Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, Асимптотически однородные обобщенные функции по специальным группам преобразований, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 6, 23–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm5656>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:16:17

УДК 517.5

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов

Асимптотически однородные обобщенные функции по специальным группам преобразований

Обобщенные функции, обладающие (квази)асимптотикой по специальным группам преобразований аргументов этих функций в асимптотической шкале правильно меняющихся функций, называются асимптотически однородными по этим группам преобразований. В частности, к этим функциям принадлежат все “квазиоднородные” обобщенные функции. В работе получено полное описание асимптотически однородных функций по группе преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}_+^n$, в том числе и для случая критических порядков. Для этого вводятся и изучаются специальные пространства обобщенных функций. Полученные результаты применяются для изучения особенностей голоморфных функций в трубчатых областях над ортантами.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: обобщенные функции, тауберовы теоремы, голоморфные функции.

Введение

Пусть $\mathcal{N}$ – некоторое пространство (основных) функций (например, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и т.п.), $\mathcal{N}'$ – пространство обобщенных функций, т.е. пространство линейных непрерывных функционалов над пространством соответствующих основных функций. Следуя стандартам, принятым в теории обобщенных функций, будем указывать обобщенную функцию $f \in \mathcal{N}'$ вместе с аргументом основной функции и будем писать $(f(t), \psi(t))$, $\psi(t) \in \mathcal{N}$, вместо (f, ψ) . В такой записи $f(Ut)$, где U – линейное преобразование координат, означает обобщенную функцию, действующую по правилу

$$(f(Ut), \psi(t)) = \frac{1}{\det U} (f(t), \psi(U^{-1}t)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Пусть $\{U_k, k > 0\}$ – мультипликативная, непрерывная, однопараметрическая группа линейных преобразований $\mathbb{R}^n$ такая, что $U_{k_1 k_2} = U_{k_1} U_{k_2}$. Пусть $\mathcal{M}$ – подпространство $\mathcal{N}$, причем $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ инвариантны относительно U_k , $\rho(k) > 0$ – непрерывная функция при $k > 0$ и $f \in \mathcal{N}'$. Будем говорить, что f обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ по группе U_k

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00144а) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3224.2008.1).

на $\mathcal{M}$, если для любой $\psi(t) \in \mathcal{M}$ и некоторой $g \in \mathcal{N}'$

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(U_k t), \psi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (g(t), \psi(t)).$$

Если $\mathcal{M}$ совпадает со всем пространством $\mathcal{N}$, то будем говорить, что f асимптотически однородна по группе преобразований $\{U_k, k > 0\}$.

Отметим, что U_k может быть представлена в виде $U_k = e^{E \ln k}$, где E – некоторое линейное преобразование $\mathbb{R}^n$. Далее мы ограничимся следующим важным для приложений случаем, когда вещественная жорданова форма E имеет диагональный вид, причем все диагональные элементы либо положительны, либо отрицательны. Таким образом, если $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, то можно выбрать координаты $t = (t_1, \dots, t_n)$ так, что

$$U_k^a t = (k^{a_1} t_1, \dots, k^{a_n} t_n), \quad U_{1/k}^a t = U_k^{-a} t = \left(\frac{t_1}{k^{a_1}}, \dots, \frac{t_n}{k^{a_n}} \right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. В соответствии с определением 0.1 будем говорить, что $f(t) \in \mathcal{N}'$ обладает квазиасимптотикой по группе преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}_+^n$, на бесконечности (в нуле) относительно $\rho(k)$ на множестве $\mathcal{M}$, если для любой $\psi \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)}(f(U_k^a t), \psi(t)) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} (g(t), \psi(t)) \\ \left(\frac{1}{\rho(k)}(f(U_k^{-a} t), \psi(t)) \right) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} (g(t), \psi(t)) \end{aligned} \quad (0.1)$$

для некоторой $g \in \mathcal{N}'$. Если $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, то будем говорить, что f асимптотически однородна по группе преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}_+^n$, на бесконечности (в нуле) относительно $\rho(k)$. Класс таких обобщенных функций обозначим через $AO_\rho^a(\mathcal{N})$ ($AO_\rho^{-a}(\mathcal{N})$ соответственно).

Если $g = 0$, то будем говорить, что $f(t)$ обладает тривиальной квазиасимптотикой по группе преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}_+^n$, на бесконечности (в нуле) относительно $\rho(k)$.

Если для $f \in \mathcal{N}'$ выполнено соотношение (0.1) и $g \neq 0$, то функция $\rho(k)$ обязательно является автомодельной (правильно меняющейся) функцией (см. [1]).

Напомним, что положительная непрерывная функция $\rho(k)$ при $k > 0$ называется автомодельной, если для любого $a > 0$ и некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ при $k \rightarrow \infty$

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \rightarrow a^\alpha$$

равномерно на компактах по a на $(0, +\infty)$. Число α называется порядком автомодельности ρ . Порядок α автомодельной функции $\rho(k)$ из (0.1) называется порядком асимптотически однородной обобщенной функции.

Заметим, что если $\rho(k)$ в соотношении (0.1) имеет порядок α и $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, то g является однородной обобщенной функцией степени α по группе преобразований аргумента, определяемой вектором a , т.е. $g(U_k^a t) = k^\alpha g(t)$, $k > 0$. Такие функции называют иногда “квазиоднородными” (см. [2]).

Отметим следующее свойство автомодельных функций.

ЛЕММА 0.1. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует константа c такая, что

$$\begin{cases} \frac{1}{c}t^{\alpha-\varepsilon} \leq \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leq ct^{\alpha+\varepsilon} & \text{при } k > 1, t > 1, \\ \frac{1}{c}t^{\alpha+\varepsilon} \leq \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} \leq ct^{\alpha-\varepsilon} & \text{при } \frac{1}{k} < t < 1, k > 1. \end{cases} \quad (0.2)$$

Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Введем функцию

$$\widehat{\rho}(k) = \begin{cases} k^\alpha \int_1^k \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty, \\ k^\alpha \int_k^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa < \infty. \end{cases} \quad (0.3)$$

Нетрудно видеть, что $\widehat{\rho}(k)$ – тоже автомодельная функция порядка α . Отметим некоторые ее свойства.

1) Пусть непрерывная комплекснозначная функция $r(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{k^\alpha}{\widehat{\rho}(k)} \int_1^k \frac{\rho(\varkappa)r(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty, \\ \frac{k^\alpha}{\widehat{\rho}(k)} \int_k^\infty \frac{\rho(\varkappa)r(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa < \infty. \end{aligned} \quad (0.4)$$

2) Имеет место следующая сходимость:

$$\frac{\widehat{\rho}(k)}{k^\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty, \\ 0, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa < \infty. \end{cases} \quad (0.5)$$

3) Справедливо соотношение

$$\frac{\widehat{\rho}(k)}{\rho(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (0.6)$$

Асимптотически однородные функции обладают рядом интересных свойств и используются в формулировках многих тауберовых теорем, а также в различных задачах математической физики. Их описание и свойства для случая $a \in \mathbb{R}_+^1$ хорошо изучены для функций из $\mathcal{S}'_+$ – пространства обобщенных функций медленного роста с носителями на положительной полуоси (см. [3], [4]). Пространство $\mathcal{S}'_+$ является сопряженным к пространству $\mathcal{S}_+$, состоящему из бесконечно дифференцируемых функций на $[0, +\infty)$, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой отрицательной степени t . В частности, если $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , то в $\mathcal{S}'_+$

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} C f_{\alpha+1}(t), \quad (0.7)$$

где ядро дробного (дифференцирования) интегрирования $f_\beta(t) \in \mathcal{S}'_+$ определяется формулой

$$f_\beta(t) = \begin{cases} \frac{\Theta(t)t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & \text{при } \beta > 0, \\ \frac{d^N}{dt^N} f_{\beta+N}(t) & \text{при } \beta \leq 0, \beta + N > 0, \text{ рекуррентно по } N. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(\beta)$ – гамма-функция, $\Theta(t)$ – функция Хевисайда (характеристическая функция положительной полуоси $\mathbb{R}_+$).

Для того чтобы $f(t) \in \mathcal{S}'_+$ была асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $N > -\alpha - 1$, что

$$\frac{f^{(-N)}(t)}{t^N \rho(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} A. \quad (0.8)$$

Здесь $f^{(-N)}(t)$ – первообразная порядка N .

Первообразная (производная) порядка β обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}^1)$ определяется формулой

$$f^{(-\beta)}(t) = f_\beta(t) * f(t).$$

Как известно,

$$\frac{N!}{t^N} f^{(-N)}(t) = S_r^N(f)$$

– чезаровское среднее порядка N . Таким образом, понятие асимптотической однородности в случае $\mathcal{S}'_+$ адекватно отражает асимптотическое поведение чезаровских средних (см. [4]).

Основная цель настоящей статьи – получить полное описание асимптотически однородных функций на бесконечности по группе преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}_+^n$, в общем случае. Для получения этого описания используется так называемое обобщенное сферическое представление обобщенных функций, введенное в § 1. Это представление сводит изучение асимптотических свойств обобщенных функций по группе U_k^a к исследованию радиальных асимптотических свойств обобщенных функций, заданных на специальных пространствах основных функций. Асимптотически однородные обобщенные функции на этих специальных пространствах изучаются в § 2, § 3. Основные теоремы работы будут изложены в § 4.

Наконец, в § 5 мы рассмотрим применение полученных результатов в исследованиях связи асимптотически однородных обобщенных функций из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ с особенностями функций, голоморфных в трубчатых областях, сумма граничных значений которых представляет эти обобщенные функции.

§ 1. Обобщенное сферическое представление обобщенных функций

Пусть S^{n-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ и задан вектор $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ (т.е. $a_i > 0$, $i = 1, \dots, n$). Сопоставим каждой функции $\varphi(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ функцию

$$\tau_a[\varphi(t)] = \varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n) = \psi(r, e), \quad (1.1)$$

где $r \in \mathbb{R}_+$ и $e = (e_1, \dots, e_n) \in S^{n-1}$. Это отображение, в сущности, есть обобщенная сферическая замена переменных со степенной особенностью в начале координат:

$$\mu(r, e) = t: \quad t_i = r^{a_i} e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad e = (e_1, \dots, e_n) \in S^{n-1}, \quad r > 0. \quad (1.2)$$

Для того чтобы описать образ отображения τ_a и обосновать соответствующую замену переменных для обобщенных функций, мы введем специальные пространства основных и обобщенных функций.

Пусть J – не более чем счетное (может быть, пустое) множество вещественных чисел λ без точек накопления, ограниченное снизу. Такие множества вещественных чисел будем называть *допустимыми*.

Обозначим через $\mathcal{S}_J$ пространство функций $\psi(r) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, быстро убывающих при $r \rightarrow +\infty$ вместе со всеми производными и таких, что для некоторых постоянных C_λ , зависящих от ψ ,

$$\left[\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J}} C_\lambda r^\lambda \right] \in C^N([0, +\infty)), \quad \left(\frac{d}{dr} \right)^\ell \left[\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J}} C_\lambda r^\lambda \right] \Big|_{r=0} = 0, \quad (1.3)$$

где $N \geq 0$, $\ell = 0, \dots, N$. Топологию на $\mathcal{S}_J$ зададим с помощью следующей системы норм:

$$\mathcal{P}_N(\psi) = \max_{0 \leq \ell \leq N} \sup_{r > 0} (1+r)^N \left| \left(\frac{d}{dr} \right)^\ell \left[\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J}} C_\lambda r^\lambda \eta(r) \right] \right| + \max_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J}} |C_\lambda|. \quad (1.4)$$

Здесь и всюду далее функция $\eta(r)$ бесконечно дифференцируема на $[0, +\infty)$, финитна и $\eta(r) = 1$ в некоторой окрестности нуля. Например,

$$\eta(r) \in C^\infty([0, +\infty)), \quad \eta(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r < 1, \\ 0 & \text{при } r > 2. \end{cases} \quad (1.5)$$

Ясно, что топология на $\mathcal{S}_J$ не зависит от выбора функции $\eta(r)$ с такими свойствами. Пространство $\mathcal{S}_J$ – пространство Фреше. Отметим также, что $\mathcal{S}_J$ инвариантно относительно растяжений аргумента функций из этого пространства. Кроме того, если множество J' содержит J , то $\mathcal{S}_J \subset \mathcal{S}_{J'}$. (Для добавочных точек $\lambda \in J'$, но не принадлежащих J , считаем, что $C_\lambda = 0$.) В частности, если $J = \emptyset$ (обозначим его через $J_\emptyset$), то $\mathcal{S}_{J_\emptyset} \subset \mathcal{S}_J$ для любого допустимого множества J и состоит из функций из $\mathcal{S}_+$, имеющих нуль бесконечного порядка в нуле.

Пространство $\mathcal{S}(S^{n-1}) = C^\infty(S^{n-1})$ – пространство бесконечно дифференцируемых на S^{n-1} функций со стандартной топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными. Точнее, пусть $e = (e_1, \dots, e_n) \in S^{n-1}$ и U_i , $i = 1, 2, \dots, M$, – атлас карт на единичной сфере, в каждой карте $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ – соответствующие координаты. Положим

$$\mathcal{Q}_N^i\{\psi(e)\} = \max_{|j| \leq N} \sup_{\Theta \in U_i} \left| \frac{\partial^{|j|}}{\partial \theta_1^{j_1} \dots \partial \theta_{n-1}^{j_{n-1}}} \psi(e(\Theta)) \right|, \quad e \in U_i.$$

Как обычно, если $j = (j_1, \dots, j_n)$ – мультииндекс, то

$$j! = j_1! \cdots j_n!, \quad |j| = j_1 + \cdots + j_n, \quad \varphi^{(j)}(x) \equiv D^j \varphi(x) = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}} \varphi(x).$$

В качестве системы полунорм в $\mathcal{S}(S^{n-1})$ возьмем

$$Q_N\{\psi(e)\} = \max_i Q_N^i\{\psi(e)\}, \quad N = 0, 1, \dots \quad (1.6)$$

Очевидно, что эта топология не зависит от выбора атласа на единичной сфере.

Обозначим через $\mathcal{S}^N(S^{n-1})$ пополнение $C^\infty(S^{n-1})$ по норме Q_N . Тогда $\mathcal{S}(S^{n-1}) \subset \mathcal{S}^N(S^{n-1})$.

