Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Модули над ограниченными дедекиндовыми первичными кольцами, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 5, 65–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:22:55

УДК 512.55

А. А. Туганбаев

Модули над ограниченными дедекиндовыми первичными кольцами

Получено полное описание разделяющих модулей и π -проективных модулей над ограниченными дедекиндовыми первичными кольцами.

Библиография: 13 названий.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Слова типа “нётерово кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Обозначим через $\text{Lat } M$ и $\text{Lat } N$ решетки всех подмодулей модулей M и N соответственно. Следуя [1] и [2], определим отображение φ из $\text{Lat } N$ в решетку всех подгрупп аддитивной группы $\text{Hom}(M, N)$, используя правило $\varphi(X) = \text{Hom}(M, X)$. Очевидно, что $\varphi(X \cap Y) = \varphi(X) \cap \varphi(Y)$ для любых $X, Y \in \text{Lat } N$. Модуль M называется N -разделяющим, если φ – решеточный гомоморфизм, т.е. $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$ для любых $X, Y \in \text{Lat } N$; это означает, что $\text{Hom}(M, X + Y) = \text{Hom}(M, X) + \text{Hom}(M, Y)$ для любых двух подмодулей X и Y модуля N . Модуль M называется *разделяющим*, если M является M -разделяющим (т.е. $\text{Hom}(M, X + Y) = \text{Hom}(M, X) + \text{Hom}(M, Y)$ для любых двух подмодулей X и Y модуля M , см. [1] и [2]). Все квазипроективные (например, проективные) модули являются разделяющими. Квазициклические абелевы группы являются разделяющими неквазипроективными модулями над кольцом целых чисел. Модуль M называется π -проективным, если для любых его подмодулей U и V таких, что $U + V = M$, существует такой эндоморфизм f модуля M , что $f(M) \subseteq U$ и $(1 - f)(M) \subseteq V$ (см. [3; с. 359]). Каждый разделяющий модуль π -проективен. Класс π -проективных модулей содержит все квазипроективные модули и модули, у которых все фактормодули являются неразложимыми. Следовательно, класс π -проективных модулей содержит все проективные, цепные и локальные модули. В частности, все циклические модули над локальными кольцами и все свободные модули являются π -проективными.

Нётерово первичное кольцо A с простым артиновым классическим кольцом частных Q называется *дедекиндовым первичным* кольцом (см. [4; §5.2]), если каждый ненулевой идеал кольца A обратим в кольце Q . Кольцо A называется *ограниченным справа (слева)*, если каждый его существенный правый (левый) идеал содержит ненулевой идеал кольца A . Например, все коммутативные дедекиндовы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00382).

(в классическом смысле) области (и кольца матриц над ними) являются ограниченными дедекиндовыми первичными кольцами. Кроме того, первичные кольца главных идеалов являются дедекиндовыми первичными кольцами. Другие примеры дедекиндовых первичных колец приведены в [4; §§ 5.2, 5.3].

В [2] получено полное описание всех разделяющих модулей над коммутативными дедекиндовыми кольцами. Основным результатом настоящей работы является теорема 1, которая содержит полное описание всех разделяющих модулей и всех π -проективных модулей над ограниченными дедекиндовыми первичными кольцами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – модуль над ограниченным дедекиндовым первичным кольцом A . Тогда M – разделяющий модуль $\iff M$ – π -проективный модуль $\iff$ выполнено одно из следующих четырех условий:

- (i) M – проективный модуль;
- (ii) существуют такие натуральные числа k и n , что кольцо A изоморфно кольцу всех $(k \times k)$ -матриц D_k над некоторой цепной нётерово областью D , $M = X \oplus Y$, X – конечная прямая сумма ненулевых инъективных неразложимых модулей без кручения $X_1, \dots, X_n$, Y – конечно порожденный проективный модуль, причем либо $n = 1$, либо $n \geq 2$ и D – полная область;
- (iii) $M = X \oplus Y$, где X – периодический инъективный ненулевой модуль, у которого каждая примарная компонента является неразложимым модулем, а Y – ненулевой конечно порожденный проективный модуль;
- (iv) M – периодический модуль, у которого каждая примарная компонента является либо неразложимым инъективным модулем, либо прямой суммой изоморфных циклических цепных модулей конечной длины.

В связи с теоремой 1 отметим, что строение π -проективных модулей над коммутативными дедекиндовыми областями не было ранее известно. Кроме того, заметим, что A – дедекиндово первичное кольцо тогда и только тогда, когда A – наследственное нётерово первичное кольцо без идемпотентных собственных ненулевых идеалов [4; 5.6.3]. Далее, в [5] показано, что каждое наследственное нётерово первичное кольцо A является либо примитивным, либо ограниченным кольцом, причем если A примитивно и ограничено, то A – простое артиново кольцо. Кроме того, любое наследственное нётерово первичное PI-кольцо является ограниченным кольцом.

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд лемм, собранных в два параграфа. Приведем необходимые определения и обозначения.

Модуль называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем. Через $J(A)$ обозначается радикал Джекобсона кольца A . Цепная нётерова область A называется *полной*, если кольцо A является полным относительно $J(A)$ -адической топологии.

Модуль M называется *проективным относительно модуля N* (или *N -проективным*), если для любого эпиморфизма $h: N \rightarrow \overline{N}$ и каждого гомоморфизма $\overline{f}: M \rightarrow \overline{N}$ существует такой гомоморфизм $f: M \rightarrow N$, что $hf = \overline{f}$. Модуль, проективный относительно себя, называется *квазипроективным* модулем. Модуль называется *наследственным*, если все его подмодули проективны.

Элемент a кольца A , не являющийся левым или правым делителем нуля, называется *регулярным* элементом. Для модуля M через $T(M)$ обозначается множество всех элементов из M , аннуляторы которых содержат регулярные элементы. Если $T(M) = M$ ($0 \neq T(M) \neq M$; $T(M) = 0$), то M называется *периодическим* (*смешанным; модулем без кручения*).

Подмодуль N модуля M называется *существенным* (в M), если N имеет ненулевое пересечение с любым ненулевым подмодулем модуля M . В этом случае M называется *существенным расширением* модуля N . Через $r(N)$ обозначается аннулятор в кольце A подмножества N правого модуля M_A . Через $\text{Sing } M$ обозначается *сингулярный подмодуль* модуля M_A над кольцом A (т.е. множество всех таких элементов $t \in M$, что $r(t)$ — существенный правый идеал кольца A). Модуль M_A называется *несингулярным* (*сингулярным*), если $\text{Sing } M = 0$ ($\text{Sing } M = M$).

Пусть кольцо A обладает классическим кольцом частных Q . Идеал B кольца A называется *обратимым* идеалом, если существует такой подбимодуль B^{-1} бимодуля AQ_A , что $BB^{-1} = B^{-1}B = A$. Максимальные элементы множества всех собственных обратимых идеалов кольца A называются *максимальными обратимыми идеалами* кольца A . Множество всех максимальных обратимых идеалов кольца A обозначается через $\mathcal{P}(A)$. Если M — A -модуль и $P \in \mathcal{P}(A)$, то подмодуль $\{t \in M : tP^n = 0, n = 1, 2, \dots\}$ называется *P -примарной компонентой* модуля M и обозначается через $M(P)$. Если $M = M(P)$ для некоторого $P \in \mathcal{P}(A)$, то M называется *примарным* или *P -примарным* модулем.

Модуль, не имеющий ненулевых инъективных прямых слагаемых, называется *редуцированным*. Модуль, не содержащий бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей, называется *конечномерным* (в смысле Голди). Модуль, не являющийся конечномерным, называется *бесконечномерным*. Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*.

Подмодуль фактормодуля модуля M называется *подфактором* модуля M . Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Подмодуль V правого модуля U над кольцом S называется *чистым* подмодулем в U_S , если для каждого левого S -модуля M естественный групповой гомоморфизм $V \otimes_S M \rightarrow U \otimes_S M$ является мономорфизмом. Модуль X_A называется *чисто-инъективным*, если для каждого модуля M_A и любого чистого подмодуля N модуля M все гомоморфизмы $N \rightarrow X$ продолжаются до гомоморфизмов $M \rightarrow X$.

§ 1. Модули без кручения

ЛЕММА 1.1. (1) *Каждый проективный модуль является квазипроективным модулем без кручения.*

(2) *Если M — правый модуль над кольцом A , то*

M — квазипроективный (разделяющий, π -проективный) A -модуль $\iff$

M — квазипроективный (разделяющий, π -проективный) $A/r(M)$ -модуль.

(3) Пусть X и M – модули, причем либо X – M -проективный модуль, либо M – цепной модуль. Тогда X – M -разделяющий модуль.

