, что на самом деле $I = z^n \mathcal{P}$ – максимальный идеал в конусе $\mathcal{P}$, не совпадающий с радикалом.

§ 3. Конечно порожденный чистый конус

Рангом конуса назовем число его вполне первичных идеалов. Обозначим $\mathcal{P}_{n-1} = \text{semigr}\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$.

ТЕОРЕМА 5. $\mathcal{P}_{n-1}$ — чистый конус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по числу нитей доказываем, что любой σ_1 -положительный элемент a принадлежит $\mathcal{P}_{n-1}$. Ясно, что такой элемент может быть записан в виде

$$a = w_1 y_1 w_2 y_1 \cdots w_k y_1 w_{k+1}, \quad (12)$$

где все $w_i \in U$. Обозначим $b = y_2 y_3^{-1} \cdots y_{n-1}^{(-1)^{n-1}}$. Тогда $b y_1^{n-1} b = y_1$ и $b^2 = y_2^{n-1}$ согласно (10).

Заметим, что соотношения (1) и (2) переходят в точно такие же относительно новых образующих $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$ группы кос. Будем в связи с этим трактовать U как группу кос на $n-1$ нитях с образующими $\sigma_2^{-1}, \sigma_3^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$. Так же как мы строили конус $\mathcal{P}$ в группе кос $\mathcal{B}_n$, построим теперь конус P_U в группе U . А именно P_U состоит из всех σ_2^{-1} -положительных элементов группы U , объединенных с группой $\text{gr}\{\sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}\}$. По лемме 3 элемент y_2 кофинален в P_U , тем самым, и элемент b также кофинален. Следовательно, вставляя в запись (12) вместо y_1 равный ему элемент $b y_1^{n-1} b$ достаточное количество раз, можно получить запись того же вида, что и (12), но все w_i будут либо единицами, либо σ_2^{-1} -положительными элементами. Пользуясь предположением индукции, заключаем, что $w_i \in \text{semigr}\{y_2, y_3, \dots, y_{n-1}\}$ и, следовательно, $a \in P_n$. Индукционный переход завершен. Основание индукции — тривиальность.

Теперь индукцией по числу нитей докажем соотношение $\mathcal{B}_n = \mathcal{P}_{n-1} \cup \mathcal{P}_{n-1}^{-1}$. Если элемент $a \in \mathcal{B}_n$ произволен, то либо $a \in U$, тогда

$$a \in (\mathcal{P}_{n-1} \cap U) \cup (\mathcal{P}_{n-1} \cap U)^{-1} \subseteq \mathcal{P}_{n-1} \cup \mathcal{P}_{n-1}^{-1}$$

по предположению индукции, либо a — σ_1 -положительный элемент, тогда $a \in \mathcal{P}_{n-1}$, либо a — σ_1 -отрицательный элемент, тогда $a^{-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$, т.е. $a \in \mathcal{P}_{n-1}^{-1}$ по доказанному выше. Основание этой индукции снова тривиально. Итак, доказано, что $\mathcal{P}_{n-1}$ — конус.

Индукцией по числу нитей доказываем соотношение $\mathcal{P}_{n-1} \cap \mathcal{P}_{n-1}^{-1} = \{1\}$. Заметим вначале, что определение σ_1 -положительности можно переформулировать так: это элементы из $\mathcal{P}_{n-1}$, имеющие хотя бы на одном месте y_1 в своей записи через образующие $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ моноида $\mathcal{P}_{n-1}$. Так как элемент не может быть одновременно σ_1 -положительным и σ_1 -отрицательным по теореме Дехорной, то $\mathcal{P}_{n-1} \cap \mathcal{P}_{n-1}^{-1} \subseteq U$, и поэтому

$$\mathcal{P}_{n-1} \cap \mathcal{P}_{n-1}^{-1} = \mathcal{P}_{n-1} \cap \mathcal{P}_{n-1}^{-1} \cap U = (\mathcal{P}_{n-1} \cap U) \cap (\mathcal{P}_{n-1} \cap U)^{-1} = \{1\},$$

