Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Терехин, Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 9, 127–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm5655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:06:28

УДК 517.518+517.982

П. А. Терёхин

Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза

Рассматривается задача о представлении функций $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ посредством ряда по элементам аффинной системы

$$\psi_{j,k}(x) = |\det a_j|^{1/2} \psi(a_j x - bk), \quad j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Соответствующие теоремы представления устанавливаются на основе рачмочных неравенств

$$A\|g\|_q \leq \| \{ (g, \psi_{j,k}) \} \|_Y \leq B\|g\|_q$$

для коэффициентов Фурье $(g, \psi_{j,k}) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \psi_{j,k}(x) dx$ функций $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $1/p + 1/q = 1$, где $\| \cdot \|_Y$ – норма некоторого банахова пространства числовых семейств $\{y_{j,k}\}$ и $0 < A \leq B < \infty$ – некоторые постоянные.

В частности, доказывается, что если функция $\psi \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, имеет ненулевой интеграл $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx \neq 0$ и система сдвигов $\{\psi(x - bk) : k \in \mathbb{Z}^d\}$ является p -бесселевой в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$, то для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ справедливо представление

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k},$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: аффинные системы, аффинный синтез, фреймы в банаховом пространстве.

§ 1. Введение

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ и b – невырожденные вещественные $d \times d$ -матрицы такие, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j^{-1} = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Аффинной системой*, порожденной функцией $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, называется семейство функций

$$\psi_{j,k}(x) = |\det a_j|^{1/2} \psi(a_j x - bk), \quad j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Работа выполнена в рамках Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2970.2008.1).

Классическим примером аффинных систем являются всплескоподобные семейства функций вида $\{2^{jd/2}\psi(2^jx - k)\}$ с положительным спектром $j \geq 0$, соответствующие случаю скалярных матриц $a_j = 2^j e$ и единичной матрицы $b = e$. Заметим, что условие положительности спектра является существенным, но далеко не единственным отличием общей аффинной системы от системы всплесков, где порождающая функция заведомо обязана удовлетворять целому ряду специальных дополнительных условий (см., например, [1]).

Под задачей *аффинного синтеза* мы понимаем задачу представления произвольной функции f из некоторого функционального пространства $F = F(\mathbb{R}^d)$ посредством ряда по элементам аффинной системы

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k},$$

коэффициенты $\{c_{j,k}\}$ которого принадлежат некоторому пространству числовых последовательностей X .

Положительное решение задачи аффинного синтеза равносильно корректной определенности и сюръективности *синтезирующего оператора* $S: X \rightarrow F$, заданного равенством

$$Sc = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k}, \quad c = \{c_{j,k}\} \in X.$$

Согласно известной двойственности между инъективными и сюръективными операторами желаемые свойства синтезирующего оператора являются следствием ограниченности и инъективности сопряженного к нему анализирующего оператора $R: G \rightarrow Y$, заданного равенством

$$Rg = \{(g, \psi_{j,k})\}, \quad g \in G,$$

где $G = F^*$ и $Y = X^*$ – сопряженные пространства, реализуемые при определенных условиях как функциональное пространство $G = G(\mathbb{R}^d)$ и пространство числовых последовательностей соответственно. Далее, условия ограниченности и инъективности анализирующего оператора R могут быть записаны в виде рамочных неравенств

$$A\|g\|_G \leq \| \{(g, \psi_{j,k}) \} \|_Y \leq B\|g\|_G$$

с некоторыми постоянными $0 < A \leq B < \infty$.

Таким образом, положительное решение задачи аффинного синтеза обеспечивают рамочные неравенства указанного вида.

Задача аффинного синтеза в пространстве $L^1(\mathbb{R}^d)$ получила исчерпывающее решение в работах [2] и [3]. В [2] показано, что необходимым и достаточным условием положительного решения задачи аффинного синтеза при $p = 1$ является условие отличия от нуля интеграла от порождающей функции ψ :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx \neq 0.$$

В [3] этот результат уточнен в следующем смысле: доказано, что синтезирующий оператор $S: X \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d)$ сюръективен для пространства X числовых семейств $\{c_{j,k}\}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\det a_j|^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}| < \infty.$$

В случае $p = 2$ классическим является результат Добеши (см. [4]) о полноте аффинной системы $\{\psi_{j,k}\}$ при выполнении следующих условий:

- 1) функция $|\hat{\psi}(\xi)|$ непрерывна в начале координат и $\hat{\psi}(0) \neq 0$;
- 2) функция $P_{b'}(|\hat{\psi}|^2)$ принадлежит пространству $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Здесь, как обычно, через

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

обозначено преобразование Фурье функции f и

$$Pf(x) = |\det b| \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - bk)$$

– периодизация функции f относительно решетки $b\mathbb{Z}^d$, причем в условии Добеши 2) полагаем, что $b' = (b^{-1})^*$ – транспонированная обратная матрица к матрице b .

Хорошо известно, что условие Добеши 2) эквивалентно тому, что система сдвигов $\{\psi(x - bk) : k \in \mathbb{N}\}$ является бесселевой системой, т.е. существует постоянная $M > 0$ такая, что для любого числового семейства $\{c_k\}$ из пространства $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi(x - bk) \right\|_2 \leq M \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Будет ли в условиях Добеши 1) и 2) иметь место аффинный синтез? Положительный ответ на этот вопрос получен автором в работах [5] и [6] и независимо Буи, Лаугесеном, Кайблингером (личное сообщение). Кроме того, автором в [5] установлено, что условие Добеши 2) может быть локализовано:

2') существуют окрестность Ω начала координат и постоянная $C > 0$ такие, что для почти всех $\xi \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |\hat{\psi}(\xi - b'k)|^2 \leq C |\hat{\psi}(\xi)|^2.$$

Очевидно, что при выполнении условия 1) локализованное условие 2') слабее условия 2). Более того, в [5] показано, что условие 1) также может быть ослаблено:

1') $\hat{\psi}(\xi) \neq 0$ п.в. в окрестности начала координат.

