Б. Я. Левин, О росте целой функции по лучу и о распределении ее нулей по аргументам,
Матем. сб., 1937, том 44, номер 6, 1097–1142

https://www.mathnet.ru/sm5644

1937 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 2 (44), N. 6

RECUEIL MATHÉMATIQUE

О росте целой функции по лучу и о распределении ее нулей по аргументам

Б. Я. Левин (Одесса)

Введение

Бóльшая часть работ по теории роста целых функций посвящается исследованию вопросов:

1) Связи между ростом максимума модуля целой функции $M(r)$ и убыванием коэфициентов ряда Тейлора, представляющего эту функцию. Сюда относятся работы Borel'я [1], Hadamard'а [2], Lindelöf'а [3] и др.

2) Связи между ростом $M(r)$ и ростом $n(r)$, где $n(r)$ — число нулей целой функции в круге радиуса r. В этих работах используется разложение функции в бесконечное произведение по Вейерштрассу. В большинстве работ ограничиваются функциями конечного рода [4]. Первые результаты в этом направлении получены Poincaré [5], Borel'ем и Hadamard'ом.

Теорема Hadamard'а устанавливает следующий факт. Пусть

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \quad \text{и} \quad \rho_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln n(r)}{\ln r},$$

тогда

$$\rho \geqslant \rho_1.$$

С другой стороны, Borel доказал, что для канонического произведения $\rho_1 \geqslant \rho$. Из этих теорем следует, что при ρ не целом $\rho_1 = \rho$.

Кроме того, Borel'ем [1] была установлена следующая теорема о регулярности роста:

Если неравенства

$$r^{\rho-\varepsilon} < \ln M(r) < r^{\rho+\varepsilon}$$

выполняются для всех достаточно больших r, то и неравенства

$$r^{\rho-\varepsilon} < n(r) < r^{\rho+\varepsilon}$$

выполняются при всех достаточно больших r.

Верно и обратное, т. е. из вторых неравенств следуют первые. Более точные результаты установлены Lindelöf'ом [3] и Boutroux [6], которые вместо неравенств, рассмотренных Borel'ем, изучали неравенства

[1] Borel, Leçons sur les fonctions entières (Paris, 1900).

[2] Hadamard, Sur la croissance des fonctions entières (Bull. Soc. Math., **24**).

[3] Lindelöf, Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini (Acta Soc. sc. Fennicae, **31**).

[4] Впервые ввел понятие о роде Laguerre (Oeuvres compl., t. I).

[5] Poincaré, Sur les fonctions entières (Bull. Soc. Math., **18**).

[6] Boutroux, Sur quelques propriétés des fonctions entières (Acta math. **28**).

$$r^{\rho}\ln^{\alpha_1} r\ldots\ln_m^{\alpha_m-\varepsilon} r<\ln M(r)<r^{\rho}\ln^{\alpha_1} r\ldots\ln_m^{\alpha_m+\varepsilon} r^{*}$$

и

$$r^{\rho}\ln^{\alpha_1} r\ldots\ln_m^{\alpha_m-\varepsilon} r<n(r)<r^{\rho}\ln^{\alpha_1} r\ldots\ln_m^{\alpha_m+\varepsilon} r\qquad (r>R_\varepsilon)$$

и доказали, что при ρ не целом из одних неравенств следуют другие. Основные результаты Borel'я и Hadamard'а были также уточнены после введения Pringsheim'ом [7] понятия о типе функции. Типом функции называется величина

$$A=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}},$$

или, по Lindelöf'у, величина

$$A_1=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}\ln^{\alpha_1} r\ldots\ln_m^{\alpha_m} r}.$$

Пусть

$$B_1=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r)}{r^{\rho}\ln^{\alpha_1} r\ldots\ln_m^{\alpha_m} r}.$$

Lindelöf показал, что при ρ не целом B_1 и A_1 одновременно $=0$, ∞ или конечному, отличному от нуля, числу. Если же последовательность нулей растет так, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^{\rho_1}}>0,$$

где $\rho_1>[\rho]$, то, как установил Boutroux [6],

$$\ln M(r)=c(r)\,n(r)\qquad [l<c(r)<m],$$

где m и l — постоянные положительные числа.

Таким образом при ρ не целом рост $M(r)$ мало зависит от аргументов нулей целой функции. В случае же ρ целого аргументы нулей оказывают влияние на рост целой функции, так как в этом случае, согласно теореме Lindelöf'а [8], вопрос о принадлежности функции к минимальному, нормальному или максимальному типу ($A=0$, конечной величине $\neq 0$ или ∞) решается в зависимости от того, стремится ли к нулю, ограничена или неограниченно растет величина

$$\delta(r)=\left|a_0+\frac{1}{p}\sum_{|a_n|\leq r}\frac{1}{a_n^p}\right|,$$

где a_0 — коэфициент при старшем члене полинома, стоящего в показателе степени перед каноническим произведением, a_n — нули целой функции и p — род.

Итак, в общем случае для установления связи между ростом целой функции и аргументами ее нулей нельзя ограничиться исследованием функции $M(r)$, а нужно более полно исследовать рост целой функции. Для этого я использую введенное Lindelöf'ом и Phragmén'ом [9] понятие индикатора роста целой функции и, таким образом, исследую связь между аргументами нулей функции и ее ростом по различным направлениям.

---

* $\ln_\kappa x=\ln\ln_{\kappa-1} x$ и $\ln_1 x=\ln x$.

[7] Pringsheim, Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Ordnung (Math. Ann., 58).

[8] «Sur les fonctions entières d'ordre entier» (Ann. École Norm., 1906).

[9] Lindelöf et Phragmén, Sur une extension d'un principe de l'analyse ... (Acta Math., 31).

Наиболее полные результаты получены мною для функций с совокупностью нулей вполне измеримой плотности, т. е. таких, для которых существует предел:

$$\Delta(\psi) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \psi)}{r^{\rho} L(r)} \text{ (при произвольных } \psi),$$

где $n(r, \psi)$ — число нулей в секторе $0 < \arg z \leqslant \psi$, $|z| \leqslant r$ и $L(r)$ — «медленно растущая» функция *.

Здесь мне удалось установить формулу, связывающую индикатор роста $h(\varphi)$ с функцией $\Delta(\psi)$, характеризующей распределение нулей по аргументам. В главе IV я исследую функции, имеющие подмножество нулей вполне измеримой плотности.

Метод исследования, примененный в данной работе, является комбинацией метода Phragmén'a и Lindelöf'a и метода Pólya [10], [11], примененного им для оценки сумм определенного вида. Правда, этот последний метод мне пришлось сильно видоизменить.

ГЛАВА I

§ 1. В этой главе, имеющей подготовительный характер, мы установим общие теоремы о росте непрерывных функций и бесконечных последовательностей, которые нам понадобятся в дальнейшем. Обозначим через $L(r)$ функцию, обладающую следующими свойствами:

a) $L(r)$ положительна и непрерывна при $r > 1$,

b) $m^{-\varepsilon} < \frac{L(mr)}{L(r)} < m^{\varepsilon}$ при всех $m \geqslant 1$ и при $r > R(\varepsilon)$; при $m < 1$ знаки неравенств меняются, но $R(\varepsilon)$ остается то же [$R(\varepsilon)$ зависит только от $\varepsilon > 0$].

Из этого определения непосредственно следует, что

$$1 - \varepsilon_1 < \frac{L(mr)}{L(r)} < 1 + \varepsilon_1,$$

при $M_1 \leqslant m \leqslant M_2$ и $r > R_1(\varepsilon_1, M_1, M_2)$ (M_1 и M_2 — положительные числа, а R_1 зависит только от величин, стоящих в скобках), и что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{L(mr)}{L(r)} = 1 \text{ [12]}.$$

Нам понадобится следующая основная

Лемма. *Пусть* $f(r) > 0$ — *непрерывная на интервале* $(1, \infty)$ *функция, причем*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{f(r)}{r^{\rho-\varepsilon}} = \infty, \tag{1}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{r^{\rho+\varepsilon}} = 0. \tag{2}$$

---

* Точное определение см. в первой главе.

[10] Pólya, Bemerkung über unendliche Folgen und ganze Funktionen (Math. Ann., 88). См. также сноску [14] и

[11] Pólya, Über eine neue Weise bestimmte Integrale... (Göttinger Nachrichten, 1917, S. 149).

[12] Впервые аналогичное понятие ввел Landau (Bulletin de l'Acad. de Belgique, 1911, p. 443—472). По Landau $L(r)$ непрерывна, монотонна и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{L(2r)}{L(r)} = 1.$$

Существует функция $L(r)$ *такая, что*

$$f(r) \leqslant r^{\rho} L(r),$$

причем равенство выполняется для бесконечной последовательности значений r:

$$r_1 < r_2 < r_3 < \dots \quad (r_n \to \infty).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(r) = \frac{f(r)}{r^{\rho}};$$

она непрерывна при $r > 1$.

Нужно отдельно разобрать два случая:

I) $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\ \varphi(r) = \infty$,

II) $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\ \varphi(r) = c, \quad 0 < c < \infty$.

1. Займемся первым случаем. Будем откладывать в декартовой системе координат на оси x значения $\ln r$ и на оси y — значения $\ln \varphi(r)$. Таким образом получим кривую

$$y = \varphi_1(x),$$

откуда

$$\varphi(r) = e^{\varphi_1(\ln r)}.$$

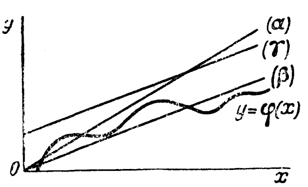
Из (2) следует, что при $r > R(\varepsilon)$

$$\varphi(r) < r^{\varepsilon}, \quad \ln \varphi(r) < \varepsilon \ln r$$

и, следовательно, при $x > x(\varepsilon)$ кривая $y = \varphi_1(x)$ находится под прямой $y = \varepsilon x$.

Построим наименьшую выпуклую область G[13], содержащую все точки кривой $y = \varphi_1(x)$ такие, что $y \geqslant 0$, $x \geqslant \eta > 0$, и все точки луча $x \geqslant 0$, $y = 0$; эта область является пересечением всех выпуклых областей, содержащих указанные точки, и, следовательно, существует, если существует хотя бы одна область, обладающая этим свойством. Но такой областью является первый квадрант, что и доказывает существование G.

a) Все точки области G с абсциссами $x > x(\varepsilon)$ лежат под прямой $y = \varepsilon x$. Если бы это не выполнялось, то вся прямая (α) $y = \varepsilon x$ принадлежала бы G.



Фиг. 1.

Проведем прямую (β) $y = \varepsilon_1 x$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. При $x > x(\varepsilon_1)$ все точки кривой $y = \varphi_1(x)$ лежат под прямой (β) (фиг. 1). Проведем теперь прямую (γ), параллельную (β), так, чтобы вся кривая $y = \varphi_1(x)$ лежала под этой прямой. Прямая (γ) делит всю плоскость на две части. Пересечение полуплоскости, содержащей прямую (β), и G дает выпуклую область G_1, меньшую чем G, но содержащую все точки кривой $y = \varphi_1(x)$, $x \geqslant \eta > 0$, $y \geqslant 0$ и луч $x \geqslant 0$, $y = 0$, а это противоречит определению G.

b) Если один из концов прямолинейного отрезка AB (например, A) — внутренняя точка G, а B принадлежит G, то внутренние точки отрезка AB суть внутренние точки области G.

[13] О выпуклых областях см. Blaschke, Kreis und Kugel (Leipzig, 1916).

В самом деле, опишем из A круг, все точки которого принадлежат G, и соединим каждую точку этого круга с B отрезком. Полученная фигура принадлежит области, и, следовательно, для каждой внутренней точки отрезка AB существует окрестность, принадлежащая G.

С л е д с т в и е. Если на отрезке AB, концы которого принадлежат границе, есть еще одна граничная точка, то он весь принадлежит границе.

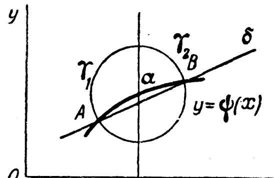
c) Прямая $x=a>0$ пересекает границу области точно в двух точках.

Точка $(a, 0)$ — граничная точка области G. Если бы на луче $x=a$, $y \geqslant 0$ не было больше граничных точек, то весь луч, а следовательно, весь I квадрант, принадлежали бы области G, а это противоречит a).

Докажем, что на этом луче нет больше двух граничных точек. Справа от луча есть внутренние точки G. Соединим одну из них отрезком с началом координат. Точка пересечения этого отрезка с лучом $x=a$, $y \geqslant 0$ — внутренняя точка G [см. b)], и, таким образом, из следствия b) вытекает, что на луче $x=a$ больше граничных точек нет. Отсюда все точки, лежащие на луче под граничной точкой (a, y), $y>0$, — внутренние точки области. Все точки, лежащие над нею, не принадлежат области G.

С л е д с т в и е. Если (x, y), $y>0$, — координаты точки границы, то $y=\psi(x)$ — однозначная функция, определенная для всех $x \geqslant 0$, причем $\psi(x) \geqslant \varphi_1(x)$.

d) Точка границы, не являющаяся внутренней точкой отрезка, состоящего из граничных точек, называется экстремальной точкой [14]. Докажем, что всякая экстремальная точка, кроме начала координат, принадлежит кривой $y=\varphi_1(x)$. Пусть $a(x_1, y_1)$ — экстремальная точка, не принадлежащая кривой $y=\varphi_1(x)$. Так как множество точек этой кривой замкнуто, когда x изменяется в замкнутом интервале, то экстремальная точка находится на конечном расстоянии $d>0$ от кривой $y=\varphi_1(x)$. Опишем из a как из центра круг радиуса $d_1<d$. Этот круг пересекает прямую $x=x_1$ в двух точках, из которых одна не принадлежит области G, а другая — внутренняя точка области [см. c)]. Поэтому на каждой из дуг γ и γ_1 (фиг. 2) есть граничная точка. Обозначим эти точки A и B и проведем через них прямую δ. Отрезок AB не может пересечь прямую $x=x_1$ над точкой a, так как он содержал бы точку, не принадлежащую области. Не может он также содержать a, так как тогда он весь принадлежал бы границе и a не была бы экстремальной точкой.



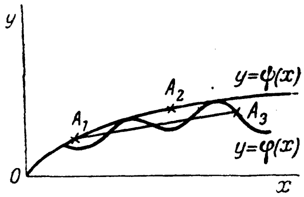
Фиг. 2.

Итак, AB содержит внутреннюю точку G. Следовательно, все точки AB, не считая концов, — внутренние точки области, и a — над прямой δ. Все остальные точки δ не принадлежат области. Взяв теперь пересечение G с полуплоскостью, ограниченной δ и содержащей кривую $y=\varphi_1(x)$, получим выпуклую область G', меньшую чем G и содержащую кривую $y=\varphi_1(x)$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Таким образом в каждой экстремальной точке $\psi(x)=\varphi_1(x)$.

[14] См. P ó l y a, Lücken und Singularitäten von Potenzreihen (Math. Zeitschr., **29**).

e) $\psi(x)$ — монотонно растущая* функция. Пусть $x_2 > x_1$, $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ — точки границы и, следовательно, $y_1, y_2 > 0$. Возьмем на кривой $v = \varphi_1(x)$ точку $A_3(x_3, y_3)$, $x_3 > x_2$, $y_3 > y_1$ [это возможно, так как $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} \varphi_1(x) = \infty$] и соединим A_1 и A_3 отрезком (фиг. 3). Точка A_2 — граничная и, следовательно, должна лежать над или на отрезке $A_1 A_3$ [см. c)].



Фиг. 3.

f) На кривой $y = \psi(x)$ существуют экстремальные точки с произвольно большими абсциссами.

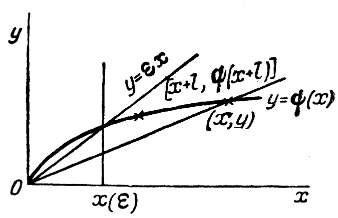
Если бы это не выполнялось, то при $x > c$, $c = \mathrm{const}$, все точки границы лежали бы на прямой. В силу монотонности $\psi(x)$ эта прямая должна иметь положительный угловой коэфициент. Но это невозможно, так как, проведя через начало координат прямую с меньшим, но положительным угловым коэфициентом, получим, что существуют точки с произвольно большими абсциссами, лежащие над этой прямой. Это противоречит положению а).

С л е д с т в и е. Существует последовательность $x_1 < x_2 < \ldots$ $(x_n \to \infty)$ такая, что

$$\varphi_1(x_n) = \psi(x_n).$$

g) $0 < \dfrac{\psi(x+l) - \psi(x)}{l} < \varepsilon$ при $x > x(\varepsilon)$, l — произвольное число.

Проведем прямую $y = \varepsilon x$ (фиг. 4). Если ε достаточно мало, то эта прямая пересекает кривую $y = \psi(x)$ в точке $(X(\varepsilon), Y(\varepsilon))$. При $x > X(\varepsilon)$ прямая, соединяющая начало координат с точкой границы (x, y), имеет меньший угловой коэфициент, так как все точки G с абсциссой $x > X(\varepsilon)$ лежат под прямой $y = \varepsilon x$. Все точки прямой между началом координат и точкой (x, y) принадлежат G, а все остальные точки прямой — не принадлежат. Отсюда следует, что угловой коэфициент хорды, соединяющей точки $(x, \psi(x))$ и $(x+l, \psi(x+l))$, меньше ε. Левая часть неравенства следует из монотонности.



Фиг. 4.