Положим $W_J = \mathcal{S}_J \otimes \mathcal{S}(S^{n-1})$ – проективное тензорное произведение пространств $\mathcal{S}_J$ и $\mathcal{S}(S^{n-1})$ (см. [5]). Пространство W_J может быть реализовано как пространство функций $\psi(r, e)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $e \in S^{n-1}$, бесконечно дифференцируемых при $e \in S^{n-1}$ и $r \in \mathbb{R}_+ = \{r > 0\}$, таких, что

$$\begin{aligned} \psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda \leq N}} C_\lambda(e) r^\lambda &\in C^N([0, +\infty) \times \mathcal{S}(S^{n-1})), \\ \left(\frac{d}{dr} \right)^\ell \left[\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda \leq N}} C_\lambda(e) r^\lambda \right] \Big|_{r \rightarrow +0} &= 0, \quad 0 \leq \ell \leq N, \quad N = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $C_\lambda(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$, $\lambda \in J$. Топология на W_J задается с помощью следующей системы (полу)норм

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(\psi) &= \max_{0 \leq \ell \leq N} \sup_{r > 0} Q_N \left\{ (1+r)^N \left(\frac{d}{dr} \right)^\ell \left[\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda \leq N}} C_\lambda(e) r^\lambda \eta(r) \right] \right\} \\ &+ \max_{\lambda \leq N, \lambda \in J} Q_N\{C_\lambda(e)\}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где функция $\eta(r)$ удовлетворяет условию (1.5). Заметим, что топология на W_J не зависит от выбора функции $\eta(r)$ с такими свойствами. Таким образом,

$$W_J \subset \cdots \subset W_J^{N+1} \subset W_J^N \subset \cdots \subset W_J^0,$$

где W_J^N – банахово пространство с нормой $\mathcal{P}_N(\psi)$ (пополнение W_J по норме $\mathcal{P}_N$).

Сопоставим теперь каждому $\lambda \in J$ линейное замкнутое подпространство $\mathcal{E}_\lambda \in \mathcal{S}(S^{n-1})$ и положим

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{E}_\lambda, \lambda \in J\}.$$

Определим в пространстве W_J подпространство

$$V_{J, \mathcal{F}} = \{\psi(r, e) \in W_J : C_\lambda(e) \in \mathcal{E}_\lambda, \mathcal{E}_\lambda \in \mathcal{F}\}. \quad (1.9)$$

Топология в $V_{J, \mathcal{F}}$ наследуется топологией в W_J .

Пусть задан вектор $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Обозначим через J_a допустимое множество

$$J_a \equiv J = \{\lambda = m_1 a_1 + \dots + m_n a_n; m_i = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (1.10)$$

Пространства, соответствующие этому множеству, обозначим через $\mathcal{S}_{J_a}$ и W_{J_a} . Положим

$$E_j(e) = e_1^{j_1} \dots e_n^{j_n} \in \mathcal{S}(S^{n-1}). \quad (1.11)$$

Обозначим через $\mathcal{E}_\lambda^a$ линейную оболочку функций $E_j(e)$, у которых мультииндекс j удовлетворяет уравнению $(j, a) = \lambda$, т.е.

$$\mathcal{E}_\lambda^a = \text{Lin}\{E_j(e), (j, a) = \lambda \in J_a\}. \quad (1.12)$$

Отметим, что функции $E_j(e) \in \mathcal{E}_\lambda^a$ линейно независимы и поэтому образуют базис в $\mathcal{E}_\lambda^a$. Положим теперь $\mathcal{F}_a = \{\mathcal{E}_\lambda^a, \lambda \in J_a\}$.

Введем согласно (1.9) пространство

$$V_a = V_{J_a, \mathcal{F}_a}. \quad (1.13)$$

Нетрудно видеть, что V_a – замкнутое подпространство пространства W_{J_a} .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. *Отображение τ_a , определяемое формулой, осуществляет изоморфизм пространств $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и V_a .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что τ_a есть непрерывное отображение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в W_{J_a} . Ядро этого отображения тривиально. Легко заметить, что τ_a отображает $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в V_a . Действительно, для тейлоровского разложения $\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\sim \sum_j \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} t^j = \sum_j \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} E_j(e) r^{(a,j)} = \sum_{\lambda \in J_a} r^\lambda \sum_{(a,j)=\lambda} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} E_j(e) \\ &= \sum_{\lambda \in J_a} C_\lambda(e) r^\lambda, \quad r \sim 0, \end{aligned}$$

где

$$C_\lambda(e) = \sum_{(a,j)=\lambda} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} E_j(e) \in \mathcal{E}_\lambda^a. \quad (1.14)$$

Теперь достаточно доказать, что τ_a есть отображение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ на V_a . Из этого, в частности, будет следовать, что отображение τ_a^{-1} – непрерывное отображение V_a на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Итак, пусть $\psi(r, e) \in V_a$. Достаточно показать, что $\psi(\mu^{-1}(t)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, где μ определяется формулой (1.2). Ясно, что функция $\psi(\mu^{-1}(t))$ бесконечно дифференцируема вне начала координат и убывает вместе со всеми производными быстрее любой степени $1/|t|$ при $|t| \rightarrow +\infty$. Покажем, что у этой функции существуют все производные в окрестности начала координат, т.е.

$\psi(\mu^{-1}(t)) \in C^\infty(\omega)$, где ω – некоторая окрестность начала координат. Положим

$$\Phi_M(r, e) = \psi(r, e) - \Delta_M(r, e), \quad \Delta_M(r, e) = \sum_{\substack{\lambda \leq M \\ \lambda \in J_a}} C_\lambda(e) r^\lambda,$$

где $C_\lambda(e)$ определяется формулой (1.7). Ясно, что $\Phi_M(r, e)$ M раз дифференцируема при $r \geq 0$, $e \in S^{n-1}$, причем

$$\left(\frac{d}{dr} \right)^\ell \Phi_M(0, e) = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots, M.$$

Поэтому $\Phi_M(r, e)$ имеет нуль в нуле по r порядка M . Поэтому для любого N существует M такое, что $\Phi(\mu^{-1}(t)) \in C^N(\omega)$. Покажем, что $\Delta_M(\mu^{-1}(t)) \in C^\infty(\omega)$ для любого M . Действительно, рассмотрим произвольное слагаемое этой суммы, имеем

$$\begin{aligned} C_\lambda(e) r^\lambda &= \sum_{(j,a)=\lambda} b_j E_j(e) r^\lambda = \sum_{(j,a)=\lambda} b_j e_1^{j_1} \dots e_n^{j_n} r^{a_1 j_1 + \dots + a_n j_n} \\ &= \sum_{(j,a)=\lambda} b_j (r^{a_1} e_1)^{j_1} \dots (r^{a_n} e_n)^{j_n} = \sum_{(j,a)=\lambda} b_j t^j. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\psi(\mu^{-1}(t)) \in C^N(\omega)$. Так как N произвольно, то $\psi(\mu^{-1}(t)) \in C^\infty(\omega)$. Утверждение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда обобщенная функция $f_s(r, e)$, определяемая формулой

$$(f_s(r, e), \psi(r, e)) = (f(t), \varphi(t)), \quad \varphi(t) = \varphi(\mu(r, e)) = \psi(r, e) \in V_a,$$

принадлежит V'_a . По теореме Хана–Банаха мы можем продолжить f_s на все пространство W_{J_a} . Обозначим это продолжение через $F(r, e)$ и назовем его *обобщенным сферическим представлением обобщенной функции* $f(t) \in \mathcal{S}'$. Таким образом,

$$(F(r, e), \psi(r, e)) = (f_s, \psi(r, e)) \quad \forall \psi(r, e) \in V_a.$$

Обобщенное сферическое представление $F(r, e)$ обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'$ определяется неоднозначно. Для того, чтобы описать множество всех таких представлений, введем в $\mathcal{S}_J$ и W_J специальные обобщенные функции, обобщающие обычные дельта-функции и их производные

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Для каждого $\lambda \in J$ и любой $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ определим обобщенные функции $\Delta_\lambda(r) \in \mathcal{S}'_J$ и $\Delta_\lambda(r) \otimes \Phi(e) \in W'_J$ по формулам:

$$\begin{aligned} (\Delta_\lambda(r), \psi(r)) &= C_\lambda, \quad \psi \in \mathcal{S}_J, \\ (\Delta_\lambda(r) \otimes \Phi(e), \psi(r, e)) &= (\Phi(e), C_\lambda(e)), \quad \psi \in W_J, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где C_λ берем из (1.4), а $C_\lambda(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$ – из (1.7).

Отметим, что $\Delta_\lambda(r)$ (как и $\Delta_\lambda(r) \otimes \Phi(e)$) – однородные обобщенные функции по r степени $-(\lambda + 1)$.

Пусть теперь F_1 и F_2 – обобщенные сферические представления $f(t) \in \mathcal{S}'$. Обозначая

$$\Psi(r, e) = F_1(r, e) - F_2(r, e),$$

для любой $\psi(r, e) \in V_{J_a, \mathcal{F}}$ имеем

$$(\Psi(r, e), \psi(r, e)) = 0.$$

Ясно, что $\text{supp } \Psi(r, e) \subset \{0\} \times S^{n-1}$. Поэтому существует такое N , что

$$\Psi(r, e) = \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J_a}} \Delta_\lambda(r) \otimes \Phi_\lambda(e), \quad \text{где } \Phi_\lambda(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1}).$$

Отсюда для любой $\psi(r, e) \in V_a$ имеем

$$\begin{aligned} (\Psi(r, e), \psi(r, e)) &= \left(\sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J_a}} \Delta_\lambda(r) \otimes \Phi_\lambda(e), \psi(r, e) \right) = \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J_a}} \Phi_\lambda(e), C_\lambda(e) \\ &= \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J_a}} b_j(\Phi_\lambda(e), E_j(e)) = 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $(a, j) = \lambda$. Отметим, что b_j могут быть произвольными: для этого достаточно в окрестности начала координат положить

$$\psi(r, e) = \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J_a}} r^\lambda \sum_{(a, j) = \lambda} b_j E_j(e).$$

Учитывая произвольность b_j , из (1.16) выводим, что $(\Phi_\lambda(e), E_j(e)) = 0$ для $(a, j) = \lambda$.

Обобщенное сферическое представление для любой $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ в общем случае имеет следующий вид:

$$F(r, e) + \sum_{\substack{\lambda \leq N \\ \lambda \in J_a}} \Delta_\lambda(r) \otimes \Phi_\lambda(e), \quad (1.17)$$

где N – некоторое натуральное число, а $F(r, e)$ – какое-то конкретное обобщенное сферическое представление, а обобщенные функции $\Phi_\lambda(e)$ удовлетворяют условиям ортогональности, т.е.

$$(\Phi_\lambda(e), E_j(e)) = 0, \quad (a, j) = \lambda. \quad (1.18)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β . Будем говорить, что $F(r) \in \mathcal{S}'_J$ асимптотически однородна на бесконечности (в нуле) относительно $\rho(k)$, и писать $F(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}'_J)$ (соответственно $F(r) \in AO_\rho^{-1}(\mathcal{S}'_J)$), если для любой $\psi(r) \in \mathcal{S}'_J$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (F(kr), \psi(r)) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} (G(r), \psi(r)) \\ \left(\frac{1}{\rho(k)} \left(F\left(\frac{r}{k}\right), \psi(r) \right) \right) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} (G(r), \psi(r)). \end{aligned}$$

Аналогично, $F(r, e) \in W'_J$ асимптотически однородна по r на бесконечности (в нуле) относительно $\rho(k)$, если для любой $\psi(r, e) \in W_J$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho(k)} (F(kr, e), \psi(r, e)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (G(r, e), \psi(r, e)) \\ & \left(\frac{1}{\rho(k)} \left(F\left(\frac{r}{k}, e\right), \psi(r, e) \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (G(r, e), \psi(r, e)) \right). \end{aligned}$$

При этом пишем $F(r, e) \in AO_\rho(W_J)$ (соответственно $F(r, e) \in AO_\rho^{-1}(W_J)$).

Для пространства $V_{J, \mathcal{F}}$ определение асимптотической однородности относительно $\rho(k)$ определяется аналогично. В этом случае будем писать $F(r, e) \in AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}})$ (соответственно $F(r, e) \in AO_\rho^{-1}(V_{J, \mathcal{F}})$).

Пусть $F(r, e)$ – обобщенное сферическое представление для обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(f(t), \varphi(t)) = (F(r, e), \varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.19)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (f(k^{a_1} t_1, \dots, k^{a_n} t_n), \varphi(t)) &= \frac{1}{k^{|a|}} \left(f(t), \varphi\left(\frac{t_1}{k^{a_1}}, \dots, \frac{t_n}{k^{a_n}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{k^{|a|}} \left(F(r, e), \varphi\left(\frac{r^{a_1} e_1}{k^{a_1}}, \dots, \frac{r^{a_n} e_n}{k^{a_n}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{k^{|a|-1}} (F(kr, e), \varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n)). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Отсюда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α и вектор $a \in \mathbb{R}_+^n$. Для того чтобы обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ была асимптотически однородна на бесконечности относительно $\rho(k)$ по группе преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}_+^n$, т.е. $f(t) \in AO_\rho^a(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы ее обобщенное сферическое представление $F(r, e)$ было асимптотически однородным на бесконечности относительно $\rho_1(k)$ на V_a , т.е. $F(r, e) \in AO_{\rho_1}(V_a)$, где автомодельная функция $\rho_1(k) = k^{|a|-1} \rho(k)$ имеет порядок $\beta = \alpha + |a| - 1$.

Таким образом, для описания класса $AO_\rho^a(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ достаточно описать класс асимптотически однородных обобщенных функций на пространствах $V_a \subset W_{J_a}$, что в свою очередь требует описания асимптотически однородных обобщенных функций на пространстве $\mathcal{S}_{J_a}$.

§ 2. Асимптотически однородные обобщенные функции на $\mathcal{S}_J$

Пространство основных функций $\mathcal{S}_J$, где J – допустимое множество, введено в § 1 (см. (1.3)–(1.5)). Дадим несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $F(r) \in \mathcal{S}'_J$ и имеет компактный носитель. Для $\lambda \in J$ определим моменты порядка λ по формуле

$$M_\lambda[F] = (F(r), r^\lambda \eta(r)), \quad (2.1)$$

где $\eta(r) \in \mathcal{S}_+$ и $\eta(r) = 1$ в окрестности $\text{supp } F$. Ясно, что $M_\lambda[F]$ не зависит от выбора $\eta(r)$ с такими свойствами.