Таким образом, в [5] доказано, что при выполнении условий 1') и 2') имеет место аффинный синтез в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$. Точнее, синтезирующий оператор $S: X \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ сюръективен для пространства X числовых семейств $\{c_{j,k}\}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_2 < \infty.$$

В случае произвольного $p \in (1, \infty)$ в работе [2] показано, что если функция $\psi \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ по-прежнему имеет отличный от нуля интеграл и удовлетворяет дополнительному условию

$$|\psi(x)| \leq C |x|^{-d-\varepsilon}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

где $\varepsilon > 0$, то всякая функция $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ представима в виде суммы безусловно сходящегося ряда

$$f = \sum_{(j,k)} c_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Метод работы [2] не позволял получить информацию о коэффициентах представляющего ряда. Кроме того, условие на рост функции ψ слишком ограничительно и не зависит от показателя p . В связи с этим в работе [2] была высказана гипотеза о справедливости соответствующей теоремы представления при следующем ослаблении дополнительного условия на порождающую функцию:

$$P_b(|\psi|) = |\det b| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\psi(x - bk)| \in L^p_{\text{loc}}.$$

Справедливость этой гипотезы была доказана автором в работе [6]. В работе [7] были явно указаны аппроксимирующие произвольную функцию $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ агрегаты вида

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (f, \psi_{j,k}^*) \psi_{j,k}$$

такие, что

$$f = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J f_j.$$

При этом система $\{\psi_{j,k}^*\}$ является аффинной системой, порожденной функцией $\psi^* \in L^q(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющей условию $P_b(|\psi^*|) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Однако конструкция работы [7] не предоставляла ряда по аффинной системе. Впоследствии в [8] в предположениях гипотезы из [2] была получена конструкция, указывающая искомым представляющий ряд по аффинной системе. В [8] отмечалось, что соответствующая теорема получена ранее автором в [6].

В настоящей работе мы устанавливаем дальнейшее обобщение условия $P_b(|\psi|) \in L^p_{\text{loc}}$. А именно, таким более общим условием является условие p -бесселевости системы сдвигов $\{\psi(x - bk) : k \in \mathbb{Z}^d\}$ (см. теорему 2). Теорема 2 доказывается на основе рамочных неравенств, которые в свою очередь являются следствием предельного соотношения для коэффициентов Фурье по элементам аффинной системы (теорема 1). В §3 приведены некоторые сведения о фреймах в банаховом пространстве и получена теорема о представлении (теорема 4). В §4 получены леммы об ограниченности и сходимости дискретных матричных аналогов средних Соболева, из которых следует теорема 1 (леммы 2 и 3). В §5 содержатся доказательства теорем 1 и 2.

§ 2. Основные теоремы

Пусть $\Lambda = \{\lambda\}$ – некоторое счетное индексное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейство элементов $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ банахова пространства F называется p -бесселевой системой, если существует постоянная $M > 0$ такая, что для любого числового семейства $\{c_\lambda\} \in \ell^p(\Lambda)$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \varphi_\lambda \right\|_F \leq M \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^p \right)^{1/p}.$$

В частности, система сдвигов $\{\psi(x - bk) : k \in \mathbb{Z}^d\}$ является p -бесселевой системой в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что для любого числового семейства $\{c_k\} \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi(x - bk) \right\|_p \leq M \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \right)^{1/p}. \quad (2.1)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, и $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $1/p + 1/q = 1$. Для $j \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}^d$ обозначим через

$$(g, \psi_{j,k}) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \psi_{j,k}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) |\det a_j|^{1/2} \psi(a_j x - bk) dx$$

коэффициенты Фурье функции g по элементам аффинной системы.

Пусть, далее, система сдвигов $\{\psi(x - bk) : k \in \mathbb{Z}^d\}$ является p -бесселевой системой в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Тогда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(|\det b| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q} = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx \right| \|g\|_q.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\psi \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, имеет отличный от нуля интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx \neq 0.$$

Пусть, далее, система сдвигов $\{\psi(x - bk) : k \in \mathbb{Z}^d\}$ является p -бесселевой системой в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Тогда для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ существует числовое семейство $\{c_{j,k}\}$ такое, что

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^p \right)^{1/p} < \infty, \quad (2.2)$$

и справедливо представление

$$f = \sum_{(j,k)} c_{j,k} \psi_{j,k}. \quad (2.3)$$

При этом представление (2.3) имеет место в следующем смысле:

- 1) (суммируемость) семейство функций $\{c_{j,k} \psi_{j,k}\}$ суммируется к функции f в метрике пространства $L^p(\mathbb{R}^d)$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой конечный набор индексов $I_0 = \{(j, k)\}$, что для любого конечного набора индексов $I \supset I_0$ выполняется неравенство

$$\left\| f - \sum_{(j,k) \in I} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_p < \varepsilon;$$

- 2) (абсолютная сходимость по индексу j)

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k}, \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_p < \infty;$$

- 3) (безусловная сходимость) при любой нумерации семейства индексов $\{(j, k)\}$, т.е. для любой биекции $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$, полученный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)} \psi_{\sigma(n)}$$

сходится к функции f в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Обозначим через X банахово пространство числовых семейств $c = \{c_{j,k}\}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Условия (2.2) и (2.3) теоремы 2 показывает, что синтезирующий оператор $S: X \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ является сюръекцией, так что задача аффинного синтеза имеет положительное решение в условиях теоремы.