2. Перейдем теперь к случаю $\overline{\lim} \varphi(r) = c < \infty$. Построим, как и прежде, кривую $y = \varphi_1(x)$. Теперь

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \varphi_1(x) = c_1,$$

c_1 может быть равно $-\infty$. Из (1)

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\varphi(r)}{r^{-\varepsilon}} = \infty \quad \text{или} \quad \overline{\lim_{x \to \infty}} (\varphi_1(x) + \varepsilon x) = \infty.$$

Проведем теперь прямую $y = -\varepsilon_1 x_1$, $\varepsilon_1 > 0$, и возьмем отрезок этой прямой от начала координат до $x = x_1$, выбрав x_1 так, что $\varphi_1(x_1) + \varepsilon_1 x_1 > 1$. Возьмем теперь отрезок прямой $y + \varepsilon_1 x_1 = -\varepsilon_2 (x - x_1)$ от x_1 до x_2 такого, что $\varphi(x_2) + \varepsilon_2 x_2 > 2$ и т. д. (фиг. 5). Выбрав $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ $(x_n \to \infty)$ и

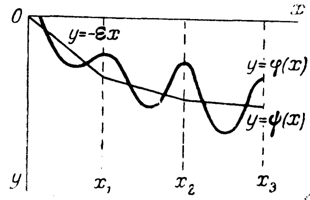
* Говоря «растущая», мы имеем в виду существенно растущую функцию, в отличие от неубывающей функции.

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$ ($\varepsilon_n \to 0$), получим кривую $y = \psi_1(x)$, состоящую из отрезков. $\psi_1(x)$ монотонно убывает и удовлетворяет условию

$$-\varepsilon < \frac{\psi_1(x+l) - \psi_1(x)}{l} < 0$$

при $x > x(\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь кривую $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - \psi_1(x)$. Очевидно, что $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\, \varphi_2(x) = \infty$; кроме того, $\psi_1(x) > -\frac{\varepsilon}{2}x$ при $x > x_1(\varepsilon)$ и $\varphi_1(x) < \frac{\varepsilon}{2}x$ при $x > x_2(\varepsilon)$. Следовательно, при достаточно большом x, $\varphi_2(x) < \varepsilon x$. Таким образом мы пришли к первому случаю.



Фиг. 5.

Построим для $\varphi_2(x)$ функцию $\psi_2(x) \geqslant \varphi_2(x)$, притом так, чтобы равенство имело место при произвольно больших значениях x. Обозначим сумму $\psi_1(x) + \psi_2(x)$ через $\psi(x)$, тогда

A) $-\varepsilon < \frac{\psi(x+l) - \psi(x)}{l} < \varepsilon$ при $x > x(\varepsilon)$,

B) $\psi(x) \geqslant \varphi_1(x)$.

Положив $L(r) = e^{\psi(\ln r)}$, найдем, что

$$\left.\begin{aligned} &A')\quad m^{-\varepsilon} < \frac{L(mr)}{L(r)} < m^{\varepsilon} \quad \text{при} \quad m > 1, \\ &\qquad m^{\varepsilon} < \frac{L(mr)}{L(r)} < m^{-\varepsilon} \quad \text{«} \quad m < 1 \end{aligned}\right\} (r > R(\varepsilon), \quad l = \ln m),$$

B') $\varphi(r) \leqslant L(r)$,

причем равенство имеет место для произвольно больших значений r.

Замечание. При доказательстве мы не пользовались тем обстоятельством, что множество точек $y = \varphi_1(x)$ образует непрерывную кривую. Достаточно предположить, что множество точек замкнуто, когда x меняется в произвольном замкнутом интервале.

§ 2. Можно также дать оценку для роста $f(r)$ снизу, если

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{r^{\rho_1+\varepsilon}} = 0, \tag{1'}$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{f(r)}{r^{\rho_1-\varepsilon}} = \infty. \tag{2'}$$

Рассматривая функцию

$$\varphi(r) = \frac{r^{\rho_1}}{f(r)},$$

получаем из предыдущей леммы

$$\varphi(r) \leqslant L(r),$$

и так как $\frac{1}{L(r)}$ входит в класс функций $L(r)$, то

$$\frac{1}{\varphi(r)} \geqslant L_1(r) \quad \text{и} \quad f(r) \geqslant r^{\rho_1} L_1(r), \tag{3}$$

причем равенство имеет место для произвольно больших значений r. Из замечания в конце § 1 следует применимость основной теоремы к бесконечной последовательности $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \ldots$ ($r_k \to \infty$) конечного порядка, т. е. такой, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{r_k}{k^{\lambda-\varepsilon}} = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{r_k}{k^{\lambda+\varepsilon}} = 0.$$

В этом случае кривая $y=\psi(x)$ состоит из отрезков, так как экстремальные точки изолированы.

Итак, существует функция $L(k)$ такая, что

$$r_k \leqslant k^{\lambda} L(k).$$

Если же, кроме того,

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{r_k}{k^{\lambda_1+\varepsilon}}=0, \quad \varlimsup_{k\to\infty} \frac{r_k}{k^{\lambda_1-\varepsilon}}=\infty,$$

то существует $L_1(k)$ такая, что

$$r_k \geqslant k^{\lambda_1} L_1(k).$$

Равенство выполняется в том и другом случае для бесконечного множества значений k.

§ 3. Пусть дана последовательность $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \ldots$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^{\rho_2+\varepsilon}} \tag{4}$$

сходится при всяком $\varepsilon>0$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r_k^{\rho_2-\varepsilon}} \tag{5}$$

расходится при всяком $\varepsilon>0$. Число $\rho_2 \geqslant 0$ называется показателем сходимости последовательности.

Из (4) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{r_k^{\rho_2+\varepsilon}}=0. \tag{4'}$$

Из (5) следует, что для бесконечного множества значений k

$$r_k^{\rho_2-\frac{\varepsilon}{3}} < k^{\frac{3\rho_2}{3\rho_2-2}}.$$

Иначе:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k}{r_k^{\rho_2-\frac{2\varepsilon}{3}}} \geqslant 1,$$

т. е.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k}{r_k^{\rho_2-\varepsilon}}=\infty. \tag{5'}$$

Возьмем точную нижнюю границу чисел ρ, для которых выполняется

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{k}{r_k^{\rho}}=\infty,$$

и обозначим ее через ρ_1; очевидно, что $0 \leqslant \rho_1 \leqslant \rho_2$,

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{k}{r_k^{\rho_1+\varepsilon}}=0 \tag{4''}$$

и

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{k}{r_k^{\rho_1-\varepsilon}}=\infty. \tag{5''}$$

Предположим сначала, что $\rho_1 > 0$, и будем рассматривать r_k как функцию от k. Тогда (4′), (5′), (4″) и (5″) можно переписать так:

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{r_k}{k^{\frac{1}{\rho_2}-\varepsilon}} = \infty, \qquad \varliminf_{k\to\infty} \frac{r_k}{k^{\frac{1}{\rho_2}+\varepsilon}} = 0,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{r_k}{k^{\frac{1}{\rho_1}-\varepsilon}} = \infty \quad \text{и} \quad \varlimsup_{k\to\infty} \frac{r_k}{k^{\frac{1}{\rho_1}+\varepsilon}} = 0.$$

Отсюда, основываясь на последнем результате предыдущего параграфа, можем утверждать, что *существуют две функции $L_1(k)$ и $L_2(k)$ такие, что*

$$k^{\frac{1}{\rho_2}} L_2(k) \leqslant r_k \leqslant k^{\frac{1}{\rho_1}} L_1(k), \tag{6}$$

причем равенства справа и слева выполняются для бесконечного множества значений k.

В случае $\rho_1 = 0$ мы будем рассматривать k как монотонную функцию r_k и, основываясь на (4′), (4″), (5″), можем написать:

$$L_1(r_k) \leqslant k \leqslant r_k^{\rho_2} L_2(r_k), \tag{7}$$

причем оба равенства выполняются для бесконечного множества значений k.

Функция $L_1(k)$ монотонно растет. В самом деле, $\ln k$ — монотонно растущая функция от $\ln r_k$. Кривая $y = \psi(x)$ составлена из отрезков прямых, соединяющих точки $(\ln r_k, \ln k)$, т. е. $\psi(x)$ монотонно растет, откуда из равенства $L_1(r_k) = e^{\psi(\ln r_k)}$ следует монотонный рост функции $L(r_k)$ *.

ГЛАВА II

§ 1. Рассмотрим каноническое произведение

$$\Phi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{z}{r_k}; p\right),$$

где

$$g\left(\frac{z}{r_k}; p\right) = \left(1 - \frac{z}{r_k}\right) e^{\frac{z}{r_k} + \ldots + \frac{z^p}{p r_k^p}},$$

причем существует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{r_k^{\rho} L^*(r_k)} = \Delta \quad [L^*(r) \text{ входит в класс функций } L(r)], \tag{1}$$

$\rho > 0$ — не целое число. Мы назовем Δ плотностью последовательности. Докажем теорему:

---

* Введенное здесь обобщение порядка роста совпадает в существенном с «уточненным порядком» Valiron'а, но при доказательстве не используются специальные свойства функции $M(r)$.

Теорема 1. $\frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}$ *стремится при* $r\to\infty$ *равномерно относительно* φ, *при* $\eta\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\eta$ $(\eta>0)$, *к пределу* $\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\varphi-\pi)$.

Естественно считать, что этот предел дает характеристику роста функции $\Phi(z)$, когда z стремится к бесконечности по лучу $\arg z=\varphi$,

$$\ln|\Phi(re^{i\varphi})|=\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\frac{r_k}{r},\varphi\right),$$

где

$$f\left(\frac{r_k}{r}\right)=\ln\left|g\left(\frac{re^{i\varphi}}{r_k};p\right)\right|.$$

Для оценки этой суммы положим $\varphi(k)=\frac{r_k}{k^{\frac{1}{\rho}}}$ и докажем, что $\varphi(k)$ относится к классу функций L *.

Из (1) следует:

$$m(1-\varepsilon_1)<\frac{r_{mk}^\rho}{r_k^\rho}\,\frac{L^*(r_{mk})}{L^*(r_k)}<m(1+\varepsilon_1),$$

для $m>1$ и $k>k_1$, зависящего от ε, или при $m<1$ и $mk>k_1$.

Из определения $L(r)$ следует, что

$$\left(\frac{r_{mk}}{r_k}\right)^{-\varepsilon}<\frac{L^*(r_{mk})}{L^*(r_k)}<\left(\frac{r_{mk}}{r_k}\right)^{\varepsilon}$$

(для $k>k_2$, не зависящего от m). Отсюда

$$[m(1-\varepsilon_1)]^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}<\frac{r_{mk}}{r_k}<[m(1+\varepsilon_1)]^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}}\quad\frac{\varphi(mk)}{\varphi(k)}=\frac{r_{mk}}{r_k}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

и

$$m^{-\varepsilon_2}<[1-\varepsilon_1]^{\frac{1}{\rho+\varepsilon_1}}m^{\frac{1}{\rho+\varepsilon_1}-\frac{1}{\rho}}<\frac{\varphi(mk)}{\varphi(k)}<m^{\frac{1}{\rho-\varepsilon}-\frac{1}{\rho}}[1+\varepsilon_1]^{\frac{1}{\rho-\varepsilon_1}}<m^{\varepsilon_2}.$$

Итак, $\varphi(k)=L_1^*(k)$ и $r_k=k^{\frac{1}{\rho}}L_1^*(k)$.

Пусть теперь $r_n\leqslant r\leqslant r_{n+1}$, т. е.

$$n^{\frac{1}{\rho}}L_1^*(n)\leqslant r\leqslant(n+1)^{\frac{1}{\rho}}L_1^*(n+1),\quad r=(n+\theta)^{\frac{1}{\rho}}L_1^*(n+\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant1,$$

и пусть $n_1=n+\theta$. Тогда

$$\frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{n_1}=\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{\infty}f\left[\frac{m^{\frac{1}{\rho}}L_1^*(k)}{n^{\frac{1}{\rho}}L_1^*(n_1)},\varphi\right],\quad f(x,\varphi)=\ln\left|g\left(\frac{e^{i\varphi}}{x},p\right)\right|,$$

---

* $\varphi(k)$ можно сделать непрерывной, соединяя точки $[k,\varphi(k)]$ и $[k+1,\varphi(k+1)]$ отрезками.

$f(x, \varphi)$ равномерно непрерывна при $\varepsilon_1 \leqslant x \leqslant m$ и $\eta < \varphi \leqslant 2\pi\eta$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\eta > 0$. При n_1 достаточно большом и $\varepsilon_1 \leqslant x \leqslant m$

$$\left| \frac{L_1^*(k)}{L_1^*(n_1)} - 1 \right| < \frac{\delta}{m^{\frac{1}{\rho}}},$$

где δ сколь угодно мало. Отсюда получаем:

$$\left| \left(\frac{k}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} \frac{L_1^*(k)}{L_1^*(n_1)} - \left(\frac{k}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} \right| = \left(\frac{k}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} \left| \frac{L_1^*(k)}{L_1^*(n_1)} - 1 \right| < m^{\frac{1}{\rho}} \frac{\delta}{m^{\frac{1}{\rho}}} = \delta,$$

$$\left| f\left[\left(\frac{k}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} \frac{L_1^*(k)}{L_1^*(n_1)}, \varphi\right] - f\left[\left(\frac{k}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \varphi\right] \right| < \varepsilon.$$

При $\eta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \eta$, $\eta > 0$, это неравенство выполняется при всех $n_1 > N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ зависит только от ε и не зависит ни от k, ни от φ. Отсюда легко получается:

$$\left| \frac{1}{n_1} \sum_{\varepsilon n_1 \leqslant k \leqslant m n_1} f\left[\left(\frac{k}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} \frac{L_1^*(k)}{L_1^*(n_1)}, \varphi\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n_1} \sum_{\varepsilon_1 n_1 \leqslant k \leqslant m n_1} f\left[\left(\frac{k}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \varphi\right] \right| < \varepsilon \frac{[n_1(m - \varepsilon_1)]}{n_1} \leqslant \varepsilon(m - \varepsilon_1). \qquad (2)$$

Разобьем теперь нашу сумму на три:

$$\frac{1}{n_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} f\left[\left(\frac{\nu}{m}\right)^{\frac{1}{\rho}} \frac{L_1^*(\nu)}{L_1^*(n_1)}, \varphi\right] = \frac{1}{n_1}\left[\sum_{\nu < \varepsilon_1 n_1} + \sum_{\varepsilon_1 n_1 \leqslant \nu \leqslant n_1 k} + \sum_{\nu > n_1 k}\right].$$

Для оценки первой суммы заметим, что

$$|f(x, \varphi)| < \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k x^k} \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Обозначим правую часть неравенства через $\psi(x)$, тогда

$$\frac{1}{n_1}\left| \sum_{\nu < \varepsilon_1 n_1} f\left[\left(\frac{\nu}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} \frac{L_1^*(\nu)}{L_1^*(n_1)}, \varphi\right] \right| < \frac{1}{n_1} \sum_{\nu < \varepsilon_1 n_1} \psi\left[\left(\frac{\nu}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} \frac{L_1^*(\nu)}{L_1^*(n_1)}\right],$$

и так как $\psi(x)$ монотонно убывает, то эта сумма меньше чем

$$\frac{1}{n_1} \sum_{\nu < \varepsilon_1 n_1} \psi\left[\left(\frac{\nu}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon_2}\right] + o(1)^*.$$

Оценка верна при всех φ из интервала $\eta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \eta$, и при $n_1 \to \infty$ это выражение стремится к

$$\int_0^{\varepsilon_1} \psi\left(x^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon_2}\right) dx$$

* $o(1)$ — величина, стремящаяся к нулю.

[при $\rho > p$ и x близком к нулю $|\psi(x^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon_2})| < \frac{1}{x^{1-\eta_1}}$ $(\eta_1 > 0)$, и, следовательно, написанный интеграл имеет смысл].

Для оценки третьей суммы заметим, что при $x > 1$

$$|f(x, \varphi)| \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} \left| \frac{\cos k\varphi}{kx^k} \right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{kx^k} = -f(x, 0).$$

Заметим, что $-f(x, 0)$ монотонно убывает. Отсюда легко получается, что третья сумма меньше по модулю, чем $\int\limits_k^{\infty} f(x^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2}, 0)\,dx + o(1)$ [при $\rho < p+1$ и x достаточно большом $|f(x^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2}, 0)| = \frac{1}{(p+1)\,x^{(p+1)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2\right)}} + \ldots < \frac{1}{x^{1+\eta_1}}$, $\eta_1 > 0$].

Остается только оценить вторую сумму. Из (2) имеем:

$$\lim_{n_1 \to \infty} \frac{1}{n_1} \sum f\left[\left(\frac{\nu}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} \frac{L_1^*(\nu)}{L_1^*(n_1)}, \varphi\right] =$$

$$= \lim_{n_1 \to \infty} \frac{1}{n_1} \sum_{\varepsilon_1 n_1 \leqslant \nu \leqslant k n_1} f\left[\left(\frac{\nu}{n_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}, \varphi\right] = \int\limits_{\varepsilon_1}^{k} f(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi)\,dx.$$

Обозначим вторую сумму через $S_n(\varphi)$. Из равномерной непрерывности $f(x, \varphi)$ следует:

$$|f(x_2, \varphi) - f(x_1, \varphi)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x_2 - x_1| < \delta,$$

независимо от φ из интервала $\langle \eta, 2\pi - \eta \rangle$. Пользуясь этим и повторяя обычное доказательство существования интеграла непрерывной функции, легко показать равномерную сходимость $S_n(\varphi)$ к интегралу. Пусть

$$\left| \int\limits_0^{\varepsilon_1} \psi(x^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1})\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \left| \int\limits_k^{\infty} f(x^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2}, 0)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{5}$$

и

$$\left| S_{n_1}(\varphi) - \int\limits_{\varepsilon_1}^{k} f(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{5},$$

тогда

$$\left| \frac{\ln |\Phi(re^{i\varphi})|}{n_1} - \int\limits_0^{\infty} f(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi)\,dx \right| < \varepsilon$$

при всех $n_1 > N_1(\varepsilon)$, где $N_1(\varepsilon)$ зависит только от ε. Наконец, из (1)

$$\left| \frac{\ln |\Phi(re^{i\varphi})|}{r^{\rho} L^*(r)} - \Delta \int\limits_0^{\infty} f(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi)\,dx \right| < \varepsilon_1 \quad \text{при} \quad r > R(\varepsilon_1)$$

и

$$\int_0^\infty \left(\ln\left|1-\frac{e^{i\varphi}}{x^{\frac{1}{\rho}}}\right| + \sum_{m=1}^{p} \frac{\cos m\varphi}{mx^{\frac{m}{\rho}}}\right) dx = R\int_0^\infty \left(\ln\left(1-\frac{e^{i\varphi}}{x^{\frac{1}{\rho}}}\right) + \sum_{m=1}^{p} \frac{e^{im\varphi}}{mx^{\frac{m}{\rho}}}\right) dx.$$

Положив $x=u^{\rho}$ и интегрируя по частям, находим

$$Re^{ip\varphi}\int_0^\infty \frac{u^{p-\rho}}{u-e^{i\varphi}}\,du = \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\varphi-\pi) \quad (0<\varphi<2\pi)\ ^{15}.$$

§ 2. Рассмотрим теперь случай ρ целого. Здесь есть две возможности:

1) ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{r_\nu^{\rho}}$ расходится и, следовательно, $\rho=p$, где p — род функции,

2) ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{r_\nu^{\rho}}$ сходится и $\rho=p+1$.