(4) Если M – либо квазипроективный, либо цепной модуль, то M – разделяющий модуль. Если M – разделяющий модуль, то M – π -проективный модуль.

(5) A – нётерово справа кольцо $\iff$ каждый инъективный правый A -модуль является прямой суммой равномерных инъективных модулей $\iff$ все прямые суммы инъективных правых A -модулей инъективны.

(6) Каждый модуль над полуцепным артиновым кольцом чисто-инъективен и является прямой суммой циклических цепных квазипроективных модулей.

(7) Если A – наследственное справа кольцо, то все проективные правые A -модули являются наследственными и все гомоморфные образы инъективных правых A -модулей инъективны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (1) и (2) проверяются непосредственно.

(3) Пусть M_1 и M_2 – подмодули модуля M , $f \in \text{Hom}(X, M_1 + M_2)$, $h: M \rightarrow M/(M_1 \cap M_2)$ – естественный эпиморфизм.

Допустим, что M – цепной модуль. Тогда $M_1 + M_2 = M_1$ либо $M_1 + M_2 = M_2$. Допустим, что $M_1 + M_2 = M_1$. Положим $f_1 \equiv f \in \text{Hom}(X, M_1)$, $f_2 \equiv 0 \in \text{Hom}(X, M_2)$. Тогда $f = f_1 + f_2$.

Допустим, что X – M -проективный модуль. Тогда $h(M_1 + M_2) = h(M_1) \oplus h(M_2)$ и существуют естественные проекции

$$\pi_1: h(M_1 + M_2) \rightarrow h(M_1) \quad \text{и} \quad \pi_2: h(M_1 + M_2) \rightarrow h(M_2)$$

с ядрами $h(M_2)$ и $h(M_1)$ соответственно. Так как $\pi_i h f \in \text{Hom}(X, h(M_i))$ и модуль X – M -проективен, то существуют такие гомоморфизмы $g_i: X \rightarrow M$, что $\pi_i h f = h g_i$ ($i = 1, 2$). Тогда $h f = (\pi_1 + \pi_2) h f = \pi_1 h f + \pi_2 h f = h g_1 + h g_2 = h(g_1 + g_2)$ и $h g_i(X) = \pi_i h f(X) \subseteq \pi_i h(M_1 + M_2) = h(M_i)$. Поэтому $(f - g_1 - g_2)(X) \subseteq \text{Ker } h = M_1 \cap M_2$ и $g_i(X) \subseteq M_i + \text{Ker } h = M_i$ ($i = 1, 2$). Тогда $f - g_1 = (f - g_1 - g_2) + g_2 \in \text{Hom}(X, M_2)$. Положим $f_1 \equiv g_1 \in \text{Hom}(X, M_1)$ и $f_2 \equiv f - g_1 \in \text{Hom}(X, M_2)$. Тогда $f = f_1 + f_2$ и X – M -разделяющий модуль.

(4) Первое утверждение следует из (3), второе вытекает из определения разделяющего модуля и $f \equiv 1_M$.

Утверждение (5) доказано в [6; 4.19, 4.20]; (6) следует из [3; 55.16, 53.6]; (7) доказано в [7; 2.31].

ЛЕММА 1.2 [3; 18.1, 18.2(2)]. Пусть X – модуль над кольцом A , $\{Y_i\}_{i \in I}$ – некоторое множество A -модулей.

(1) Если все модули Y_i X -проективны, то модуль $\bigoplus_{i \in I} Y_i$ X -проективен.

(2) Если модуль X проективен относительно всех модулей Y_i , причем либо I – конечное множество, либо X – конечно порожденный модуль, то X – $\bigoplus_{i \in I} Y_i$ -проективный модуль.

ЛЕММА 1.3. Пусть A – полупервичное правое кольцо Голди.

(1) Множество всех существенных правых идеалов кольца A совпадает с множеством всех правых идеалов кольца A , содержащих регулярные элементы. Следовательно, класс всех периодических правых A -модулей (правых A -модулей без кручения) совпадает с классом всех сингулярных (несингулярных) правых A -модулей.

(2) Каждый делимый правый A -модуль без кручения инъективен.

(3) A имеет полупростое артиново правое классическое кольцо частных Q , причем (с точностью до A -модульного изоморфизма) ненулевые инъективные равномерные правые A -модули без кручения совпадают с минимальными правыми идеалами полупростого артинова кольца Q .

(4) Все существенные расширения периодических правых A -модулей (правых A -модулей без кручения) являются периодическими модулями (модулями без кручения).

(5) Если M – правый A -модуль, то $\text{Sing} M = \{m \in M : ma = 0 \text{ для некоторого элемента } a \in A\}$ и $M/\text{Sing} M$ – модуль без кручения.

(6) Каждый непериодический правый A -модуль содержит ненулевой подмодуль без кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (1) см., например, в [7; 5.9]; (2), (3) и (4) см., например, в [6; 6.12, 5.10, 6.14, 6.10(a)]; (5) следует из (1); (6) следует из (1), (4) и (5).

ЛЕММА 1.4. Пусть $X \oplus Y$ – прямое слагаемое π -проективного модуля, $\bar{Y}$ – подфактор модуля Y .

(1) $X \oplus Y$ – π -проективный модуль, X – $\bar{Y}$ -проективный модуль.

(2) Если существует эпиморфизм $h: \bar{Y} \rightarrow X$, то $\text{Ker } h$ – прямое слагаемое модуля $\bar{Y}$, причем X – квазипроективный модуль, изоморфный прямому слагаемому модуля $\bar{Y}$.

(3) Если $\bar{Y}$ – неразложимый модуль и существует эпиморфизм $f: \bar{Y} \rightarrow X$, то f – изоморфизм.

(4) Пусть t – кардинальное число, X – t -порожденный модуль и для некоторого натурального числа n модуль $\bar{Y}^n$ содержит свободный подмодуль F ранга t .

Тогда модуль X проективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что $X \oplus Y$ – π -проективный модуль. По [3; 41.14(4)] X – $\bar{Y}$ -проективный модуль.

Утверждение (1) следует из [3; 18.2(2)]; (2) и (3) следуют из [7; 2.4(3)]; (4) следует из (2) и того, что существует эпиморфизм $F \rightarrow X$.

ЛЕММА 1.5. Пусть M – прямая сумма конечно порожденных квазипроективных модулей M_i ($i \in I$). Тогда M – квазипроективный модуль $\iff M$ – π -проективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать следующее утверждение: если модуль M является прямой суммой конечно порожденных модулей M_i ($i \in I$), то следующие условия эквивалентны:

(1) M – квазипроективный модуль;

- (2) M – π -проективный модуль и все модули M_i квазипроективны;
- (3) $M_i - M_j$ -проективный модуль для всех индексов $i, j \in I$.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 1.1(4) и того, что прямые слагаемые квазипроективных модулей квазипроективны. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) следует из квазипроективности модулей M_i и того, что по лемме 1.4(1) $M_i - M_j$ -проективный модуль для любых несовпадающих индексов $i, j \in I$. Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) следует из леммы 1.2.

ЛЕММА 1.6. Пусть A – первичное правое кольцо Голди и n – размерность Голди модуля A_A .

(1) A имеет простое артиново правое классическое кольцо частных Q , причем если E и F – произвольные ненулевые инъективные равномерные правые A -модули без кручения, то $E \cong F$ и $E^n \cong Q_A$.

(2) Для любого ненулевого правого A -модуля без кручения F модуль F^n содержит свободный циклический подмодуль.

(3) Для любого бесконечномерного правого A -модуля без кручения F модуль F^n содержит бесконечную прямую сумму свободных циклических подмодулей.

(4) Если Y – непериодический правый A -модуль, то для любого ненулевого инъективного правого A -модуля X существует ненулевой гомоморфизм $Y \rightarrow X$.

(5) Пусть $X \oplus Y$ – π -проективный правый A -модуль, X – счетно порожденный модуль и Y содержит бесконечномерный подмодуль без кручения F . Тогда X – проективный модуль.

(6) Пусть $X \oplus Y$ – π -проективный правый A -модуль, X – циклический периодический модуль и Y содержит подмодуль без кручения F . Тогда $X = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) следует из леммы 1.3(3); (2) доказано в [6; 6.26]; (3) следует из (2).

(4) По лемме 1.3(6) непериодический модуль Y содержит ненулевой подмодуль без кручения. По (2) модуль Y^n содержит свободный циклический подмодуль $\bar{Y}$. Пусть $\bar{X}$ – ненулевой циклический подмодуль модуля X . Существует эпиморфизм $\bar{f}: \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$. Так как модуль X инъективен, то ненулевой гомоморфизм $\bar{f}$ продолжается до ненулевого гомоморфизма $f: Y^n \rightarrow X$. Поэтому существует ненулевой гомоморфизм $Y \rightarrow X$.