Таким образом, теорема 2 является аналогом для $p \in (1, \infty)$ приведенного в § 1 классического результата Добеши для $p = 2$. Из теоремы 2 следует справедливость гипотезы Филиппова–Освальда для общих аффинных систем (см. [2], [6]–[8]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $\psi \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, имеет отличный от нуля интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx \neq 0,$$

и удовлетворяет дополнительному условию $P_b(|\psi|) \in L^p_{\text{loc}}$.

Тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ справедливо представление (2.2), для коэффициентов $\{c_{j,k}\}_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}^d}$ которого выполняется неравенство (2.3).

§ 3. Фреймы в банаховом пространстве

Понятие фрейма было введено в 1952 г. Даффином и Шеффером (см. [9]) и заключается в следующем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть H – гильбертово пространство и $\Lambda = \{\lambda\}$ – счетное индексное множество. Семейство $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H \setminus \{0\}$ ненулевых элементов гильбертова пространства H называется *фреймом*, если для любого вектора $h \in H$ выполняются рамочные неравенства

$$A \|h\|_H \leq \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |(h, \varphi_\lambda)|^2 \right)^{1/2} \leq B \|h\|_H \quad (3.1)$$

с некоторыми постоянными $0 < A \leq B < \infty$.

Несколькими годами ранее в работах Бари [10] и [11] были введены понятия *гильбертовой* и *бесселевой системы*. Именно так были названы системы элементов гильбертова пространства, для которых выполняется верхняя или

соответственно нижняя оценка в рамочных неравенствах (3.1). Системы элементов гильбертова пространства, которые являются гильбертовыми и беселевыми одновременно, т.е. которые являются фреймами Даффина–Шеффера, были названы Бари *системами Рисса–Фишера*.

При обобщении понятия фрейма Даффина–Шеффера на случай системы элементов банахова пространства возникает неоднозначность в прочтении двойственности (h, φ_λ) : с одной стороны, можно говорить о выборке значений функционалов φ_λ на векторе h , с другой стороны – можно говорить о коэффициентах Фурье функционала h по системе φ_λ . При этом соответствующие рамочные неравенства будут иметь принципиально различные виды. Поясним сказанное точными определениями.

Итак, пусть F – банахово пространство и $G = F^*$ – сопряженное пространство к F .

Далее, выберем X – банахово пространство числовых семейств $\{x_\lambda\}$. Будем считать, что пространство X удовлетворяет следующему основному требованию:

(*) *система канонических ортов $\{\varepsilon_\lambda\}$ образует базис пространства X .*

Сразу заметим, что если на индексном множестве Λ не задано какой-либо нумерации его элементов, то базис $\{\varepsilon_\lambda\}$ считаем безусловным.

Напомним, что система канонических ортов состоит из числовых семейств $\varepsilon_\lambda = \{\varepsilon_{\lambda\mu} : \mu \in \Lambda\}$, где $\varepsilon_{\lambda\mu}$ – символ Кронекера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пространство X , удовлетворяющее указанному основному требованию (*), будем называть *модельным пространством*, а базис $\{\varepsilon_\lambda\}$ из канонических ортов – *естественным базисом* модельного пространства X .

При выполнении указанного основного требования сопряженное к X пространство можно отождествить с некоторым банаховым пространством Y числовых семейств $\{y_\lambda\}$ так, что

$$(x, y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda y_\lambda$$

– общий вид непрерывного линейного функционала на модельном пространстве X .

Далее, пусть $\{\varphi_\lambda\} \subset F \setminus \{0\}$ и $\{\varphi_\lambda^*\} \subset G \setminus \{0\}$ – системы ненулевых элементов банахова пространства F и G соответственно.

Следующее определение банахова фрейма принадлежит Грошенигу (см. [12]; фактически мы воспроизводим здесь определение атомарного разложения, но, как показано в [13], если модельное пространство X удовлетворяет основному требованию, то определения банахова фрейма и атомарного разложения эквивалентны).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пара систем $(\{\varphi_\lambda\}, \{\varphi_\lambda^*\})$ называется *банаховым фреймом*, если для любого вектора $f \in F$ выполняются неравенства

$$A\|f\|_F \leq \| (f, \varphi_\lambda^*) \|_X \leq B\|f\|_F \quad (3.2)$$

с некоторыми постоянными $0 < A \leq B < \infty$ и, кроме того, справедливо представление

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} (f, \varphi_\lambda^*) \varphi_\lambda.$$

Другое определение фрейма, основанное на двойственных к (3.2) рамочных неравенствах, было предложено автором в [14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Система $\{\varphi_\lambda\}$ называется *фреймом в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X* , если для любого непрерывного линейного функционала $g \in G$ семейство его коэффициентов Фурье $\{(g, \varphi_\lambda)\}$ удовлетворяет рамочным неравенствам

$$A\|g\|_G \leq \| \{(g, \varphi_\lambda)\} \|_Y \leq B\|g\|_G \quad (3.3)$$

с некоторыми постоянными $0 < A \leq B < \infty$.

Нетрудно видеть, что если $F = G = H$ – гильбертово пространство и $X = Y = \ell^2(\Lambda)$, то неравенства (3.2) и (3.3) совпадают с (3.1). Таким образом, фрейм Даффина–Шеффера есть фрейм в гильбертовом пространстве H относительно модельного пространства $\ell^2(\Lambda)$.

Заметим также, что неравенства вида (3.2) устанавливают принадлежность вектора f пространству F в терминах выборки $\{(f, \varphi_\lambda^*)\}$ значений функционалов, так что неравенства (3.2) составляют в некотором смысле утверждение теоремы отсчетов. Неравенства (3.3), в отличие от (3.2), автоматически обеспечивают выполнение следующей теоремы представления, анонсированной в работе автора [14].