В первом случае ($\rho=p$) представим сумму

$$\frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^{\rho}L(r)} = \frac{1}{r^{\rho}L^{*}(r)}\sum_{\nu=1}^{\infty} f\left(\frac{r_\nu}{r},\varphi\right)$$

в виде:

$$\frac{1}{r^{\rho}L^{*}(r)}\left[\sum_{r_\nu\leqslant r} f_1\left(\frac{r_\nu}{r},\varphi\right) + \sum_{r_\nu>r} f\left(\frac{r_\nu}{r},\varphi\right) + \frac{r^{\rho}\cos p\varphi}{p}\sum_{r_\nu\leqslant r}\frac{1}{r_\nu^{p}}\right], \tag{3}$$

где

$$f_1\left(\frac{r_\nu}{r},\varphi\right) = \ln\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{r_\nu}\right| + \sum_{k=1}^{p-1}\frac{r^k\cos k\varphi}{kr_\nu^k}, \quad f\left(\frac{r_\nu}{r},\varphi\right) - f_1\left(\frac{r_\nu}{r},\varphi\right) = \frac{r^p\cos p\varphi}{pr_\nu^p}.$$

$f_1\left(\frac{r_\nu}{r},\varphi\right)$ удовлетворяет в окрестности нуля условию

$$\left|f_1\left(x^{\frac{1}{\rho}},\varphi\right)\right| < \frac{1}{x^{1-\eta_1}} \quad (\eta_1>0),$$

так как $p-1<\rho$. $f(x,\varphi)$ удовлетворяет в окрестности $x=\infty$ условию:

$$\left|f\left(x^{\frac{1}{\rho}},\varphi\right)\right| < \frac{1}{x^{1+\eta}} \quad (\eta>0),$$

так как при достаточно большом x

$$f(x,\varphi) = \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{r^k\cos k\varphi}{kr_\nu^k} \quad \text{и} \quad \rho=p<p+1.$$

Итак, для оценки первых двух сумм, входящих в (3), получаем, так же как и в предыдущем параграфе,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^{\rho}L^{*}(r)}\left[\sum_{r_\nu\leqslant r} f_1\left(\frac{r_\nu}{r},\varphi\right) + \sum_{r_\nu>r} f\left(\frac{r_\nu}{r},\varphi\right)\right] =$$

$$=\Delta\left[\int_0^1 f_1\left(x^{\frac{1}{\rho}},\varphi\right)dx + \int_1^\infty f\left(x^{\frac{1}{\rho}},\varphi\right)dx\right] = -\Delta\left[\frac{\cos p\varphi}{p} + \varphi\sin p\varphi\right].$$

[15] См., например, Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, т. I, стр. 159.

Оценим теперь третью сумму. Из $r_\nu = \nu^{\frac{1}{\rho}} L_1^*(\nu)$ и $L_1^*(n_1) > (1-\varepsilon_1) L_1^*(\nu)$ следует, что при $n \leqslant \nu < n_1$ и $\cos p\varphi > 0$:

$$\frac{\cos p\varphi}{pr^p L^*(r)} \sum_{r_\nu \leqslant r} \left(\frac{r_\nu}{r}\right)^p = \frac{\Delta \cos p\varphi}{pn_1} \sum_{\nu \leqslant n_1} \frac{n_1 L_1^{*\,p+1}(n_1)}{\nu L_1^{*\,p+1}(\nu)} > \frac{\Delta \cos p\varphi}{pn_1} \sum_{\eta n_1 \leqslant \nu \leqslant n_1} \frac{n_1 L_1^{*\,p+1}(n_1)}{\nu L^{*\,p+1}(\nu)} >$$

$$> \frac{\Delta \cos p\varphi}{p} \sum_{\eta n_1 \leqslant \nu \leqslant n_1} (1-\varepsilon_1) \frac{1}{\nu} = o(1) + (1-\varepsilon_1) \frac{\Delta \cos p\varphi}{p} \ln \frac{1}{\eta} \to \infty \quad \text{при } \eta \to 0$$

и, окончательно,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^\rho L(r)} = \infty \quad \text{при} \quad \cos p\varphi > 0.$$

Пусть теперь $\rho = p+1$. В этом случае $\lim\limits_{r\to\infty} L^*(r) = 0$, так как из сходимости ряда $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r_\nu^\rho}$ следует

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{r_\nu^\rho} = 0, \quad \text{а} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\nu}{r_\nu^\rho L(r_\nu)} = \Delta > 0.$$

Представим нашу сумму

$$\frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} = \frac{1}{r^\rho L^*(r)} \sum_{\nu=1}^{\infty} f\left(\frac{r_\nu}{r}, \varphi\right)$$

в виде:

$$\frac{1}{r^\rho L^*(r)} \left[\sum_{r_\nu \leqslant r} f\left(\frac{r_\nu}{r}, \varphi\right) + \sum_{r_\nu > r} f_2\left(\frac{r_\nu}{r}, \varphi\right) - \frac{r^{p+1}}{p+1} \cos(p+1)\varphi \sum_{r_\nu > r} \frac{1}{r_\nu^{p+1}} \right],$$

где

$$f_2\left(\frac{r_\nu}{r}, \varphi\right) = \ln\left|1 - \frac{re^{i\varphi}}{r_\nu}\right| + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{r^k \cos k\varphi}{kr_\nu^k}.$$

Функция $f(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi)$ удовлетворяет в окрестности нуля условию

$$|f(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi)| < \frac{1}{x^{1-\eta}} \quad (\text{так как } \rho > p).$$

Кроме того,

$$|f_2(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi)| < \frac{1}{x^{1+\eta_1}} \quad (\eta_1 > 0)$$

в окрестности точки ∞, так как $\rho < p+2$. Отсюда

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^\rho L^*(r)} \left[\sum_{r_\nu \leqslant r} f\left(\frac{r_\nu}{r}, \varphi\right) + \sum_{r_\nu > r} f_2\left(\frac{r_\nu}{r}, \varphi\right) \right] =$$

$$= \Delta \left[\int_0^1 f(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi)\, dx + \int_1^\infty f_2(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi)\, dx \right] = -\Delta \left[\frac{\cos \rho\varphi}{\rho} + \varphi \sin \rho\varphi \right] \quad (\rho = p+1).$$

Остается оценить сумму

$$\frac{\cos(p+1)\varphi}{(p+1) r^\rho L^*(r)} \sum_{r_\nu > r} \frac{r^{p+1}}{r_\nu^{p+1}}.$$

Имеем:

$$\frac{1}{r^\rho L^*(r)} \sum_{r_\nu > r} \frac{r^{p+1}}{r_\nu^{p+1}} = \frac{\Delta}{n_1} \sum_{\nu > n_1} \frac{n_1 L_1^{p+1}(n_1)}{\nu L_1^{p+1}(\nu)} > \Delta(1-\varepsilon_1) \sum_{n_1 < \nu \leqslant k n_1} \frac{1}{\nu} = \Delta(1-\varepsilon_1)\ln k.$$

Для произвольного k существует $N(k)$ такое, что при $n_1 > N(k)$ неравенство имеет место. Иначе

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^\rho L^*(r)} \sum_{r_\nu > r} \frac{r^{p+1}}{r_\nu^{p+1}} = \infty$$

или

$$\lim \frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} = \infty$$

при $\cos(p+1)\varphi > 0$.

Рассмотрим еще функцию, которая будет играть большую роль в дальнейшем, при изучении функций целого порядка:

$$\Phi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{r^{2p}}{r_\nu^{2p}}\right),$$

где все r_ν вещественны, ρ — целое и

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{r_\nu^\rho L^*(r_\nu)} = \Delta.$$

Функция $f(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi) = \ln\left|1 - \frac{e^{2i\rho\varphi}}{x^r}\right|$ непрерывна при $\varphi \neq \frac{k\pi}{\rho}$ и вещественном x.

По теореме § 1 этой главы:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} = \Delta \int_0^\infty \ln\left|1 - \frac{e^{2i\rho\varphi}}{x^r}\right| dx = \pi\Delta\,|\sin\rho\varphi|.$$

Левая часть стремится к пределу равномерно относительно φ при

$$\frac{k\pi}{\rho} + \eta \leqslant \varphi \leqslant \frac{k+1}{\rho}\pi - \eta \quad (\eta > 0).$$

Замечание. Если предположить, что нули канонического произведения лежат не на положительном луче, а на некотором луче $\arg z = \varphi$, то во всех полученных формулах следует φ заменить через $\varphi - \psi$.

§ 3. Теорема 2. *Для всякой функции $L^*(r)$ и произвольного не целого ρ можно построить целую функцию $F(z)$ такую, что*

$$\frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} \to \varepsilon A\cos\rho(\varphi - \psi - \pi) \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

равномерно для всех φ вне интервала $(\psi - \eta, \psi + \eta)$ $(\eta > 0)$, A и φ — произвольные числа. При ρ целом можно построить целую функцию $\Phi(z)$ такую, что

$$\frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} \to |A|\,|\sin\rho(\varphi - \psi)|$$

равномерно относительно φ вне интервалов $\left(\frac{k\pi}{\rho} - \eta, \frac{k\pi}{\rho} + \eta\right)$.

Доказательство. При ρ не целом построим каноническое произведение

$$F(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty} g\left(\frac{z}{a_\nu} p\right),$$

где $|a_\nu|$ — корень уравнения

$$\left|\frac{\sin \pi\rho}{\pi A}\right| r^\rho L^*(r)=\nu \quad \text{и} \quad a_\nu=|a_\nu| e^{i\psi}.$$

По теореме § 1 этой главы и замечанию § 5 $F(z)$ удовлетворяет требованиям теоремы.

При ρ целом можно взять функцию

$$\Phi(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2\rho}}{a_\nu^{2\rho}}\right),$$

где $|a_\nu|$ — корень уравнения

$$\frac{1}{\pi|A|} r^\rho L^*(r)=\nu \quad \text{и} \quad a_\nu=|a_\nu| e^{i\psi}.$$

Теорема 3. *Пусть дан угол, образованный лучами* $\arg z=\varphi_1$ *и* $\arg z=\varphi_2$ *(сокращенно* $<\varphi_1, \varphi_2>$*), раствора меньшего, чем наименьшее из чисел* $\frac{\pi}{\rho}$ *и* 2π; ρ — *произвольно заданное. Существует функция* $V(z)$, *голоморфная и не обращающаяся в нуль внутри этого угла, причем*

$$\frac{\ln|V(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} \longrightarrow c_1 \cos\rho\varphi+c_2 \sin\rho\varphi$$

при $r \longrightarrow \infty$ *равномерно в интервале* $<\varphi_1, \varphi_2>$, c_1 *и* c_2 *произвольно заданы.*

Доказательство. При ρ не целом выберем ψ_1 и ψ_2 вне интервала $<\varphi_1, \varphi_2>$ и определим два числа A_1 и A_2 из уравнения

$$A_1 \cos\rho(\varphi-\psi_1-\pi)+A_2 \cos\rho(\varphi-\psi_2-\pi)=c_1 \cos\rho\varphi+c_2 \sin\rho\varphi.$$

Построим функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ такие, чтобы

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|F_1(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}=\varepsilon_1 A_1 \cos\rho(\varphi-\psi_2-\pi) \quad (\varepsilon=\pm 1),$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|F_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}=\varepsilon_2 A_2 \cos\rho(\varphi-\psi_2-\pi).$$

Тогда:

$$V(z)=F_1^{\varepsilon_1}(z)\, F_2^{\varepsilon_2}(z).$$

При ρ целом следует вместо функций $F(z)$ взять $\Phi(z)$, определенные в предыдущей теореме.

§ 4. Пусть $M(r)$ — максимум модуля целой функции порядка ρ на круге радиуса r. $M(r)$ — растущая непрерывная функция.

По основной теореме первой главы существует такая функция $L(r)$, что $\ln M(r) \leqslant r^\rho L(r)$, причем равенство имеет место для бесконечной последовательности значений r, имеющей точку сгущения на бесконечности.

Определим индикатор роста $h(\varphi)$ целой функции $F(z)$ равенством

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^\rho L(r)}.$$

Очевидно, что $h(\varphi) \leqslant 1$.

Теорема 4. *Для $h(\varphi)$ имеет место следующее основное неравенство:*

$$h(\varphi_1)\sin\rho(\varphi_2-\varphi_3) + h(\varphi_2)\sin\rho(\varphi_3-\varphi_1) + h(\varphi_3)\sin\rho(\varphi_1-\varphi_2) \leqslant 0 \text{ [9]}, \tag{4}$$

где $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \varphi_3$ и $\varphi_3-\varphi_1$ меньше наименьшего из чисел $\frac{\pi}{\rho}$ и 2π.

Доказательство. Построим определенную раньше функцию $V(z)$, выбрав $c_1(\varepsilon)$ и $c_2(\varepsilon)$ так, что

$$c_1(\varepsilon)\cos\rho\varphi_j + c_2(\varepsilon)\sin\rho\varphi_j = h(\varphi_j)+\varepsilon, \quad j=1, 3, \ldots, \quad \varepsilon>0.$$

Отношение $\frac{F(z)}{V(z)}$ — голоморфная внутри угла $\langle\varphi_1, \varphi_3\rangle$ функция и

$$\left|\frac{F(z)}{V(z)}\right| < Ae^{r^{\rho+\eta}},$$

где

$$\eta>0, \quad \frac{\pi}{\rho+\eta} > \varphi_3-\varphi_1 \quad \text{и} \quad \varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_3.$$

Кроме того, $\frac{F(z)}{V(z)}$ стремится к нулю по лучам φ_1 и φ_3, так как

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|F(re^{i\varphi})| - \ln|V(re^{i\varphi})|}{r^\rho L(r)} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^\rho L(r)} - \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|V(re^{i\varphi})|}{r^\rho L(r)} = -\varepsilon.$$

Отсюда, по известной теореме Lindelöf'а et Phragmén'а [9], следует, что $\frac{F(z)}{V(z)}$ стремится к нулю по любому лучу внутри угла $\langle\varphi_1, \varphi_3\rangle$, т. е.

$$h(\varphi_2) \leqslant c_1(\varepsilon)\cos\rho\varphi_2 + c_2(\varepsilon)\sin\rho\varphi_2.$$

$c_1(\varepsilon)$ и $c_2(\varepsilon)$ — непрерывные функции от ε, и, следовательно, в этом неравенстве ε можно заменить нулем. Отсюда и из определения c_1 и c_2 следует (4) [*]. Из (4) легко получается непрерывность $h(\varphi)$ [7,**].

Теорема 5. *Существует по крайней мере одно значение φ, при котором $h(\varphi)=1$* [***].

Доказательство. Проведем лучи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, которые разделят плоскость на n частей:

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle, \quad \langle\varphi_2, \varphi_3\rangle, \ldots, \langle\varphi_n, \varphi_1\rangle.$$

Пусть $M_1(r)$, $M_2(r)$, ..., $M_n(r)$ — максимум модуля функции на дугах радиуса r внутри соответствующих углов. Ясно, что $M_k(r) \leqslant M(r)$ и, следовательно,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_k(r)}{r^\rho L(r)} \leqslant 1.$$

---

* При выводе мы не пользовались тем, что $L(r)$ выбрано особым образом в определении $h(\varphi)$. Неравенство верно при любом $L(r)$.

** Непрерывность точно так же, как и теорему гл. IV, § 4, d), можно получить, заметив, что $h\left(\frac{\varphi}{\rho}\right)$ есть «Stützfunktion» некоторой выпуклой кривой.

*** Для функций нормального типа порядка Lindelöf'а эта теорема доказана Pólya (см. сноску [14]).

По крайней мере в одном из углов должен иметь место знак равенства, так как в противном случае было бы

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho} L(r)} < 1,$$

что противоречит определению $L(r)$. Можно продолжать деление и получить угол сколь угодно малого раствора, в котором

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_1(r)}{r^{\rho} L(r)} = 1. \tag{5}$$

Предположим теперь, что $h(\varphi) < 1 - \varepsilon$ при всяком φ. Построим вспомогательную функцию $V(z)$, выбрав $\psi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \pi$ и $A = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.
Получим:

$$\frac{\ln |V(re^{i\varphi})|}{r^{\rho} L(r)} \rightrightarrows \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos\rho \left(\varphi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) {}^{*}.$$

При $|\varphi_2 - \varphi_1| < \delta(\varepsilon)$ имеем

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos\rho \left(\varphi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) > 1 - \varepsilon.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |F(re^{i\varphi_j})| - \ln |V(re^{i\varphi_j})|}{r^{\rho} L(r)} < 0$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\Phi(z)}{V(z)}\right| < M$$

во всем угловом пространстве, т. е.

$$M_1(r) \leqslant M \max_{\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2} |V(re^{i\varphi})|.$$

При r достаточно большом

$$\max_{\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2} \frac{\ln |V(re^{i\varphi})|}{r^{\rho} L(r)} < 1 - \frac{\varepsilon}{4}$$

и, окончательно,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_1(r)}{r^{\rho} L(r)} \leqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Противоречие с (5) доказывает теорему**.

Следствие. При некотором значении φ

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |F(re^{i\varphi})|}{\ln M(r)} = 1 \text{ [16]}.$$

---

* Знак $\rightrightarrows$ обозначает равномерное стремление к пределу.