где в последнем равенстве использовано предположение индукции. Основание этой индукции доказывается так же просто:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_3^{-1} &= (\mathcal{P}_3 \cap U) \cap (\mathcal{P}_3 \cap U)^{-1} = \text{semigr}\{y_2\} \cap \text{semigr}\{y_2\}^{-1} \\ &= \{1, y_2, y_2^2, \dots\} \cap \{1, y_2, y_2^2, \dots\}^{-1} = \{1\}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Множество $\mathcal{T}_1 := J(\mathcal{P})$ всех σ_1 -положительных элементов образует вполне первичный идеал конуса $\mathcal{P}_{n-1}$, локализация по которому совпадает с конусом $\mathcal{P}$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Обозначим

$$\begin{aligned} U_i &:= \text{gr}\{y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_{n-1}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad U_{n-1} := \{1\}; \\ \mathcal{P}_i &:= \mathcal{P}_{n-1} \cup U_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \\ \mathcal{T}_i &:= \mathcal{P}_i \setminus U_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Тогда имеет место цепь включений

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \dots \supset \mathcal{P}_{n-1} \supset \mathcal{T}_{n-1} \supset \mathcal{T}_{n-2} \supset \dots \supset \mathcal{T}_1 \supseteq \emptyset,$$

где все множества $\mathcal{P}_i$ – конусы с радикалом $\mathcal{T}_i$. Конус $\mathcal{P}_{n-1}$ имеет $n-1$ вполне первичных идеалов $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_{n-1}\}$ и $n-2$ первичных, но не вполне первичных идеалов

$$y_1^n \mathcal{P}_1, y_2^{n-1} \mathcal{P}_2, \dots, y_{n-2}^3 \mathcal{P}_{n-2},$$

которые расположены в “сегментах” $(\emptyset, \mathcal{T}_1), (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2), \dots, (\mathcal{T}_{n-3}, \mathcal{T}_{n-2})$ соответственно.

Далее, $\mathcal{T}_{n-1} = y_{n-1} \mathcal{P}_{n-1} = \mathcal{P}_{n-1} y_{n-1}$ – радикал конуса $\mathcal{P}_{n-1}$ и

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} y_{n-1}^m \mathcal{P}_{n-1} = \mathcal{T}_{n-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несмотря на обилие утверждений, доказывать практически нечего. Все, кроме последнего утверждения, следует из теоремы 4, следствия 6 и индукции по числу нитей.

Доказываем последнее утверждение индукцией по числу нитей. В данном случае только основание индукции и следует проверить, ибо индукционный переход тривиален. Итак, пусть $n = 3$. Элемент $z = y_1$ обозначим просто через y , а $y_2 = \sigma_2^{-1}$ обозначим через x . Тогда

$$\mathcal{P}_3 = \text{gr}\{x, y\}, \quad xy^2x = y$$

– универсальная накрывающая группа группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$; она же будет фундаментальной группой трилистника (см. [6]). В этом случае

$$\mathcal{P}_3 = \text{semigr}\{x, y\}, \quad J(\mathcal{P}_3) = x \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_3 x,$$

$$\mathcal{T}_1 = \text{semigr}\{x, x^{-1}, y\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} x^i \mathcal{P}_3,$$

что следует из равенства $xyx^{-1} = x^2y^2 \in \mathcal{T}_1$ и неравенства $x^i < y$, справедливого при любом натуральном i .

Может ли основной конус P линейно упорядоченной группы быть конечно порожденным как моноид? Может, но только в исключительном случае, когда эта группа бесконечная циклическая. Действительно, пусть $P = \text{semigr}\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$. Считаем, что $1 < h_1 < h_2 < \dots < h_m$. Тогда элемент $h_1^{-1}h_2$ больше единицы и в своей записи через образующие $h_1, h_2, \dots, h_m$ не может содержать элемента h_2 и, тем более, элементов h_k с $k > 2$. Следовательно, $h_1^{-1}h_2 = h_1^i$ для какого-либо натурального i . Отсюда $h_2 = h_1^{i+1}$ и $P = \text{semigr}\{h_1, h_3, \dots, h_m\}$. Продолжая далее таким же образом, получаем: $P = \text{semigr}\{h_1\}$, откуда вытекает цикличность группы.