ТЕОРЕМА 4. Пусть система $\{\varphi_\lambda\}$ образует фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X .

Тогда для любого вектора $f \in F$ существует числовое семейство $\{c_\lambda\} \in X$ такое, что справедливо представление

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \varphi_\lambda. \quad (3.4)$$

При этом если естественный базис модельного пространства X является безусловным, то ряд в правой части представления (3.4) безусловно сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через X_0 линейное многообразие в модельном пространстве X , состоящее из всех финитных числовых семейств $\{x_\lambda\}$. Согласно основному требованию система канонических ортов $\{\varepsilon_\lambda\}$ образует базис модельного пространства X . Поэтому линейное многообразие X_0 всюду плотно.

Определим линейный оператор $S_0: X_0 \rightarrow F$ посредством равенства

$$S_0 x = \sum x_\lambda \varphi_\lambda, \quad x = \{x_\lambda\} \in X_0.$$

В частности, $S_0 \varepsilon_\lambda = \varphi_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Покажем, что

$$\|S_0 x\|_F \leq B\|x\|_X, \quad x \in X_0,$$

где постоянная $B > 0$ та же, что и в рамочных неравенствах (3.3). В самом деле, для любого $x \in X_0$ имеем

$$\begin{aligned} \|S_0 x\|_F &= \sup_{\|g\|_G \leq 1} |(S_0 x, g)| = \sup_{\|g\|_G \leq 1} \left| \sum x_\lambda (g, \varphi_\lambda) \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|_G \leq 1} \|x\|_X \| \{(g, \varphi_\lambda)\} \|_Y \leq B\|x\|_X. \end{aligned}$$

Здесь в последнем неравенстве использованы рамочные неравенства (3.3) из определения фрейма $\{\varphi_\lambda\}$ в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X .

Таким образом, $S_0: X_0 \rightarrow F$ – ограниченный линейный оператор с всюду плотной в X областью определения. Следовательно, этот оператор допускает единственное продолжение до ограниченного линейного оператора $S: X \rightarrow F$, заданного на всем модельном пространстве X .

По-прежнему имеем $S\varepsilon_\lambda = \varphi_\lambda$. Отсюда для любого $x = \{x_\lambda\} \in X$ получаем

$$Sx = S \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \varepsilon_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \varphi_\lambda.$$

При этом если естественный базис модельного пространства является безусловным, то оба внутренних ряда сходятся безусловно в силу ограниченности оператора S .

Теперь мы видим, что доказываемое представление (3.4) равносильно разрешимости уравнения $Sc = f$ для каждого вектора $f \in F$ относительно числового семейства $c \in X$. Итак, требуется доказать, что построенный оператор $S: X \rightarrow F$ является сюръекцией.

Для этого рассмотрим сопряженный оператор $S^*: G \rightarrow Y$. Пусть $x = \{x_\lambda\} \in X$ и $g \in G$. По определению сопряженного оператора находим

$$(x, S^*g) = (Sx, g) = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda (g, \varphi_\lambda),$$

откуда

$$S^*g = \{(g, \varphi_\lambda)\}, \quad g \in G.$$

Полученное представление для сопряженного оператора показывает, что рамочные неравенства (3.3) могут быть записаны в эквивалентном виде

$$A\|g\|_G \leq \|S^*g\|_Y \leq B\|g\|_G.$$

Последнее означает, что сопряженный оператор S^* является инъекцией (в операторном смысле; см., например, [15; ч. 0, п. В.3.2]). Следовательно, исходный оператор $S: X \rightarrow F$ является сюръекцией (см. [15; ч. 0, п. В.3.9, предложение 2] или [16; теорема 4.15]).

Теорема 4 доказана.

§ 4. Дискретные матричные аналоги средних Соболева

Пусть функция $\psi \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx = 1. \quad (4.1)$$

Для функции $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $1/p + 1/q = 1$, и положительного числа $\varepsilon > 0$ обозначим через

$$g * \psi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x+y) \varepsilon^{-d} \psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy$$

ε -усреднение функции g по Соболеву (см. [17]). Известно (см., например, [18]), что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|g * \psi_\varepsilon - g\|_q = 0.$$

Нетрудно видеть, что аналогичное предельное соотношение сохранится после замены скалярного параметра ε на матричный параметр a , точнее на a^{-1} :

$$\lim_{a^{-1} \rightarrow 0} \|g * \psi_a - g\|_q = 0,$$

где

$$g * \psi_a(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x+y) |\det a| \psi(ay) dy$$

и a – невырожденная вещественная $d \times d$ -матрица.

Далее, рассмотрим значения функции $g * \psi_a(x)$ в узлах $x = a^{-1}bk$, $k \in \mathbb{Z}^d$, решетки $a^{-1}b\mathbb{Z}^d$. Имеем

$$g * \psi_a(a^{-1}bk) = \int_{\mathbb{R}^d} g(a^{-1}bk + y) |\det a| \psi(ay) dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(z) |\det a| \psi(az - bk) dz.$$

В последнем равенстве сделана замена переменного $a^{-1}bk + y = z$.