** При этом выводе несущественно, что $L(r)$ выбрано особым образом. Можно утверждать, что для любого $L(r)$ найдется φ, при котором

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |F(re^{i\varphi})|}{r^{\rho} L(r)} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho} L(r)}.$$

[16] Эта теорема не имеет места для функций бесконечного рода, так как существуют функции бесконечного рода, растущие по любому лучу, как степенная функция. См. Grandjot, Über Grenzwerte ganzer transzendenter Funktionen (Math. Ann., **91**).

Это следует из доказанной теоремы и неравенств

$$\ln|F(re^{i\varphi})|\leqslant \ln M(r)\leqslant r^{\rho}L(r).$$

Теорема 6. *Существует угол* (φ_2, φ_3) $(\varphi_3-\varphi_2\geqslant\frac{\pi}{\rho})$ *такой, что при* $\varphi_2<\varphi<\varphi_3$ $h(\varphi)>0$ [17].

Доказательство. Пусть при $\varphi=\varphi_1$ $h(\varphi_1)=1$. Обозначим φ_2 наибольший из корней уравнения $h(\varphi)=0$, меньших φ_1, и через φ_3 — наименьший из корней того же уравнения, бо̀льших φ_1. Если $\varphi_3-\varphi_2<\frac{\pi}{\rho}$, то из основного неравенства (4) для $h(\varphi)$ следует $h(\varphi_1)\leqslant 0$. Теорема доказана.

Из основного неравенства для $h(\varphi)$ легко получить, что при $\rho<1$ $h(\varphi)\geqslant\cos\pi\rho$. Это дает возможность просто доказать известную теорему Wiman'a [18].

Пусть

$$F(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)$$

— целая функция порядка $\rho<1$ и пусть $m(r)$ — минимум $|F(z)|$ на круге радиуса r. Существует последовательность $r_1<r_2<\ldots$ $(r_n\to\infty)$ такая, что

$$m(r_n)>[M(r_n)]^{\cos\pi\rho-\varepsilon}.$$

Очевидно, что

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left|1-\frac{r}{r_\nu}\right|\leqslant|F(z)|\leqslant\prod_{\nu=1}^{\infty}\left|1+\frac{r}{r_\nu}\right|.$$

Пусть теперь

$$F_1(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r_\nu}\right)$$

и $h_1(\varphi)$ — индикатор роста для $F_1(z)$. Тогда:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln m(r)}{\ln M(r)}\geqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F_1(r)|}{\ln F_1(-r)}\geqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F_1(r)|}{r^{\rho}L(r)}=h_1(0)\geqslant\cos\pi\rho\ ^*.$$

ГЛАВА III

§ 1. В предыдущей главе мы получили рост по лучу целой функции в зависимости от распределения ее нулей, если все нули лежат на одном луче и имеют плотность Δ, т. е.

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu}{r_\nu^{\rho}\overset{*}{L}(r_\nu)}=\Delta.$$

---

[17] Milloux доказал существование угла раствора $\frac{\pi}{\rho}$, внутри которого порядок функции на любом луче равен ее порядку во всей плоскости (C. R., **176**, «Sur la croissance de fonctions entières»).

[18] Wiman, Über die Eigenschaften der ganzen Funktionen von der Höhe Null (Math. Ann., **76**).

* Этот метод доказательства принадлежит Valiron'y (Annales de Toulouse, 1913).

Рассмотрим теперь более общий случай, когда нули целой функции имеют произвольные аргументы, но вся совокупность нулей имеет плотность внутри любого угла с вершиной в нулевой точке, т. е. существует

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\psi_1,\psi_2)}{r^\rho L^*(r)},$$

где $n(r, \psi_1, \psi_2)$ — число нулей, расположенных внутри угла (ψ_1, ψ_2), с модулем, меньшим или равным r. Нули, лежащие на луче $\arg z=\psi_1$, не входят в это число, лежащие на луче $\arg z=\psi_2$ — входят. Такую совокупность нулей мы будем называть совокупностью измеримой плотности.

Распределение нулей по аргументам будет характеризоваться функцией:

$$\Delta(\psi)=\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,0,\psi)}{r^\rho L^*(r)}. \tag{1}$$

Плотность нулей внутри угла $(\psi_1, \psi_2\rangle$, равная $\Delta(\psi_2)-\Delta(\psi_1)$, — функция, не убывающая в интервале $(0, 2\pi\rangle$, причем $\Delta(0)=0$ и $\Delta(2\pi)$ дает общую плотность всех нулей. Вне интервала $(0, 2\pi\rangle$ $\Delta(\psi)$ определим равенством:

$$\Delta(2\pi n+\psi)=n\Delta(2\pi)+\Delta(\psi),$$

n — целое число.

Из монотонности и ограниченности функции $\Delta(\psi)$ следует, что число точек, в которых $\Delta(\psi+0)-\Delta(\psi-0)>\varepsilon$, конечно и множество точек разрыва $\Delta(\psi)$ счетно.

§ 2. Теорема 1. *Пусть $F(z)$ — целая функция не целого порядка ρ, совокупность нулей которой имеет вполне измеримую плотность с функцией распределения* $\Delta(\psi)$ [см. (1)], *и пусть $H(\varphi)$ определено равенством*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}=H(\varphi).$$

Тогда

$$H(\varphi)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\cos\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\Delta(\psi). \tag{2}$$

Докажем это. Пусть

$$F(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}G\left(\frac{z}{r_\nu e^{i\psi_\nu}},\ p\right)=$$

$$=\prod_{\nu_1=1}^{\infty}G\left(\frac{z}{r_{\nu_1}e^{i\psi_{\nu_1}}},\ p\right)\cdot\prod_{\nu_2=1}^{\infty}G\left(\frac{z}{r_{\nu_2}e^{i\psi_{\nu_2}}},\ p\right)=\Phi_1(z)\cdot\Phi_2(z).$$

В $\Phi_2(z)$ входят все нули $F(z)$, лежащие внутри угла $\langle\varphi_1-\eta,\ \varphi_2+\eta\rangle$, а в $\Phi_1(z)$ — все остальные нули.

Займемся раньше функцией $\Phi_1(z)$:

$$\frac{\ln|\Phi_1(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}=\frac{1}{r^\rho L^*(r)}\sum_{\nu=1}^{\infty}f\left(\frac{r_\nu}{r},\ \varphi-\psi_\nu\right), \tag{3}$$

где

$$f\left(\frac{r_\nu}{r},\ \varphi-\psi_\nu\right)=\ln\left|G\left(\frac{re^{i\varphi}}{r_\nu e^{i\psi_\nu}},\ p\right)\right|.$$

Разобьем теперь нашу сумму на три:

$$\frac{1}{r^{\rho} L^{*}(r)} \sum_{\nu=1}^{\infty} = \frac{1}{r^{\rho} L^{*}(r)} \left[\sum_{r_{\nu} \leqslant \varepsilon r} + \sum_{\varepsilon r < r_{\nu} \leqslant kr} + \sum_{r_{\nu} > kr} \right], \tag{4}$$

где ε — малое положительное число, а $k > 1$. Последнюю сумму легко оценить, заметив, что при $x > k$

$$|f(x, \theta)| \leqslant |f(x, 0)| = -f(x, 0).$$

В самом деле,

$$|f(x, \theta)| = \left| \ln \left| 1 - \frac{e^{i\theta}}{x} \right| + \sum_{\mu=1}^{p} \frac{\cos \mu\theta}{\mu x^{\mu}} \right| = \left| - \sum_{\mu=p+1}^{\infty} \frac{\cos \mu\theta}{\mu x^{\mu}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{\mu=p+1}^{\infty} \frac{1}{\mu x^{\mu}} \right| = -f(x, 0),$$

Отсюда следует:

$$\frac{1}{r^{\rho} L^{*}(r)} \left| \sum_{r_{\nu} > kr} f\left(\frac{r_{\nu}}{r}, \varphi - \psi_{\nu}\right) \right| \leqslant \frac{1}{r^{\rho} L^{*}(r)} \left| \sum_{r_{\nu} > kr} f\left(\frac{r_{\nu}}{r}, 0\right) \right|.$$

Согласно выводу на стр. 1108 предел последнего выражения при $r \to \infty$ меньше, чем

$$\left| \Delta \int_{k'}^{\infty} f(x^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon_1}, 0)\, dx \right| = v_1(k),$$

где Δ — плотность всех нулей функции $\Phi_1(z)$ и k' стремится к бесконечности вместе с k. Отсюда:

$$\frac{1}{r^{\rho} L^{*}(r)} \left| \sum_{r_{\nu} > kr} f\left(\frac{r_{\nu}}{r}, \varphi - \psi_{\nu}\right) \right| < v_1(k) + v_2(r). \tag{5}$$

[$v_1(k) \to 0$ при $k \to \infty$ и $v_2(r) \to 0$ при $r \to \infty$], при всех $r > R(k)$ и независимо от $\varphi - \psi_{\nu}$.

Точно так же при $x < \varepsilon$ верно

$$|f(x, \varphi - \psi_{\nu})| < \hat{f}(x),$$

где

$$\hat{f}(x) = \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| + \sum_{\mu=1}^{p} \frac{1}{\mu x^{\mu}}.$$

Отсюда получаем:

$$\left| \frac{1}{r^{\rho} L^{*}(r)} \sum_{r_{\nu} \leqslant \varepsilon r} f\left(\frac{r_{\nu}}{r}, \varphi - \psi_{\nu}\right) \right| < \frac{1}{r^{\rho} L^{*}(r)} \sum_{r_{\nu} \leqslant \varepsilon r} \hat{f}\left(\frac{r_{\nu}}{r}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \Delta \int_{0}^{\varepsilon'} \hat{f}(x^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon_1})\, dx = v_3(\varepsilon),$$

где $\varepsilon' \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, причем второе неравенство выполняется при $r > R(\varepsilon)$ и, следовательно,

$$\left| \frac{1}{r^{\rho} L^{*}(r)} \sum_{r_{\nu} \leqslant \varepsilon r} f\left(\frac{r_{\nu}}{r}, \varphi - \psi_{\nu}\right) \right| \leqslant v_3(\varepsilon) \tag{6}$$

при $r > R(\varepsilon)$, где $R(\varepsilon)$ не зависит от φ.

Перейдем теперь ко второй сумме:

$$\frac{1}{r^\rho L^*(r)} \sum_{\varepsilon r < r_\nu \leqslant kr} f\left(\frac{r_\nu}{r},\ \varphi - \psi_\nu\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^\rho L^*(r)} \sum_{\substack{\varepsilon r < r_\nu \leqslant kr \\ \theta_i < \psi_\nu \leqslant \theta_{i+1}}} f\left(\frac{r_\nu}{r},\ \varphi - \psi_\nu\right),$$

где

$$\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n, \quad \theta_1 = \varphi_1 - 2\pi + \eta \quad \text{и} \quad \theta_n = \varphi_1 - \eta.$$

Так как функция $f(x,\ \theta)$ равномерно непрерывна в замкнутой области $\varepsilon \leqslant x \leqslant k$ и $\eta - 2\pi \leqslant \theta \leqslant -\eta$, то для каждой тройки чисел k, ε, ε_2 можно подобрать такое $\delta(k,\ \varepsilon,\ \varepsilon_2)$, чтобы при $\theta_i \leqslant \psi_\nu \leqslant \theta_{i+1}$, $\varepsilon \leqslant \frac{r_\nu}{r} \leqslant k$ и $\theta_{i+1} - \theta_i < \delta(k,\ \varepsilon,\ \varepsilon_2)$ имело место неравенство

$$\left| f\left(\frac{r_\nu}{r},\ \varphi - \psi_\nu\right) - f\left(\frac{r_\nu}{r},\ \varphi - \theta_i\right) \right| < \varepsilon_2,$$

или

$$\frac{1}{r^\rho L^*(r)} \left| \sum_{\substack{\varepsilon r \leqslant r_\nu \leqslant kr \\ \theta_i < \psi_\nu \leqslant \theta_{i+1}}} f\left(\frac{r_\nu}{r},\ \varphi - \psi_\nu\right) - \sum_{\varepsilon r \leqslant r_\nu \leqslant kr} f\left(\frac{r_\nu}{r},\ \varphi - \theta_i\right) \right| <$$

$$< \varepsilon_2 \frac{n(kr,\ \theta_i,\ \theta_{i+1}) - n(\varepsilon r,\ \theta_i,\ \theta_{i+1})}{r^\rho L^*(r)},$$

и так как

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(kr,\ \theta_i,\ \theta_{i+1})}{(kr)^\rho L^*(kr)} = \Delta(\theta_{i+1}) - \Delta(\theta_i)$$

и

$$\lim_{r \to \infty} \frac{L^*(kr)}{L^*(r)} = 1,$$

то правая часть неравенства стремится к

$$\varepsilon_2 (k^\rho - \varepsilon^\rho) [\Delta(\theta_{i+1}) - \Delta(\theta_i)],$$

т. е. при достаточно большом r модуль нашей разности меньше чем

$$2\varepsilon_2 (k^\rho - \varepsilon^\rho) [\Delta(\theta_{i+1}) - \Delta(\theta_i)].$$

Кроме того, имеем (см. стр. 1108):

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r^\rho L^*(r)} \sum_{\varepsilon r \leqslant r_\nu \leqslant kr} f\left(\frac{r_\nu}{r},\ \varphi - \theta_i\right) =$$

$$= [\Delta(\theta_{i+1}) - \Delta(\theta_i)] \int_{\varepsilon'}^{k'} f(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi - \theta_i)\, dx,$$

где $k' \longrightarrow \infty$ при $k \longrightarrow \infty$ и $\varepsilon' \longrightarrow 0$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Переменная стремится к пределу равномерно при $|\varphi - \theta_i| \geqslant \varepsilon_3 > 0$, или, иначе,

$$\frac{1}{r^\rho L^*(r)} \sum_{\varepsilon r \leqslant r_\nu \leqslant kr} f\left(\frac{r_\nu}{r},\ \varphi - \theta_i\right) =$$

$$= [\Delta(\theta_{i+1}) - \Delta(\theta_i)] \left[\int_{\varepsilon'}^{k'} f(x^{\frac{1}{\rho}},\ \varphi - \theta_i)\, dx + v_{i3}(r, \varphi) \right] =$$

$$= [\Delta(\theta_{i+1}) - \Delta(\theta_i)] \left[\int_{0}^{\infty} f(x^{\frac{1}{\rho}},\ \varphi - \theta_i)\, dx + v_{i3}(r, \varphi) + v_{i4}(k,\ \varepsilon) \right],$$

где $v_{i3}(r, \varphi) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно относительно φ при $|\varphi - \theta_i| \geqslant \varepsilon_3$ и $v_{i4}(k, \varepsilon) \to 0$ при $k \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$. Отсюда:

$$\frac{1}{r^\rho L^*(r)} \sum_{\substack{\varepsilon r \leqslant r_\nu \leqslant kr \\ \theta_i < \psi_\nu \leqslant \theta_{i+1}}} f\left(\frac{r_\nu}{r}, \varphi - \psi_\nu\right) =$$

$$= [\Delta(\theta_{i+1}) - \Delta(\theta_i)] \left[\frac{\pi}{\sin \pi\rho} \cos \rho (\varphi - \theta_i - \pi) + v_{i3}(r, \varphi) + \right.$$

$$\left. + v_{i4}(k, \varepsilon) + A_i \varepsilon_2 (k^\rho - \varepsilon^\rho)\right], \tag{7}$$

где $|A_i| < 2$. Просуммировав все эти равенства, получаем:

$$\left|\frac{1}{r^\rho L^*(r)} \sum_{\varepsilon r \leqslant r_\nu \leqslant kr} f\left(\frac{r_\nu}{r}, \varphi - \psi_\nu\right) - \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \sum_{i=1}^{n} \cos \rho (\varphi - \theta_i - \pi)[\Delta(\theta_{i+1}) - \Delta(\theta_i)]\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \left\{[v_{i3}(r, \varphi) + v_{i4}(\varepsilon, k) + A_i \varepsilon_2 (k^\rho - \varepsilon^\rho)]\, [\Delta(\theta_{i+1}) - \Delta(\theta_i)]\right\}\right| <$$

$$< \Delta(2\pi)\, |\max_i v_{i3}(r, \varphi) + v_4(\varepsilon, k) + 2\varepsilon_2 (k^\rho - \varepsilon^\rho)|, \tag{8}$$

где

$$v_4(\varepsilon, k) = \max_i v_{i4}(\varepsilon, k) = \max_i \left[\int_{k'}^{\infty} f(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi - \theta_i) + \int_0^{\varepsilon'} f(x^{\frac{1}{\rho}}, \varphi - \theta_i)\right] <$$

$$< \left|\int_{k'}^{\infty} f(x^{\frac{1}{\rho}}, 0)\, dx + \int_0^{\varepsilon'} \hat{f}(x^{\frac{1}{\rho}})\, dx\right| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$ и $k \to \infty$. Последняя величина не зависит от φ. Увеличивая теперь r до бесконечности, получаем:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \left|\frac{1}{r^\rho L^*(r)} \sum_{\varepsilon r \leqslant r \leqslant kr} f\left(\frac{r_\nu}{r}, \varphi - \psi_\nu\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \sum_{i=1}^{n} \cos \rho (\varphi - \theta_i - \pi)\, [\Delta(\theta_{i+1}) - \Delta(\theta_i)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \Delta(2\pi)\, [v_4(\varepsilon, k) + 2\varepsilon_2 (k^\rho - \varepsilon^\rho)],$$

при произвольных ε, k и ε_2. Переходя к пределу сначала при $\delta(k, \varepsilon, \varepsilon_2) \to 0$, а затем при $k \to \infty$, $k^\rho \varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon \to 0$, и принимая во внимание (5) и (6), получаем:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln |\Phi_1(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int_{\varphi_1 - 2\pi + \eta}^{\varphi_1 - \eta} \cos \rho (\varphi - \psi - \pi)\, d\Delta(\psi), \tag{9}$$

причем переменная стремится к пределу равномерно относительно φ при

$$\varphi_1 - \eta + \varepsilon_2 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 + \eta - \varepsilon_2.$$

Будем говорить, что функция растет регулярно по лучу $\arg z = \varphi$, если существует

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln |\Phi_1(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}.$$

Получаем:

Теорема 2. *Если целая функция не имеет нулей внутри угла* $\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle$ *и совокупность ее нулей имеет вполне измеримую плотность, то функция растет регулярно по любому лучу внутри угла, причем стремление к пределу равномерно относительно* φ *при* $\varphi_1+\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2-\varepsilon$.