Утверждение (5) следует из (3) и леммы 1.4(4).

(6) Из (2) и леммы 1.4(4) следует, что X – проективный модуль. В частности, X – модуль без кручения. По условию X – периодический модуль. Поэтому $X = 0$.

ЛЕММА 1.7. Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо, B – собственный ненулевой идеал кольца A .

(1) Если M – конечно порожденный правый A -модуль без кручения, то M изоморфен конечной прямой сумме проективных равномерных правых идеалов кольца A . В частности, M – наследственный нётеров модуль.

(2) A/B – полуцепное артиново кольцо.

(3) Если M – правый A -модуль, то M/MB – прямая сумма циклических цепных квазипроективных модулей.

- (4) Если M – правый A -модуль, то M/MV – квазипроективный модуль $\iff M/MV$ – π -проективный модуль. Следовательно, если $r(M) \neq 0$, то M – квазипроективный модуль $\iff M$ – π -проективный модуль.
- (5) Если B – обратимый идеал кольца A , то $\bigcap_{n=1}^{\infty} B^n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (1) и (2) доказаны в [4; 5.7.5] и [8; теорема 25.5.1] соответственно; (3) следует из (2) и леммы 1.1(6); (4) следует из (3) и леммы 1.5.

(5) Положим $C \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} B^n$. Допустим, что $C \neq 0$. Так как A/C – артиново кольцо в силу (2), то существует такое n , что $B^n = B^{n+1}$. Кроме того, B^n – обратимый идеал. Поэтому $A = B^n B^{-n} = B^{n+1} B^{-n} = B$. Получено противоречие.

ЛЕММА 1.8. Пусть M – ненулевой π -проективный правый модуль без кручения над наследственным нётеровым первичным кольцом A , и пусть P – такой идеал кольца A , что $\bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = 0$. Тогда:

- (1) либо $M = MV$ для любого ненулевого идеала V кольца A , либо $M \neq MP$ и модуль M имеет прямое слагаемое, изоморфное ненулевому проективному равномерному правому идеалу кольца A ;
- (2) если A – ограниченное кольцо, то либо M – инъективный модуль, либо $M \neq MP$ и модуль M имеет прямое слагаемое, изоморфное ненулевому проективному равномерному правому идеалу кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Допустим, что $M \neq MV$ для некоторого ненулевого идеала V кольца A . По лемме 1.7(3) M/MV – прямая сумма циклических модулей. Поэтому существуют циклический ненулевой подмодуль N модуля M и подмодуль T модуля M такие, что $M = N + T$, $MV \subseteq T \neq M$ и $N \cap T \subseteq MV$. Так как модуль M π -проективен и $M = N + T$, то существует такой эндоморфизм f модуля M , что $f(M) \subseteq N$ и $(1 - f)(M) \subseteq T \neq M$. Тогда $f(M) \neq 0$. По лемме 1.7(1) N – наследственный модуль. Поэтому $f(M)$ – проективный конечно порожденный ненулевой модуль. Следовательно, существует прямое разложение $M = X \oplus \text{Ker } f$, где $X \cong f(M) \neq 0$. По лемме 1.7(1) модуль X изоморфен конечной прямой сумме проективных равномерных ненулевых правых идеалов кольца A . Поэтому модуль M имеет прямое слагаемое Y , изоморфное ненулевому проективному равномерному правому идеалу C кольца A . Допустим, что $M = MP$. Тогда $Y = YP$, откуда $C = CP$. Поэтому $C = CP^n$ для каждого натурального числа n , откуда $C \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = 0$. Получено противоречие.

(2) В силу (1) можно считать, что $M = MV$ для любого ненулевого идеала V кольца A . Пусть d – регулярный элемент кольца A . По лемме 1.3(1) Ad – существенный левый идеал кольца A . Так как A – ограниченное кольцо, то Ad содержит некоторый ненулевой идеал B кольца A . Тогда $M = MV \subseteq MAd = Md \subseteq M$. Поэтому M – делимый модуль без кручения. По лемме 1.3(2) M – инъективный модуль.

ЛЕММА 1.9. Пусть M – редуцированный ненулевой π -проективный правый модуль без кручения над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом A , и пусть P – такой идеал кольца A , что $\bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = 0$.

- (1) Если N – любое ненулевое прямое слагаемое модуля M , то $N \neq NP$ и модуль N имеет прямое слагаемое, изоморфное ненулевому проективному равномерному правому идеалу кольца A .
- (2) Если существует такой проективный подмодуль X модуля M , что $M = X + MP$, то M – проективный модуль.
- (3) Если M/MP – конечно порожденный A/P -модуль, то M – проективный A -модуль.
- (4) Если M/MP – свободный A/P -модуль, то M – проективный A -модуль.
- (5) Если P – ненулевой максимальный идеал, то M – проективный A -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) следует из леммы 1.8(2), примененной к π -проективному неинъективному модулю N без кручения.

(2) Так как модуль M π -проективен и $M = X + MP$, то существует такой эндоморфизм f модуля M , что $f(M) \subseteq X$ и $(1 - f)(M) \subseteq MP$. Так как X – проективный правый модуль над наследственным справа кольцом A , то X – наследственный модуль по лемме 1.1(7). Поэтому $f(M)$ – проективный модуль. Следовательно, существует прямое разложение $M = Y \oplus \text{Ker } f$, где $Y \cong f(M)$ – проективный модуль. Положим $N \equiv \text{Ker } f$. Тогда $N \subseteq f(N) + (1 - f)(N) = (1 - f)(N) \subseteq MP$. Поэтому $N = N \cap MP = N \cap (Y \oplus NP) = NP$. В силу (1) $N = 0$. Поэтому $M = Y$ – проективный модуль.

(3) Так как M/MP – конечно порожденный A/P -модуль, то существует такой конечно порожденный подмодуль X модуля M , что $M = X + MP$. По лемме 1.7(1) модуль X проективен. В силу (2) модуль M проективен.

(4) Пусть $h: M \rightarrow M/MP$ – естественный эпиморфизм. Существует такое подмножество $\{m_i\}_{i \in I}$ модуля M , что $\{h(m_i)\}_{i \in I}$ – базис свободного A/P -модуля $h(M)$. Положим $X \equiv \sum_{i \in I} m_i A \subseteq M$. В силу (2) достаточно доказать, что X – свободный A -модуль с базисом $\{m_i\}_{i \in I}$. Допустим противное. Тогда существуют ненулевые элементы $b_1, \dots, b_n \in A$ и элементы $m_{i(1)}, \dots, m_{i(n)}$ такие, что $\sum_{j=1}^n m_{i(j)} b_j = 0$. Так как $\{h(m_i)\}_{i \in I}$ – базис свободного A/P -модуля $h(M)$, то $b_j \in P$ для всех j . Так как $\bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = 0$, то существует такое натуральное число k , что $b_j \in P^k$ для всех j и не все b_j лежат в P^{k+1} . Будем считать, что $b_1 \notin P^{k+1}$. Тогда $b_1 P^{-k} \supseteq A$ и $b_1 P^{-k} \not\subseteq P$. Существует такой элемент $y \in P^{-k} \subseteq Y$, что $b_j y \equiv a_j \in A$ для всех j и $b_1 y = a_1 \in A \setminus P$. Тогда $\sum_{j=1}^n m_{i(j)} a_j = \sum_{j=1}^n m_{i(j)} b_j y = 0$. Поэтому $\sum_{j=1}^n h(m_{i(j)})(a_j + P) = 0$, причем $a_1 + P \neq 0$. Это противоречит тому, что $\{h(m_i)\}_{i \in I}$ – базис свободного A/P -модуля $h(M)$.

(5) Так как P – ненулевой максимальный идеал, то из леммы 1.7(2) следует, что A/P – простое артиново кольцо. Так как каждый модуль над простым артиновым кольцом является прямой суммой изоморфных простых модулей, то M/MP является либо конечно порожденным, либо свободным A/P -модулем. В силу (3) и (4) M – проективный A -модуль.

ЛЕММА 1.10. Пусть A – левый порядок в кольце Q .

- (1) Если правый A -модуль Q конечно порожден, то $A = Q$.
- (2) Если $f: Q_A \rightarrow A_A$ – модульный гомоморфизм и $f(1) = 0$, то $f \equiv 0$.

(3) Если Q – проективный правый A -модуль, то $A = Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По условию существуют элементы $q_1, \dots, q_n \in Q$ такие, что $Q = \sum_{i=1}^n q_i A$. Так как A – левый порядок в Q , то существуют такие элементы $t, a_1, \dots, a_n \in A$, что t – регулярный элемент и $q_i = t^{-1}a_i$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда существуют такие элементы $b_1, \dots, b_n \in A$, что $t^{-2} = \sum_{i=1}^n t^{-1}a_i b_i$. Поэтому $t^{-1} = t t^{-2} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \in A$, откуда $Q = \sum_{i=1}^n t^{-1}a_i A \subseteq A \subseteq Q$.