Теперь положим $a = a_j$. Согласно определению аффинной системы получим

$$g * \psi_{a_j}(a_j^{-1}bk) = \int_{\mathbb{R}^d} g(z) |\det a_j| \psi(a_j z - bk) dz = |\det a_j|^{1/2} (g, \psi_{j,k}).$$

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ построим кусочно-постоянную функцию $g_j(x)$, принимающую значение $g * \psi_{a_j}(a_j^{-1}bk)$ на параллелотопах вида

$$Q_{j,k} = \{x : [b^{-1}a_j x] = k\}, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

где $[x] = ([x_1], \dots, [x_d])$ для вектора $x = (x_1, \dots, x_d)$, причем $[x_\nu]$ – целая часть числа x_ν , $\nu = 1, \dots, d$. Искомыми будут функции

$$g_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_j x] + y) |\det a_j| \psi(a_j y) dy, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Действительно, при $x \in Q_{j,k}$ имеем

$$g_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(a_j^{-1}bk + y) |\det a_j| \psi(a_j y) dy = g * \psi_{a_j}(a_j^{-1}bk).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Последовательность функций g_j назовем *дискретными матричными аналогами средних Соболева* функции g .

Найдем условия принадлежности функций g_j пространству $L^q(\mathbb{R}^d)$.

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство*

$$\|g_j\|_q = |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(|\det b| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственным вычислением получаем

$$\begin{aligned}\|g_j\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}^d} |g_j(x)|^q dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{Q_{j,k}} |g_j(x)|^q dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\det a_j|^{q/2} |(g, \psi_{j,k})|^q \text{mes } Q_{j,k} \\ &= |\det a_j|^{q(1/2-1/q)} |\det b| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q.\end{aligned}$$

Здесь учтено, что при замене $y = b^{-1}a_j x$ в кратном интеграле будем иметь

$$\text{mes } Q_{j,k} = \int_{\{x: [b^{-1}a_j x]=k\}} dx = \int_{\{y: [y]=k\}} |\det a_j^{-1} b| dy = |\det a_j|^{-1} |\det b|.$$

ЛЕММА 2. Пусть $j \in \mathbb{N}$ и $\psi \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$.

Тогда для того чтобы для любой функции $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $1/p + 1/q = 1$, имела место принадлежность g_j пространству $L^q(\mathbb{R}^d)$, необходимо и достаточно существование постоянной $M > 0$ такой, что для любого числового семейства $\{c_k\} \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi(x - bk) \right\|_p \leq M \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \right)^{1/p}. \quad (4.4)$$

При этом справедлива оценка

$$\|g_j\|_q \leq C \|g\|_q \quad (4.5)$$

с постоянной $C = M |\det b|^{1/q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Из принадлежности $g_j \in L^q(\mathbb{R}^d)$ и равенства (4.3) следует, что рассматриваемый на пространстве $L^q(\mathbb{R}^d)$ выпуклый функционал

$$p_j(g) = |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(|\det b| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q}$$

всюду конечен. Этот функционал является точной верхней гранью последовательности непрерывных выпуклых функционалов

$$p_j^{[n]}(g) = |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(|\det b| \sum_{|k| \leq n} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу леммы Гельфанда (см. [19; п. 18]) функционал p_j непрерывный. Поэтому существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$p_j(g) \leq C \|g\|_{L^q}.$$

Тем самым, с учетом леммы 1 установлена справедливость оценки (4.5).

Далее, для финитного числового семейства $\{c_k\}$ имеем

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi_{j,k} \right\|_p &= \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k(g, \psi_{j,k}) \right| \\
 &\leq \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q} \\
 &= |\det a_j|^{-(1/2-1/q)} |\det b|^{-1/q} \sup_{\|g\|_q \leq 1} p_j(g) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \right)^{1/p} \\
 &\leq C |\det a_j|^{1/2-1/p} |\det b|^{-1/q} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \right)^{1/p}.
 \end{aligned}$$

С другой стороны, непосредственное вычисление L^p -нормы при замене $y = a_j x$ в кратном интеграле дает

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi_{j,k} \right\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k |\det a_j|^{1/2} \psi(a_j x - bk) \right|^p dx \right)^{1/p} \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k |\det a_j|^{1/2} \psi(y - bk) \right|^p |\det a_j^{-1}| dy \right)^{1/p} \\
 &= |\det a_j|^{1/2-1/p} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi(y - bk) \right\|_p.
 \end{aligned}$$

Сравнивая последние две выкладки, для финитных числовых семейств $\{c_k\}$ получаем неравенство

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi(x - k) \right\|_p \leq C |\det b|^{-1/q} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \right)^{1/p}.$$

Последнее неравенство будет справедливо для любого числового семейства $\{c_k\} \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$, так как множество всех финитных числовых семейств плотно в пространстве $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Неравенство (4.4) так же, как и при доказательстве необходимости, запишем в эквивалентном виде

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi_{j,k} \right\|_p \leq M |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \right)^{1/p}.$$

Фиксируем функцию $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. На множестве финитных числовых семейств $c = \{c_k\}$ определим линейный функционал

$$l_j(c) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k(g, \psi_{j,k}).$$

Имеем

$$|l_j(c)| \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi_{j,k} \right\|_p \|g\|_q \leq M |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \right)^{1/p} \|g\|_q.$$

Отсюда следует, что функционал l_j можно продолжить до непрерывного линейного функционала на пространстве $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$, причем

$$\|l_j\| \leq M |\det a_j|^{1/2-1/p} \|g\|_q.$$

По определению функционала l_j и на основании теоремы об общем виде непрерывного линейного функционала в $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ заключаем, что числовое семейство $\{(g, \psi_{j,k})\}$ принадлежит пространству $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$ и при этом выполняется неравенство

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q} \leq M |\det a_j|^{1/2-1/p} \|g\|_q.$$

Применение леммы 1 дает искомую оценку

$$\begin{aligned} \|g_j\|_q &= |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(|\det b| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q} \\ &\leq |\det a_j|^{1/2-1/q} M |\det b|^{1/q} |\det a_j|^{1/2-1/p} \|g\|_q = C \|g\|_q. \end{aligned}$$

Достаточность, а вместе с ней и лемма 2 доказаны.