Аналогично, для $F(r, e) \in W'_J$ с компактным носителем *момент по r порядка λ* определяем формулой

$$M_\lambda[F](e) = (F(r, e), r^\lambda \eta(r)).$$

Обобщенную функцию r_J^β определим формулой

$$(r_J^\beta, \varphi(r)) = \begin{cases} \int_0^\infty r^\beta \left(\varphi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \right) dr, & \text{если } -\beta-1 \notin J, \\ \int_0^\infty r^\beta \left(\varphi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda - C_{-\beta-1} r^{-\beta-1} \Theta(1-r) \right) dr, & \text{если } -\beta-1 \in J. \end{cases} \quad (2.2)$$

Отметим, что при $-\beta-1 \notin J$ функция r_J^β однородна степени β . Действительно,

$$\begin{aligned} ((kr)_J^\beta, \varphi(r)) &= \frac{1}{k} \left(r_J^\beta, \varphi\left(\frac{r}{k}\right) \right) = \int_0^\infty r^\beta \left(\varphi\left(\frac{r}{k}\right) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} \frac{C_\lambda}{k^\lambda} r^\lambda \right) dr \\ &= k^\beta \int_0^\infty r^\beta \left(\varphi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \right) dr. \end{aligned} \quad (2.3)$$

При $-\beta-1 \in J$ обобщенная функция r_J^β не является однородной.

Заметим, что при $J = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ пространство $\mathcal{S}_J = \mathcal{S}_+$, а $r_J^\beta = r_+^\beta$ и $\Delta_\lambda(r) = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \delta^{(\lambda)}(r)$ (см. [6]).

ЛЕММА 2.1. *Если $F(r) \in \mathcal{S}'_J$ имеет компактный носитель, то на $\mathcal{S}_J$ справедливо следующее асимптотическое разложение*

$$F(kr) \sim \sum_{\lambda \in J} \frac{1}{k^{\lambda+1}} \Delta_\lambda(r) M_\lambda[F], \quad k \rightarrow +\infty,$$

т.е. для любого N и любой основной функции $\psi(r) \in \mathcal{S}_J$

$$(F(kr), \psi(r)) = \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda \leq N}} \frac{1}{k^{\lambda+1}} (\Delta_\lambda(r), \psi(r)) M_\lambda[F] + o_\psi\left(\frac{1}{k^{N+1}}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\xi(r) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$, финитна и $\xi(r) = 1$ в окрестности носителя $F(r)$, а N – фиксированное число. Для любого M

и любой $\psi(r) \in \mathcal{S}_J$ имеем

$$\begin{aligned} (F(kr), \psi(r)) &= \frac{1}{k} \left(F(r), \psi\left(\frac{r}{k}\right) \right) = \frac{1}{k} \left(F(r), \xi(r) \psi\left(\frac{r}{k}\right) \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(F(r), \xi(r) \left[\psi\left(\frac{r}{k}\right) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda \leq M}} \frac{C_\lambda}{k^\lambda} r^\lambda \right] \right) + \frac{1}{k} \left(F(r), \xi(r) \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda \leq M}} \frac{C_\lambda}{k^\lambda} r^\lambda \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(F(r), \xi(r) \omega\left(\frac{r}{k}\right) \right) + \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda \leq M}} \frac{1}{k^{\lambda+1}} (\Delta_\lambda(r), \psi(r)) M_\lambda[F], \end{aligned}$$

где $\omega(r) = \psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda \leq M}} C_\lambda r^\lambda$. В силу конечности порядка функционала $F(r)$ существуют числа Q и c_1 такие, что

$$\left| \frac{1}{k} \left(F(r), \xi(r) \omega\left(\frac{r}{k}\right) \right) \right| \leq c_1 \mathcal{P}_Q \left(\xi(r) \omega\left(\frac{r}{k}\right) \right) = o\left(\frac{1}{k^{N+1}}\right),$$

если M достаточно велико. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , а $F(r) \in \mathcal{S}'_J$ имеет компактный носитель и для любого $\lambda \in J$, $\lambda \leq -\beta - 1$,

$$M_\lambda[F] = 0. \quad (2.4)$$

Тогда $F(r)$ имеет тривиальную квазиасимптотику относительно $\rho(k)$.

Это утверждение непосредственно следует из оценок леммы 0.1.

Пусть $F(r) \in \mathcal{S}'_J$, $\nu > 0$, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β . Положим $F_\nu(r) = r^\nu F(r)$. Ясно, что $F_\nu \in \mathcal{S}'_{J-\nu}$, где $J - \nu = \{\lambda - \nu, \lambda \in J\}$. Если $F \in AO_\rho(\mathcal{S}_J)$, то $F_\nu \in AO_{\rho_\nu}(\mathcal{S}_{J-\nu})$, где $\rho_\nu(k) = k^\nu \rho(k)$ имеет порядок $\beta + \nu$. Это непосредственно следует из соотношения

$$\frac{1}{\rho_\nu(k)} (F_\nu(kr), \varphi(r)) = \frac{1}{\rho(k)} (F(kr), r^\nu \varphi(r)).$$

Следующие леммы и теоремы дают описание обобщенных функций из класса $AO_\rho(\mathcal{S}_J)$.

ЛЕММА 2.2. Пусть J – допустимое множество вещественных чисел и $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , причем $-\beta - 1 \notin J$. Пусть $A, \ell \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{Z}_+$ и $\gamma(r)$ – непрерывная при $r > 0$ функция такая, что

$$\gamma(r) \sim A \rho(r) r^{N+\ell}, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (2.5)$$

Определим обобщенную функцию $F_1(r) \in \mathcal{S}'_J$ формулой

$$(F_1(r), \psi(r)) = \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-\ell} \left(\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \right) \right) dr \quad \forall \psi \in \mathcal{S}_J. \quad (2.6)$$

Тогда $F_1(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_J)$, причем

$$\frac{1}{\rho(k)} F_1(kr) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (-1)^N N! \binom{\beta + \ell + N}{N} A r^\beta. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g(r) = \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(\frac{1}{r^\ell} \left(\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda\right)\right).$$

Имеют место следующие оценки:

$$|g(r)| \leq c \begin{cases} r^{-\beta-1-\Delta-\ell-N} & \text{для } r \text{ в окрестности бесконечности,} \\ r^{-\beta-1+\Delta_1-\ell-N} & \text{для } r \text{ в окрестности нуля,} \end{cases} \quad (2.8)$$

где $\Delta, \Delta_1 > 0$. Для получения этой оценки мы воспользовались тем что последнее λ в сумме равно $-\beta-1-\Delta$, а в окрестности нуля

$$\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \sim \text{const} \cdot r^{\lambda_1}, \quad \lambda_1 \in J, \quad \lambda_1 = -\beta-1+\Delta_1, \quad \Delta_1 > 0.$$

Кроме того,

$$|\gamma(r)| \leq \text{const} \cdot \rho(r) r^{N+\ell} \leq c_\varepsilon r^{N+\ell+\beta+\varepsilon}, \quad r > 1,$$

где $\varepsilon < \Delta$. Отсюда, в частности, следует, что интеграл в (2.6) сходится.

Покажем, что $F_1(r)$, определяемая формулой (2.6), обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$. Для любой $\psi(r) \in \mathcal{S}_J$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (F_1(kr), \psi(r)) &= \frac{1}{k\rho(k)} \left(F_1(r), \psi\left(\frac{r}{k}\right) \right) \\ &= \frac{1}{k\rho(k)} \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N \frac{\psi(r/k) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda / k^\lambda}{r^\ell} dr \\ &= \frac{1}{k^{N+\ell}\rho(k)} \int_{1/k}^\infty \gamma(kr) \left(\frac{d}{dr}\right)^N \frac{\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda}{r^\ell} dr \\ &= \int_{1/k}^\infty \frac{\rho(kr)}{\rho(k)} \frac{\gamma(kr)}{(kr)^{N+\ell}\rho(kr)} r^{N+\ell} g(r) dr. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Полагая, что $\varepsilon < \min\{\Delta, \Delta_1\}$, по лемме 0.1 имеем

$$\frac{\rho(kr)}{\rho(k)} \leq c \begin{cases} r^{\beta+\varepsilon} & \text{при } r > 1, \quad k > 1, \\ r^{\beta-\varepsilon} & \text{при } \frac{1}{k} < r < 1, \quad k > 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Из оценок (2.8), (2.10) и оценки

$$\left| \frac{\gamma(kr)}{(kr)^{N+\ell}\rho(kr)} \right| \leq \text{const}, \quad (2.11)$$

справедливой при $kr > 1$, следует, что подынтегральная функция в (2.9) оценивается в окрестности бесконечности функцией $cr^{-1-(\Delta-\varepsilon)}$, а в окрестности нуля – функцией $cr^{-1+(\Delta_1-\varepsilon)}$, т.е. интегрируемой функцией, не зависящей от k .

При $k \rightarrow +\infty$ у подынтегральной функции при каждом r существует предел. По теореме Лебега в (2.9) можно перейти к пределу при $k \rightarrow +\infty$. Имеем (“избавляясь” в пределе от производных) соотношение

$$\frac{1}{\rho(k)}(F_1(kr), \psi(r)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (-1)^N AG \int_0^\infty r^\beta \left(\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \right) dr, \quad (2.12)$$

где

$$G = (\beta + \ell + N)(\beta + \ell + N - 1) \cdots (\beta + \ell + 1) \quad (2.13)$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение леммы останется справедливым и в том случае, когда $-\beta - 1 \in J$ и $-\beta - 1 - \ell \in \mathbb{Z}_+$, а $N > -\beta - 1 - \ell$. При этом вместо (2.7) имеет место соотношение

$$\frac{1}{\rho(k)} F_1(kr) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (-1)^{\beta+\ell+N+1} A(\beta + \ell + N)! (-\beta - \ell - 1)! \Delta_{-\beta-1}(r). \quad (2.14)$$

Действительно, оценка (2.8) остается справедливой и в этом случае, так как

$$\left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-\ell} C_{-\beta-1} r^{-\beta-1}) = 0. \quad (2.15)$$

Переходя к пределу в (2.9), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)}(F_1(kr), \psi(r)) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A \int_0^\infty r^{\beta+\ell+N} \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\ell} \left(\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \right) \right] dr \\ &= A \int_0^\infty r^{\beta+\ell+N} \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\ell} \left(\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda - C_{-\beta-1} r^{-\beta-1} \eta(r) \right) \right] dr \\ &\quad + AC_{-\beta-1} \int_0^\infty r^{\beta+\ell+N} \left(\frac{d}{dr} \right)^N r^{-\ell-\beta-1} \eta(r) dr. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть (интегрируя по частям $\ell + \beta + N + 1$ раз), что первое слагаемое в последней сумме равно нулю. Интегрируя по частям нужное число раз второе слагаемое и учитывая, что $\eta(0) = 1$, доказываем соотношение (2.14).

ЛЕММА 2.3. Пусть $F(r) \in \mathcal{S}'_J$, причем $F(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_J)$, где $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β . Тогда существуют $F_0(r) \in \mathcal{S}'_J$ с компактным носителем и моментами, удовлетворяющими условиям (2.4), целые числа $N \geq 0$ и $\ell \geq 0$, непрерывная функция $\gamma(r)$, имеющая свойства (2.5), такие, что справедлива формула

$$F(r) = F_0(r) + F_1(r),$$

где F_1 определяется формулой (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что существует обобщенная функция $F_0(r) \in \mathcal{S}'_J$ с компактным по r носителем такая, что

$$F_0(r) = F(r), \quad r < 1, \quad M_\lambda[F_0] = 0, \quad \lambda \in J, \quad \lambda \leq -\beta - 1$$

(см., например, далее доказательство леммы 3.1). Следовательно, согласно следствию к лемме 2.1 обобщенная функция F_0 обладает тривиальной квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$. Положим $F(r) = F_1(r) + F_0(r)$. Тогда $F_1(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_J)$ и $\text{supp } F_1(r) \subset \{r \geq 1\}$. Докажем, что $F_1(r)$ представляется в виде (2.6).