§ 3. Перейдем теперь к функции $\Phi_2(z)$. Найдем ее рост по лучу $\arg z=\varphi$ вне угла $\langle\varphi_1-\eta, \varphi_1+\eta\rangle$.

Результат (9) здесь вполне приложим, и, следовательно,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^{\rho}L^*(r)}=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int\limits_{\varphi_1-\eta}^{\varphi_1+\eta}\cos\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\Delta(\psi).$$

Модуль выражения, стоящего справа, меньше или равен

$$\left|\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\right|[\Delta(\varphi_1+\eta)-\Delta(\varphi_1-\eta)].$$

Если φ выбрано так, что $\Delta(\varphi+0)-\Delta(\varphi-0)=0$, то при достаточно малом η:

$$|H_2(\varphi)|<\varepsilon, \tag{10}$$

где $H_2(\theta)$ определяется равенством

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\Phi_2(re^{i\theta})|}{r^{\rho}L^*(r)}=H_2(\theta).$$

(Мы пишем $\overline{\lim}$ вместо lim, так как при $\varphi_1-\eta\leqslant\theta\leqslant\varphi_1+\eta$ предел может не существовать.) Покажем, что при всех значениях θ

$$|H_2(\theta)|<3\varepsilon.$$

В неравенстве (4) второй главы (оно имеет место для функции $H_2(\varphi)$ в силу замечания в сноске на стр. 1113) возьмем $\varphi_2'=\varphi_1$, $\varphi_3'=\varphi_1+\eta_1$ и $\varphi_1'=\varphi_1-\eta_1$, где $\eta_1>\eta$. Тогда:

$$H_2(\varphi_2')\leqslant H_2(\varphi_1')\frac{\sin\rho\eta_1}{\sin 2\rho\eta_1}+H_2(\varphi_3')\frac{\sin\rho\eta_1}{\sin 2\rho\eta_1}<2\varepsilon.$$

Предположим теперь, что $H_2(\varphi_3)<-3\varepsilon$, и выберем

$$\varphi_2=\varphi_3-\eta \quad \text{и} \quad \varphi_1=\varphi_3-2\eta.$$

Тогда из (4) главы II:

$$H_2(\varphi_1)\geqslant-H_2(\varphi_3)+H_2(\varphi_2)\frac{\sin 2\rho\eta}{\sin\rho\eta}>3\varepsilon-2\varepsilon=\varepsilon,$$

но $H_2(\varphi_1)>\varepsilon$ противоречит (10). Итак,

$$|H_2(\varphi)|<3\varepsilon. \tag{11}$$

Пусть теперь

$$H(\theta)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F(re^{i\theta})|}{r^{\rho}L^*(r)}$$

и

$$H_1(\theta)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\Phi_1(re^{i\varphi})|}{r^{\rho}L^*(r)}.$$

Тогда:

$$H(\varphi)=H_1(\varphi)+H_2(\varphi). \tag{11'}$$

Мы пишем знак равенства вместо $\leqslant$, так как $\Phi_1(re^{i\varphi})$ растет регулярно по лучу $\arg z_1=\varphi$.

Переходя теперь к пределу при $\eta \to 0$, получаем из (9) и (11):

$$H(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int\limits_{\varphi - 2\pi}^{\varphi} \cos \rho (\varphi - \psi - \pi)\, d\Delta(\psi). \tag{12}$$

В нашем выводе предполагалось, что $\Delta(\varphi + 0) - \Delta(\varphi - 0) = 0$. Совокупность значений φ, при которых это не выполняется, счетна, и, следовательно, существует плотное множество значений φ, при которых равенство (12) верно.

Функция $H(\varphi)$ непрерывна (см. гл. II). Если мы докажем, что и правая часть равенства — непрерывная функция, то, тем самым, докажем верность (12) для всех значений φ. Для этого рассмотрим разность

$$\int\limits_{\varphi - 2\pi + \delta\varphi}^{\varphi + \delta\varphi} \cos \rho (\varphi + \delta\varphi - \psi - \pi)\, d\Delta(\psi) - \int\limits_{\varphi - 2\pi}^{\varphi} \cos \rho (\varphi - \psi - \pi)\, d\Delta(\psi) =$$

$$= \int\limits_{\varphi - 2\pi + \delta\varphi}^{\varphi} [\cos \rho (\varphi + \delta\varphi - \psi - \pi) - \cos \rho (\varphi - \psi - \pi)]\, d\Delta(\psi) +$$

$$+ \int\limits_{\varphi}^{\varphi + \delta\varphi} \cos \rho (\varphi + \delta\varphi - \psi - \pi)\, d\Delta(\psi) - \int\limits_{\varphi - 2\pi}^{\varphi - 2\pi + \delta\varphi} \cos \rho (\varphi - \psi - \pi)\, d\Delta(\psi);$$

так как

$$|\cos \rho (\varphi + \delta\varphi - \psi - \pi) - \cos \rho (\varphi - \psi - \pi)| < \varepsilon,$$

то первый интеграл меньше чем $\Delta(2\pi)\varepsilon$.

В третьем заменим ψ через $\theta - 2\pi$ и, используя равенство $d\Delta(\theta - 2\pi) = d\Delta(\theta)$, можем написать:

$$\int\limits_{\varphi}^{\varphi + \delta\varphi} \cos \rho (\varphi + \delta\varphi - \theta - \pi)\, d\Delta(\theta) - \int\limits_{\varphi - 2\pi}^{\varphi + \delta\varphi - 2\pi} \cos \rho (\varphi - \psi - \pi)\, d\Delta(\psi) =$$

$$= \int\limits_{\varphi}^{\varphi + \delta\varphi} [\cos \rho (\varphi + \delta\varphi - \theta - \pi) - \cos \rho (\varphi - \theta + \pi)]\, d\Delta(\theta).$$

При $\delta\varphi$ достаточно малом и $|\theta - \varphi| < \delta\varphi$ величина в квадратных скобках сколь угодно мала. Непрерывность доказана.

$H(\varphi)$ и индикатор роста $h(\varphi)$, вообще говоря, не равны, так как функции $L(r)$ в определениях $H(\varphi)$ и $h(\varphi)$ могут быть различны.

§ 4. Докажем теперь

Теорему 3. *Для функций не целого порядка с множеством нулей вполне измеримой плотности имеет место равенство*

$$h(\varphi) = \overline{\lim} \frac{\ln |F(re^{i\varphi})|}{\ln M(r)} = \frac{H(\varphi)}{\max H(\varphi)}.$$

Доказательство. Обозначим через H $\max H(\varphi)$ и выберем φ_1 и $\eta > 0$ так, что

$$\Delta(\varphi_1 + \eta) - \Delta(\varphi_1 - \eta) < \left| \frac{\sin \pi\rho}{\pi} \right| \varepsilon \tag{13}$$

и

$$H(\varphi) > H - \varepsilon \tag{14}$$

при

$$\varphi_1 - \eta \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 + \eta.$$

Это всегда можно сделать, так как точки, в которых $\Delta(\varphi)$ непрерывна, образуют всюду плотное множество, и функция $H(\varphi)$ непрерывна.

Не нарушая общности, мы можем считать, что $\varphi_1 = 0$. Представим функцию $F(z)$ в форме произведения двух функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, причем все корни $\Phi_2(z)$ — внутри угла $-\eta < \varphi \leqslant \eta$, а в $\Phi_1(z)$ — все остальные корни функции $F(z)$. Из (11): $|H_2(\varphi)| < 3\varepsilon$ и, следовательно,

$$H_1(\varphi) > H(\varphi) - 3\varepsilon,$$

где $H_1(\varphi)$ и $H_2(\varphi)$ соответствуют $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$.

Из (14) следует, что внутри угла $-\eta < \varphi < +\eta$:

$$H_1(\varphi) > H - 4\varepsilon; \tag{15}$$

так как $\Phi_2(z)$ не имеет нулей вне угла $(-\eta, +\eta)$, то вне угла $(-\eta_1, +\eta_1)$, $\eta_1 > \eta$, по теореме § 2:

$$\frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} \rightrightarrows H_2(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int_{-\eta}^{\eta} \cos\rho(\varphi - \psi - \pi)\, d\Delta(\psi),$$

или, используя теорему о среднем,

$$\frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} = \frac{\pi}{\sin \pi\rho}[\Delta(\eta) - \Delta(-\eta)]\cos\rho(\varphi - \psi_\varphi - \pi) + \varepsilon(r) =$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi\rho}\cos\rho(\varphi - \pi)[\Delta(\eta) - \Delta(-\eta)] + \varepsilon\eta_2(\varphi) + \varepsilon(r).$$

$|\psi_\varphi| \leqslant \eta_1$ и, следовательно, $|\eta_2(\varphi)| < \eta_1$, $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$.

По формуле Иенсена:

$$\frac{1}{r^\rho L^*(r)} \ln \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} + \frac{1}{r^\rho L^*(r)} \ln|\Phi_2(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta_1}^{\eta_1} \frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}\, d\varphi + \frac{\Delta(\eta) - \Delta(-\eta)}{2\sin\pi\rho}\int_{\eta_1}^{2\pi-\eta_1} \cos\rho(\varphi - \pi)\, d\varphi + \varepsilon\eta_3 + \varepsilon(r) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta_1}^{\eta_1} \frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}\, d\varphi + \frac{[\Delta(\eta) - \Delta(-\eta)]\sin\rho(\pi - \eta_1)}{\rho\sin\pi\rho} + \varepsilon\eta_3 + \varepsilon(r), \tag{16}$$

$|\eta_3| < \eta_1$, r_ν — модули корней.

Дадим оценку левой части равенства (16). Из

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_2(r)}{r^\rho L^*(r)} = \Delta(\eta) - \Delta(-\eta)$$

следует (см. § 2, гл. II)

$$r_\nu = \nu^{\frac{1}{\rho}} L_1^*(\nu).$$

Пусть $r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}$; тогда

$$r = (n+\theta)^{\frac{1}{\rho}} L_1^*(n+\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

и

$$\left(\frac{\nu}{n+\theta}\right)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}<\frac{r_\nu}{r}<\left(\frac{\nu}{n+\theta}\right)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon},$$

или

$$\frac{1}{n+\theta}\sum_{r_\nu\leqslant r}\ln\frac{r_\nu}{r}<\frac{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}{n+\theta}\sum_{\nu=1}^{n}\ln\frac{\nu}{n+\theta}<\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)\int\limits_{\frac{1}{n+\theta}}^{\frac{n}{n+\theta}}\ln x\,dx$$

и

$$\frac{1}{n+\theta}\sum_{r_\nu\leqslant r}\ln\frac{r_\nu}{r}>\frac{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}{n+\theta}\sum_{\nu=1}^{n}\ln\frac{\nu}{n+\theta}>\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)\int\limits_{0}^{\frac{n}{n+\theta}}\ln x\,dx.$$

Отсюда:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^\rho L^*(r)}\ln\frac{r^n}{r_1r_2\ldots r_n}=\frac{1}{\rho}[\Delta(\eta)-\Delta(-\eta)]. \tag{17}$$

Из (17) и (16):

$$\frac{1}{2\pi r^\rho L^*(r)}\int\limits_{-\eta_1}^{\eta}\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|\,d\varphi=\frac{1}{2\pi r^\rho L^*(r)}\int\limits_{-\eta_1}^{\eta_1}\ln^+|\Phi_2(re^{i\varphi})|\,d\varphi-$$

$$-\frac{1}{2\pi r^\rho L^*(r)}\int\limits_{-\eta_1}^{\eta_1}\ln^+\left|\frac{1}{\Phi_2(re^{i\varphi})}\right|=\frac{1}{\rho}[\Delta(\eta)-\Delta(-\eta)]\left[1-\frac{\sin\rho(\pi-\eta_1)}{\sin\pi\rho}\right]-$$

$$-\varepsilon\eta_3+\varepsilon(r)\ \ ^*,$$

отсюда:

$$\frac{1}{r^\rho L^*(r)}\int\limits_{-\eta_1}^{\eta_1}\ln^+\left|\frac{1}{\Phi_2(re^{i\varphi})}\right|d\varphi<4\varepsilon\eta_1+\varepsilon(r).$$

Итак, на некотором множестве точек E, $\operatorname{mes}E>\eta_1$,

$$\frac{1}{r^\rho L^*(r)}\ln^+\left|\frac{1}{\Phi_2(re^{i\varphi})}\right|<8\varepsilon+\varepsilon(r),$$

где $\varepsilon(r)\longrightarrow 0$ при $r\longrightarrow\infty$.

Во всякой точке множества E внутри угла $(-\eta,\ \eta)$:

$$\frac{\ln M(r)}{r^\rho L^*(r)}\geqslant\frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}=\frac{\ln|\Phi_1(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}+\frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}>H(\varphi)-12\varepsilon+\varepsilon(r),$$

т. е.

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{r^\rho L^*(r)}\geqslant H-12\varepsilon;$$

с другой стороны,

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{r^\rho L^*(r)}=H$$

---

* $\ln^+x=\ln x$ при $x\geqslant 1$ и $\ln^+x=0$ при $0\leqslant x<1$.

и, так как ε произвольно мало,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}L^{*}(r)}=H.$$

Это доказывает теорему.

Из (12) легко получается следующая

Теорема 4. *Если множество нулей функции не целого порядка ρ имеет измеримую плотность и эта плотность внутри угла (φ_1, φ_2) равна нулю, то для $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$:*

$$h(\varphi)=A\cos\rho\varphi+B\sin\rho\varphi,$$

A и B — постоянные.

Действительно,

$$H(\varphi)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int_{\varphi_2-2\pi}^{\varphi_1}\cos\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\Delta(\psi)=$$

$$=\left[\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int_{\varphi_2-2\pi}^{\varphi_1}\cos\rho(\psi+\pi)\,d\Delta(\psi)\right]\cos\rho\varphi+\left[\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int_{\varphi_2-2\pi}^{\varphi_1}\sin\rho(\psi+\pi)\,d\Delta(\psi)\right]\sin\rho\varphi,$$

а из § 4:

$$h(\varphi)=\frac{H(\varphi)}{H}.$$

§ 5. Перейдем к рассмотрению случая, когда ρ — целое число. Возьмем сначала наиболее простой случай целой функции целого порядка ρ:

$$\Phi(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2\rho}}{a_\nu^{2\rho}}\right)=\prod\left(1-\frac{z^{2\rho}}{a_\mu^{2\rho}}\right)\cdot\prod\left(1-\frac{z^{2\rho}}{a_\varkappa^{2\rho}}\right)=\Phi_1(z)\cdot\Phi_2(z);$$

в $\Phi_2(z)$ входят все нули, попадающие в один из углов

$$\left(\varphi+\frac{k\pi}{\rho}-\eta,\ \varphi+\frac{k\pi}{\rho}+\eta\right)\quad(\eta>0),$$

а в $\Phi_1(z)$ — все остальные. Повторяя теперь рассуждения § 2 и § 3 этой главы, получим:

$$H(\varphi)=\pi\int_{\varphi-\frac{\pi}{\rho}}^{\varphi}\sin\rho(\varphi-\psi)\,d\Delta(\psi).\tag{18}$$

Очевидно, что теоремы § 4 остаются верными и в этом случае.

Рассмотрим теперь общий случай функции с совокупностью нулей вполне измеримой плотности целого порядка ρ

$$F(z)=e^{P(z)}\prod_{\nu=1}^{\infty}G\left(\frac{z}{a_\nu},\ p\right),$$

$P(z)$ — полином степени не выше p,

$$G(u,\ p)=(1-u)\,e^{u+\frac{u^2}{2}+\dots+\frac{u^p}{p}}.$$

Мы можем представить $F(z)$ в форме:

$$F(z)=e^{P(z)+\frac{z^p}{p}\sum_{|a_\nu|\le r}\frac{1}{a_\nu^p}}\,\Phi(z),\tag{19}$$

где

$$\Phi(z) = \prod_{|a_\nu| \leqslant r} G\left(\frac{z}{a_\nu}, p-1\right) \cdot \prod_{|a_\nu| > r} G\left(\frac{z}{a_\nu}, p\right).$$

$\Phi(z)$ — не голоморфная функция, так как при $|z| = |a_\nu|$ $\Phi(z)$ имеет разрыв.