Теперь перейдем к вопросу о сходимости дискретных матричных аналогов средних Соболева в метрике пространства $L^q(\mathbb{R}^d)$.

ЛЕММА 3. Пусть функция $\psi \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, удовлетворяет условию (4.1).

Пусть, далее, существует постоянная $M > 0$ такая, что для любого числового семейства $\{c_k\} \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ выполняется неравенство (4.4).

Тогда для любой функции $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, $1/p + 1/q = 1$, справедливо предельное соотношение

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|g_j - g\|_q = 0. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функция g непрерывна и имеет компактный носитель. Пусть для определенности носитель функции g лежит внутри шара с центром в начале координат радиуса R :

$$\text{supp } g \subset B(0, R) = \{x : |x| < R\}.$$

В качестве нормы в пространстве $\mathbb{R}^d$ нам удобнее здесь рассматривать чебышёвскую норму

$$|x| = \max_{1 \leq \nu \leq d} |x_\nu|, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Сразу заметим, что при таком выборе нормы для любого вектора $x \in \mathbb{R}^d$ имеет место неравенство

$$|x - [x]| = \max_{1 \leq \nu \leq d} |x_\nu - [x_\nu]| \leq 1,$$

и для произвольного шара $B(y, R) = \{x : |x - y| < R\}$ имеем

$$\text{mes } B(y, R) = (2R)^d.$$

Далее, обозначим через

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |g(x) - g(y)|$$

равномерный модуль непрерывности функции g .

По определению дискретных матричных аналогов средних Соболева (4.2) и с учетом нормировки (4.1) находим

$$\begin{aligned} g_j(x) - g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + y) |\det a_j| \psi(a_j y) dy - g(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y) \psi(y) dy - g(x) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y) - g(x) \right) \psi(y) dy. \end{aligned}$$

Применим интегральное неравенство Минковского. Получим

$$\|g_j(x) - g(x)\|_q \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y) - g(x)\|_q |\psi(y)| dy. \quad (4.7)$$

Теперь фиксируем вектор $y \in \mathbb{R}^d$ и рассмотрим функцию

$$G(x) = g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y) - g(x).$$

Во-первых, из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} |a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y - x| &\leq |a_j^{-1}y| + |x - a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx]| \\ &\leq |a_j^{-1}bb^{-1}y| + |a_j^{-1}b(b^{-1}a_jx - [b^{-1}a_jx])| \\ &\leq \|a_j^{-1}b\|(|b^{-1}y| + |b^{-1}a_jx - [b^{-1}a_jx]|) \\ &\leq \|a_j^{-1}\| \|b\|(|b^{-1}y| + 1) = C(y)\|a_j^{-1}\| \end{aligned}$$

следует оценка

$$|G(x)| \leq \omega(C(y)\|a_j^{-1}\|). \quad (4.8)$$

Очевидно также, что

$$|G(x)| \leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |g(x)| = 2\|g\|_\infty. \quad (4.9)$$

Во-вторых, имеет место оценка

$$\text{mes supp } G \leq C_0, \quad (4.10)$$

в которой величина C_0 не зависит от y . В самом деле, если $G(x) \neq 0$, то $g(x) \neq 0$ или $g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y) \neq 0$. В первом случае $x \in B(0, R)$, а во втором случае

$$|a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y| < R,$$

откуда

$$\begin{aligned} |x + a_j^{-1}y| &\leq |x - a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx]| + |a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y| \\ &< |a_j^{-1}b(b^{-1}a_jx - [b^{-1}a_jx])| + R \leq \|a_j^{-1}b\| |b^{-1}a_jx - [b^{-1}a_jx]| + R \\ &\leq \|a_j^{-1}b\| + R \leq \|a_j^{-1}\| \|b\| + R. \end{aligned}$$

Это означает, что $x \in B(-a_j^{-1}y, \|a_j^{-1}\| \|b\| + R)$. Таким образом, установлено включение

$$\{x : G(x) \neq 0\} \subset B(0, R) \cup B(-a_j^{-1}y, \|a_j^{-1}\| \|b\| + R).$$

Отсюда

$$\text{mes supp } G \leq (2R)^d + (2\|a_j^{-1}\| \|b\| + 2R)^d.$$

Замечая, что $A = \sup_{j \in \mathbb{N}} \|a_j^{-1}\| < \infty$ в силу условия $a_j^{-1} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, получаем оценку (4.10) с величиной

$$C_0 = (2R)^d + (2A\|b\| + 2R)^d.$$

Используя оценки (4.8)–(4.10), получаем неравенство

$$\|G(x)\|_q \leq \min\{\omega(C(y)\|a_j^{-1}\|), 2\|g\|_\infty\} C_0^{1/q}. \quad (4.11)$$

Неравенство (4.11) показывает, что выражение

$$\|G(x)\|_q = \|g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y) - g(x)\|_q,$$

во-первых, стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$ при фиксированном y , поскольку модуль непрерывности $\omega(C(y)\|a_j^{-1}\|)$ стремится к нулю вместе с нормой $\|a_j^{-1}\| \rightarrow 0$, и, во-вторых, равномерно ограничено по $j \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{R}^d$ величиной $2\|g\|_\infty C_0^{1/q}$. Следовательно, для последовательности функций

$$F_j(y) = \|g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y) - g(x)\|_q |\psi(y)|, \quad j \in \mathbb{N},$$

стоящих под знаком интеграла в правой части неравенства (4.7), выполнены все условия теоремы Лебега о мажорируемой сходимости:

$$\begin{aligned} F_j(y) &\leq 2\|g\|_\infty C_0^{1/q} |\psi(y)|, \quad j \in \mathbb{N}, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} F_j(y) &= 0 \quad \text{для почти всех } y \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Переходя к пределу под знаком интеграла, окончательно находим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \|g(a_j^{-1}b[b^{-1}a_jx] + a_j^{-1}y) - g(x)\|_q |\psi(y)| dy = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} F_j(y) dy = 0,$$

что доказывает предельное соотношение (4.6) для непрерывных функций g с компактным носителем.