(2) Пусть $t, a \in A$ и t – регулярный элемент. Надо доказать, что $f(t^{-1}a) = 0$. Так как $f(t^{-1}a) = f(t^{-1})a$, то достаточно доказать, что $f(t^{-1}) = 0$. Пусть $f(t^{-1}) = u^{-1}b$, где $b, u \in A$, u – регулярный элемент. Тогда $0 = uf(1) = uf(t^{-1}t) = uf(t^{-1})t = bt$. Так как t – регулярный элемент, то $b = 0$. Поэтому $f(t^{-1}) = u^{-1}b = 0$.

(3) Так как модуль Q_A проективен, то существуют множество гомоморфизмов $\{f_i\}_{i \in I}$ из Q_A в A_A и множество элементов $\{q_i\}_{i \in I}$ из Q_A такие, что для любого элемента $x \in Q$ существует конечное подмножество $J(x) \subseteq I$ со следующими свойствами:

(*) $f_i(x) = 0$ для всех $i \in I \setminus J(x)$,

(**) $x = \sum_{i \in J(x)} q_i f_i(x)$ [7; 2.7].

В силу (2) $f_i \equiv 0$ для всех $i \in I \setminus J(1)$. Поэтому $x = \sum_{i \in J(1)} q_i f_i(x) \in \sum_{i \in J(1)} q_i A$ для любого $x \in Q$. Так как множество $\{q_i\}_{i \in J(1)}$ конечно, то Q_A – конечно порожденный модуль.

ЛЕММА 1.11. Для кольца A следующие условия эквивалентны:

(1) A – нётерово первичное кольцо, которое обладает проективным нередуцированным модулем без кручения X ;

(2) A – ограниченное справа первичное правое кольцо Голди, причем существует инъективный правый A -модуль M , который обладает ненулевым конечно порожденным фактормодулем;

(3) A – первичное правое кольцо Голди, которое обладает минимальным ненулевым правым идеалом;

(4) A – простое артиново кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (3) $\implies$ (4) доказана в [6; 6.16].

Импликации (4) $\implies$ (1) и (4) $\implies$ (2) очевидны.

(2) $\implies$ (3). Так как каждый ненулевой конечно порожденный модуль обладает простым фактормодулем, то M обладает простым фактормодулем M/N с образующим $m + N$. Тогда существует такой максимальный правый идеал B кольца A , что $mB \subseteq N$. Если максимальный правый идеал B не является существенным правым идеалом, то существует такой минимальный правый идеал C кольца A , что $A_A = B \oplus C$. Допустим, что B – существенный правый идеал. Так как A – ограниченное справа кольцо, то B содержит ненулевой идеал D кольца A . Так как A – первичное кольцо, то D – существенный правый идеал. По лемме 1.3(1) D содержит регулярный элемент d . Так как $mD \subseteq N$ и D – идеал, то $MD \subseteq N \neq M$. Поэтому $M \neq Md$. Тогда инъективный модуль M не является делимым. Получено противоречие, поскольку каждый инъективный модуль является делимым [3; 16.6(1)].

(1) $\implies$ (4). Нередуцированный модуль X имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое, которое является по лемме 1.1(5) прямой суммой равномерных модулей. Поэтому проективный модуль X имеет ненулевое инъективное проективное равномерное прямое слагаемое E . Первичное нётерово кольцо A имеет простое артиново двустороннее классическое кольцо частных Q . По лемме 1.6(1) $E^n \cong Q_A$. Поэтому Q_A – проективный модуль. По лемме 1.10(3) $A = Q$ – простое артиново кольцо.

ЛЕММА 1.12. Пусть M – модуль над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом A , причем A имеет хотя бы один обратимый максимальный идеал P . Тогда M – редуцированный π -проективный модуль без кручения $\iff M$ – проективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\implies$ Так как P – обратимый собственный идеал, то по лемме 1.7(5) $\bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = 0$. По лемме 1.9(5) модуль M проективен.

$\impliedby$ По лемме 1.1(1) M – π -проективный модуль без кручения. Допустим, что M – нередуцированный модуль. По лемме 1.11 A – простое артиново кольцо. Это противоречит тому, что A имеет обратимый максимальный идеал.

ЛЕММА 1.13. Пусть M – редуцированный модуль над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом A . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) M – конечномерный π -проективный модуль без кручения;
- (2) M – конечномерный проективный модуль;
- (3) модуль M изоморфен конечной прямой сумме проективных равномерных конечно порожденных правых идеалов кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (3) $\implies$ (2) проверяется непосредственно.

Импликация (2) $\implies$ (1) следует из леммы 1.1.

(1) $\implies$ (3). Конечномерный модуль M является прямой суммой неразложимых ненулевых модулей $N_1, \dots, N_n$. По лемме 1.9(1) все модули N_i изоморфны проективным равномерным правым идеалам.

ЛЕММА 1.14. Пусть X – цепной правый модуль над нётеровым справа кольцом A .

- (1) Каждый собственный подмодуль N модуля X является циклическим нётеровым цепным модулем.
- (2) X – счетно порожденный модуль.
- (3) Либо X – циклический нётеров модуль, либо модуль X не имеет ненулевых конечно порожденных гомоморфных образов.
- (4) Если X – нециклический модуль и Y – конечно порожденный правый A -модуль, то $f(X) = X$ для любого ненулевого гомоморфизма $f: X \rightarrow X \oplus Y$ и, следовательно, $\text{Hom}(X, Y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как $N \neq X$, то существует циклический подмодуль T модуля X , не лежащий в N . Циклический модуль T над нётеровым справа кольцом A является нётеровым. Так как X – цепной модуль и $T \not\subseteq N$, то N – подмодуль нётерова модуля T . Поэтому N – нётеров модуль. Конечно порожденный цепной модуль N является циклическим.

(2) Если X – нётеров модуль, то X – конечно порожденный модуль. В частности, X – счетно порожденный модуль. Теперь пусть модуль X не является нётеровым. Тогда существует бесконечная строго возрастающая цепь $N_1 \subset N_2 \subset \dots$ конечно порожденных подмодулей N_i модуля X . Положим $N \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$. Тогда N – счетно порожденный подмодуль модуля X , не являющийся нётеровым. В силу (1) $N = X$.

(3) Допустим, что X имеет ненулевой конечно порожденный гомоморфный образ. Тогда существует такой собственный подмодуль N модуля X , что X/N – конечно порожденный модуль. В силу (1) N – циклический модуль. Так как X/N и N – конечно порожденные A -модули, то X – конечно порожденный модуль над нётеровым справа кольцом A . Поэтому X – нётеров цепной модуль. Тогда X – циклический модуль.

(4) Пусть $u: X \oplus Y \rightarrow X$ и $v: X \oplus Y \rightarrow Y$ – естественные проекции. Подмодуль $vf(X)$ нётерова модуля Y является конечно порожденным. По (3) X не имеет ненулевых конечно порожденных гомоморфных образов. Поэтому $vf(X) = 0$. Тогда $0 \neq f(X) = uf(X) \subseteq X$. По (3) $f(X)$ – нециклический модуль. По (1) $f(X) = X$.

ЛЕММА 1.15. Пусть $X \oplus Y$ – π -проективный модуль над нётеровым первичным кольцом A , причем X – цепной модуль.

(1) Если модуль Y содержит бесконечномерный подмодуль без кручения, то X – проективный модуль.

(2) Если X – ненулевой инъективный модуль и Y содержит бесконечномерный подмодуль без кручения, то A – простое артиново кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По лемме 1.14(2) X – счетно порожденный модуль. По лемме 1.6(5) X – проективный модуль.

(2) В силу (1) X – проективный модуль. Поэтому X – модуль без кручения. Так как X – проективный инъективный ненулевой модуль без кручения, то A – простое артиново кольцо по лемме 1.11.

ЛЕММА 1.16. Пусть $X \oplus Y$ – π -проективный модуль над наследственным нётеровым первичным кольцом A , причем X – ненулевой неразложимый инъективный модуль и Y – модуль без кручения. Тогда:

(1) X – цепной модуль;

(2) либо $X \oplus Y$ – конечномерный модуль, либо A – простое артиново кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Допустим противное. Тогда существуют такие подмодули N_1 и N_2 модуля X , что $N_1 \cap N_2 \neq N_1$ и $N_1 \cap N_2 \neq N_2$. Пусть $h: X \rightarrow X/(N_1 \cap N_2)$ – естественный эпиморфизм. Тогда $h(N_1) \cap h(N_2) = 0$. Так как $h(X)$ – гомоморфный образ инъективного модуля над наследственным кольцом, то модуль $h(X)$ инъективен по лемме 1.1(7). Поэтому существуют такие подмодули X_1 и X_2 модуля X , что $h(X) = h(X_1) \oplus h(X_2)$, $N_1 \subseteq X_1$, $N_2 \subseteq X_2$ и $X_1 \cap X_2 = N_1 \cap N_2$. Тогда $X = X_1 + X_2$. Так как X – π -проективный модуль, то существуют такие гомоморфизмы $f_1: X \rightarrow X_1$ и $f_2: X \rightarrow X_2$, что $f_1 + f_2 = 1_X$. Гомоморфные образы $f_1(X)$ и $f_2(X)$ инъективного модуля X над наследственным кольцом являются инъективными модулями по лемме 1.1(7).