Представим теперь $\Phi(z)$ в форме $\Phi_1(z) \cdot \Phi_2(z)$, где в $\Phi_2(z)$ входят все a_ν, лежащие внутри угла $(\varphi - \eta, \varphi + \eta)$, а в $\Phi_1(z)$ — все остальные. φ выбираем, как и прежде, так, что

$$\Delta(\varphi + 0) - \Delta(\varphi - 0) = 0.$$

Тогда:

$$\frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} = \frac{1}{r^\rho L^*(r)}\left\{R\left[P(re^{i\varphi}) + \frac{r^p e^{ip\varphi}}{p} \sum_{|a_\nu| \leqslant r} \frac{1}{a_\nu^p}\right] + \right.$$

$$\left. + \ln|\Phi_1(re^{i\varphi})| + \ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|\right\}.$$

$\dfrac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}$ можно легко оценить. Используя формулу § 4, гл. II, получаем:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln|\Phi_1(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} = \int\limits_{\varphi - 2\pi + \eta}^{\varphi - \eta} \left[(\varphi - \psi)\sin\rho(\varphi - \psi) - \frac{\cos\rho(\varphi - \psi)}{\rho}\right] d\Delta(\psi).$$

Теперь оценим $\dfrac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}$:

$$\frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} = \frac{1}{r^\rho L^*(r)}\left[\sum_{r_\nu \leqslant r} f_1\left(\frac{r_\nu}{r}, \varphi - \psi_\nu\right) + \sum_{r_\nu > r} f\left(\frac{r_\nu}{r}, \varphi - \psi_\nu\right)\right],$$

где

$$f_1(u, \theta) = \ln|G(u^{-1}e^{i\varphi}, p-1)|$$

и

$$f(u, \theta) = \ln|G(u^{-1}e^{i\varphi}, p)|.$$

Очевидно, что

$$f_1(u, \theta) < \hat{f}_1(u) = \ln\left|1 + \frac{1}{u}\right| + \sum_{\mu=1}^{p-1} \frac{1}{\mu u^\mu} \quad \text{при} \quad u \leqslant 1,$$

$$f(u, \theta) < -f(u, 0) \quad \text{при} \quad u \geqslant k > 1,$$

$$f(u, \theta) < \hat{f}(u) = \ln\left|1 + \frac{1}{u}\right| + \sum_{\mu=1}^{p} \frac{1}{\mu u^\mu} \quad \text{при} \quad 1 < u < k,$$

следовательно,

$$\frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} < \frac{1}{r^\rho L^*(r)}\left[\sum_{r_\nu \leqslant r} \hat{f}_1\left(\frac{r_\nu}{r}\right) + \sum_{r < r_\nu < kr} \hat{f}\left(\frac{r_\nu}{r}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{r_\nu > kr} -f\left(\frac{r_\nu}{r}, 0\right)\right].$$

Переходя в правой части неравенства к пределу при $r \to \infty$, получаем:

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} \leqslant \Delta\left[\int\limits_0^1 \hat{f}_1(x^{\frac{1}{\rho}})\,dx + \int\limits_1^k \hat{f}(x^{\frac{1}{\rho}})\,dx - \int\limits_k^\infty f(x^{\frac{1}{\rho}}, 0)\,dx\right] < \Delta M, \tag{20}$$

где $\Delta = \Delta(\varphi + \eta) - \Delta(\varphi - \eta)$ и M не зависит от η. $\Delta \to 0$ при $\eta \to 0$.

Несколько труднее дать оценку для $\Phi_2(z)$ снизу. Прежний метод, основанный на принципе Lindelöf'a и Phragmén'a, неприменим, так как $\Phi_2(z)$ — не голоморфная функция. Эту трудность можно устранить следующим способом. Рассмотрим произведение

$$\theta(z) = \Phi_2(z)\,\Phi_2(az)\ldots\Phi_2(a^{2\rho-1}z),$$

где a — примитивный корень уравнения $a^{2\rho}-1=0$,

$$\theta(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2\rho}}{a_\nu^{2\rho}}\right),$$

т. е. целая функция.

Из (18) настоящей главы:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\theta(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} = \pi\int_{\varphi-\frac{\pi}{\rho}}^{\varphi}\sin\rho(\varphi-\psi)\,d\Delta(\psi) \geqslant 0,$$

$$\sum_{k=0}^{2\rho-1}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi}\alpha^k)|}{r^\rho L^*(r)} \geqslant \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\theta(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} \geqslant 0.$$

Используя теперь (20), получаем:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} > (2\rho-1)M\Delta.$$

Итак, при $\eta\longrightarrow 0$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\Phi_2(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} \longrightarrow 0.$$

Переходя к пределу при $\eta\longrightarrow 0$, получаем:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} = \int_{\varphi-2\pi}^{\varphi}[(\varphi-\psi)\sin\rho(\varphi-\psi)-\cos\rho(\varphi-\psi)]\,d\Delta(\psi).$$

Наконец, из (19):

$$\frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} = \frac{1}{L^*(r)}R\left\{e^{i\rho\varphi}\left[a(1+\varepsilon(r))+\frac{1}{\rho}\sum_{|a_\nu|\leqslant r}\frac{1}{a_\nu^\rho}\right]\right\}+\frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)},$$

где a — коэфициент при z^p в $P(z)$, $\varepsilon(r)\longrightarrow 0$ при $r\longrightarrow\infty$.

Положим

$$\delta(r) = \frac{1}{L^*(r)}\left|a_0+\frac{1}{\rho}\sum_{|a_\nu|\leqslant r}\frac{1}{a_\nu^\rho}\right|.$$

Если

$$\lim_{r\to\infty}\delta(r) = 0,$$

то

$$H(\varphi) = -\int_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\left[\frac{\cos\rho(\varphi-\psi)}{\rho}-(\varphi-\psi)\sin\rho(\varphi-\psi)\right]d\Delta(\psi), \tag{21}$$

где

$$H(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)}.$$

Если же $\delta(r)$ ограничено, то и $H(\varphi)$ ограничено.

Заметим, что случай $H(\varphi)\equiv 0$ невозможен. Действительно, по теореме Иенсена,

$$\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}L^{*}(r)} \geqslant \frac{\ln|F(0)|}{r^{\rho}L^{*}(r)} + \frac{1}{r^{\rho}L^{*}(r)}\ln\frac{r^{n}}{r_1 r_2\ldots r_n}.$$

Правая часть неравенства стремится при $r\to\infty$ к $\frac{\Delta(2\pi)}{\rho}$ (см. § 4 этой главы).

По теореме § 8 гл. II существует значение φ, при котором

$$H(\varphi)=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}L^{*}(r)} \geqslant \frac{\Delta(2\pi)}{\rho}.$$

Пусть теперь $\rho=p+1$, где p — род функции. Представим $F(z)$ в форме:

$$F(z)=e^{P(z)-\frac{z^{p+1}}{p+1}\sum\limits_{|a_\nu|\geqslant r}\frac{1}{a_\nu^{p+1}}}\Phi(z),$$

где

$$\Phi(z)=\prod_{|a_\nu|<r}G\left(\frac{z}{a_\nu},\ p\right)\cdot\prod_{|a_\nu|\geqslant r}G\left(\frac{z}{a_\nu},\ p+1\right).$$

Применяя к $\Phi(z)$ только что полученный результат, имеем:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^{\rho}L^{*}(r)}=\int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\left[(\varphi-\psi)\sin\rho(\varphi-\psi)-\frac{\cos\rho(\varphi-\psi)}{\rho}\right]d\Delta(\varphi),$$

при φ, выбранном так, что

$$\Delta(\varphi+0)-\Delta(\varphi-0)=0.$$

Таким образом и в этом случае, если $\delta_1(r)\to 0$ при $r\to\infty$,

$$\delta_1(r)=\frac{1}{L^{*}(r)}\sum_{|a_\nu|\geqslant r}\frac{1}{a_\nu^{p+1}},$$

то $H(\varphi)$ дается формулой (19) *. Если $\delta_1(r)$ ограничена, то и $H(\varphi)$ ограничено.

Здесь, так же как и в прежнем случае, невозможно тождество $H(\varphi)\equiv 0$, т. е. если определять тип функции с совокупностью нулей вполне измеримой плотности как $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}L^{*}(r)}$, где $L^{*}(r)$ определяется из равенства

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^{\rho}L^{*}(r)}=1,$$

то при ρ не целом возможен только нормальный тип и при ρ целом — нормальный и максимальный типы.

Пример. Пусть все нули целой функции располагаются в точках $(m+in)^{\frac{2}{\rho}}$, где m и n — целые положительные или отрицательные числа.

Показатель сходимости нулей здесь равен ρ. Число нулей в секторе $|m+in|^{\frac{2}{\rho}}\leqslant r$, $0<\frac{2}{\rho}\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{m}\leqslant\psi$ равно числу точек $m+in$ в секторе $|z|\leqslant r^{\frac{\rho}{2}}$, $0<\arg z\leqslant\frac{\rho}{2}\psi$, а это число асимптотически равно площади этого сектора, т. е.

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\ 0,\ \psi)}{r^{\rho}}=\Delta(\psi)=\frac{\rho\psi}{4}.$$

---

* В силу непрерывности $H(\varphi)$ и интеграла формула верна для всех значений φ.

При не целом ρ, по формуле (2),

$$H(\varphi)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\frac{\rho}{4}\int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\cos\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\psi=\frac{\pi}{2},$$

т. е. рост функции одинаков по всем направлениям.

В случае ρ целого функция $\Phi(z)$ имеет вид:

$$\Phi(z)=e^{P(z)}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2\rho}}{a_\nu^{2\rho}}\right),$$

$$P(z)=\alpha_0 z^\rho+\alpha_1 z^{\rho-1}+\ldots+\alpha_\rho,\quad \alpha_0=|\alpha_0|e^{i\vartheta},$$

так как при умножении какого-нибудь корня на $e^{i\frac{\pi}{\rho}}$ мы получаем корень той же функции. В самом деле,

$$(m+in)^{\frac{2}{\rho}}e^{i\frac{\pi}{\rho}}=(im-n)^{\frac{2}{\rho}}.$$

Применяя теперь формулу (18), получаем:

$$H(\varphi)=|\alpha_0|\cos(\rho\varphi+\vartheta)+\frac{\rho\pi}{4}\int\limits_{\varphi-\frac{\pi}{\rho}}^{\varphi}\sin\rho(\varphi-\psi)\,d\psi=$$

$$=|\alpha_0|\cos(\rho\varphi+\vartheta)+\frac{\pi}{2}.$$

ГЛАВА IV

В главе III мы рассмотрели вопрос о связи между ростом целой функции по лучу и распределением ее нулей по аргументам, когда множество нулей функции имеет вполне измеримую плотность.

Можно получить некоторые результаты и в более общем случае, когда из всего множества нулей целой функции можно выделить подмножество вполне измеримой плотности.

В этом направлении хорошо известный результат принадлежит Carlson'у [19].

Пусть $F(z)$ — функция, голоморфная в замкнутой области

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2},$$

удовлетворяет в этой области неравенству

$$|F(z)|<e^{A|z|+B}$$

(A и B — постоянные) и обращается в нуль в точках 1, 2, 3, ... *Пусть*

$$H(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r}.$$

Тогда либо

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right)+H\left(-\frac{\pi}{2}\right)\geqslant 2\pi,$$

либо $F(z)\equiv 0$.

[19] Carlson, Über ganzwertige ganze Funktionen (Math. Zeitschr., 1925).

Мы рассмотрим более общий случай функции, имеющей вполне измеримое подмножество нулей.

§ 1. Теорема 1. *Пусть $F(z)$ — целая функция конечного порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и $L(r)$ определена из равенства*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho} L(r)} = 1.$$

Пусть $F(z)$ обращается в нуль на множестве вполне измеримой плотности с функцией распределения $\Delta(\psi)$. Тогда:

$$h(\varphi) + h\left(\varphi + \frac{\pi}{\rho}\right) \geqslant H(\varphi) + H\left(\varphi + \frac{\pi}{\rho}\right),$$

где при ρ не целом

$$H(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int\limits_{\varphi - 2\pi}^{\varphi} \cos \rho (\varphi - \psi - \pi)\, d\Delta(\psi)$$

и при ρ целом

$$H(\varphi) = \pi \int\limits_{\varphi}^{\varphi + \frac{\pi}{\rho}} \sin \rho (\psi - \varphi)\, d\Delta(\psi).$$

Доказательство. Построим при ρ не целом функцию

$$\Phi_{\eta}(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{\nu}}\right) e^{\frac{z}{a_{\nu}} + \frac{z^2}{2a_{\nu}^2} + \ldots + \frac{z^p}{pa_{\nu}^p}}, \tag{1}$$

где a_{ν} — точки измеримого подмножества, не попавшие внутрь углов $(\varphi_1 - \eta,\ \varphi_1 + \eta)$ и $(\varphi_2 - \eta,\ \varphi_2 + \eta)$, $(\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{\rho})$, и при ρ целом функцию

$$\Phi_{\eta}(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^{2\rho}}{a_{\nu}^{2\rho}}\right),$$

где a_{ν} — точки измеримого подмножества, попавшие в угол $(\varphi_1 + \eta,\ \varphi_2 - \eta)$.

Пусть

$$H_{\eta}(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |\Phi_{\eta}(re^{i\varphi})|}{r^{\rho} L(r)}.$$

Построим еще две вспомогательные функции $V_{1\varepsilon}(z)$ и $V_{2\varepsilon}(z)$, голоморфные и не имеющие нулей внутри угла $\left\langle \varphi_1 + \frac{\varepsilon}{2},\ \varphi_2 - \frac{\varepsilon}{2} \right\rangle$, где $0 < \varepsilon < \eta$, с индикаторами

$$H_1(\varphi) = A_1 \cos \rho (\varphi - \psi_1) \quad \text{и} \quad H_2(\varphi) = A_2 \cos \rho (\varphi - \psi_1),$$

где A_1 и A_2 взяты так, что

$$\left.\begin{aligned} A_1 \cos \rho (\varphi_1 - \psi_1) &= \frac{h(\varphi_2) - h(\varphi_1)}{2}, \\ A_2 \cos \rho (\varphi_1 - \psi_1) &= \frac{H_{\eta}(\varphi_2) - H_{\eta}(\varphi_1)}{2} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(см. § 3, гл. II). Тогда:

$$A_1 \cos \rho (\varphi_2 - \psi_1) = \frac{h(\varphi_1) - h(\varphi_2)}{2},$$

$$A_2 \cos \rho (\varphi_2 - \psi_1) = \frac{H_{\eta}(\varphi_1) - H_{\eta}(\varphi_2)}{2},$$

где $H_1(\varphi)$ и $H_2(\varphi)$ не зависят от ε.

Рассмотрим функции

$$\theta_\varepsilon(z) = \frac{F(z)\, V_{1\varepsilon}(z)}{\Phi_\eta(z)\, V_{2\varepsilon}(z)}.$$

Очевидно,

$$H_\theta(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\theta_\varepsilon(re^{i\varphi})|}{r^\rho L(r)}$$

не зависит от ε.

Из регулярности роста всех вспомогательных функций по лучам $\arg z = \varphi_1 + \varepsilon$ и $\arg z = \varphi_2 - \varepsilon$ следует:

$$\left.\begin{aligned} H_\theta(\varphi_1+\varepsilon) &= h(\varphi_1+\varepsilon) + H_1(\varphi_1+\varepsilon) - H_\eta(\varphi_1+\varepsilon) - H_2(\varphi_1+\varepsilon), \\ H_\theta(\varphi_2-\varepsilon) &= h(\varphi_2-\varepsilon) + H_1(\varphi_2-\varepsilon) - H_\eta(\varphi_2-\varepsilon) - H_2(\varphi_2-\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Покажем, что при произвольном γ можно подобрать ε_γ такое, что при всяком $0 < \varepsilon < \varepsilon_\gamma$ верно одно из неравенств:

$$H_\theta(\varphi_1+\varepsilon) > -\gamma \quad \text{или} \quad H_\theta(\varphi_2-\varepsilon) > -\gamma.$$

ε имеет тот же смысл, что и прежде.

Предположим, что это неверно, т. е. существуют произвольно малые ε такие, что

$$H_\theta(\varphi_1+\varepsilon) \leqslant -\gamma \quad \text{и} \quad H_\theta(\varphi_2-\varepsilon) \leqslant -\gamma. \tag{4}$$

Выберем число M так, что

$$H_\theta(\varphi_0) > -M\cos\rho\left(\varphi_0 - \varphi_1 - \frac{\pi}{2\rho}\right) \quad \left(\varphi_0 = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right), \tag{5}$$

и возьмем ε настолько малым, что

$$M\cos\rho\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2\rho}\right) < \gamma.$$

Построим вспомогательную функцию $V_\varepsilon(z)$, голоморфную и не имеющую нулей внутри угла

$$\left(\varphi_1 + \frac{\varepsilon}{2},\ \varphi_2 - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

с индикатором

$$H_3(\varphi) = M\cos\rho\left(\varphi - \varphi_1 - \frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Функция $\theta_\varepsilon(z)\, V_\varepsilon(z)$ имеет индикатор

$$H_4(\varphi) = H_\theta(\varphi) + H_3(\varphi).$$

Из (4) и (5):

$$H_4(\varphi_1+\varepsilon) < 0, \quad H_4(\varphi_2-\varepsilon) < 0 \quad \text{и} \quad H_4(\varphi_0) > 0.$$

Это противоречит основному неравенству для $H(\varphi)$.

Пусть для определенности

$$H_\theta(\varphi_1+\varepsilon) > -\gamma.$$

Из (3):

$$h(\varphi_1+\varepsilon) + A_1\cos\rho(\varphi_1+\varepsilon-\psi_1) - H_\eta(\varphi_1+\varepsilon) - A_2\cos\rho(\varphi_1+\varepsilon-\psi_1) > -\gamma.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $\gamma \to 0$ и используя (2), имеем:

$$h(\varphi_1) + h(\varphi_2) \geqslant H_\eta(\varphi_1) + H_\eta(\varphi_2)\ ^*.$$

---

* До сих пор мы не использовали того, что $F(z)$ — целая функция. Можно считать ее только голоморфной внутри и на сторонах угла $\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle$.

Выберем φ_1 так, что $\Delta(\varphi_1+0)-\Delta(\varphi_1-0)=0$ и $\Delta(\varphi_2+0)-\Delta(\varphi_2-0)=0$ $\left(\varphi_2=\varphi_1+\frac{\pi}{\rho}\right)$. Множество таких значений φ_1 всюду плотно. Переходя тогда к пределу при $\eta\to 0$, получаем:

$$h(\varphi_1)+h(\varphi_2)\geqslant H(\varphi_1)+H(\varphi_2),$$

и в силу непрерывности всех входящих сюда функций неравенство верно при всех φ.

§ 2. Теорема 2. *Для целых функций не целого порядка ρ с совокупностью нулей вполне измеримой плотности верно равенство*

$$\Delta(\varphi_2+0)-\Delta(\varphi_1-0)=\frac{1}{2\pi\rho}\left[H'_+(\varphi_2)-H'_-(\varphi_1)+\rho^2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}H(\varphi)\,d\varphi\right](\varphi_1\leqslant\varphi_2)^*. \quad (6)$$

$\Delta(\varphi)$ и $H(\varphi)$ имеют тот же смысл, что и раньше. Эта формула дает плотность нулей внутри угла в зависимости от индикатора роста.