Пусть теперь g – произвольная функция из пространства $L^q(\mathbb{R}^d)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем такую непрерывную функцию h с компактным носителем, что $\|g - h\|_q < \varepsilon$. В силу уже доказанного найдется такой номер j_0 , что для всех $j \geq j_0$ будет выполняться неравенство $\|h_j - h\|_q < \varepsilon$. На основании оценки (4.5) из леммы 2 находим

$$\|g_j - h_j\|_q = \|(g - h)_j\|_q \leq C\|g - h\|_q < C\varepsilon.$$

Следовательно, при $j \geq j_0$ будем иметь

$$\|g_j - g\|_q \leq \|g_j - h_j\|_q + \|h_j - h\|_q + \|h - g\|_q < C\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = (C + 2)\varepsilon.$$

Итак, получили предельное соотношение (4.6) с произвольной функцией g из пространства $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Лемма 3 полностью доказана.

Сравнение лемм 2 и 3 указывает на то, что из ограниченности дискретных матричных аналогов средних Соболева автоматически следует их сходимость.

§ 5. Доказательство основных теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Нормируем функцию ψ условием

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx = 1.$$

Тогда выполнены все условия леммы 3. По этой лемме для любой функции $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ выполняются предельное соотношение (4.6) и, следовательно, соотношение

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|g_j\|_q = \|g\|_q.$$

Очевидно, что без принятой нормировки будем иметь

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|g_j\|_q = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx \right| \cdot \|g\|_q.$$

Осталось применить равенство (4.3) леммы 1.

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из предельного соотношения теоремы 1 следуют неравенства

$$A\|g\|_q \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q} \leq B\|g\|_q$$

с постоянными

$$A = |\det b|^{-1/q} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx \right|, \quad B = M,$$

где $M > 0$ – постоянная из условия p -бесселевости (2.1). В самом деле, непосредственно получаем нижнюю оценку

$$\begin{aligned} \sup_{j \in \mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q} &\geq \lim_{j \rightarrow \infty} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q} \\ &= |\det b|^{-1/q} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx \right| \|g\|_q, \end{aligned}$$

а верхняя оценка вытекает из равенства (4.3) леммы 1 и неравенства (4.5) леммы 2:

$$\begin{aligned} \sup_{j \in \mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |(g, \psi_{j,k})|^q \right)^{1/q} &= |\det b|^{-1/q} \sup_{j \in \mathbb{N}} \|g_j\|_q \\ &\leq |\det b|^{-1/q} C \|g\|_q = M \|g\|_q. \end{aligned}$$

Пусть снова X – банахово пространство числовых семейств $\{c_{j,k}\}$, для которых конечна норма

$$\|c\|_X = \sum_{j \in \mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Пространство X является весовым пространством типа $\ell^1(\ell^p)$ и ему изометрически изоморфно посредством диагонального оператора

$$\{c_{j,k}\} \mapsto \{|\det a_j|^{1/2-1/p} c_{j,k}\}.$$

Поэтому сопряженным к пространству X будет банахово пространство Y , являющееся весовым пространством типа $\ell^\infty(\ell^q)$ и состоящее из числовых семейств $\{c_{j,k}\}$, для которых конечна норма

$$\|c\|_Y = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\det a_j|^{1/2-1/q} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Кроме того, система канонических ортов образует безусловный базис пространства X . Таким образом, X может быть выбрано как модельное пространство.

Рассмотрим синтезирующий оператор $S: X \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$, заданный равенством

$$Sc = \sum_{(j,k)} c_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Сопряженным к нему будет анализирующий оператор $R: L^q(\mathbb{R}^d) \rightarrow Y$, заданный равенством

$$Rg = \{(g, \psi_{j,k})\}.$$

В самом деле, согласно определению синтезирующего оператора имеем

$$(Sc, g) = \sum_{(j,k)} c_{j,k} (g, \psi_{j,k}) = (c, Rg).$$

Заметим, что установленные в начале доказательства теоремы неравенства можно записать в виде

$$A\|g\|_q \leq \|Rg\|_Y \leq B\|g\|_q.$$

Эти рамочные неравенства показывают, что аффинная система $\{\psi_{j,k}\}$ образует фрейм в банаховом пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$ относительно модельного пространства числовых семейств X . По теореме 4 для всякой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ существует числовое семейство $\{c_{j,k}\} \in X$ такое, что

$$f = Sc = \sum_{(j,k)} c_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Осталось обсудить качество сходимости представляющего функцию f ряда. Безусловная сходимость этого ряда прямо следует из теоремы 4. Суммируемость равносильна безусловной сходимости. Абсолютная сходимость по индексу j вытекает из следующей оценки:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_p \leq M \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^p \right)^{1/p} = M \|c\|_X < \infty.$$

Здесь учтено неравенство

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \right\|_p \leq M |\det a_j|^{1/2-1/p} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \right)^{1/p},$$

которое получено из условия p -бесселевости (2.1) с помощью замены переменного $x \mapsto a_j x$.

Теорема 2 доказана.