Поэтому $f_1(X)$ и $f_2(X)$ – прямые слагаемые ненулевого неразложимого модуля X , причем $f_1(X) + f_2(X) = X$. Тогда хотя бы один из модулей $f_1(X)$ и $f_2(X)$ совпадает с X . Допустим, что $X = f(X_1) \subseteq X_1 \subseteq X$. Тогда $h(X_1) = h(X)$. Поэтому $h(N_2) = h(N_2) \cap h(X_1) \subseteq h(X_2) \cap h(X_1) = 0$, значит, $N_2 = N_1 \cap N_2$. Получено противоречие.

(2) В силу (1) X – цепной инъективный ненулевой модуль. Допустим, что $X \oplus Y$ – бесконечномерный модуль. Тогда Y – бесконечномерный модуль без кручения. По лемме 1.15(2) A – простое артиново кольцо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.17. Пусть M – правый модуль без кручения над ограниченным дедекиндовым первичным кольцом A , причем M – либо редуцированный, либо бесконечномерный модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) M – разделяющий модуль;
- (2) M – π -проективный модуль;
- (3) M – проективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации (3) $\Rightarrow$ (1) и (1) $\Rightarrow$ (2) следуют из леммы 1.1.

(2) $\Rightarrow$ (3). Так как каждый модуль над простым артиновым кольцом проективен, то можно считать, что A не является простым артиновым кольцом. Каждое ограниченное простое кольцо является простым артиновым кольцом. Поэтому A не является простым кольцом. Тогда A имеет хотя бы один максимальный идеал P . Так как A – дедекиндово первичное кольцо, то P – обратимый идеал. Если M – редуцированный модуль, то модуль M проективен по лемме 1.12. Допустим, что M – нередуцированный модуль. По лемме 1.1(5) существует прямое разложение $M = X \oplus Y$, где X – ненулевой инъективный равномерный модуль. По лемме 1.16(2) M – конечномерный модуль. Так как M – нередуцированный модуль, то M – бесконечномерный модуль по условию. Получено противоречие.

ЛЕММА 1.18. Пусть $M = X \oplus Y$ – такой модуль, что X – M -разделяющий модуль и Y – M -проективный модуль.

Тогда M – разделяющий модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u: X \rightarrow M$ и $v: Y \rightarrow M$ – естественные вложения, N_1 и N_2 – подмодули модуля M , $f \in \text{Hom}(M, N_1 + N_2)$. Тогда $fu \in \text{Hom}(X, M)$ и $fv \in \text{Hom}(Y, M)$. Так как Y – M -проективный модуль, то Y – M -разделяющий модуль по лемме 1.1(3). Так как X и Y – M -разделяющие модули, то существуют такие гомоморфизмы $s_i: X \rightarrow N_i$ и $t_i: Y \rightarrow N_i$ ($i = 1, 2$), что $fu = s_1 + s_2$ и $fv = t_1 + t_2$. Положим $f_i \equiv s_i + t_i \in \text{Hom}(M, N_i)$ ($i = 1, 2$). Тогда $f = fu + fv = f_1 + f_2$. Поэтому M – разделяющий модуль.

ЛЕММА 1.19. Пусть A – нётерово справа кольцо, X – цепной нециклический правый A -модуль, Y – конечно порожденный наследственный правый A -модуль.

(1) Если N – подмодуль модуля $X \oplus Y$, то либо N – нётеров модуль, либо $X \subseteq N$.

(2) $X \oplus Y$ – разделяющий модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $u: X \oplus Y \rightarrow X$ и $v: X \oplus Y \rightarrow Y$ – естественные проекции. Так как Y – наследственный модуль, то $v(N)$ – проективный модуль. Поэтому $N = (N \cap X) \oplus Y'$, где $Y' \cong v(N)$ и Y' – нётеров модуль. Допустим, что N не является нётеровым модулем. Тогда $N \cap X$ не является нётеровым модулем. По лемме 1.14(1) $X = N \cap X \subseteq N$.

(2) Пусть N_1 и N_2 – подмодули модуля $X \oplus Y$ и f – ненулевой гомоморфизм из X в $N_1 + N_2$. По лемме 1.14(3) модуль X не является нётеровым. Кроме того, $X = f(X) \subseteq N_1 + N_2$ по лемме 1.14(4). Поэтому хотя бы один из модулей N_1, N_2 не является нётеровым. Допустим, что N_1 не является нётеровым модулем. В силу (1) $X \subseteq N_1$. Кроме того, $f(X) = X \subseteq N_1$. Положим $f_1 \equiv f \in \text{Hom}(X, N_1)$ и $f_2 \equiv 0 \in \text{Hom}(X, N_2)$. Тогда $f = f_1 + f_2$, откуда $X = X \oplus Y$ – разделяющий модуль. По лемме 1.18 X – разделяющий модуль.

ЛЕММА 1.20. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, X – ненулевой неразложимый инъективный правый A -модуль и Y – редуцированный правый A -модуль без кручения. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $X \oplus Y$ – разделяющий модуль;
- (2) $X \oplus Y$ – π -проективный модуль;
- (3) X – цепной модуль и Y – конечно порожденный проективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\implies$ (2) следует из леммы 1.1(4).

(2) $\implies$ (3). По лемме 1.16(1) X – цепной модуль. Пусть $Y \neq 0$. Так как каждый модуль над простым артиновым кольцом инъективен, то можно считать, что A не является простым артиновым кольцом. По лемме 1.16(2) Y – конечномерный модуль. Тогда Y – конечномерный редуцированный π -проективный модуль без кручения. По лемме 1.13 Y – конечно порожденный проективный модуль.

(3) $\implies$ (1). Если X – нециклический модуль, то (1) следует из леммы 1.19(2) и того, что каждый проективный модуль над наследственным кольцом является наследственным модулем по лемме 1.1(7). Допустим, что X – циклический модуль. По лемме 1.11 A – простое артиново кольцо. Тогда $X \oplus Y$ – проективный модуль. По лемме 1.1(3) $X \oplus Y$ – разделяющий модуль.

ЛЕММА 1.21. Пусть X – квазипроективный модуль без ненулевых нётеровых гомоморфных образов и Y – проективный нётеров модуль. Тогда $X \oplus Y$ – квазипроективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h: Y \rightarrow \bar{Y}$ – эпиморфизм и $\bar{f} \in \text{Hom}(X, \bar{Y})$. Так как Y – нётеров модуль, то $\bar{f}(X)$ – нётеров гомоморфный образ модуля X . По условию $\bar{f} \equiv 0$. Обозначим через f нулевой гомоморфизм из X в Y . Тогда $\bar{f} = hf$. Поэтому $X = Y$ -проективный модуль. Кроме того, $X = X$ -проективный модуль по условию. По лемме 1.2(2) $X = X \oplus Y$ -проективный модуль. Кроме того, Y – проективный модуль. По лемме 1.2(1) $X \oplus Y$ – квазипроективный модуль.

ЛЕММА 1.22. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) существует такое натуральное число n , что кольцо A изоморфно кольцу всех $(n \times n)$ -матриц над некоторой полной цепной нётеровой областью D ;

- (2) существует ненулевой конечномерный инъективный неравномерный π -проективный правый A -модуль без кручения;
- (3) каждый конечномерный инъективный правый A -модуль без кручения является квазипроективным;
- (4) для каждого конечномерного инъективного правого A -модуля без кручения X и любого конечно порожденного проективного модуля Y модуль $X \oplus Y$ является квазипроективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (1), (2) и (3) доказана в [9; лемма 1.21].

Импликация (4) $\implies$ (3) очевидна.

(3) $\implies$ (4). По условию X – инъективный квазипроективный модуль. Кроме того, конечно порожденный модуль Y над нётеровым кольцом A является нётеровым модулем. Так как каждый модуль над простым артиновым кольцом проективен, то можно считать, что A не является простым артиновым кольцом. Тогда инъективный модуль X не имеет ненулевых конечно порожденных фактормодулей по лемме 1.11. По лемме 1.21 $X \oplus Y$ – квазипроективный модуль.