Ясно, что $F_1 \in \mathcal{S}'_+$ и $F_1 \in AO_\rho(\mathcal{S}_{J_\infty})$. Поэтому в силу теоремы о сходимости в конечном порядке (см. [7]) существует $\ell \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $F_1 \in AO_\rho(\mathcal{S}_{+, \ell})$, где $\mathcal{S}_{+, \ell} = \{\varphi \in \mathcal{S}_+ : \varphi(r) = r^\ell \psi(r), \psi(r) \in \mathcal{S}_+\}$. Тогда обобщенная функция $r^\ell F_1(r)$ обладает квазиасимптотикой относительно $k^\ell \rho(k)$ на всем $\mathcal{S}_+$, и поэтому существует такое число N , что ее первообразная порядка N – непрерывная функция, имеющая асимптотику относительно $r^{\ell+N} \rho(r)$ (см. (0.8)), т.е.

$$\gamma(r) = (-1)^N (r^\ell F_1(r))^{(-N)} \sim \text{const} \cdot r^{\ell+N} \rho(r), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$

Полагая $\eta_\varkappa(r) = \eta(r/\varkappa)$, где $\eta(r)$ удовлетворяет условиям (1.5), для любого $\varkappa > 0$ и любой $\psi(r) \in \mathcal{S}_J$ имеем

$$(F_1(r), \psi(r)) = \left(F_1(r), \psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \eta_\varkappa(r) \right) + \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda (F_1(r), r^\lambda \eta_\varkappa(r)). \quad (2.17)$$

Покажем, что второе слагаемое справа в (2.17) стремится к нулю при $\varkappa \rightarrow +\infty$. Действительно, учитывая, что $r^\lambda \eta(r) \in \mathcal{S}_J$, $\lambda \in J$, и $F_1 \in AO_\rho(\mathcal{S}_J)$ (и поэтому $(F_1(\varkappa r), r^\lambda \eta_\varkappa(r)) \sim c\rho(\varkappa)$), а также то, что $\lambda + \beta + 1 < 0$, имеем для любого слагаемого этой суммы

$$(F_1(r), r^\lambda \eta_\varkappa(r)) = \varkappa^{1+\lambda} (F_1(\varkappa r), r^\lambda \eta(r)) \sim c \varkappa^{1+\lambda} \rho(\varkappa) \xrightarrow{\varkappa \rightarrow +\infty} 0.$$

Для первого слагаемого (2.17) имеем

$$\begin{aligned} & \left(F_1(r), \psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \eta_\varkappa(r) \right) \\ &= (-1)^N \left((r^\ell F_1(r))^{(-N)}, \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-\ell} \left(\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \eta_\varkappa(r) \right) \right) \right) \\ &= \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-\ell} \left(\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \eta_\varkappa(r) \right) \right) dr. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Учитывая то, что выражение слева в (2.17) не зависит от $\varkappa$, а второе слагаемое справа стремится к нулю при $\varkappa \rightarrow +\infty$, выводим, что и первое слагаемое справа

имеет предел. Покажем, что оно стремится к интегралу в формуле (2.6). Для этого рассмотрим каждое слагаемое в сумме (2.18) под знаком интеграла. По формуле Лейбница имеем

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{\lambda-\ell} \eta_{\varkappa}(r) = \sum_{m=0}^N C_m r^{\lambda-\ell-(N-m)} \frac{1}{\varkappa^m} \eta^{(m)}\left(\frac{r}{\varkappa}\right).$$

Теперь для каждого слагаемого этой суммы, учитывая (1.5), имеем при $m \neq 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_1^\infty \gamma(r) r^{\lambda-\ell-N+m} \frac{1}{\varkappa^m} \eta^{(m)}\left(\frac{r}{\varkappa}\right) dr \right| &\leq \frac{c}{\varkappa^m} \int_\varkappa^{2\varkappa} r^{\lambda-\ell-N+m} r^{N+\ell} \rho(r) dr \\ &\leq \frac{c_1}{\varkappa^m} \int_\varkappa^{2\varkappa} r^{-\beta-1-\Delta+m} r^{\beta+\varepsilon} dr \leq \frac{c_2}{\varkappa^m} \int_\varkappa^{2\varkappa} r^{-1+m-(\Delta-\varepsilon)} dr \\ &\leq \frac{c_3}{\varkappa^{\Delta-\varepsilon}} \xrightarrow{\varkappa \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\lambda = -\beta - 1 - \Delta$, $\Delta > 0$, асимптотическое соотношение (2.16), свойства автомодельной функции и воспользовались леммой 0.1 при $\varepsilon < \Delta$. Учитывая, что $\eta_{\varkappa}(r) \rightarrow 1$ при каждом фиксированном r , для слагаемого с индексом $m = 0$ имеем

$$\int_1^{2\varkappa} r^{\lambda-\ell-N} \gamma(r) \eta\left(\frac{r}{\varkappa}\right) dr \xrightarrow{\varkappa \rightarrow +\infty} \int_1^\infty r^{\lambda-\ell-N} \gamma(r) dr.$$

Переходя теперь в (2.17) к пределу при $\varkappa \rightarrow +\infty$, получим требуемое утверждение. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы видно, что представление (2.6) для $F_1(r)$ останется справедливым для тех ℓ , для которых функция $r^\ell F_1(r)$ асимптотически однородна относительно $k^\ell \rho(k)$ на $\mathcal{S}_+$. В частности, если сама $F_1(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_+)$, то в (2.5)–(2.7) можно считать $\ell = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть J и J_1 – допустимые множества вещественных чисел, $J \subset J_1$ и $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β . Пусть $F(r) \in \mathcal{S}'_J$ и $F(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_J)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если $-\beta - 1 \notin J_1$, то $F(r)$ продолжается на $\mathcal{S}_{J_1}$ до $\hat{F}(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_{J_1})$ так, что на $\mathcal{S}_{J_1}$

$$\frac{1}{\rho(k)} \hat{F}(kr) \xrightarrow{\rightarrow \infty} B r^\beta_{J_1} \quad (2.19)$$

для некоторого $B \in \mathbb{R}$. Любое другое такое продолжение отличается от $\hat{F}(r)$ на

$$\sum_{\substack{\lambda \in J_1 \setminus J \\ -\beta-1 < \lambda \leq M}} a_\lambda \Delta_\lambda(r) \quad (2.20)$$

с некоторыми постоянными a_λ и M .

2) Если $-\beta - 1 \notin J$ и $-\beta - 1 \in J_1$, то $F(r)$ продолжается на $\mathcal{S}_{J_1}$ до $\hat{F}(r) \in AO_{\hat{\rho}}(\mathcal{S}_{J_1})$. При этом на $\mathcal{S}_{J_1}$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{\hat{\rho}(k)} \hat{F}(kr) \xrightarrow{\rightarrow \infty} \pm B \Delta_{-\beta-1}(r), \quad (2.21)$$

где выбирается знак "+", если $\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa) d\varkappa}{\varkappa^{\beta+1}} = \infty$, и выбирается знак "-" – если $\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa) d\varkappa}{\varkappa^{\beta+1}} < \infty$, число B берется из соотношения (2.19) с $J_1 = J$.

3) Если $-\beta - 1 \in J$, то $F(r)$ продолжается на $\mathcal{S}_{J_1}$ до $\widehat{F}(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_{J_1})$. При этом на $\mathcal{S}_{J_1}$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{\rho(k)} \widehat{F}(kr) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B \Delta_{-\beta-1}(r) \quad (2.22)$$

с некоторым числом B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай 1). По лемме 2.3 $F(r)$ представляется в виде $F = F_0 + F_1$, где F_0 имеет компактный носитель и $M_\lambda[F_0] = 0$, $\lambda \in J$, $\lambda < -\beta - 1$ (см. (2.4)), а F_1 представляется в виде (2.4), (2.5). Продолжим F_0 до обобщенной функции $\widehat{F}_0 \in \mathcal{S}'_{J_1}$ так, чтобы

$$(\widehat{F}_0(r), r^\lambda) = 0, \quad \lambda \in J_1 \setminus J, \quad \lambda < -\beta - 1.$$

Это возможно, так как если $\widehat{G}_0(r)$ – какое-то ее продолжение на $\mathcal{S}_{J_1}$, то можно положить

$$\widehat{F}_0(r) = \widehat{G}_0(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J_1 \setminus J \\ \lambda < -\beta - 1}} M_\lambda[\widehat{G}_0] \Delta_\lambda(r).$$

Ясно, что $M_\lambda[\widehat{F}_0] = 0$ для $\lambda \in J_1$, $\lambda < -\beta - 1$. Поэтому $\frac{1}{\rho(k)} \widehat{F}_0(kr) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, в $\mathcal{S}_{J_1}$. Теперь зададим $\widehat{F}_1$ формулой

$$(\widehat{F}_1(r), \psi(r)) = \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-\ell} \left(\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J_1 \\ \lambda < -\beta - 1}} C_\lambda r^\lambda \right) \right) dr, \quad \psi \in \mathcal{S}_{J_1},$$

где $\gamma(r)$, ℓ , N берутся из представления (2.5)–(2.6) для $F(r)$. По лемме 2.2 $\widehat{F}_1 \in AO_\rho(\mathcal{S}_{J_1})$. Таким образом, $\widehat{F} = \widehat{F}_1 + \widehat{F}_0$ дает нужное продолжение. Соотношение (2.19) следует из леммы 2.2.

Теперь поскольку все такие продолжения совпадают на основных функциях из $\mathcal{S}_J$, то все они отличаются друг от друга только в нуле. Поэтому если $\widehat{G}$ – другое такое продолжение, то

$$\widehat{G}(r) - \widehat{F}(r) = \sum_{\substack{\lambda \in J_1 \setminus J \\ \lambda \leq M}} a_\lambda \Delta_\lambda(r)$$

с некоторыми постоянными a_λ и M .

Так как оба продолжения из $AO_\rho(\mathcal{S}_{J_1})$, то в $\mathcal{S}'_{J_1}$ имеем

$$\frac{1}{\rho(k)} (\widehat{G}(kr) - \widehat{F}(kr)) = \frac{1}{\rho(k)} \sum_{\substack{\lambda \in J_1 \setminus J \\ \lambda \leq M}} a_\lambda \Delta_\lambda(kr) = \sum_{\substack{\lambda \in J_1 \setminus J \\ \lambda \leq M}} \frac{a_\lambda}{\rho(k) k^{\lambda+1}} \Delta_\lambda(r) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g(r).$$

Но это возможно, только если члены в сумме с $\lambda + 1 + \beta > 0$ отсутствуют. Отсюда получаем (2.20).

Рассмотрим случай 2). Положим $J_1^0 = J_1 \setminus \{-\beta - 1\}$. Тогда по уже доказанному $F(r)$ продолжается на $\mathcal{S}_{J_1^0}$ до $\tilde{F}(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_{J_1^0})$. Согласно лемме 2.3 справедливо соотношение $\tilde{F} = \tilde{F}_0 + \tilde{F}_1$. При этом $\tilde{F}_0$ имеет много моментов, равных нулю (считаем, что $M_\lambda[\tilde{F}_0] = 0$ при $\lambda \in J_1^0, \lambda \leq -\beta - 1$), а $\tilde{F}_1$ удовлетворяет условиям (2.5)–(2.7), где J надо заменить на J_1^0 . Теперь $\tilde{F}_0$ продолжается до $\hat{F}_0$ на все $\mathcal{S}_{J_1}$ с тривиальной квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$, а следовательно, и относительно $\hat{\rho}(k)$, см. (0.6).

Для того чтобы продолжить $\tilde{F}_1$ до $\hat{F}_1$ на $\mathcal{S}_{J_1}$, достаточно определить это продолжение на основной функции $r^{-\beta-1}\eta(r)$ с функцией $\eta(r)$, удовлетворяющей условию (1.5). Положим

$$(\hat{F}_1(r), r^{-\beta-1}\eta(r)) = D = \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-\ell-\beta-1}\eta(r)) dr - \begin{cases} 0, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(r)dr}{r^{\beta+1}} = \infty, \\ (-1)^N \frac{(\beta + \ell + N)!}{(\beta + \ell)!} \int_1^\infty \frac{\gamma(r)dr}{r^{N+\beta+\ell+1}}, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(r)dr}{r^{\beta+1}} < \infty. \end{cases} \quad (2.23)$$

Здесь $\gamma(r)$ берется из представления (2.5)–(2.6) для $\tilde{F}_1 \in \mathcal{S}'_{J_1^0}$.

Теперь для любой $\varphi(r) \in \mathcal{S}_{J_1}$ имеем

$$\begin{aligned} (\hat{F}_1(kr), \varphi(r)) &= \frac{1}{k} \left(\hat{F}_1(r), \varphi\left(\frac{r}{k}\right) \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(\tilde{F}_1(r), \varphi\left(\frac{r}{k}\right) - C_{-\beta-1} \left(\frac{r}{k}\right)^{-\beta-1} \eta(r) \right) + \frac{C_{-\beta-1}}{k^{-\beta}} D \\ &= \frac{1}{k} \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\ell} \left(\varphi\left(\frac{r}{k}\right) - C_{-\beta-1} \left(\frac{r}{k}\right)^{-\beta-1} \eta(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J_1^0 \\ \lambda < -\beta-1}} \frac{C_\lambda}{k^\lambda} r^\lambda \right) \right] dr \\ &\quad + \frac{C_{-\beta-1}}{k^{-\beta}} D. \end{aligned}$$

Мы учли, что $\varphi(r/k) - C_{-\beta-1}(r/k)^{-\beta-1}\eta(r) \in \mathcal{S}_{J_1^0}$, и воспользовались представлением (2.6) для $\tilde{F}_1$. Далее имеем

$$\begin{aligned} (\hat{F}_1(kr), \varphi(r)) &= \frac{1}{k} \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \\ &\quad \times \left[r^{-\ell} \left(\varphi\left(\frac{r}{k}\right) - \sum_{\substack{\lambda \in J_1^0 \\ \lambda < -\beta-1}} \frac{C_\lambda}{k^\lambda} r^\lambda - C_{-\beta-1} \left(\frac{r}{k}\right)^{-\beta-1} \eta\left(\frac{r}{k}\right) \right) \right] dr \\ &\quad + C_{-\beta-1} k^\beta \left[D + \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-\ell-\beta-1} \left(\eta\left(\frac{r}{k}\right) - \eta(r) \right) \right) dr \right]. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Первое слагаемое справа в (2.24) ведет себя как $\rho(k)$ (доказательство почти дословно повторяет доказательство леммы 2.2) и, следовательно, слабее чем $\hat{\rho}(k)$.

Покажем, что второе слагаемое (2.24) ведет себя как $\widehat{\rho}(k)$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-\ell-\beta-1} \eta(r)) dr = D_1 < \infty, \\ & \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-\ell-\beta-1} \eta\left(\frac{r}{k}\right) \right) dr = \int_{1/k}^2 \frac{\gamma(kr)}{k^{\ell+\beta+N}} \left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-\ell-\beta-1} \eta(r)) dr \\ & = \int_{1/k}^1 \frac{\gamma(kr)}{k^{\ell+\beta+N}} \left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-\ell-\beta-1}) dr + O(k^{-\beta} \rho(k)). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Первое соотношение очевидно, так как $\eta(r) = 0$ при $r > 2$.

Докажем второе соотношение (2.25). Действительно, пользуясь правилом Лейбница и учитывая соотношения

$$\gamma(r) \sim Ar^{N+\ell} \rho(r), \quad \frac{\rho(kr)}{\rho(k)} \sim r^\beta, \quad (2.26)$$

имеем при $1 < r < 2$

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \frac{\gamma(kr)}{k^{\ell+\beta+N}} \left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-\ell-\beta-1} \eta(r)) dr \\ & = \frac{\rho(k)}{k^\beta} \sum_{m=0}^N C_m \int_1^2 \frac{\gamma(kr)}{(kr)^{N+\ell} \rho(kr)} \frac{\rho(kr)}{\rho(k)} \frac{\eta^{(m)}(r)}{r^{\beta+1-m}} dr \\ & \sim \frac{\rho(k)}{k^\beta} \sum_{m=0}^N C_m A \int_1^2 \frac{\eta^{(m)}(r)}{r^{1-m}} dr, \end{aligned}$$

где C_m зависит от β, ℓ, N .