ЛЕММА 4. Если $P_b(|\psi|) \in L^p_{\text{loc}}$, то система сдвигов $\{\psi(x-bk)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ является p -бесселевой системой в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi(x-bk) \right\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k \psi(x-bk)| \right)^p dx.$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера для числовых семейств

$$\sum x_k y_k \leq \left(\sum x_k^p \right)^{1/p} \left(\sum y_k^q \right)^{1/q},$$

полагая в нем $x_k = |c_k| \cdot |\psi(x-bk)|^{1/p}$ и $y_k = |\psi(x-bk)|^{1/q}$. Получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi(x-bk) \right\|_p^p &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p |\psi(x-bk)| \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\psi(x-bk)| \right)^{p/q} dx \\ &= |\det b|^{-p/q} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p |\psi(x-bk)| \cdot P_b^{p/q}(|\psi|) dx. \end{aligned}$$

Представим пространство $\mathbb{R}^d$ в виде дизъюнктного объединения параллелограммов $b(Q-l)$, $l \in \mathbb{Z}^d$. Преобразуем последний интеграл к виду

$$|\det b|^{-p/q} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \int_{b(Q-l)} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p |\psi(x-bk)| \cdot P_b^{p/q}(|\psi|) dx.$$

В каждом таком интеграле выполним замену $x = y - bl$, $y \in bQ$. Будем иметь

$$|\det b|^{-p/q} \int_{bQ} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p |\psi(y-b(l+k))| \cdot P_b^{p/q}(|\psi|) dy.$$

Здесь учтено, что функция $P_b(|\psi|)$ является $b\mathbb{Z}^d$ -периодической. Окончательно получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \psi(x-bk) \right\|_p^p &\leq |\det b|^{-p/q} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \int_{bQ} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} |\psi(y-bl)| \cdot P_b^{p/q}(|\psi|) dy \\ &= |\det b|^{-p} \int_{bQ} P_b^p(|\psi|) dy \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p = M^p \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \end{aligned}$$

с конечной постоянной

$$M = |\det b|^{-1} \|P_b(|\psi|)\|_{L^p(bQ)} < \infty,$$

так как $P_b(|\psi|) \in L^p_{\text{loc}}$. Итак, система $\{\psi(x - bk)\}$ является p -бесселевой.

Лемма 4 доказана.

Заметим, что утверждение, обратное к лемме 4, неверно. Простой пример можно привести уже в одномерном случае $d = 1$ для $b = 1$ и $p = 2$. Именно, функция $\psi(x) = \sin \pi x / (\pi x)$ не удовлетворяет условию $P_b(|\psi|) \in L^p_{\text{loc}}$, поскольку

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi(x - k)| = |\sin \pi x| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|x - k|} = \infty$$

для всех $x \notin \mathbb{Z}$. В то же время система сдвигов $\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ является бесселевой, так как

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi - k)|^2 = 1,$$

в частности, $P_b(|\widehat{\psi}|^2) \in L^\infty(\mathbb{R})$, что равносильно бесселевости.

Доказательство теоремы 3 непосредственно следует из теоремы 2 и леммы 4.

Список литературы

- [1] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
- [2] V. I. Filippov, P. Oswald, “Representation in L_p by series of translates and dilates of one function”, *J. Approx. Theory*, **82**:1 (1995), 15–29.
- [3] J. Bruna, “On translation and affine systems spanning $L^1(\mathbb{R})$ ”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **12**:1 (2006), 71–82.
- [4] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, РХД, Ижевск, 2001; пер. с англ.: I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **61**, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [5] П. А. Терёхин, “Аффинный синтез в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:1 (2009), 177–186; англ. пер.: P. A. Terekhin, “Affine synthesis in the space $L^2(\mathbb{R}^d)$ ”, *Izv. Math.*, **73**:1 (2009), 171–180.
- [6] П. А. Терёхин, “Сжатия и сдвиги функции с ненулевым интегралом”, *Математика. Механика*, **1**, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 1999, 67–68.
- [7] H.-Q. Bui, R. S. Laugesen, “Affine systems that span Lebesgue spaces”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **11**:5 (2005), 533–556.
- [8] H.-Q. Bui, R. S. Laugesen, *Affine synthesis and coefficient norms for Lebesgue, Hardy and Sobolev spaces*, <http://www.math.uiuc.edu/laugesen/coefficientnorm4p3.pdf>.
- [9] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, “A class of nonharmonic Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72**:2 (1952), 341–366.
- [10] Н. К. Бари, “О базисах в гильбертовом пространстве”, *Докл. АН СССР*, **54**:5 (1946), 383–386.
- [11] Н. К. Бари, “Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве”, *Ученые записки МГУ*, **148**:4 (1951), 69–107.
- [12] K. Gröchenig, “Describing functions: atomic decompositions versus frames”, *Monatsh. Math.*, **112**:1 (1991), 1–42.

- [13] P. G. Casazza, D. Han, D. R. Larson, “Frames for Banach spaces”, *The functional and harmonic analysis of wavelets and frames*, Proceedings of the AMS special session (San Antonio, TX, USA, 1999), Contemp. Math., **247**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 149–182.
- [14] П. А. Терёхин, “Системы представления и проекции базисов”, *Матем. заметки*, **75**:6 (2004), 944–947; англ. пер.: P. A. Terekhin, “Representation systems and projections of bases”, *Math. Notes*, **75**:5–6 (2004), 881–884.
- [15] А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: A. Pietsch, *Operator ideals*, Math. Monogr., **16**, VEB, Berlin, 1978.
- [16] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; пер. с англ.: W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1973.
- [17] С. Л. Соболев, *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций*, Наука, М., 1989.
- [18] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [19] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Гостехиздат, М.–Л., 1950; англ. пер.: N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, vol. 1, 2, Frederick Ungar, New York, 1961–1963.

П. А. Терёхин (P. A. Terekhin)

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Поступила в редакцию

16.04.2008 и 18.02.2009