ЛЕММА 1.23. Пусть A – наследственное справа нётерово справа первичное кольцо.

- (1) Если существует ненулевой инъективный π -проективный A -модуль без кручения, то A – полуцепное кольцо.
- (2) Если X – ненулевой неразложимый инъективный правый A -модуль, Y – непериодический инъективный правый A -модуль, то X является гомоморфным образом модуля Y и модуль $X \oplus Y$ не является π -проективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) доказано в [9; теорема 1].

(2) Из леммы 1.1(5) следует, что непериодический инъективный модуль Y имеет ненулевое непериодическое инъективное прямое слагаемое Z . По лемме 1.6(4) существует ненулевой гомоморфизм $f: Z \rightarrow X$. По лемме 1.1(7) $f(Z)$ – ненулевой инъективный подмодуль неразложимого модуля X . Поэтому $f(Z) = X$ и X – гомоморфный образ модуля Y . Допустим, что $X \oplus Y$ – π -проективный модуль. По лемме 1.4(3) f – изоморфизм. Поэтому Z – ненулевой периодический непериодический модуль. Получено противоречие.

ЛЕММА 1.24. Пусть M – модуль без кручения над ограниченным наследственным первичным кольцом A , причем M – либо редуцированный конечномерный модуль, либо нередуцированный модуль. Тогда M – разделяющий модуль $\iff M$ – π -проективный модуль $\iff$ выполнено одно из следующих условий:

- (i) M – проективный модуль;
- (ii) A – полуцепное кольцо, $M = X \oplus Y$, Y – конечно порожденный проективный модуль, и существует такое натуральное число n , что X – конечная прямая сумма ненулевых инъективных неразложимых модулей без кручения $X_1, \dots, X_n$, причем либо $n = 1$, либо $n \geq 2$ и кольцо A изоморфно кольцу всех $(k \times k)$ -матриц D_k над некоторой полной цепной нётеровой областью D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В лемме 1.13 рассмотрен случай, когда M – редуцированный конечномерный модуль без кручения. Поэтому можно считать, что M – нередуцированный модуль без кручения. Так как A – нётерово кольцо, то из леммы 1.1(5) следует, что $M = (\bigoplus_{i \in I} X_i) \oplus Y$, где все X_i – ненулевые инъективные неразложимые модули, Y – редуцированный модуль. По леммам 1.22 и 1.1 можно считать, что X – ненулевой неразложимый инъективный модуль. По лемме 1.20

M – разделяющий модуль $\iff$

M – π -проективный модуль $\iff$

X – цепной модуль и Y – конечно порожденный проективный модуль.

Остается доказать, что X – цепной модуль $\iff A$ – полуперенное кольцо. Импликация $\implies$ следует из леммы 1.23(1). Импликация $\impliedby$ следует из того, что каждый неразложимый инъективный модуль над полуперенным нётеровым кольцом является цепным модулем [7; 11.5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.25. Пусть M – модуль над ограниченным дедекиндовым первичным кольцом A . Тогда M – разделяющий модуль без кручения $\iff M$ – π -проективный модуль без кручения $\iff$ выполнено одно из следующих двух условий:

- (i) M – проективный модуль;
- (ii) существуют такие натуральные числа k и n , что кольцо A изоморфно кольцу всех $(k \times k)$ -матриц D_k над некоторой цепной нётеровой областью D , $M = X \oplus Y$, X – конечная прямая сумма ненулевых инъективных неразложимых модулей без кручения $X_1, \dots, X_n$, Y – конечно порожденный проективный модуль, причем либо $n = 1$, либо $n \geq 2$ и D – полная область.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.24 достаточно проверить следующее утверждение: если A – ограниченное дедекиндово первичное кольцо, то A – полуперенное кольцо $\iff$ существует такое натуральное число k , что кольцо A изоморфно кольцу всех $(k \times k)$ -матриц D_k над некоторой цепной нётеровой областью D . Импликация $\impliedby$ проверяется непосредственно. Докажем импликацию $\implies$. Так как A – дедекиндово первичное кольцо, то A эквивалентно в смысле Мориты некоторой (не обязательно коммутативной) дедекиндовой области D [4; 5.2.12]. Так как A – полуперенное кольцо, то все конечно представимые A -модули являются полуперенными [7; 11.54]. Поэтому все конечно представимые D -модули являются полуперенными. Тогда D – полуперенная область. Поэтому D – цепная область. В частности, D – локальное кольцо. Так как кольцо A эквивалентно в смысле Мориты области D , то A изоморфно кольцу эндоморфизмов $\text{End } M_D$ некоторого конечно порожденного проективного D -модуля M [4; 3.5.5]. Конечно порожденный проективный модуль M над локальным кольцом D является свободным модулем [8; 22.1B]. Поэтому кольцо $\text{End } M_D$ изоморфно кольцу матриц над D .

§ 2. Модули, не являющиеся модулями без кручения

ЛЕММА 2.1. Пусть $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ – модуль и $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i)$ для любого подмодуля N модуля M .

- (1) $\text{Hom}(M_i, M_j) = 0$ для любых $i \neq j$ из I . Следовательно, все M_i – вполне инвариантные подмодули в M .
- (2) Если N, P и Q – подмодули модуля M , то $N = P + Q \iff N \cap M_i = P \cap M_i + Q \cap M_i$ для всех $i \in I$.
- (3) M – разделяющий (π -проективный) модуль $\iff$ все M_i – разделяющие (π -проективные) модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $f \in \text{Hom}(M_i, M_j)$. Положим $N \equiv \{x + f(x) : x \in M_i\}$. Если $y = x + f(x) \in N \cap M_j$ ($x \in M_i$), то $x = y - f(x) \in M_i \cap M_j = 0$, откуда $f(x) = 0, y = 0$ и $N \cap M_j = 0$. Тогда $N = N \cap M_i \oplus N \cap M_j = N \cap M_i \subseteq M_i$. Поэтому $f(x) = 0$ для любого $x \in M_i$.

Утверждение (2) следует из того, что $X = \bigoplus_{i \in I} (X \cap M_i)$ для любого подмодуля X модуля M ; (3) проверяется с помощью (1) и (2).

ЛЕММА 2.2. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся простым артиновым кольцом, M – периодический правый A -модуль, $\{M_i\}$ – множество всех примарных компонент модуля M .

- (1) $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i)$ для любого подмодуля N модуля M .
- (2) Каждый конечно порожденный подмодуль модуля M является конечной прямой суммой циклических цепных модулей конечной длины.
- (3) Каждый неинъективный подмодуль модуля M имеет ненулевое циклическое цепное прямое слагаемое конечной длины.
- (4) Если A – ограниченное дедекиндово первичное кольцо, то M – квазипроективный модуль $\iff$ каждая примарная компонента модуля M является прямой суммой изоморфных циклических цепных модулей конечной длины.
- (5) M – квазипроективный модуль $\iff M$ – редуцированный квазипроективный модуль $\iff M_i$ – проективный $A/\text{r}(M_i)$ -модуль для любого $i \in I$.
- (6) Пусть X – инъективный неразложимый ненулевой подмодуль модуля M . Тогда X – цепной нециклический примарный модуль, все собственные подмодули модуля X циклически, имеют конечную длину и образуют счетную цепь $0 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_k \subset \dots$, где X_k/X_{k-1} – простой модуль для любого k и существует такое натуральное число n , что $X_j/X_{j-1} \cong X_k/X_{k-1} \iff j - k$ делится на n .

Следовательно, если Y – любой ненулевой гомоморфный образ модуля X и T – циклический подмодуль модуля Y длины $\geq k + n$, то существует эпиморфизм $T \rightarrow X_k$ с ненулевым ядром.

- (7) M – разделяющий (π -проективный) модуль $\iff$ все M_i – разделяющие (π -проективные) модули.
- (8) M – инъективный модуль $\iff$ каждая примарная компонента M_i является инъективным модулем $\iff$ каждая примарная компонента M_i является прямой суммой цепных инъективных модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (1)–(4) доказаны в [10]; (5) и (6) доказаны в [11]; (7) следует из (1) и леммы 2.1(3); (8) следует из (6) и леммы 1.1(5).

ЛЕММА 2.3. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся простым артиновым кольцом, P – какой-нибудь

максимальный элемент множества $\mathcal{P}(A)$ обратимых собственных идеалов кольца A , M – P -примарный правый A -модуль.

(1) Если N – циклический цепной подмодуль модуля M и $d(N) = k$, то $NP^k = 0$.

(2) Если существует такое натуральное число w , что длина каждого циклического цепного подмодуля модуля M не превосходит w , то $MP^w = 0$.