Теперь, учитывая, что $\eta^{(m)}(r) = 0$ для $m > 0$ при $1/k < r < 1$, преобразуем оставшийся интеграл из (2.25) к виду

$$\begin{aligned} & \int_{1/k}^1 \frac{\gamma(kr)}{k^{\ell+\beta+N}} \left(\frac{d}{dr} \right)^N (r^{-\ell-\beta-1}) dr = \frac{(-1)^N}{k^\beta} \frac{(\beta + \ell + N)!}{(\beta + \ell)!} \int_{1/k}^1 \frac{\gamma(kr)}{(kr)^{N+\ell} r^{\beta+1}} dr \\ & = (-1)^N \frac{(\beta + \ell + N)!}{(\beta + \ell)!} \int_1^k \frac{\gamma(r)}{r^{N+\ell} \rho(r)} \frac{\rho(r)}{r^{\beta+1}} dr. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $\int_1^\infty \frac{\rho(r)}{r^{\beta+1}} dr = \infty$, то в силу (0.4) имеем

$$\int_1^k \frac{\gamma(r)}{r^{N+\ell} \rho(r)} \frac{\rho(r)}{r^{\beta+1}} dr \sim \frac{A}{k^\beta} \widehat{\rho}(k). \quad (2.27)$$

Если же $\int_1^\infty \frac{\rho(r)}{r^{\beta+1}} dr < \infty$, то, обозначая $\int_1^\infty \frac{\gamma(r)}{r^{N+\ell+\beta+1}} dr = D_2$, получим

$$D_2 - \int_1^k \frac{\gamma(r)}{r^{N+\ell+\beta+1}} dr = \int_k^\infty \frac{\gamma(r)}{r^{N+\ell} \rho(r)} \frac{\rho(r)}{r^{\beta+1}} dr \sim \frac{A}{k^\beta} \widehat{\rho}(k). \quad (2.28)$$

Теперь из (2.23), (2.25)–(2.28) следует, что второе слагаемое в (2.24) ведет себя как $\widehat{\rho}(k)$. При этом

$$\frac{1}{\widehat{\rho}(k)}(\widehat{F}(kr), \varphi(r)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (-1)^N N! A \binom{\beta + \ell + N}{N} AC_{-\beta-1}, \quad \varphi \in \mathcal{S}_{J_1}.$$

Случай 2) полностью рассмотрен.

Рассмотрим случай 3). Пусть $J^0 = J \setminus \{-\beta - 1\}$ и $J_1^0 = J_1 \setminus \{-\beta - 1\}$. Построим $\widehat{\widehat{F}}(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_{J_1^0})$ как продолжение $F(r)$ с $\mathcal{S}_{J^0}$ на $\mathcal{S}_{J_1^0}$ в соответствии со случаем 2). Для того чтобы построить искомое продолжение $\widehat{\widehat{F}}$ на $\mathcal{S}_{J_1}$, достаточно определить его на одной функции вида $\eta(r)r^{-\beta-1}$, где $\eta(r)$ удовлетворяет условиям (1.5). Положим

$$(\widehat{F}(r), r^{-\beta-1}\eta(r)) = (F(r), r^{-\beta-1}\eta(r)).$$

Поскольку $\eta(r)r^{-\beta-1} \in \mathcal{S}_J$, то $\widehat{F}(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_{J_1})$.

Докажем теперь соотношение (2.22). Так как на $\mathcal{S}_{J_1}$

$$\frac{1}{\rho(k)}\widehat{F}(kr) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} G(r),$$

то по лемме 2.2 $G(r) = Ar_{J^0}^\beta$ на $\mathcal{S}_{J^0}$ с некоторым числом A (см. (2.7)). Тогда по уже доказанному (случай 2)) на $\mathcal{S}_J$ имеем

$$\frac{1}{\widehat{\rho}(k)}\widehat{F}(kr) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pm A\Delta_{-\beta-1}(r) \quad (2.29)$$

(см. (2.21)). С другой стороны, на $\mathcal{S}_J$

$$\frac{1}{\widehat{\rho}(k)}\widehat{F}(kr) = \frac{\rho(k)}{\widehat{\rho}(k)} \frac{1}{\rho(k)}F(kr) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

(см. (0.6)). Это возможно, если только $A = 0$, т.е. $G(r) = 0$ на $\mathcal{S}_{J^0}$ и, следовательно, и на $\mathcal{S}_{J^0}$ (случай 1)). Теперь для любой $\varphi \in \mathcal{S}_{J_1}$ имеем

$$\begin{aligned} (G(r), \varphi(r)) &= (G(r), \varphi(r) - C_{-\beta-1}r^{-\beta-1}\eta(r)) + (G(r), C_{-\beta-1}r^{-\beta-1}\eta(r)) \\ &= C_{-\beta-1}(G(r), r^{-\beta-1}\eta(r)) = C_{-\beta-1}B = B(\Delta_{-\beta-1}(r), \varphi(r)), \end{aligned}$$

что и доказывает соотношение (2.22). Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Если $F(r) \in \mathcal{S}'_J$ – однородная функция степени β , то при некотором $B \in \mathbb{R}$

$$F(r) = \begin{cases} Br_J^\beta, & \text{если } -\beta - 1 \notin J, \\ B\Delta_{-\beta-1}(r), & \text{если } -\beta - 1 \in J. \end{cases} \quad (2.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(r) \in \mathcal{S}'_J$ – однородная функция степени β , и пусть $-\beta - 1 \notin J$. Так как $F(kr) = k^\beta F(r)$, то $F(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_J)$, где $\rho(k) = k^\beta$. Поэтому в силу (2.19) имеем

$$\frac{1}{\rho(k)}F(kr) = F(r) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} Br_J^\beta,$$

что и доказывает первое из соотношений (2.30).

Пусть теперь $-\beta - 1 \in J$. Так как $F(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_J)$, то соотношение (2.22) доказывает справедливость (2.30) и в этом случае. Следствие доказано.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , J – допустимое множество, $-\beta - 1 \notin J$ и $-\beta - 1 \notin \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы $F(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_J)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа N , A и функция $\gamma(r)$, непрерывная при $r > 0$, удовлетворяющая условию $\gamma(r) \sim Ar^N \rho(r)$, $r \rightarrow \infty$, такие, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}_J$

$$(F(r), \varphi(r)) = \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[\varphi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \right] dr + (F_0(r), \varphi(r)), \quad (2.31)$$

где $F_0(r) \in \mathcal{S}'_J$, имеет компактный носитель и все моменты $M_\lambda[F_0] = 0$ при $\lambda < -\beta - 1$, $\lambda \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 2.1 (случай 1)) F продолжается до $\hat{F} \in AO_\rho(\mathcal{S}_{J \cup \mathbb{Z}_+})$, так что $\hat{F}$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на $\mathcal{S}_+$. Представим $\hat{F}$ в виде $F_1 + F_0$, где $\text{supp } F_1$ отделен от нуля, а F_0 имеет компактный носитель и все моменты $M_\lambda[F_0] = 0$ при $\lambda \in J \cup \mathbb{Z}_+$, $\lambda \leq -\beta - 1$. Ясно, что обобщенная функция F_1 асимптотически однородна на $\mathcal{S}_+$, и по лемме 2.3 (см. замечание к ней) имеет место формула (2.31). Обратное утверждение следует из леммы 2.2. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , J – допустимое множество, $-\beta - 1 \in J$ и $-\beta - 1 \in \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы $F(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_J)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа N ($N > -\beta - 1$), A и функция $\gamma(r)$, непрерывная при $r > 0$, удовлетворяющая условию $\gamma(r) \sim Ar^N \rho(r)$, $r \rightarrow \infty$, такие, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}_J$

$$(F(r), \varphi(r)) = \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[\varphi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \right] dr + (F_0(r), \varphi(r)), \quad (2.32)$$

где $F_0(r) \in \mathcal{S}'_J$, имеет компактный носитель и все моменты $M_\lambda[F_0] = 0$ при $\lambda \leq -\beta - 1$, $\lambda \in J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 2.1 (случай 3)) F продолжается до $\hat{F} \in AO_\rho(\mathcal{S}_{J \cup \mathbb{Z}_+})$, т.е. $\hat{F}$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на $\mathcal{S}_+$. Представим $\hat{F}$ в виде $F_1 + F_0$, где $\text{supp } F_1$ отделен от нуля, а F_0 имеет компактный носитель и все моменты $M_\lambda[F_0] = 0$ при $\lambda \in J \cup \mathbb{Z}_+$, $\lambda \leq -\beta - 1$. Ясно, что обобщенная функция F_1 асимптотически однородна на $\mathcal{S}_+$, и по лемме 2.3 (см. замечание к ней) имеет место формула (2.32). Обратное утверждение, с учетом того, что $N > -\beta - 1$, следует из замечания к лемме 2.2. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $F(r) \in \mathcal{S}'_J$, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , J – допустимое множество, а число ν таково, что

$$\begin{cases} -\beta - 1 - \nu \notin \mathbb{Z}_+, & \text{если } -\beta - 1 \notin J, \\ -\beta - 1 - \nu \in \mathbb{Z}_+, & \text{если } -\beta - 1 \in J. \end{cases} \quad (2.33)$$

Тогда для того чтобы $F(r) \in AO_\rho(\mathcal{S}_J)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа N ($N > -\beta - 1 - \nu$ в случае $-\beta - 1 \in J$), A и функция $\gamma(r)$, непрерывная при $r > 0$, имеющая асимптотику

$$\gamma(r) \sim Ar^{\nu+N} \rho(r), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (2.34)$$

такие, что для любой основной функции $\psi \in \mathcal{S}_J$

$$(F(r), \psi(r)) = \int_1^\infty \gamma(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda \right) \right] dr + (F_0(r), \psi(r)), \quad (2.35)$$

где $F_0(r) \in \mathcal{S}'_J$, имеет компактный носитель и $M_\lambda[F_0] = 0$ для $\lambda \in J$, $\lambda \leq -\beta - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F_\nu(r) = r^\nu F(r)$. Тогда $F_\nu \in AO_{\rho_\nu}(\mathcal{S}_{J-\nu})$, где $\rho_\nu(k) = k^\nu \rho(k)$ с порядком автомодельности $\beta_\nu = \beta + \nu$. Рассмотрим сначала случай $-\beta - 1 \notin J$. Поскольку тогда

$$-\beta_\nu - 1 = -\beta - \nu - 1 \notin \mathbb{Z}_+, \quad -\beta_\nu - 1 \notin J - \nu,$$

то по лемме 2.4 для любой $\varphi \in \mathcal{S}_{J-\nu}$ имеем

$$(\tilde{F}_\nu(r), \varphi(r)) = \int_1^\infty \gamma_\nu(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[\varphi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J-\nu \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda^\varphi r^\lambda \right] dr + (\tilde{F}_0(r), \varphi(r)), \quad (2.36)$$

где $\gamma_\nu(r)$ – функция, непрерывная при $r > 0$, и

$$\gamma_\nu(r) \sim r^N \rho_\nu(r) = r^{N+\nu} \rho(r).$$

Отсюда для любой $\psi(r) \in \mathcal{S}_J$ имеем

$$\begin{aligned} (F(r), \psi(r)) &= (F_\nu(r), r^{-\nu} \psi(r)) \\ &= \int_1^\infty \gamma_\nu(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J-\nu \\ \lambda < -\beta-\nu-1}} C_{\lambda+\nu}^\psi r^\lambda \right] dr + (F_0(r), \psi(r)) \\ &= \int_1^\infty \gamma_\nu(r) \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[\frac{\psi(r) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda r^\lambda}{r^\nu} \right] dr + (F_0(r), \psi(r)). \end{aligned}$$

Здесь мы сделали замену $\lambda' = \lambda + \nu$, опустили штрихи и учли, что $C_\lambda^\psi = C_{\lambda-\nu}^{r^{-\nu}\psi}$, где C_λ^ψ – коэффициенты разложения функции ψ (см. (1.3), (1.4)).

Рассмотрим случай $-\beta - 1 \in J$. Так как $-\beta_\nu - 1 = -\beta - \nu - 1 \in \mathbb{Z}_+$ и $-\beta_\nu - 1 \in J - \nu$, то по лемме 2.5 имеем соотношение (2.36). Далее, аналогично получаем (2.34). Теорема доказана.

§ 3. Асимптотически однородные обобщенные функции на пространствах W_J и V_J

Пусть J – допустимое множество. Пространство W_J и асимптотически однородные обобщенные функции на нем определены в § 1.

В соответствии с (2.2) для любой $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ определим обобщенную функцию $r_J^\beta \otimes \Phi(e)$ формулой

$$(r_J^\beta \otimes \Phi(e), \psi(r, e)) = \begin{cases} \int_0^\infty r^\beta \left(\Phi(e), \psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda(e) r^\lambda \right)_e dr & \text{при } -\beta-1 \notin J, \\ \int_0^\infty r^\beta \left(\Phi(e), \psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda(e) r^\lambda - C_{-\beta-1}(e) r^{-\beta-1} \Theta(1-r) \right)_e dr & \text{при } -\beta-1 \in J \end{cases} \quad (3.1)$$

для любой $\psi(r, e) \in W_J$.

Здесь и далее нижний индекс e в выражении $(G_r(e), \psi(r, e))_e$ означает, что рассматривается значение обобщенной функции $G_r(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ на функции $\psi(r, e)$, рассматриваемой как основной из $\mathcal{S}(S^{n-1})$ при фиксированном r .

Отметим, что при $-\beta-1 \notin J$ обобщенная функция $r_J^\beta \otimes \Phi(e)$ однородна по r степени β .