Для доказательства следует решить интегральное уравнение

$$H(\varphi)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\cos\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\Delta(\varphi)$$

относительно $\Delta(\psi)$. Интегрированием по частям это уравнение приводится к виду:

$$H(\varphi)=\pi\operatorname{ctg}\pi\rho\,\Delta(2\pi)-\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\Delta(\psi)\sin\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\psi. \quad (7)$$

Найдем производную справа от $H(\varphi)$:

$$\frac{H(\varphi+\delta\varphi)-H(\varphi)}{\delta\varphi}=-\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho\cdot\delta\varphi}\left[\int\limits_{\varphi+\delta\varphi-2\pi}^{\varphi+\delta\varphi}\Delta(\psi)\sin(\varphi+\delta\varphi-\psi-\pi)\,d\psi-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\Delta(\psi)\sin\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\psi\right]=-\frac{\pi\rho^2}{\sin\pi\rho}\int\limits_{\varphi+\delta\varphi-2\pi}^{\varphi}\Delta(\psi)[\cos\rho(\varphi-\psi-\pi)+\varepsilon(\delta\varphi)]\,d\psi-$$

$$-\frac{\pi\rho}{\delta\varphi\cdot\sin\pi\rho}\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\delta\varphi}\Delta(\psi)\sin\rho(\varphi+\delta\varphi-\psi-\pi)\,d\psi+$$

$$+\frac{\pi\rho}{\delta\varphi\cdot\sin\pi\rho}\int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi+\delta\varphi-2\pi}\Delta(\psi)\sin\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\psi \quad (8)$$

($\delta\varphi>0$ и $\varepsilon(\delta\varphi)\to 0$ при $\delta\varphi\to 0$). Разность двух последних интегралов может быть представлена в форме $-\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}(\eta-\eta_1)$, где

$$\min_{\varphi\leqslant\psi\leqslant\varphi+\delta\varphi}\Delta(\psi)\sin\rho(\varphi+\delta\varphi-\psi-\pi)\leqslant\eta\leqslant\max_{\varphi\leqslant\psi\leqslant\varphi+\delta\varphi}\Delta(\psi)\sin\rho(\varphi+\delta\varphi-\psi-\pi),$$

$$\min_{\varphi-2\pi\leqslant\psi\leqslant\varphi+\delta\varphi-2\pi}\Delta(\psi)\sin\rho(\varphi-\psi-\pi)\leqslant\eta_1\leqslant\max_{\varphi-2\pi\leqslant\psi\leqslant\varphi+\delta\varphi-2\pi}\Delta(\psi)\sin\rho(\varphi-\psi-\pi).$$

Переходя к пределу при $\delta\varphi\to 0$, получаем

$$\lim_{\delta\varphi\to 0}-\frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}[\eta-\eta_1]=\pi\rho[\Delta(\varphi+0)+\Delta(\varphi+0-2\pi)]=$$

$$=2\pi\rho\,\Delta(\varphi+0)-\pi\rho\,\Delta(2\pi)$$

---

* $H'_+(\varphi)$ и $H'_-(\varphi)$ — производные справа и слева.

и, следовательно,

$$H'_+(\varphi) = -\frac{\pi\rho^2}{\sin\pi\rho}\int_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\Delta(\psi)\cos\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\psi + 2\pi\rho\,\Delta(\varphi+0) - \pi\rho\,\Delta(2\pi). \tag{9}$$

Положив теперь $\delta\varphi < 0$, получаем аналогично:

$$H'_-(\varphi) = \frac{-\pi\rho^2}{\sin\pi\rho}\int_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\Delta(\psi)\cos\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\varphi + 2\pi\rho\,\Delta(\varphi-0) - \pi\rho\,\Delta(2\pi). \tag{9'}$$

Найдем теперь $\int_0^{\vartheta} H(\varphi)\,d\varphi$. Положим $\psi-\varphi=\theta$ и из (7) получим:

$$\int_0^{\vartheta} H(\varphi)\,d\varphi = \pi\operatorname{ctg}\pi\rho\,\Delta(2\pi)\,\vartheta - \frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\int_0^{\vartheta}\left[\int_0^{-2\pi}\Delta(\theta+\varphi)\sin\rho(\theta+\pi)\,d\theta\right]d\varphi =$$

$$= \pi\operatorname{ctg}\pi\rho\,\Delta(2\pi) - \frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}\int_0^{-2\pi}\int_0^{\vartheta}\Delta(\theta+\varphi)\,d\varphi\sin\rho(\theta+\pi)\,d\theta;$$

интегрируя по частям, получим, далее,

$$\pi\operatorname{ctg}\pi\rho\,\Delta(2\pi)\,\vartheta + \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\left[\int_0^{\vartheta}\Delta(\theta+\varphi)\,d\varphi\cdot\cos\rho(\theta+\pi)\right]_0^{-2\pi} -$$

$$- \frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int_0^{-2\pi}[\Delta(\theta+\vartheta)-\Delta(\theta)]\cos\rho(\theta+\pi)\,d\theta = \int_0^{\vartheta}H(\varphi)\,d\varphi.$$

С другой стороны,

$$\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\left[\int_0^{\vartheta}\Delta(\theta+\varphi)\,d\varphi\cdot\cos\rho(\theta+\pi)\right]_0^{-2\pi} = -\pi\operatorname{ctg}\pi\rho\,\Delta(2\pi)\,\vartheta,$$

$$\int_0^{-2\pi}\Delta(\theta+\vartheta)\cos\rho(\theta+\pi)\,d\theta = -\int_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\Delta(\psi)\cos\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\psi$$

и

$$\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int_0^{-2\pi}\Delta(\theta)\cos\rho(\theta+\pi)\,d\theta = A = \text{const},$$

откуда

$$\rho^2\int_0^{\vartheta}H(\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi\rho^2}{\sin\pi\rho}\int_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\Delta(\psi)\cos(\varphi-\psi-\pi)\,d\psi + A\rho^2\,. \tag{10}$$

Складывая теперь (9) и (10), получаем:

$$2\pi\rho\,\Delta(\varphi+0) = H'_+(\varphi) + \rho^2\int_0^{\varphi}H(\varphi)\,d\varphi + \pi\rho\,\Delta(2\pi) + \rho^2 A, \tag{11}$$

и, складывая (9′) и (10), имеем:

$$2\pi\rho\,\Delta(\varphi-0) = H'_-(\varphi) + \rho^2\int_0^{\varphi}H(\varphi)\,d\varphi + \pi\rho\,\Delta(2\pi) + \rho^2 A. \tag{11'}$$

Из (11) и (11') получаем формулу для плотности нулей внутри угла (φ_1, φ_2):

$$\Delta(\varphi_2+0)-\Delta(\varphi_1-0)=\frac{1}{2\pi\rho}\left[H'_+(\varphi_2)-H'_-(\varphi_1)+\rho^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} H(\varphi)\,d\varphi\right].$$

Меняя знаки при нулях под знаком функции $\Delta(\varphi)$ и, соответственно, при $H'(\varphi)$, получим еще три аналогичные формулы.

§ 3. Таким же способом можно обратить формулу (18) § 5 гл. III:

$$H(\varphi)=\pi\int_{\varphi-\frac{\pi}{\rho}}^{\varphi}\sin\rho(\varphi-\psi)\,d\Delta(\psi)=\pi\rho\int_{\varphi-\frac{\pi}{\rho}}^{\varphi}\Delta(\psi)\cos\rho(\varphi-\psi)\,d\psi,$$

или, подставляя $\psi=\theta+\varphi$,

$$H(\varphi)=\pi\rho\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{0}\Delta(\theta+\varphi)\cos\rho\theta\,d\theta=\pi\rho\left|F(\theta+\varphi)\cos\rho\theta\right|_{-\frac{\pi}{\rho}}^{0}+$$

$$+\pi\rho^2\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{0}F(\theta+\varphi)\sin\rho\theta\,d\theta=\pi\rho\left[F(\varphi)+F\left(\varphi-\frac{\pi}{\rho}\right)\right]+$$

$$+\pi\rho^2\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{0}F(\theta+\varphi)\sin\rho\theta\,d\theta,$$

где

$$F(x)=\int_0^x\Delta(x)\,dx.$$

Отсюда:

$$H'_+(\varphi)=\pi\rho\left[\Delta(\varphi+0)+\Delta\left(\varphi-\frac{\pi}{\rho}+0\right)\right]+\pi\rho^2\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{0}\Delta(\theta+\varphi)\sin\rho\theta\,d\theta, \tag{12}$$

или

$$H'_+(\varphi)=2\pi\rho\,\Delta(\varphi+0)-\pi\,\Delta\left(\frac{\pi}{\rho}\right)+\pi\rho^2\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{0}\Delta(\varphi+\theta)\sin\rho\theta\,d\theta, \tag{13}$$

и, аналогично,

$$H'_-(\varphi)=2\pi\rho\,\Delta(\varphi-0)-\pi\,\Delta\left(\frac{\pi}{\rho}\right)+\pi\rho^2\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{0}\Delta(\varphi+\theta)\sin\rho\theta\,d\theta. \tag{13'}$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\varphi}H(\varphi)\,d\varphi=\pi\rho\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{0}[F(\theta+\varphi)-F(\theta)]\cos\rho\theta\,d\theta=-\pi\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{0}\Delta(\theta+\varphi)\sin\rho\theta\,d\theta+A,$$

где

$$A=-\pi\rho\int_{-\frac{\pi}{\rho}}^{0}F(\theta)\cos\rho\theta\,d\theta.$$

Отсюда получается:

$$\Delta(\varphi_2+0)-\Delta(\varphi_1-0)=\frac{1}{2\pi\rho}\left[H'_+(\varphi_2)-H'_-(\varphi_1)+\rho^2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}H(\varphi)\,d\varphi\right]. \qquad (6')$$

Положив в этой формуле $\varphi_2=\varphi_1$, мы видим, что $H(\varphi)$ имеет производную всюду за исключением счетного множества точек и именно тех точек, в которых $\Delta(\varphi+0)>\Delta(\varphi-0)$. В этих точках:

$$H'_+(\varphi)-H'_-(\varphi)=2\pi\rho\,[\Delta(\varphi+0)-\Delta(\varphi-0)].$$

Формулы (6) и (6') показывают, что плотность нулей внутри некоторого угла зависит только от значений $H(\varphi)$ внутри этого угла.

§ 4. Для дальнейшего необходимо вывести еще некоторые свойства $h(\varphi)$, индикатора роста произвольной целой функции конечного порядка.

а) $h(\varphi)$ *имеет в каждой точке производную справа и слева.*

Воспользуемся для доказательства соотношением (4) гл. II, которое может быть представлено в форме:

$$h(\varphi_2)\sin\rho(\varphi_3-\varphi_1)+h(\varphi_3)\sin\rho(\varphi_1-\varphi_2)+h(\varphi_1)\,[\sin\rho(\varphi_1-\varphi_3)-\sin\rho(\varphi_1-\varphi_2)]\leqslant$$
$$\leqslant 2\,h(\varphi_1)\sin\rho\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}\sin\rho(\varphi_3-\varphi_1)\sin\rho(\varphi_2-\varphi_1)$$
$$\left(\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3,\quad 0<\varphi_3-\varphi_1<\frac{\pi}{\rho}\right),$$

или

$$\frac{h(\varphi_2)-h(\varphi_1)}{\sin\rho(\varphi_2-\varphi_1)}\leqslant\frac{h(\varphi_3)-h(\varphi_1)}{\sin\rho(\varphi_3-\varphi_1)}+2\,h(\varphi_1)\sin\rho\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}. \qquad (14)$$

$h(\varphi)$ — ограниченная функция, и, следовательно, если обозначить $2\,h(\varphi_1)\sin\rho\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}$ через θ, то

$$|\theta|<M(\varphi_3-\varphi_1).$$

С другой стороны, положив

$$r(\varphi_i)=\frac{h(\varphi_i)-h(\varphi_1)}{\sin\rho(\varphi_i-\varphi_1)}\quad (i=2,\ 3),$$

получим

$$r(\varphi_2)\leqslant r(\varphi_3)+\theta. \qquad (15)$$

Покажем теперь, что $r(\varphi_i)$ ограничена снизу. Построим для этого вспомогательную функцию

$$H(\varphi)=A\cos\rho\varphi+B\sin\rho\varphi,$$

причем A и B выберем так, что

$$H(\varphi_1)=h(\varphi_1)\ \text{ и }\ H(\varphi_4)=h(\varphi_4),\ \text{ где }\ \varphi_4<\varphi_1.$$

$H(\varphi)$ удовлетворяет соотношению

$$H(\varphi_2)\sin\rho(\varphi_4-\varphi_1)+H(\varphi_1)\sin\rho(\varphi_2-\varphi_4)+H(\varphi_4)\sin\rho(\varphi_1-\varphi_2)=0.$$

Отсюда и из (4) гл. II имеем:

$$h(\varphi_2)\geqslant\frac{h(\varphi_4)\sin\rho(\varphi_2-\varphi_1)-h(\varphi_1)\sin\rho(\varphi_4-\varphi_1)}{\sin\rho(\varphi_4-\varphi_1)}=H(\varphi_2)\quad(\varphi_4-\varphi_1<0),$$

и, следовательно,

$$r_2(\varphi)\geqslant\frac{H(\varphi_2)-H(\varphi_1)}{\sin\rho(\varphi_2-\varphi_1)}\quad(\varphi_2>\varphi_1),$$

а так как $H(\varphi)$ — диференцируемая функция, то правая часть этого неравенства ограничена снизу, т. е.

$$r(\varphi_2) \geqslant N,$$

где N — некоторое число.

Выберем теперь φ_5 так, что

$$0 < M(\varphi_5 - \varphi_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно, $|\theta| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть N_1 — нижняя граница для $r(\varphi)$ при $\varphi_1 < \varphi \leqslant \varphi_5$. Выберем теперь $\varphi_3 \leqslant \varphi_5$ так, что

$$|r(\varphi_3) - N_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из (15) получаем:

$$|r(\varphi_2) - N_1| < \varepsilon,$$

при всяком φ_2 из интервала (φ_1, φ_3), т. е.

$$\lim_{\substack{\varphi_2 \to \varphi_1 \\ \varphi_2 > \varphi_1}} r(\varphi_2) = N_1.$$

Но

$$\lim_{\substack{\varphi_2 \to \varphi_1 \\ \varphi_2 > \varphi_1}} \frac{h(\varphi_2) - h(\varphi_1)}{\sin\rho(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{1}{\rho} h'_+(\varphi_1),$$

где h'_+ обозначает производную справа. Совершенно так же доказывается существование производной слева.

Отсюда и из формулы (6) легко получить следующий вывод:

Пусть $\overline{h}(\varphi)$ — *подтригонометрическая функция (т. е. удовлетворяющая неравенству* (4) *главы II) не целого порядка* ρ *с периодом* 2π *и* $\max \overline{h}(\varphi) = 1$. *Пусть* $L^*(r)$ — *произвольная функция класса* $L(r)$.

Можно построить целую функцию порядка ρ *с индикатором роста* $\overline{h}(\varphi)$.

В самом деле, построим по формуле (6) функцию $\Delta(\varphi)$ и расположим нули целой функции $F(z)$ так, что

$$n(m, 0, \psi) = [\Delta(\psi)\, m^{\rho} L^*(m)] \quad (m \text{ — целое число}).$$

Тогда $\Delta(\psi)$ — плотность нулей и индикатор роста $F(z)$:

$$h(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int\limits_{\varphi - 2\pi}^{\varphi} \cos\rho(\varphi - \psi - \pi)\, d\Delta(\psi) = \overline{h}(\varphi).$$

Аналогичная теорема была доказана V. Bernstein'ом для функций нормального типа *.

b) $h'_+(\varphi) \geqslant h'_-(\varphi)$ *для всех значений* φ.

Докажем это. Из основного соотношения для $h(\varphi)$ [см. (4), гл. II] легко получаем:

$$[h(\varphi_2) - h(\varphi_1)] \sin\rho(\varphi_3 - \varphi_2) - [h(\varphi_3) - h(\varphi_2)] \sin\rho(\varphi_2 - \varphi_1) \leqslant$$
$$\leqslant h(\varphi_2)[\sin\rho(\varphi_3 - \varphi_2) + \sin\rho(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin\rho(\varphi_3 - \varphi_1)]. \quad (16)$$

---

* C. R., **202**, (1936), 280—282.

Можем выбрать φ_1 и φ_3 так, что $\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = \eta$; тогда

$$\frac{h(\varphi_2) - h(\varphi_1)}{\sin\rho(\varphi_2 - \varphi_1)} - \frac{h(\varphi_3) - h(\varphi_2)}{\sin\rho(\varphi_3 - \varphi_2)} \leqslant h(\varphi_2)\frac{2\sin\rho\eta - \sin 2\rho\eta}{\sin^2\rho\eta}$$

и, переходя к пределу при $\eta \to 0$ и фиксированном φ_2, имеем:

$$h'_{-}(\varphi) - h'_{+}(\varphi) \leqslant 0. \tag{16'}$$

Из (16) также следует:

$$|h(\varphi_2) - h(\varphi_1)| < k|\varphi_2 - \varphi_1|,$$

где k не зависит ни от φ_1 и φ_2, ни от $h(\varphi)$ $[h(\varphi) \leqslant 1]$, т. е. $h(\varphi)$ *равностепенно непрерывны.*

c) Докажем теперь, что $h'_{+}(\varphi)$ *полунепрерывна справа и* $h'_{-}(\varphi)$ *полунепрерывна слева.*

Из (14) имеем

$$\frac{h(\varphi_2) - h(\varphi_1)}{\sin\rho(\varphi_2 - \varphi_1)} \leqslant \frac{h(\varphi_3) - h(\varphi_1)}{\sin\rho(\varphi_3 - \varphi_1)} + M(\varphi_3 - \varphi_1),$$

и, аналогично, можно получить

$$\frac{h(\varphi_2) - h(\varphi_3)}{\sin\rho(\varphi_2 - \varphi_3)} \geqslant \frac{h(\varphi_3) - h(\varphi_1)}{\sin\rho(\varphi_3 - \varphi_1)} - M(\varphi_3 - \varphi_1).$$

Отсюда:

$$h'_{+}(\varphi_1) - h'_{-}(\varphi_3) \leqslant 2M(\varphi_3 - \varphi_1), \tag{17}$$

причем M можно взять одно и то же, так как $h(\varphi)$ равноограничены.