(3) Если S и T – ненулевые циклические цепные подфакторы модуля M с инъективными оболочками X и Y соответственно, то существуют эпиморфизмы $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$ с ненулевыми ядрами.

(4) Существует натуральное число n со следующим свойством: если S и T – любые ненулевые циклические цепные подфакторы модуля M такие, что $d(T) \geq d(S) + n$, то существует эпиморфизм $T \rightarrow S$ с ненулевым ядром.

(5) Если $r(M) \neq 0$, то M – π -проективный модуль $\iff M$ – проективный $A/r(M)$ -модуль.

(6) M – неинъективный π -проективный модуль $\iff M$ – проективный $A/r(M)$ -модуль.

(7) Если M – неразложимый инъективный модуль, то каждый ненулевой эндоморфизм модуля M является автоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) доказано в [12; лемма 1.1].

(2) Достаточно доказать, что $NP^s = 0$ для каждого циклического подмодуля N модуля M . Это следует из (1) и того, что по лемме 2.2(2) N – конечная прямая сумма циклических цепных модулей конечной длины.

Утверждение (3) следует из [12; лемма 1.3]; (4) следует из (3) и леммы 2.2(6); (5) следует из лемм 1.7(4) и 2.2(5).

(6) Так как каждый квазипроективный модуль является по лемме 1.1(4) π -проективным модулем, то импликация $\Leftarrow$ следует из леммы 2.2(5).

$\implies$ Так как M – неинъективный модуль, то по лемме 2.2(3) существует прямое разложение $M = S \oplus N$, где S – ненулевой циклический цепной модуль конечной длины k . Согласно (4) существует натуральное число n со следующим свойством: если T – любой ненулевой циклический цепной подфактор модуля M такой, что $d(T) \geq k + n$, то существует эпиморфизм $T \rightarrow S$ с ненулевым ядром. Пусть Y – ненулевой циклический цепной подмодуль модуля N . Если $d(Y) \geq k + n$, то по условию существует эпиморфизм $f: Y \rightarrow S$ с ненулевым ядром. Тогда по лемме 1.4(3) f – изоморфизм, и получаем противоречие. Поэтому $d(Y) < k + n$. В силу (2) $NP^{k+n} = 0$. Кроме того, $SP^k = 0$ согласно (1). Поэтому $MP^{k+n} = SP^{k+n} \oplus NP^{k+n} = 0$. Тогда $r(M) \neq 0$ и утверждение следует из (5).

Утверждение (7) следует из леммы 2.2(6).

ЛЕММА 2.4. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся простым артиновым кольцом, M – периодический правый A -модуль, $\{M_i\}_{i \in I}$ – множество всех примарных компонент модуля M . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) M – разделяющий инъективный модуль;
- (2) M – π -проективный инъективный модуль;
- (3) все M_i – цепные инъективные модули;

(4) все M_i – инъективные модули и $f(M_i) = M_i$ для каждого ненулевого гомоморфизма $f: M_i \rightarrow M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2(7), (8) можно считать, что $M = M_i$ для некоторого $i \in I$.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 1.1(4).

(2) $\Rightarrow$ (3). По лемме 2.2(8) M – прямая сумма ненулевых неразложимых цепных модулей. Допустим, что M не является цепным модулем. Тогда существует прямое разложение $M = X \oplus Y \oplus Z$, где X и Y – ненулевые цепные инъективные модули и $X \oplus Y$ – π -проективный модуль. По лемме 2.3(1) существует эпиморфизм $f: Y \rightarrow X$ с ненулевым ядром. Это противоречит лемме 1.4(3).

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) следует из леммы 2.3(7) и того, что $f(M_i) \subseteq M_i$ для каждого гомоморфизма $f: M_i \rightarrow M$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Так как все ненулевые эндоморфизмы модуля M_i являются эпиморфизмами, то M_i – неразложимый модуль. По лемме 2.2(6) M – цепной модуль. По лемме 1.1(4) M – разделяющий модуль.

ЛЕММА 2.5. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся простым артиновым кольцом, M – периодический правый A -модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) M – разделяющий модуль;
- (2) M – π -проективный модуль;
- (3) каждая примарная компонента M_i модуля M является либо цепным инъективным модулем, либо проективным $A/r(M_i)$ -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2(7) можно считать, что M – примарный модуль. По лемме 2.4 можно считать, что M – неинъективный модуль.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 1.1(4); импликация (2) $\Rightarrow$ (3) следует из леммы 2.3(6).

(3) $\Rightarrow$ (1). Так как M – проективный $A/r(M)$ -модуль, то M – квазипроективный модуль по лемме 1.1(1), (2). По лемме 1.1(4) M – разделяющий модуль.

ЛЕММА 2.6. Пусть A – ограниченное дедекиндово первичное кольцо, не являющееся простым артиновым кольцом, M – периодический A -модуль. Тогда M – разделяющий модуль $\iff M$ – π -проективный модуль $\iff$ каждая примарная компонента модуля M является либо неразложимым инъективным модулем, либо прямой суммой изоморфных циклических цепных модулей конечной длины.

Лемма 2.6 вытекает из лемм 2.5 и 2.2(4), (5).

ЛЕММА 2.7. Пусть B – собственный идеал кольца A и X – чистый подмодуль правого A -модуля M .

- (1) $(X + MB)/MB$ – чистый подмодуль A/B -модуля M/MB .
- (2) $X \cap MB = XB$; в частности, если $XB = 0$, то $X \cap MB = 0$.
- (3) Если $XB = 0$ и $(X + MB)/MB$ – прямое слагаемое A/B -модуля M/MB , то X – прямое слагаемое A -модуля M .

(4) Если $XB = 0$ и A/B – полуцепное артиново кольцо, то X – прямое слагаемое модуля M_A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h: M \rightarrow M/MB$ – естественный эпиморфизм.

(1) Мы будем использовать следующее утверждение [3; 34.5]:

(*) если T – подмодуль модуля U , то T – чистый подмодуль в U тогда и только тогда, когда для любых двух натуральных чисел n и k система уравнений $\sum_{j=1}^k X_j a_{ij} = t_i$ ($i = 1, \dots, n$, $a_{ij} \in A$, $t_i \in T$), обладающая решением $x_1, \dots, x_k \in U$, имеет также решение в T .

Пусть n и k – натуральные числа и $\sum_{j=1}^k h(m_j)(a_{ij} + B) = h(x_i)$, где $m_j \in M$, $a_{ij} \in A$ и $x_i \in X$ ($i = 1, \dots, n$). Существуют такие элементы $t_1, \dots, t_n \in MB$, что $\sum_{j=1}^k m_j a_{ij} + t_i = x_i$ ($i = 1, \dots, n$). В силу (*) существуют такие элементы $y_j \in X$ и $z_i \in XB$, что $\sum_{j=1}^k y_j a_{ij} + z_i = x_i$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда $\sum_{j=1}^k h(y_j)a_{ij} = h(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$). В силу (*) $h(X)$ – чистый подмодуль в $h(M)$.

Утверждение (2) следует из [3; 34.5 и 34.9].

(3) В силу (2) $X \cap MB = 0$. Пусть $h(M) = h(X) \oplus h(Y)$, где $MB \subseteq Y \subseteq M$. Тогда $M = X + Y$ и $X \cap Y = X \cap MB = 0$. Поэтому $M = X \oplus Y$.

(4) Так как A/B – полуцепное артиново кольцо, то по лемме 1.1(6) A/B -модуль $h(X)$ чисто-инъективен. Кроме того, $h(X)$ – чистый подмодуль A/B -модуля $h(M)$ в силу (1). Поэтому $h(X)$ – прямое слагаемое A/B -модуля M/MB . В силу (3) X – прямое слагаемое A -модуля M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Пусть M – модуль над наследственным нётеровым первичным кольцом A , X – чистый подмодуль модуля $\text{Sing } M$ и $r(X) \neq 0$. Тогда X – прямое слагаемое модуля M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $T \equiv \text{Sing } M$. По лемме 1.3(5) X – периодический модуль и M/T – модуль без кручения. Каждый A -модуль без кручения является плоским модулем [13; с. 60]. Поэтому M/T – плоский модуль. Тогда T – чистый подмодуль в M [13; с. 37]. Так как X – чистый подмодуль в T и T – чистый подмодуль в M , то непосредственно проверяется, что X – чистый подмодуль в M . По лемме 1.7(2) $A/r(X)$ – полуцепное артиново кольцо. По лемме 2.7(4) X – прямое слагаемое в M .

ЛЕММА 2.9. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся простым артиновым кольцом.

(1) Если M – ненулевой A -модуль, не являющийся модулем без кручения, то M имеет ненулевое периодическое прямое слагаемое X , причем либо X – циклический цепной модуль, либо M/X – модуль без кручения и X – инъективный модуль, являющийся прямой суммой ненулевых цепных инъективных примарных модулей.