ЛЕММА 3.1. Пусть обобщенная функция $F(r, e) \in W'_J$. Тогда ее всегда можно представить в виде $F(r, e) = F_1(r, e) + F_0(r, e)$, где носитель F_1 отделен от нуля (пусть, например, $\text{supp } F_1 \subset \{r > 1, e \in S^{n-1}\}$), а F_0 имеет компактный носитель и сколь угодно много моментов, например,

$$M_{\lambda_i}[F_0](e) \equiv 0, \quad \lambda_i \in J, \quad i = 1, \dots, M. \quad (3.2)$$

Если при этом обобщенная функция $F(r, e)$ ортогональна ко всем функциям из некоторого семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{S}(S^{n-1})$, т.е. $(F(r, e), \varphi(e))_e \equiv 0$ в $\mathcal{S}'_J$ для $\varphi \in \mathcal{E}$, то такими же будут F_1 и F_0 , т.е. для $\varphi \in \mathcal{E}$ в $\mathcal{S}'_J$

$$(F_1(r, e), \varphi(e)) \equiv 0, \quad (F_0(r, e), \varphi(e)) \equiv 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{F}(r, e) = F(r, e)\eta(r)$, где $\eta(r)$ удовлетворяет условиям (1.5). Отметим, что $(\tilde{F}(r, e), \varphi(e))_e \equiv 0$, $\varphi(e) \in \mathcal{E}$. Подберем множество бесконечно дифференцируемых функций

$$\left\{ \omega_i(r) : \text{supp } \omega_i \subset (1, 2), \int r^{\lambda_j} \omega_i(r) dr = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, M, \lambda_j \in J \right\}.$$

Пусть $\Omega(r, e) = \sum_{i=1}^M \omega_i(r) M_{\lambda_i}[F_1](e)$. Положим

$$F_1(r, e) = F(r, e) - \tilde{F}(r, e) + \Omega(r, e), \quad F_0(r, e) = \tilde{F}(r, e) - \Omega(r, e).$$

Теперь легко проверить, что требуемые свойства $F_1(r, e)$ и $F_0(r, e)$ выполнены.

Класс $AO_\rho(W_J)$ асимптотически однородных обобщенных функций относительно автомодельной функции $\rho(k)$ на пространстве W_J определен в § 1 (см. определение 1.2). Все результаты, полученные для асимптотически однородных обобщенных функций в § 2 для пространства $\mathcal{S}_J$, практически дословно переносятся на пространство W_J . Далее мы рассмотрим те новые моменты, которые связаны с появлением у функций зависимости от переменных $e \in S^{n-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\gamma(r, e)$ – непрерывная по r функция со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$. Условимся писать

$$\gamma(r, e) \sim \rho(r)\Phi(e), \quad r \rightarrow +\infty, \quad \text{на } \mathcal{S}(S^{n-1}), \quad (3.3)$$

где $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, а $\rho(r)$ – положительная функция, если в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$

$$\frac{1}{\rho(r)}\gamma(r, e) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \Phi(e). \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3.2. Пусть J – допустимое множество вещественных чисел и $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , причем $-\beta - 1 \notin J$. Пусть заданы числа $\ell \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{Z}_+$, функция $\gamma(r, e)$ со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, непрерывная по r при $r > 0$, и обобщенная функция $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такие, что на $\mathcal{S}(S^{n-1})$

$$\gamma(r, e) \sim \rho(r)r^{N+\ell}\Phi(e), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3.5)$$

Определим обобщенную функцию $F_1(r, e) \in W'_J$ формулой

$$(F_1(r, e), \psi(r)) = \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left(r^{-\ell} \left(\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda(e)r^\lambda \right) \right) \right) dr \quad (3.6)$$

для всех $\psi(r, e) \in W_J$. Тогда $F_1(r, e) \in AO_\rho(W_J)$, причем

$$\frac{1}{\rho(k)}F_1(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (-1)^N N! \binom{\beta + \ell + N}{N} r_J^\beta \otimes \Phi(e). \quad (3.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение леммы останется справедливым и в том случае, когда $-\beta - 1 \in J$ и $-\beta - 1 - \ell \in \mathbb{Z}_+$, а $N > -\beta - 1 - \ell$. При этом вместо (3.7) имеет место соотношение

$$\frac{1}{\rho(k)}F_1(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (-1)^{\beta+\ell+N+1} (\beta+\ell+N)! (-\beta-\ell-1)! \Delta_{-\beta-1}(r) \otimes \Phi(e). \quad (3.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть в условиях леммы 3.2 $-\beta - 1 \in J$ и для некоторой $\varphi_0(r, e) \in W_J$ справедливо соотношение

$$(\gamma(r, e), C_{-\beta-1}^{\varphi_0}(e))_e \equiv 0, \quad (3.9)$$

где $C_{-\beta-1}^{\varphi_0}(e)$ – коэффициент разложения функции $\varphi_0(r, e)$ в нуле (см. (1.7)). Тогда существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho(k)} (F_1(kr, e), \varphi_0(r, e)). \quad (3.10)$$

Доказательство леммы 3.2 аналогично доказательству леммы 2.2, а для доказательства замечания 1 следует воспользоваться соотношением, аналогичным соотношению (2.15).

Доказательство замечания 2 проводится аналогично доказательству замечания к лемме 2.2, однако вместо соотношения (2.15) следует воспользоваться тождеством (3.9).

Для пространства W_J утверждение 2.1 (случай 1)) принимает следующий вид

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть J и J_1 – допустимые множества вещественных чисел, $J \subset J_1$, и $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β . Пусть $F(r, e) \in W'_J$, $F(r, e) \in AO_\rho(W_J)$. Тогда если $-\beta - 1 \notin J_1$, то $F(r, e)$ продолжается на W_{J_1} до $\hat{F}(r, e) \in AO_\rho(W_{J_1})$ так, что на W_{J_1}

$$\frac{1}{\rho(k)} \hat{F}(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} r_{J_1}^\beta \otimes \Phi(e) \quad (3.11)$$

с некоторой $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$. Любое другое такое продолжение отличается от $\hat{F}(r, e)$ на функцию

$$\sum_{\substack{\lambda \in J_1 \setminus J \\ \lambda > -\beta - 1}} \Delta_\lambda(r) \otimes \Phi_\lambda(e) \quad (3.12)$$

с некоторыми $\Phi_\lambda(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть выполнены условия утверждения 3.1, и для некоторого подпространства $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}(S^{n-1})$ выполнено условие ортогональности, т.е. в $\mathcal{S}'_J$

$$(F(r, e), \varphi(e)) \equiv 0 \quad \forall \varphi(e) \in \mathcal{E}.$$

Тогда существует ее продолжение $\hat{F}(r, e) \in AO_\rho(W_{J_1})$, для которого также выполнено условие ортогональности, т.е. для любой $\varphi(e) \in \mathcal{E}$ в $\mathcal{S}'_{J_1}$ имеем

$$(\hat{F}(r, e), \varphi(e)) \equiv 0. \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего представим F в следующем виде: $F = F_1 + F_0$, где $\text{supp } F_1$ отделен от нуля, а F_0 имеет компактный носитель и сколь угодно много моментов, равных нулю. При этом можно полагать, что соблюдено условие ортогональности и для F_1 , и для F_0 (см. лемму 3.1). Далее рассуждаем, как и при доказательстве леммы 2.3. Заменяя в этих рассуждениях пространства $\mathcal{S}_J, \mathcal{S}_\emptyset$ на пространства $W_J, W_{J_\emptyset}$ соответственно, учитывая условия ортогональности при соответствующем продолжении, из формул, аналогичных (2.15)–(2.17), где C_λ теперь не числа, а обобщенные функции $C_\lambda(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$, получим для F_1 формулу (3.6) с некоторыми $\gamma(r, e)$, N и ℓ . Так как $\gamma(r, e) = (r^\ell F_1(r, e))^{(-N)}$, где первообразная берется только по r , то условие ортогональности будет выполнено и для $\gamma(r, e)$.

Теперь полагаем $\hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{F}_0$, где

$$(\hat{F}_1(r, e), \psi(r, e)) = \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^{(-N)} \left[r^{-\ell} \left(\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J_1 \\ \lambda < -\beta - 1}} C_\lambda(e) r^\lambda \right) \right] \right)_e dr$$

с той же $\gamma(r, e)$, а $\tilde{F}_0(r, e)$ – продолжение $F_0(r, e)$ с W_J на W_{J_1} такое, что

$$(\tilde{F}_0(r, e), \varphi(e))_e = 0, \quad \varphi \in \mathcal{E}, \quad (3.14)$$

как элемент $\mathcal{S}'_{J_1}$ и для $\lambda \in J_1$, $\lambda < -\beta - 1$,

$$(\hat{F}_0(r, e), r^\lambda)_r \equiv 0.$$

Покажем, что такое продолжение возможно. Докажем сначала, что существует продолжение $\hat{\tilde{F}}_0$, удовлетворяющее условию (3.10). Действительно, пусть $\tilde{F}_0(r, e)$ какое-то продолжение F_0 на W_{J_1} . Тогда для любой $\varphi \in \mathcal{E}$ имеем $(\tilde{F}_0(r, e), \varphi(e))_e = 0$ как элемент $\mathcal{S}'_J$ и поэтому

$$(\tilde{F}_0(r, e), \varphi(e))_e = \sum_{\substack{\lambda \in J_1 \setminus J \\ \lambda \leq M}} A_\lambda(\varphi) \Delta_\lambda(r), \quad \varphi \in \mathcal{E},$$

как элемент $\mathcal{S}_{J_1}$. Из конечности порядка функционала $\tilde{F}_0$ следует, что M не зависит от $\varphi \in \mathcal{E}$, а $A_\lambda(\varphi)$ – непрерывные функционалы на $\mathcal{E}$. Продолжим их до обобщенных функций $A_\lambda(e)$ на все $\mathcal{S}(S^{n-1})$ и положим

$$\hat{\tilde{F}}_0(r, e) = \tilde{F}_0(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J_1 \setminus J \\ \lambda \leq M}} A_\lambda(e) \Delta_\lambda(r).$$

Нетрудно видеть, что $\hat{\tilde{F}}_0$ удовлетворяет условию (3.14). Далее положим

$$\hat{F}_0(r, e) = \hat{\tilde{F}}_0(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J_1 \setminus J \\ \lambda < -\beta - 1}} M_\lambda[\hat{F}](e) \Delta_\lambda(r).$$

Легко проверяется, что $\hat{F}_0$ удовлетворяет нужным соотношениям.

Из леммы 3.2 следует, что $\hat{F} \in AO_\rho(W_{J_1})$ и для $\hat{F}$ выполнено условие ортогональности. Утверждение 3.1 доказано.

Так же как и в случае пространства $\mathcal{S}_J$ (см. (2.30)), доказывается, что любая однородная по r степени β обобщенная функция $F(r, e) \in W'_J$ имеет вид

$$F(r, e) = \begin{cases} r_J^\beta \otimes \Phi(e), & \text{если } -\beta - 1 \notin J, \\ \Delta_{-\beta-1}(r) \otimes \Phi(e), & \text{если } -\beta - 1 \in J, \end{cases}$$

с некоторой $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$.

Теорема 2.1 для пространства W_J примет следующий вид.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $F(r, e) \in W'_J$, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , J – допустимое множество. Пусть число ν таково, что

$$\begin{cases} -\beta - 1 - \nu \notin \mathbb{Z}_+, & \text{если } -\beta - 1 \notin J, \\ -\beta - 1 - \nu \in \mathbb{Z}_+, & \text{если } -\beta - 1 \in J. \end{cases}$$

Тогда для того чтобы $F(r, e) \in AO_\rho(W_J)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали N ($N > -\beta - 1$ в случае $-\beta - 1 \in J$), функция $\gamma(r, e)$ со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, непрерывная по r при $r > 0$, и обобщенная функция $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, для которых на $\mathcal{S}(S^{n-1})$

$$\gamma(r, e) \sim r^{\nu+N} \rho(r) \Phi(e), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.15)$$

такие, что для любой основной функции $\psi(r, e) \in W_J$

$$\begin{aligned} (F(r, e), \psi(r, e)) &= \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda(e) r^\lambda \right) \right] \right)_e dr \\ &+ (F_0(r, e), \psi(r, e)), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $F_0(r, e) \in W'_J$, имеет компактный носитель (по r) и $M_\lambda[F_0](e) = 0$ для $\lambda \in J$, $\lambda \leq -\beta - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\mathcal{E}$ – некоторое подпространство $\mathcal{S}(S^{n-1})$. Если в условиях теоремы 3.1 полагать, что для $\varphi(e) \in \mathcal{E}$

$$(F(r, e), \varphi(e)) = 0, \quad (3.17)$$

то можно считать, что $(\gamma(r, e), \varphi(e)) = 0$.

Далее для описания обобщенных функций из $AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}})$, где пространство $V_{J, \mathcal{F}}$ определяется формулой (1.9), нам понадобятся две леммы.

ЛЕММА 3.3. Пусть J – допустимое множество, $F(r, e) \in W'_J$, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , где $-\beta - 1 \notin J$. Тогда $F(r, e) \in AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}})$ только в том случае, когда существует $\hat{F}(r, e) \in AO_\rho(W_J)$ такая, что на $V_{J, \mathcal{F}}$

$$\hat{F}(r, e) = F(r, e).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала напомним, что если $J_\emptyset = \emptyset$, то все функции из $W_{J_\emptyset}$ имеют в нуле нуль (по r) бесконечного порядка, так что $W_{J_\emptyset} \subset W_J$. Пусть $F(r, e) \in AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}})$. Тогда $F(r, e) \in AO_\rho(W_{J_\emptyset})$, так как $W_{J_\emptyset} \subset V_{J, \mathcal{F}}$. Следовательно, по утверждению 3.1 $F(r, e)$ продолжается на W_J до $G(r, e) \in AO_\rho(W_J)$. Так как F и G совпадают на $W_{J_\emptyset}$, то они отличаются друг от друга на обобщенную функцию, сосредоточенную в нуле, т.е. для некоторого M

$$G(r, e) - F(r, e) = \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < M}} \Delta_\lambda(r) \otimes \Phi_\lambda(e) = \left(\sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} + \sum_{\substack{\lambda \in J \\ -\beta-1 < \lambda < M}} \right) \Delta_\lambda(r) \otimes \Phi_\lambda(e).$$

Второе слагаемое справа обладает тривиальной квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$. Положим

$$\hat{F}(r, e) = G(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ -\beta-1 < \lambda < M}} \Delta_\lambda(r) \otimes \Phi_\lambda(e).$$

Тогда

$$\widehat{F}(r, e) - F(r, e) = \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta - 1}} \Delta_\lambda(r) \otimes \Phi_\lambda(e).$$

Покажем, что $\widehat{F}(r, e) = F(r, e)$ на $V_{J, \mathcal{F}}$. Так как $\widehat{F} \in AO_\rho(W_J)$, а $F \in AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}})$, то $\widehat{F} - F \in AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}})$. Для $\psi(r, e) = r^\lambda \eta(r) \chi(e) \in V_{J, \mathcal{F}}$, где $\lambda \in J, \lambda < -\beta - 1$, а $\chi(e)$ – произвольная функция из $\mathcal{E}_\lambda$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (\widehat{F}(kr, e) - F(kr, e), \psi(r, e)) &= \frac{1}{\rho(k)} (\Phi_\lambda(e) \Delta_\lambda(kr), r^\lambda \eta(r) \chi(e)) \\ &= \frac{1}{k^{\lambda+1} \rho(k)} (\Phi_\lambda(e), \chi(e)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \text{const.} \end{aligned}$$

Так как $\lambda < -\beta - 1$, то $k^{\lambda+1} \rho(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и, следовательно, $(\Phi_\lambda(e), \chi(e)) = 0$. Так как $\chi(e)$ – произвольная функция из $\mathcal{E}_\lambda$, то все коэффициенты $\Phi_\lambda(e)$ при $\lambda < -\beta - 1$ ортогональны соответствующим $\mathcal{E}_\lambda$. Это и означает, что $(\widehat{F} - F, \psi) = 0$, если $\psi \in V_{J, \mathcal{F}}$.