§4. Почти инвариантные конусы

В этом параграфе мы докажем, что никакой линейный порядок на группе чистых кос не продолжается до правого порядка на всю группу кос. Для этого введем еще одно понятие: *почти инвариантный конус* – это конус P в группе G такой, что множество $\{gPg^{-1} : g \in G\}$ конечно. Напомним, что если это множество содержит единственный элемент, а именно сам конус P , то P называется *инвариантным*. Связь понятия почти инвариантности с задачей, поставленной в начале параграфа, проясняется следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть N – подгруппа конечного индекса в группе G , а P – конус группы G такой, что $P \cap N$ – инвариантный конус в группе N . Тогда P почти инвариантен в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in N$, $g \in P$ – произвольные элементы. Выберем натуральное число k такое, что $g^k \in N$; оно существует в силу конечности индекса подгруппы N . Тогда $g^k \in N \cap P$, откуда

$$(xgx^{-1})^k = xg^kx^{-1} \in N \cap P \subseteq P$$

в силу условий предложения. Но тогда $xgx^{-1} \in P$. Доказано, что $xPx^{-1} \subseteq P$. Аналогично, $x^{-1}Px \subseteq P$. Итак, для любого элемента $x \in N$ имеет место равенство $xPx^{-1} = P$.

Пусть $g_1N, g_2N, \dots, g_mN$ – все правые смежные классы подгруппы N и элемент $g \in G$ произволен. Тогда $g = g_ix$ для подходящих i и $x \in N$. Имеем:

$$gPg^{-1} = g_ixPx^{-1}g_i^{-1} = g_iPg_i^{-1},$$

что и заканчивает доказательство предложения.

Доказательство следующего предложения фактически имеется в работе Д. М. Смирнова [7]; здесь приведена трактовка в терминах конусов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть P – конус в группе G такой, что любой элемент $b \in J(P)$ кофинален справа, т.е. для всякого $g \in G$ найдется натуральное число t такое, что $b^t \in gP$. Предположим также, что $P \neq G$. Тогда P – инвариантный конус ранга 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что конус P не инвариантен. Тогда $hPh^{-1} \neq P$ для какого-либо $h \in G$. Если $h \in P$, то полагаем $a := h$. Иначе полагаем $a := h^{-1}$. В любом случае имеем, что $a \in P$ и $aPa^{-1} \neq P$. Тогда $aga^{-1} \notin P$ для подходящего $g \in P$. Это значит, что $b := ag^{-1}a^{-1} \in J(P)$; причем $a^{-1}ba = g^{-1} \notin J(P)$. Следовательно, для любого натурального m получаем

$$a^{-1}b^maP \supseteq P \Rightarrow b^mP \supseteq b^maP \supseteq aP.$$

Отсюда следует, что $aP \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} b^mP$, т.е. элемент b не кофинален справа. Итак, доказано, что в условиях предложения конус P инвариантен.

Так как пересечение степеней любого идеала в конусе – вполне первичный идеал (см. [4]), то из кофинальности следует, что кроме радикала других первичных идеалов нет. Значит, ранг конуса равен 1.

В решении поставленной задачи поможет также следующее понятие: *локально индикабельная группа* G – это группа, у которой любая конечно порожденная подгруппа имеет $(\mathbb{Z}, +, 0)$ своим эпиморфным образом. Заметим, что группа кос $\mathcal{B}_n$ при $n \geq 5$ не является локально индикабельной. Действительно, для таких n первый и второй коммутант группы кос совпадают, как показали Горин и Линь [8]. Тем самым, $\mathcal{B}'_n$ – конечно порожденная правоупорядоченная группа, совпадающая со своим коммутантом и поэтому не имеющая нетривиальных абелевых образов.

С другой стороны, всякая линейно упорядоченная группа локально индикабельна. Усилим это утверждение.

ТЕОРЕМА 10. *Если в группе существует чистый почти инвариантный конус, то она локально индикабельна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – чистый почти инвариантный конус группы G и $H = \text{gr}\{h_1, \dots, h_m\}$ – конечно порожденная подгруппа. Обозначим $Q = P \cap H$. Ясно, что Q – чистый конус в группе H . Более того, он почти инвариантен, так как $xQx^{-1} = xPx^{-1} \cap H$ для любого $x \in H$.

Докажем, что в Q существует наименьший вполне первичный идеал. Без ограничения общности можно считать, что все $h_i \geq 1$. Пусть J – вполне первичный идеал конуса Q , не содержащий элементов $h_1, \dots, h_m$. Тогда все h_i обратимы в надконусе Q_J – локализации Q по идеалу J . В этом случае и вся группа, порожденная $\{h_1, \dots, h_m\}$, лежит в группе обратимых элементов конуса Q_J . Полученное противоречие – H строго содержится в H – показывает, что вполне первичного идеала J с указанным свойством не существует. Отсюда следует, что пересечение M всех вполне первичных идеалов конуса Q непусто. Но непустое пересечение вполне первичных идеалов является также вполне первичным идеалом (это простое свойство, см. также [4]). Следовательно, M – минимальный вполне первичный идеал, причем $h_i \in M$ для какого-либо i по доказанному выше.