(2) Если M – π -проективный смешанный модуль, то M не имеет ненулевых циклических периодических прямых слагаемых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как M – ненулевой модуль, не являющийся модулем без кручения, то по лемме 1.3(5) $\text{Sing } M$ – ненулевой периодический модуль

и $M/\text{Sing } M$ – модуль без кручения. Если $\text{Sing } M$ – инъективный модуль, то по леммам 1.1(5) и 2.2(6) можно положить $X \equiv \text{Sing } M$.

Допустим, что $\text{Sing } M$ – неинъективный модуль. По леммам 2.2(3) и 2.3(1) модуль $\text{Sing } M$ имеет ненулевое циклическое цепное периодическое прямое слагаемое X с ненулевым аннулятором. По предложению 2.8 X – прямое слагаемое модуля M .

(2) Допустим, что $M = X \oplus Y$, где X – ненулевой циклический периодический модуль. Так как M – смешанный модуль, то по лемме 1.3(6) Y содержит ненулевой подмодуль без кручения. По лемме 1.6(6) $X = 0$. Получено противоречие.

ЛЕММА 2.10. Пусть X – инъективный модуль, Y – наследственный модуль и $M \equiv X \oplus Y$.

Тогда для любого подмодуля N модуля M существует такое прямое разложение $M = X \oplus \bar{Y}$, что $N = N \cap X \oplus N \cap \bar{Y}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h: N \rightarrow Y$ – гомоморфизм с ядром $N \cap X$, индуцированный естественной проекцией $X \oplus Y \rightarrow Y$ с ядром X . Так как $h(N)$ – подмодуль наследственного модуля Y , то $h(N)$ – проективный модуль. Поэтому существует прямое разложение $N = N \cap X \oplus \bar{N}$, где $\bar{N} \cap X = 0$. Пусть E – инъективная оболочка модуля M . Так как X – инъективный подмодуль инъективного модуля E и $X \cap \bar{N} = 0$, то существует такое прямое разложение $E = X \oplus \bar{E}$, что $\bar{N} \subseteq \bar{E}$. Так как $X \subseteq M$, то $M = M \cap (X \oplus \bar{E}) = X \oplus (M \cap \bar{E}) = X \oplus \bar{Y}$, где $\bar{Y} \equiv M \cap \bar{E}$ и $\bar{N} \subseteq \bar{Y}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. Пусть A – ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся простым артиновым кольцом, M – A -модуль, не являющийся модулем без кручения. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) M – разделяющий модуль;
- (2) M – π -проективный модуль;
- (3) либо M – периодический модуль, причем каждая примарная компонента M_i модуля M является или цепным инъективным модулем, или проективным $A/r(M_i)$ -модулем, либо $M = X \oplus Y$, где Y – ненулевой конечно порожденный проективный модуль, X – инъективный периодический ненулевой модуль, у которого каждая примарная компонента X_i является цепным модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если M – периодический модуль, то утверждение следует из леммы 2.5. Поэтому можно считать, что M – смешанный модуль.

Импликация (1) $\implies$ (2) следует из леммы 1.1(4).

(2) $\implies$ (3). По лемме 2.9(2) M не имеет ненулевых циклических периодических прямых слагаемых. Тогда из леммы 2.9(1) следует, что $M = X \oplus Y$, где X – инъективный периодический ненулевой модуль и Y – ненулевой модуль без кручения. По лемме 2.4 каждая примарная компонента модуля X является неразложимым инъективным модулем. Поэтому смешанный модуль M имеет π -проективное прямое слагаемое вида $\bar{X} \oplus Y$, где $\bar{X}$ – ненулевой неразложимый периодический инъективный модуль. Если Y – редуцированный модуль, то Y – конечно порожденный

проективный модуль по лемме 1.20. Допустим, что Y – нередуцированный модуль. Тогда M имеет прямое слагаемое $\overline{X} \oplus \overline{Y}$, где $\overline{Y}$ – ненулевой инъективный неперидический модуль. По лемме 1.23(2) получаем противоречие.

(3) $\Rightarrow$ (1). По лемме 1.1(7) Y – наследственный модуль. Так как Y – проективный модуль, то Y – M -разделяющий модуль по лемме 1.1(3). По лемме 1.18 достаточно доказать, что X – M -разделяющий модуль. По лемме 2.4 X – разделяющий модуль. Пусть $N = N_1 + N_2$ – ненулевой подмодуль модуля M , $f: X \rightarrow N$ – ненулевой гомоморфизм. По лемме 2.10 существует такое прямое разложение $M = X \oplus Z$, что $N = N \cap X \oplus N \cap Z$. Так как X – периодический модуль и Y – модуль без кручения, то $f(X) \subseteq X$. Если $i \in I$, то по лемме 2.4 либо $f(X_i) = 0$, либо $f(X_i) = X_i$. Поэтому существует такое непустое подмножество J множества I , что $f(X) = \bigoplus_{j \in J} X_j \subseteq N \cap X = \bigoplus_{i \in I} (N \cap X_i)$. Тогда $f(X) = \bigoplus_{j \in J} (N \cap X_j) = \bigoplus_{j \in J} X_j$ и $X = f(X) \oplus (\bigoplus_{i \in I \setminus J} X_i)$. Так как $Z \cong M/X \cong Y$, то Z – наследственный модуль. Пусть $v: M \rightarrow Z$ – проекция с ядром X . Так как $v(N_k)$ – подмодули нётерова наследственного модуля Z и $N_k \cap X = \text{Ker } v \cap N_k$, то $v(N_k)$ – нётеровы проективные модули и $N_k = N_k \cap X \oplus F_k$, где $F_k \cong v(N_k)$ ($k = 1, 2$). Пусть $h: M \rightarrow f(X)$ – проекция с ядром $Z \oplus (\bigoplus_{i \in I \setminus J} X_i)$. Положим $T \equiv h(F_1 + F_2)$. Тогда T – нётеров модуль и $f(X) = h(N) = h(N_1) + h(N_2) = h(N_1 \cap X) + h(N_2 \cap X) + T$. Поэтому $f(X) = \bigoplus_{j \in J} (N_1 \cap X_j + N_2 \cap X_j + T \cap X_j)$, поскольку по лемме 2.2(1) $h(X) \cap X' = h(X') = \bigoplus_{j \in J} (X' \cap X_j)$ для любого подмодуля X' модуля X . Тогда $f(X) = \bigoplus_{j \in J} (N_1 \cap X_j + N_2 \cap X_j)$, поскольку все $T \cap X_j$ – нётеровы модули и все X_j – цепные нециклические модули. Поэтому $f(X) = h(N_1 \cap X) + h(N_2 \cap X) = N_1 \cap h(X) + N_2 \cap h(X)$. Кроме того, X – разделяющий модуль. Поэтому существуют такие гомоморфизмы $f_k: X \rightarrow N_k \cap h(X) \subseteq N_k$ ($k = 1, 2$), что $f = f_1 + f_2$. Тогда X – M -разделяющий модуль.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Если M – периодический модуль, то утверждение следует из леммы 2.6. Если M – модуль без кручения, то утверждение следует из предложения 1.25. Если M – смешанный модуль, то утверждение следует из предложения 2.11.

Список литературы

1. de Robert E. Une propriété d'exactitude du foncteur hom et quelques caractérisations de modules projectifs // J. Algebra. 1974. V. 28. P. 253–282.
2. Bonnard G. Sur un problème d'algèbre commutative: modules scindants et modules co-scindants // J. Algebra. 1975. V. 35. P. 72–85.
3. Wisbauer R. Foundations of module and ring theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.
4. McConnell J. C., Robson J. C. Noncommutative Noetherian rings. New York: Wiley Interscience, 1987.
5. Lenagan T. H. Bounded hereditary Noetherian prime rings // J. London Math. Soc. (2). 1973. V. 6. P. 241–246.
6. Goodearl K. R., Warfield R. B. An introduction to noncommutative Noetherian rings. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
7. Tuganbaev A. A. Semidistributive modules and rings. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
8. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979.

9. *Туганбаев А. А.* Модули над наследственными кольцами // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 4. С. 143–160.
10. *Singh S.* Modules over hereditary Noetherian prime rings // Canad. J. Math. 1975. V. 27. № 4. P. 867–883.
11. *Singh S.* Modules over hereditary Noetherian prime rings. II // Canad. J. Math. 1976. V. 28. № 1. P. 73–82.
12. *Singh S., Talwar S.* Pure submodules of modules over bounded (hnp)-rings // Arch. Math. 1978. V. 30. № 6. P. 570–577.
13. *Stenström B.* Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

Московский энергетический институт
(технический университет)
E-mail: askar@tuganbaev.mccme.ru

Поступила в редакцию
10.04.2000