Обратное утверждение тривиально. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , $-\beta - 1 \in J$, и

$$F(r, e) \in W'_J, \quad F(r, e) \in AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}}).$$

Тогда существует $h(r, e) \in W'_J$, имеющая следующие свойства:

1) для любой $\varphi(e) \in \mathcal{E}_{-\beta-1}$ справедливо тождество

$$(F(r, e) - h(r, e), \varphi(e)) \equiv 0; \quad (3.18)$$

2) существуют $\Phi_\lambda(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, $\lambda \in J$, $\lambda < -\beta - 1$, такие, что

$$\widehat{h}(r, e) \equiv h(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta - 1}} \Phi_\lambda(e) \Delta_\lambda(r) \in AO_\rho(W_J). \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F \in AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}})$, т.е.

$$\frac{1}{\rho(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} G(r, e)$$

на $V_{J, \mathcal{F}}$, а $V_{J, \mathcal{F}}$ замкнуто в W_J , то эта сходимостъ имеет место в некотором $V_{J, \mathcal{F}}^M$ (пополнение $V_{J, \mathcal{F}}$ по норме $\mathcal{P}_M$, см. (1.18)). Учитывая конечность порядка $F(r, e)$ на W_J и увеличивая M , если нужно, можно также считать, что $F(r, e) \in (W_J^M)'$. Так как $\mathcal{E}_{-\beta-1} \subset \mathcal{S}(S^{n-1})$ – ядерное пространство, то существуют число N , ограниченное семейство $\{\varphi_m(e) \in \mathcal{E}_{-\beta-1}^M, m = 1, 2, \dots\}$, ограниченная последовательность функционалов $\{f_m \in (\mathcal{E}_{-\beta-1}^N)'\}$ и семейство чисел $\{\lambda_m\}$, $\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m| < \infty$, таких, что

$$\psi(e) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (f_m(e), \psi(e)) \varphi_m(e) \quad \forall \psi(e) \in \mathcal{E}_{-\beta-1}^N. \quad (3.20)$$

По теореме Хана–Банаха семейство функционалов $\{f_m \in (\mathcal{E}_{-\beta-1}^N)'\}$ может быть продолжено до ограниченного семейства функционалов на $\mathcal{S}^N(S^{n-1})$, в частности, до ограниченного семейства на $\mathcal{S}(S^{n-1})$.

Теперь для любой функции $\psi(r, e) \in W_J$ положим

$$\begin{aligned} (h(r, e), \psi(r, e)) &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (F(r, e), \varphi_m(e)(f_m(e), \psi(r, e))_e) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m ((F(r, e), \varphi_m(e))_e, (f_m(e), \psi(r, e))_e)_r. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Отметим, что $h(r, e)$ корректно определена на всем W_J , т.е. (3.21) имеет смысл для любой $\psi(r, e) \in W_J$. Проверим, что

$$(F(r, e) - h(r, e), \varphi(e)) \equiv 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}_{-\beta-1}. \quad (3.22)$$

Действительно, для $\varphi(e) \in \mathcal{E}_{-\beta-1}$ и $\psi(r) \in \mathcal{S}_J$ имеем

$$\begin{aligned} (h(r, e), \varphi(e)\psi(r)) &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m ((F(r, e), \varphi_m(e))_e, (f_m(e), \psi(r)\varphi(e)))_r \\ &= \left(F(r, e), \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (f_m(e), \varphi(e))\varphi_m(e) \cdot \psi(r) \right) = (F(r, e), \varphi(e)\psi(r)). \end{aligned}$$

Кроме того, $h(r, e) \in AO_\rho(W_{J_\emptyset})$, так как

$$\frac{1}{\rho(k)} (h(kr, e), \psi(r, e)) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \frac{1}{\rho(k)} (F(kr, e), \varphi_m(e)(f_m(e), \psi(r, e))_e),$$

а семейство $\{\varphi_m(e)(f_m(e), \psi(r, e))_e\}$ есть ограниченное семейство в $V_{J, \mathcal{F}}^M$, если $\psi(r, e) \in W_{J_\emptyset}$.

Заметим также, что $h(r, e)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$ на функциях вида $r^{-\beta-1}\eta(r)\varphi(e)$, где $\eta(r) \in \mathcal{S}_+$ имеет компактный носитель и $\eta(r) = 1$ в окрестности нуля, а $\varphi(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$. Действительно, это следует из соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (h(kr, e), r^{-\beta-1}\eta(r)\varphi(e)) &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(\frac{1}{\rho(k)} (F(kr, e), \varphi_m(e))_e, r^{-\beta-1}\eta(r)(f_m(e), \varphi(e))_e \right)_r \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (f_m(e), \varphi(e)) \frac{1}{\rho(k)} (F(kr, e), r^{-\beta-1}\eta(r)\varphi_m(e)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

в силу того, что последовательность $\{(f_m(e), \varphi(e))\}$ ограничена, а $\{r^{-\beta-1}\eta(r) \times \varphi_m(e)\}$ – ограниченное семейство в $V_{J, \mathcal{F}}^M$.

Докажем теперь соотношение (3.19). Положим $J_1 = J \setminus \{-\beta-1\}$. Так как обобщенная функция $h(r, e) \in AO_\rho(W_{J_\emptyset})$, то по утверждению 3.1 она продолжается до обобщенной функции $G(r, e) \in W'_{J_1}$, причем $G \in AO_\rho(W_{J_1})$. Поскольку h и G совпадают на $W_{J_\emptyset}$, то они отличаются на обобщенную функцию,

сосредоточенную в нуле, т.е.

$$G(r, e) - h(r, e) = \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta - 1}} \Phi_\lambda(e) \Delta_\lambda(r) \quad (3.24)$$

с некоторыми $\Phi_\lambda \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ (слагаемые с $\lambda > -\beta - 1$ не влияют на квазиасимптотику относительно $\rho(k)$ порядка β и мы отнесли их к G). Продолжим G на W_J , обозначив это продолжение через $\hat{h}(r, e)$. Для этого достаточно определить его на функциях вида $r^{-\beta-1}\eta(r)\varphi(e)$, где $\eta(r)$ удовлетворяет (1.5), а $\varphi(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$. Положим

$$(\hat{h}(r, e), r^{-\beta-1}\eta(r)\varphi(e)) = (h(r, e), r^{-\beta-1}\eta(r)\varphi(e)). \quad (3.25)$$

Таким образом, $\hat{h} \in W_J$. Кроме того, $\hat{h}(r, e) \in AO_\rho(W_J)$, так как $\hat{h}(r, e) \in AO_\rho(W_{J_1})$ и обладает квазиасимптотикой на функциях вида $r^{-\beta-1}\eta(r)\varphi(e)$, где $\varphi(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$, так как h обладает ею. Лемма доказана.

Следующие две теоремы дают описание обобщенных функций из $AO_\rho(V_{J,\mathcal{F}})$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть J – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , $-\beta - 1 \notin J$, $F(r, e) \in W'_J$, ν – некоторое число, для которого $-\beta - 1 - \nu \notin \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы $F(r, e) \in AO_\rho(V_{J,\mathcal{F}})$, необходимо и достаточно, чтобы существовали число N , функция $\gamma(r, e)$, непрерывная по r при $r > 0$ со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, для которых на $\mathcal{S}(S^{n-1})$ с некоторой $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$

$$\gamma(r, e) \sim r^{\nu+N} \rho(r) \Phi(e), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.26)$$

такие, что

$$\begin{aligned} (F(r, e), \psi(r, e)) &= \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta - 1}} C_\lambda(e) r^\lambda \right) \right] \right)_e dr \\ &+ (F_0(r, e), \psi(r, e)) \quad \forall \psi(r, e) \in V_{J,\mathcal{F}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $F_0(r, e) \in W'_J$, имеет компактный носитель по r и $M_\lambda[F_0](e) \equiv 0$ для $\lambda \in J$, $\lambda < -\beta - 1$.

Доказательство теоремы непосредственно следует из теоремы 3.1 и леммы 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $(F(r, e), \varphi(e)) \equiv 0$ для всех $\varphi(e)$ из некоторого подпространства $\mathcal{S}(S^{n-1})$, то можно считать, что $(\gamma(r, e), \varphi(e)) \equiv 0$ и $(F_0(r, e), \varphi(e)) \equiv 0$ для $\varphi(e)$ из того же подпространства (см. лемму 3.1 и замечание к утверждению 3.1).

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть J – допустимое множество, $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка β , $-\beta - 1 \in J$, $F(r, e) \in W'_J$ и ν – некоторое число, для

которого $-\beta - 1 - \nu \notin \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы $F(r, e) \in AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(r, e) = F_1(r, e) + F_2(r, e), \quad F_1(r, e) \in AO_\rho(W_J), \quad F_2(r, e) \in W'_J. \quad (3.28)$$

При этом существуют число N , функция $\gamma(r, e)$, непрерывная по r при $r > 0$ со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, такие, что для всех $\varphi(e) \in \mathcal{E}_{-\beta-1}$

$$(\gamma(r, e), \varphi(e)) \equiv 0, \quad (3.29)$$

$$\gamma(r, e) \sim r^{\nu+N} \rho(r) \Phi(e), \quad r \rightarrow \infty, \quad \text{на } \mathcal{S}(S^{n-1}) \quad (3.30)$$

с некоторой $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, причем для любой $\psi(r, e) \in V_{J, \mathcal{F}}$

$$(F_2(r, e), \psi(r, e)) = \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda(e) r^\lambda \right) \right] \right)_e dr. \quad (3.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(r, e) \in AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}})$. Согласно лемме 3.2 существует $h(r, e) \in W'_J$, удовлетворяющая условиям (3.18) и (3.19). Имеем

$$F(r, e) = F(r, e) - h(r, e) + \Delta(r, e) + \hat{h}(r, e), \quad \Delta = \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} \Phi_\lambda(e) \otimes \Delta_\lambda(r). \quad (3.32)$$

Так как $\hat{h} \in AO_\rho(W_J)$, то $F - h + \Delta \in AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}})$. Учитывая, что носитель Δ сосредоточен в нуле, получаем, что

$$G(r, e) \equiv F(r, e) - h(r, e) \in AO_\rho(W_{J_\emptyset}).$$

При этом согласно (3.18) имеем $(G(r, e), \varphi(e)) \equiv 0$ для любой $\varphi(e) \in \mathcal{E}_{-\beta-1}$. Положим $J_1 = J \setminus \{-\beta - 1\}$. По утверждению 3.1 обобщенная функция $G(r, e)$ продолжается на W_{J_1} до обобщенной функции $\tilde{G}(r, e) \in AO_\rho(W_{J_1})$, причем $(\tilde{G}(r, e), \varphi(e)) \equiv 0$ для любой $\varphi \in \mathcal{E}_{-\beta-1}$ (см. замечание к утверждению 3.1).

По теореме 3.2 для $\tilde{G}(r, e)$ справедливо представление

$$\begin{aligned} (\tilde{G}(r, e), \psi(r, e)) &= \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J_1 \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda(e) r^\lambda \right) \right] \right)_e dr \\ &\quad + (\tilde{G}_0(r, e), \psi(r, e)), \quad \psi \in W_{J_1}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $N, \nu, \gamma(r, e)$ определяются теоремой 3.2, а $\tilde{G}_0(r, e)$ имеет компактный носитель, большое количество соответствующих моментов, равных нулю, и $(\tilde{G}_0(r, e), \varphi(e)) \equiv 0$ для любой $\varphi \in \mathcal{E}_{-\beta-1}$. При этом согласно замечанию к теореме 3.2 выполнено условие (3.29).

Заметим, что интеграл в (3.33) корректно определен для любой $\psi \in W_J$ и определяет обобщенную функцию из W'_J , которая в силу (3.29) также принадлежит $AO_\rho(V_{J, \mathcal{F}})$. Обозначим эту обобщенную функцию через $\tilde{F}_2(r, e)$. Продолжим $\tilde{G}_0(r, e)$ на все W_J с сохранением нужного количества нулевых моментов.

Теперь заметим, что $\tilde{F}_2 + \tilde{G}_0$ и $F - h + \Delta$ совпадают на $W_{J_\emptyset}$ и принадлежат $AO_\rho(V_{J,\mathcal{F}})$. Поэтому они отличаются на обобщенную функцию $\Delta_1(r, e)$, сосредоточенную в нуле, причем $\Delta_1(r, e) \in AO_\rho(V_{J,\mathcal{F}})$. Другими словами, существуют число M , обобщенные функции $\Psi_\lambda(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$, $\lambda \in J$, $\lambda \leq M$, такие, что

$$F - h + \Delta = \tilde{F}_2 + \tilde{G}_0 + \Delta_1, \quad \Delta_1(r, e) = \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < M}} \Psi_\lambda(e) \otimes \Delta_\lambda(r). \quad (3.34)$$

Те слагаемые в сумме для $\Delta_1(r, e)$, которые обладают квазиасимптотикой (может даже тривиальной) относительно $\rho(k)$ на всем W_J , объединим в сумму, которую обозначим через Δ_2 . Так как $\Delta_1 \in AO_\rho(V_{J,\mathcal{F}})$, то для каждого из остальных слагаемых на $V_{J,\mathcal{F}}$ справедливо соотношение

$$\Psi_\lambda(e) \otimes \Delta_\lambda(r) \equiv 0,$$

т.е. $(\Psi_\lambda(e), \varphi(e)) = 0$, $\varphi \in \mathcal{E}_\lambda$. Сумму этих слагаемых обозначим через $\Delta_3(r, e)$. Теперь положим

$$F_2(r, e) = \tilde{F}_2(r, e) + \Delta_3(r, e), \quad F_1(r, e) = \hat{h}(r, e) + \tilde{G}_0(r, e) + \Delta_2(r, e).$$

Нетрудно проверить, что F_1 и F_2 обладают нужными свойствами.