Докажем теперь, что любой элемент $a \in M$ кофинален. Действительно, в силу почти инвариантности найдутся такие натуральные числа $r < k$, что $a^rQa^{-r} = a^kQa^{-k}$, откуда легко следует равенство $a^{k-r}Q = Qa^{k-r}$. Пересечение всех степеней двустороннего идеала есть либо пустое множество, либо вполне первичный

идеал (см. [4]). Из минимальности вполне первичного идеала M тогда следует, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i Q = \emptyset$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} Q a^i = \emptyset$. Это и есть кофинальность элемента a .

Обозначим через K группу обратимых элементов конуса Q_M . Согласно предположению 9 конус Q_M инвариантен. Отсюда легко вытекает и инвариантность подгруппы K , иными словами, K — нормальный делитель. Далее, факторгруппа H/K изоморфна линейно упорядоченной архимедовой группе всех главных идеалов вида hQ_M ($h \in H$). Следовательно, по теореме Гёльдера H/K — абелева группа без кручения. Так как она к тому же конечно порождена, то существует эпиморфизм $H/K \rightarrow (\mathbb{Z}, +, 0)$. Следовательно, H также имеет подобный эпиморфизм.

Приведем пример группы с чистым почти инвариантным конусом, конечно порожденным как моноид, отличной от бесконечно циклической группы. Пусть G — группа, заданная порождающими x, y и соотношением $y = xux$. Легко видеть, что эта группа является полупрямым произведением бесконечно циклической нормальной подгруппы $\text{gr}\{x\}$ и подгруппы $\text{gr}\{y\}$ и что каждый элемент группы G может быть однозначно записан в виде $x^i y^j$ для подходящих целых i и j . Конус $P = \text{semigr}\{x, y\}$ искомый. Действительно, нетрудно проверить, что P состоит из всех элементов $x^i y^j$ таких, что либо $j > 0$, либо $j = 0$ и $i \geq 0$. Отсюда следует, что P на самом деле будет чистым конусом. Далее,

$$yPy^{-1} = \text{semigr}\{x^{-1}, y\}$$

и кроме P и yPy^{-1} других сопряженных конусов к конусу P нет. Это легко проверяется прямым вычислением:

$$xPx^{-1} = P, \quad x(yPy^{-1})x^{-1} = yPy^{-1}, \quad y(yPy^{-1})y^{-1} = P.$$

ТЕОРЕМА 11. *Для $n \geq 5$ группа кос $\mathcal{B}_n$ не может быть правоупорядочена так, что ее конус положительных элементов являлся бы почти инвариантным. В частности, сужение любого правого порядка группы кос $\mathcal{B}_n$ на любую подгруппу конечного индекса не может быть линейным порядком.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 10, предложения 8 и того факта, что при $n \geq 5$ группа кос $\mathcal{B}_n$ не локально индикабельна.

Список литературы

1. Artin E. Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1925. V. 4. P. 47–72.
2. Солитер Д., Магнус В., Каррас А. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
3. Dehornoy P. From large cardinals to braids via distributive algebra // J. Knot Theory Ramifications. 1995. V. 4. P. 33–79.
4. Дубровин Н. И., Дубровина Т. В. Конусы в группах // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 7. С. 59–74.
5. Дубровин Н. И. Цепные области // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1980. № 2. С. 51–54.
6. Дубровин Н. И. Пример цепного первичного кольца с нильпотентными элементами // Матем. сб. 1983. Т. 120. № 3. С. 441–447.
7. Смирнов Д. М. Правоупорядоченные группы // Алгебра и логика. 1966. Т. 5. № 6. С. 41–59.

8. Горин Е. А., Лин В. Я. Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории групп кос // Матем. сб. 1969. Т. 78. № 4. С. 579–610.

Владимирский государственный университет

E-mail: `dubr-m2@vpti.vladimir.su`, `ndubrovin@mail.ru`

Поступила в редакцию

24.01.2000