Отсюда и из (16) следует, что $h'_{+}(\varphi) + 2M\varphi$ и $h'_{-}(\varphi) + 2M\varphi$ — монотонные функции. Очевидно, что $h'_{+}(\varphi)$ стремится к определенному пределу, если φ стремится к φ_0 справа. Но тогда, по теореме Lebesgue'a *,

$$h'_{+}(\varphi_0 + 0) = h'_{+}(\varphi_0),$$

т. е. $h'_{+}(\varphi)$ полунепрерывна справа. Аналогично доказывается полунепрерывность $h'_{-}(\varphi)$ слева.

Если определить функции $\theta(\varphi)$ так, чтобы

$$h'_{+}(\varphi) \geqslant \theta(\varphi) \geqslant h'_{-}(\varphi),$$

то $\theta(\varphi) + 2M\varphi$ будет монотонной функцией и, следовательно, будет иметь не более чем счетное множество точек разрыва. Отсюда следует, что $h(\varphi)$ имеет производную всюду кроме, быть может, счетного множества точек.

d) *Для произвольной голоморфной внутри угла* $\langle \varphi'_1, \varphi'_2 \rangle$ *функции конечного порядка* ρ *с индикатором роста* $h(\varphi)$ *при* $\varphi'_2 > \varphi_2 > \varphi_1 > \varphi'_1$ *имеет место неравенство*

$$h'_{+}(\varphi_2) - h'_{-}(\varphi_1) + \rho^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} h(\varphi)\, d\varphi \geqslant 0.$$

* См. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных функций.

Доказательство. Вернемся к основному соотношению для $h(\varphi)$ и запишем его в форме:

$$[h(\varphi_2)-h(\varphi_1)]\sin\rho(\varphi_3-\varphi_1)+h(\varphi_1)[\sin\rho(\varphi_2-\varphi_3)+\sin\rho(\varphi_3-\varphi_1)]+$$
$$+h(\varphi_3)\sin\rho(\varphi_1-\varphi_2)\leqslant 0 \quad (\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3),$$

или

$$\frac{h(\varphi_2)-h(\varphi_1)}{\sin\rho(\varphi_2-\varphi_1)}\sin\rho(\varphi_3-\varphi_1)+h(\varphi_1)\frac{\sin\rho(\varphi_3-\varphi_1)-\sin\rho(\varphi_3-\varphi_2)}{\sin\rho(\varphi_2-\varphi_1)}-h(\varphi_3)\leqslant 0.$$

Переходя к пределу при $\varphi_1\to\varphi_2$, получаем:

$$\frac{1}{\rho}h'_-(\varphi_2)\sin\rho(\varphi_3-\varphi_2)+h(\varphi_2)\cos\rho(\varphi_3-\varphi_2)-h(\varphi_3)\leqslant 0. \tag{18}$$

Совершенно так же можем получить второе соотношение:

$$\frac{1}{\rho}h'_+(\varphi'_2)\sin\rho(\varphi'_2-\varphi_1)+h(\varphi'_2)\cos\rho(\varphi'_2-\varphi_1)+h(\varphi_1)\geqslant 0. \tag{18'}$$

Можем взять $\varphi'_2>\varphi_2$ и в (18) заменить φ_3 через φ'_2, а в (18') φ_1 через φ_2. Делая эту замену и вычитая из (18) (18'), получаем:

$$h'_+(\varphi'_2)-h'_-(\varphi_2)+\rho[h(\varphi'_2)+h(\varphi_2)]\operatorname{tg}\rho\frac{\varphi'_2-\varphi_2}{2}\geqslant 0. \tag{19}$$

Разделим теперь весь интервал $\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle$ на ряд интервалов $\langle\varphi_i,\varphi_{i+1}\rangle$, причем точки деления выберем так, что

$$h'_+(\varphi_i)=h'_-(\varphi_i).$$

Написав для каждого интервала соотношение (19) и просуммировав их все, получим:

$$h'_+(\varphi_2)-h'_-(\varphi_1)+\rho\sum_i\frac{h(\varphi_{i+1})+h(\varphi_i)}{2}\cdot 2\operatorname{tg}\rho\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{2}\geqslant 0.$$

Можем $\operatorname{tg}\rho\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{2}$ заменить эквивалентной величиной, пользуясь равенством

$$2\operatorname{tg}\rho\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{2}=\rho(\varphi_{i+1}-\varphi_i)+\theta(\varphi_{i+1}-\varphi_i)^3,$$

где θ — ограниченная величина. Переходя к пределу при $\max|\varphi_{i+1}-\varphi_i|\to 0$, получаем:

$$h'_+(\varphi_2)-h'_-(\varphi_1)+\rho^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}h(\varphi)\,d\varphi\geqslant 0\ ^*.$$

§ 5. Теорема 3. *Для всякой голоморфной внутри угла $\langle\varphi_1-\varepsilon_1,\varphi_2+\varepsilon_1\rangle$ функции порядка ρ плотность любого подмножества ее нулей измеримой плотности внутри угла $\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle$ не больше чем $\delta_h(\varphi_1,\varphi_2)$, где $\delta_h(\varphi_1,\varphi_2)$ определяется равенством*

$$\delta_h(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{1}{2\pi\rho}\left[h'_+(\varphi_2)-h'_-(\varphi_1)+\rho^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}h(\varphi)\,d\varphi\right].$$

---

* Это свойство, так же как и предыдущие, легко получить, заметив, что $h\left(\frac{\varphi}{\rho}\right)$ — «Stützfunktion» некоторой выпуклой дуги. Пусть θ — угол, образованный перпендикуляром к опорной прямой с положительным направлением оси x.

$$\frac{1}{\rho}\left[h'_+(\varphi_2)-h'_-(\varphi_1)+\rho^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}h(\varphi)\,d\varphi\right]$$

— длина дуги, на которой $\rho\varphi_1\leqslant\theta\leqslant\rho\varphi_2$.

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. плотность некоторого измеримого подмножества $\Delta > \delta_h(\varphi_1, \varphi_2)$. Разделим весь интервал $\langle \varphi_1 - \varepsilon, \varphi_2 + \varepsilon \rangle$ на интервалы длины меньше ε так, что в точках деления $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n'$ $\Delta(\psi)$ непрерывна, и выбросим из подмножества измеримой плотности точки, попадающие внутрь углов $(\varphi_i' - \varepsilon_2, \varphi_i' + \varepsilon_2)$. ε_2 берется настолько малым, что плотность оставшегося подмножества $\Delta' > \delta_h(\varphi_1, \varphi_2)$.

Предположим, что ρ — не целое. Построим вспомогательную функцию

$$\Phi_\varepsilon(z) = \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k},\ p\right),$$

где a_k — нули оставшегося измеримого подмножества.

Пусть

$$H_\varepsilon(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\Phi_\varepsilon(re^{i\varphi})|}{r^\rho L(r)} \tag{20}$$

и пусть

$$V(z) = \frac{F(z)}{\Phi_\varepsilon(z)}$$

с индикатором $H_1(\varphi)$, отвечающим $L(r)$. Тогда в точках φ_i' и вне угла $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$

$$H_1(\varphi) = h(\varphi) - H_\varepsilon(\varphi).$$

В силу равностепенной непрерывности $H_1(\varphi)$, $h(\varphi)$ и $H_\varepsilon(\varphi)$

$$|H_1(\varphi) - (h(\varphi) - H_\varepsilon(\varphi))| < \sigma(\varepsilon),$$

где $\sigma(\varepsilon) \to 0$ вместе с ε. Кроме того, вне угла $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$:

$$H'_{1\pm}(\varphi) = h'_{\pm}(\varphi) - H'_{\varepsilon\pm}(\varphi).$$

Отсюда:

$$|\delta_{H_1}(\varphi_2'', \varphi_1'') - [\delta_h(\varphi_2'', \varphi_1'') - \delta_{H_\varepsilon}(\varphi_2'', \varphi_1'')]| < \sigma(\varepsilon)\,|\varphi_2'' - \varphi_1''|,$$

где $\varphi_2'' > \varphi_2$ и $\varphi_1'' < \varphi_1$, но тогда, используя полунепрерывность $h'_+(\varphi)$ и $h'_-(\varphi)$, при достаточно малом ε, получим

$$\delta_{H_1}(\varphi_1, \varphi_2) \leqslant \sigma(\varepsilon)(\varphi_2 - \varphi_1) + \delta_h(\varphi_1, \varphi_2) - \Delta' < 0,$$

что противоречит предыдущей теореме.

При ρ целом мы строим другую вспомогательную функцию

$$\Phi_\varepsilon(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^{2\rho}}{a_k^{2\rho}}\right),$$

где a_k — нули измеримого подмножества, не попадающие внутрь углов $(\varphi_i - \varepsilon_2, \varphi_i + \varepsilon_2)$, и доказываем, таким образом, нашу теорему для случая $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\rho}$, а затем путем суммирования и для любого угла.

Следствие 1. Если $h(\varphi) = A\cos\rho\varphi + B\sin\rho\varphi$, то $\delta_h(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, и, следовательно, плотность любого измеримого подмножества нулей равна нулю.

Следствие 2. Если $\Delta(\psi)$ — функция распределения для подмножества измеримой плотности, то

$$\Delta(\varphi + 0) - \Delta(\varphi - 0) \leqslant \frac{1}{2\pi\rho}[h'_+(\varphi) - h'_-(\varphi)].$$

(Поступило в редакцию 15/III 1937 г.)

Sur la croissance d'une fonction entière suivant un rayon et la distribution de ses zéros suivant leurs arguments

B. Lévine (Odessa)

(Résumé)

L'article présent a pour but d'étudier le rapport entre la distribution des zéros d'une fonction entière suivant leurs arguments et sa croissance suivant un rayon. Dans tout ce travail un rôle essentiel est joué par les fonctions $L(r)$ définies comme il suit

a) $L(r)$ est positive et continue,

b) $k^{-\varepsilon} \leqslant \frac{L(kr)}{L(r)} \leqslant k^{\varepsilon}$

où $r \geqslant R(\varepsilon)$ et $k \geqslant 1$. Si $k < 1$, les inégalités changent de signe. [$R(\varepsilon)$ ne dépend pas de k.]

On établit le lemme suivant:

Il existe pour chaque fonction entière d'ordre fini ρ une fonction $L(r)$ telle que

$$\ln M(r) \leqslant r^{\rho} L(r),$$

l'égalité ayant lieu pour des valeurs arbitrairement grandes de r.

Il est aisé de voir que l'ordre ainsi défini coïncide en ce qui est essentiel avec l'ordre précisé de M. Valiron.

On considère les fonctions de la forme suivante:

$$\Phi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k}, p\right)$$

où

$$G\left(\frac{z}{a_k}, p\right) = \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k} + \cdots + \frac{z^p}{p a_k^p}}$$

et

$$a_k = r_k e^{i\psi};$$

on suppose d'ailleurs que la limite

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k}{r_k^{\rho} L^{*}(r_k)} = \Delta$$

existe [$L^{*}(r)$ appartient à la classe des fonctions $L(r)$].

Alors, si ρ n'est pas un entier, on a

$$\frac{\ln |F(re^{i\varphi})|}{r^{\rho} L^{*}(r)} \rightrightarrows H(\varphi) = \frac{\Delta\pi}{\sin \pi\rho} \cos \rho (\varphi - \psi - \pi),$$

si

$$\eta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \eta \quad (\eta > 0).$$

Si ρ est un entier, on construit la fonction

$$\Phi_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^{2\rho}}{a_k^{2\rho}}\right)$$

où $a_k = r_k e^{i\psi}$ et

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{r_k^\rho L^*(r_k)} = \Delta.$$

Alors

$$\frac{\ln |\Phi_1(re^{i\varphi})|}{r^\rho L^*(r)} \rightrightarrows H(\varphi) = \Delta\pi \, |\sin\rho(\varphi - \psi)|.$$

On peut, au moyen des fonctions $\Phi(z)$ et $\Phi_1(z)$, construire une fonction auxiliaire $V(z)$ vérifiant les conditions suivantes:

1) $V(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'un angle donné $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ $\left(0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\rho}\right.$ et $\left.\varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi\right)$,

2) $V(z)$ ne s'annule pas à l'intérieur de l'angle $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$,

3) $\dfrac{\ln |V(re^{i\varphi})|}{r^\rho L(r)} \rightrightarrows A\cos\rho\varphi + B\sin\rho\varphi$

où A, B et $L(r)$ sont arbitrairement donnés et $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$.

La fonction $V(z)$ permet à l'auteur de démontrer que pour chaque fonction entière $F(z)$ d'ordre ρ fini il existe au moins un rayon $\arg z = \varphi$ tel que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |F(re^{i\varphi})|}{\ln M(r)} = 1.$$

En général, la fonction $V(z)$ permet d'étudier l'indicateur de la croissance $h(\varphi)$ d'une fonction entière $F(z)$ d'ordre fini ρ. L'indicateur de la croissance $h(\varphi)$ est défini par l'égalité

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |F(re^{i\varphi})|}{r^\rho L(r)}$$

où $L(r)$ est choisie de telle manière que l'on a

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^\rho L(r)} = 1.$$

Une propriété essentielle de $h(\varphi)$ consiste en ce que $h\left(\frac{\varphi}{\rho}\right)$ est la fonction d'appui* pour une certaine courbe convexe C. Il en résulte que $h(\varphi)$ est continue, qu'elle possède une dérivée droite et une dérivée gauche, etc.

D'ailleurs il résulte de cette propriété fondamentale de $h(\varphi)$ que si ρ n'est pas un entier on a

$$h(\varphi) = \frac{1}{2\sin\pi\rho} \int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} \cos\rho(\varphi - \psi - \pi)\, ds(\rho\psi)$$

où $s(\psi_2 + 0) - s(\psi_1 - 0)$ est la longueur de l'arc de la courbe C entre les points ψ_1 et ψ_2.

Si ρ est un entier, on a

$$h(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi + \frac{\pi}{\rho}} \sin\rho(\psi - \varphi)\, ds(\rho\psi).$$

* Stützfunktion.

Les intégrales sont les intégrales de Stieltjes et la longuer de l'arc de la courbe est

$$s(\rho\varphi_2+0)-s(\rho\varphi_1-0)=\frac{1}{\rho}\left[h'_+(\varphi_2)-h'_-(\varphi_1)+\rho^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}h(\varphi)\,d\varphi\right].$$

Les résultats principaux de cet article se rapportent aux fonctions dont les zéros forment un ensemble qui a été nommé par l'auteur «ensemble de densité mesurable». C'est un ensemble pour lequel la limite

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\psi)}{r^{\rho}L^*(r)}=\Delta(\psi)$$

existe pour chaque ψ où $n(r,\psi)$ est le nombre des points de l'ensemble dans le secteur $0<\arg z\leqslant\psi$, $|z|\leqslant r$.

L'auteur donne à la valeur $\Delta(\psi)$ le nom de densité. Le théorème suivant est établi:

Si la fonction $F(z)$ est d'ordre ρ, où ρ n'est pas un entier, et si l'ensemble de ses zéros est de densité mesurable $\Delta(\psi)$, on a

$$h(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{\ln M(r)}=c\,\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\cos\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\Delta(\psi)$$

où la constante

$$c=\lim_{r\to\infty}\frac{r^{\rho}L^*(r)}{\ln M(r)}.$$

Ainsi dans ce cas l'indicateur $h(\varphi)$ ne dépend pas du choix de $L(r)$.

Si $F(z)$ est d'ordre ρ où ρ est un entier et si l'on peut la présenter dans la forme

$$F(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2\rho}}{a_k^{2\rho}}\right)$$

où les a_k forment un ensemble de densité mesurable $\Delta(\psi)$, on a

$$h(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{\ln M(r)}=c\pi\int_{\varphi}^{\varphi+\frac{\pi}{\rho}}\sin\rho(\psi-\varphi)\,d\Delta(\psi).$$

Par l'inversion de ces intégrales on obtient le théorème:

$$\Delta(\psi\pm0)=\frac{1}{2\pi c}\,[s(\rho\psi\pm0)-s(+0)]$$

où $s(\varphi)$ est la longueur d'un arc convexe correspondant à l'indicateur $h(\varphi)$.

Pour un cas plus général l'auteur obtient e

Théorème. *Si $F(z)$ est une fonction holomorphe à l'intérieur de l'angle $\langle\varphi_1-\varepsilon,\ \varphi_2+\varepsilon\rangle$ ($\varepsilon>0$) et si elle est d'ordre fini ρ, on a*

$$\Delta(\varphi_2+0)-\Delta(\varphi_1-0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\,[s(\rho\varphi_2+0)-s(\rho\varphi_1-0)]$$

où $\Delta(\varphi)$ est la densité d'une certaine partie de l'ensemble des zéros dont la densité est mesurable.

Dans le dernier chapitre on trouve la généralisation suivante d'un théorème bien connu de Carlson:

Si pour une fonction entière d'ordre fini ρ *dont l'indicateur de croissance est* $h(\varphi)$ *on peut trouver dans l'ensemble des zéros une partie ayant une densité mesurable* $\Delta(\psi)$, *on a*

$$h(\varphi)+h\left(\varphi+\frac{\pi}{\rho}\right)\geqslant H(\varphi)+H\left(\varphi+\frac{\pi}{\rho}\right)$$

pour toutes les valeurs de φ.

Dans cette formule si ρ n'est pas un entier, on a

$$H(\varphi)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int\limits_{\varphi-2\pi}^{\varphi}\cos\rho(\varphi-\psi-\pi)\,d\Delta(\psi)$$

et si ρ est entier

$$H(\varphi)=\pi\int\limits_{\varphi}^{\varphi+\frac{\pi}{\rho}}\sin\rho(\psi-\varphi)\,d\Delta(\psi).$$