Обратное утверждение тривиально. Теорема доказана.

Следующее утверждение описывает однородные обобщенные функции на пространстве $V_{J,\mathcal{F}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть J – допустимое множество, обобщенная функция $F(r, e) \in W'_J$ и является однородной степени β на $V_{J,\mathcal{F}}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $-\beta - 1 \notin J$, то существует $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что

$$(F(r, e), \psi(r, e)) = (r_J^\beta \otimes \Phi(e), \psi(r, e)) \quad \forall \psi \in V_{J,\mathcal{F}}; \quad (3.35)$$

- 2) если $-\beta - 1 \in J$, то существуют обобщенные функции $\Psi(e)$ и $\Phi(e)$ из $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, причем

$$(\Phi(e), \varphi(e)) = 0 \quad \forall \varphi(e) \in \mathcal{E}_{-\beta-1}, \quad (3.36)$$

такие, что для любой функции $\psi(r, e) \in V_{J,\mathcal{F}}$

$$\begin{aligned} (F(r, e), \psi(r, e)) &= (r_J^\beta \otimes \Phi(e), \psi(r, e)) + (\Delta_{-\beta-1}(r) \otimes \Psi(e), \psi(r, e)) \\ &= \int_0^\infty r^\beta \left(\Phi(e), \psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda(e) r^\lambda \right) dr + (\Psi(e), C_{-\beta-1}(e)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Отметим, что в интеграл в (3.37) сходится в силу условия ортогональности (3.36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $-\beta-1 \notin J$. Так как однородная функция степени β – асимптотически однородна относительно $\rho(k) = k^\beta$, то по теореме 3.2 для некоторого ν и для $\psi(r, e) \in V_{J, \mathcal{F}}$ имеем

$$\begin{aligned} (F(r, e), \psi(r, e)) &= \frac{1}{k^\beta} (F(kr, e), \psi(r, e)) = \frac{1}{k^{\beta+1}} \left(F(r, e), \psi\left(\frac{r}{k}, e\right) \right) \\ &= \frac{1}{k^{\beta+1}} \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\psi\left(\frac{r}{k}, e\right) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} \frac{C_\lambda(e)}{k^\lambda} r^\lambda \right) \right] \right)_e dr \\ &\quad + \frac{1}{k^\beta} (F_0(kr, e), \psi(r, e)). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Так как F_0 имеет достаточно много моментов, равных нулю, то последнее слагаемое в (3.38) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, а интеграл в (3.38) (после замены переменных $kr' = r$ и опускания штрихов) равен

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k^{\beta+\nu+N}} \int_{1/k}^\infty \left(\gamma(kr, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda(e) r^\lambda \right) \right] \right)_e dr \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty r^{\nu+\beta+N} \left(\Phi(e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda(e) r^\lambda \right) \right] \right)_e dr. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (3.26). Интегрируя теперь по частям, получаем соотношение (3.35).

Пусть теперь $-\beta-1 \in J$. Пользуясь теоремой 3.3, для любой функции $\psi(r, e) \in V_{J, \mathcal{F}}$ имеем

$$F(r, e) = F_1(r, e) + F_2(r, e), \quad F_1 \in AO_\rho(W_J),$$

и согласно случаю 3) утверждения 2.1 (“тензорно умноженному на $\mathcal{S}(S^{n-1})$ ”), существует обобщенная функция $\Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что

$$F_1(r, e) = \frac{1}{k^\beta} F_1(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Delta_{-\beta-1}(r) \otimes \Psi(e) \quad (3.39)$$

на W_J и, следовательно, и на $V_{J, \mathcal{F}}$. Для F_2 , пользуясь (3.31) и учитывая (3.29) и (3.30), имеем для любой $\psi(r, e) \in V_{J, \mathcal{F}}$

$$\begin{aligned} (F_2(r, e), \psi(r, e)) &= \frac{1}{k^\beta} (F_2(kr, e), \psi(r, e)) = \frac{1}{k^{\beta+1}} \left(F_2(r, e), \psi\left(\frac{r}{k}, e\right) \right) \\ &= \frac{1}{k^{\beta+1}} \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\psi\left(\frac{r}{k}, e\right) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} \frac{C_\lambda(e)}{k^\lambda} r^\lambda \right) \right] \right)_e dr \\ &= \frac{1}{k^{\beta+\nu+N}} \int_{\frac{1}{k}}^\infty \left(\gamma(kr, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda(e) r^\lambda \right) \right] \right)_e dr \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty r^{\nu+\beta+N} \left(\Phi_1(e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\psi(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J \\ \lambda < -\beta-1}} C_\lambda(e) r^\lambda \right) \right] \right)_e dr. \end{aligned}$$

Интегрируя теперь по частям, получим вместе с (3.39) соотношения (3.36) и (3.37). Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Учитывая условие ортогональности (3.36), можно в (3.37) под знак интеграла (в круглые скобки) добавить слагаемое $-C_{-\beta-1}(e)r^{-\beta-1}\Theta(1-r)$. Теперь утверждение 3.2 можно сформулировать следующим образом:

Для того чтобы обобщенная функция $F(r, e) \in W'_J$ была однородной степени β на $V_{J, \mathcal{F}}$, необходимо и достаточно, чтобы на $V_{J, \mathcal{F}}$ она представлялась в таком виде:

$$F(r, e) = \begin{cases} r_J^\beta \otimes \Psi(e), & \text{если } -\beta - 1 \notin J, \\ \Delta_{-\beta-1}(r) \otimes \Psi(e) + r_J^\beta \otimes \Phi(e), & \text{если } -\beta - 1 \in J, \end{cases} \quad (3.40)$$

для некоторых обобщенных функций $\Psi(e)$ и $\Phi(e)$ из $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, при этом $\Phi(e)$ должна быть ортогональна множеству функций $\mathcal{E}_{-\beta-1}$.

Отметим, что все результаты этого параграфа останутся справедливыми, если пространство $\mathcal{S}(S^{n-1})$ заменить на любое ядерное пространство Фреше.

§ 4. Представление асимптотически однородных обобщенных функций по специальным группам преобразований

В этом параграфе мы опишем асимптотически однородные функции из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ по группе преобразований, определяемой вектором $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ (см. определение 0.2). Пространства W_{J_a} и V_a введены в § 1. Предварительно сделаем следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Пусть $f_0(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и имеет компактный носитель. Если $F_0(r, e)$ – ее обобщенное сферическое представление и

$$M_\lambda[F_0](e) = 0, \quad \lambda \in J_a, \quad \lambda \leq M, \quad (4.1)$$

то

$$(f_0(t), t^j) = 0, \quad (a, j) \leq M. \quad (4.2)$$

Это следует из соотношения

$$(f_0(t), t^j) = (F_0(r, e), r^{(a, j)} E_j(e)).$$

Верно и обратное. Если выполнено соотношение (4.2), то существует обобщенное сферическое представление $F_0(r, e)$ с компактным носителем, для которого выполнено соотношение (4.1).

Действительно, пусть $F_1(r, e)$ – какое-либо обобщенное сферическое представление f_0 . Так как

$$(f_0(t), t^j) = (F_1(r, e), r^{a_1 j_1} e_1^{j_1} \dots r^{a_n j_n} e_n^{j_n}) = (F_1(r, e), r^{(a, j)} E_j(e)),$$

то $(F_1(r, e), r^\lambda \varphi(e)) = 0$ при $\lambda \in J_a$, $\lambda \leq M$, $\varphi(e) \in \mathcal{E}_\lambda^a$, т.е. $M_\lambda[F_1](e) \equiv 0$ на $\mathcal{E}_\lambda^a$. Теперь в качестве искомого представления можно взять

$$F_0(r, e) = F_1(r, e) - \sum_{\substack{\lambda \in J_a \\ \lambda \leq M}} M_\lambda[F_1](e) \otimes \Delta_\lambda(r).$$

Следующие теоремы дают описание обобщенных функций

$$f(t) \in AO_\rho^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , вектор $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, причём

$$\alpha \notin \{-(a, \bar{n}), \bar{n} = (n_1, \dots, n_n) \in \mathbb{N}^n\}. \quad (4.3)$$

Пусть ν – произвольное число, для которого $-\nu - \alpha - |a| \notin \mathbb{Z}_+$. Для того чтобы $f(t) \in AO_\rho^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(t) = f_1(t) + f_0(t), \quad (4.4)$$

где f_0 и f_1 удовлетворяют следующим условиям: $f_0(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, имеет компактный носитель и

$$(f_0(t), t^j) = 0 \quad \text{для } (a, j) \leq -\alpha - |a|, \quad (4.5)$$

существуют $N \in \mathbb{Z}_+$, функция $\gamma(r, e)$, непрерывная по r при $r > 0$ со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$ и асимптотикой

$$\gamma(r, e) \sim r^{\nu+N+|a|-1} \rho(r) \Psi(e), \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.6)$$

для некоторой $\Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, такие, что

$$\begin{aligned} (f_1(t), \varphi(t)) &= \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \sum_{\substack{(m,a) < -\alpha - |a| \\ m \in \mathbb{Z}_+^n}} \frac{1}{m!} r^{(m,a)} \varphi^{(m)}(0) E_m(e) \right) \right] \right) dr \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(t) \in AO_\rho^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ и $F(r, e)$ – ее обобщенное сферическое представление. Тогда согласно утверждению 1.2 ее обобщенное сферическое представление $F(r, e) \in AO_{\rho_1}(V_a)$, где $\rho_1(k) = k^{|a|-1} \rho(k)$ – автомодельная функция порядка $\beta = \alpha + |a| - 1$. В силу (4.1) имеем $-\beta - 1 \notin J_a$ и доказательство теоремы немедленно следует из теоремы 3.2 и замечания 4.1, с учетом того, что для функции $\varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n)$ справедливо соотношение

$$\sum_{\substack{\lambda < -\beta - 1 \\ \lambda \in J_a}} C_\lambda(e) r^\lambda = \sum_{\substack{(m,a) < -\alpha - |a| \\ m \in \mathbb{Z}_+^n}} \frac{1}{m!} r^{(m,a)} \varphi^{(m)}(0) E_m(e).$$

Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\alpha > -|a|$, то формулировка теоремы 4.1 упрощается и принимает следующий вид.

Для того чтобы $f(t) \in AO_\rho(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы существовали число $N \in \mathbb{Z}_+$ и функция $\gamma(r, e)$, непрерывная по r со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$ и асимптотикой

$$\gamma(r, e) \sim r^{N+|a|-1} \rho(r) \Psi(e), \quad r \rightarrow \infty,$$

для некоторой $\Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, такие, что для любой $\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ с носителем $\text{supp } \varphi \subset \{|t| > 1\}$ выполнено равенство

$$(f(t), \varphi(t)) = \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n) \right)_e dr.$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α , вектор $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, причем

$$\alpha \in \{-(a, \bar{n}) : \bar{n} = (n_1, \dots, n_n) \in \mathbb{N}^n\}, \quad (4.8)$$

и произвольные числа μ и ν таковы, что

$$-\mu - \alpha - |a| \notin \mathbb{Z}_+, \quad -\nu - \alpha - |a| \in \mathbb{Z}_+.$$

Для того чтобы $f(t) \in AO_\rho^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_0(t), \quad (4.9)$$

где обобщенные функции $f_i(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $i = 0, 1, 2$, удовлетворяют следующим условиям: $f_0(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, имеет компактный носитель и

$$(f_0(t), t^j) = 0 \quad \text{для } (a, j) \leq -\alpha - |a|, \quad (4.10)$$

существуют $N \in \mathbb{Z}_+$ ($N > -\alpha - |a| - \nu$), функция $\gamma(r, e)$, непрерывная по r при $r > 0$ со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$ и асимптотикой

$$\gamma(r, e) \sim r^{\nu+N+|a|-1} \rho(r) \Psi(e), \quad r \rightarrow \infty, \quad \text{на } \mathcal{S}(S^{n-1}) \quad (4.11)$$

с некоторой $\Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, причем

$$\begin{aligned} (f_1(t), \varphi(t)) = & \int_1^\infty \left(\gamma(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\nu} \left(\varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \sum_{\substack{(m,a) < -\alpha - |a| \\ m \in \mathbb{Z}_+^n}} \frac{1}{m!} r^{(m,a)} \varphi^{(m)}(0) E_m(e) \right) \right] \right)_e dr \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \end{aligned} \quad (4.12)$$

существуют $N \in \mathbb{Z}_+$, функция $\omega(r, e)$, непрерывная по r при $r > 0$ со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$ и асимптотикой

$$\omega(r, e) \sim r^{\mu+N+|a|-1} \rho(r) \Phi(e), \quad r \rightarrow \infty, \quad \text{на } \mathcal{S}(S^{n-1}) \quad (4.13)$$

с некоторой $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$,

$$(\omega(r, e), E_j(e)) \equiv 0 \quad \text{для всех } j \text{ таких, что } (j, a) = -\alpha - |a|, \quad (4.14)$$

причем

$$\begin{aligned} (f_2(t), \varphi(t)) = & \int_1^\infty \left(\omega(r, e), \left(\frac{d}{dr} \right)^N \left[r^{-\mu} \left(\varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \sum_{\substack{(m,a) < -\alpha - |a| \\ m \in \mathbb{Z}_+^n}} \frac{1}{m!} r^{(m,a)} \varphi^{(m)}(0) E_m(e) \right) \right] \right)_e dr \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.1, только теперь вместо теоремы 3.2 следует воспользоваться теоремами 3.3 и 3.1.

Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Нетрудно видеть, что теоремы 4.1 и 4.2 останутся справедливыми, если вместо непрерывности функций $\gamma(r, e)$ и $\omega(r, e)$, как функций со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, потребовать лишь их слабую измеримость, т.е. потребовать, чтобы для любой функции $\varphi(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$ функции $(\gamma(r, e), \varphi(e))_e$ и $(\omega(r, e), \varphi(e))_e$ были измеримыми функциями по r .

Далее мы опишем квазиоднородные обобщенные функции из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, точнее, функции, однородные относительно группы преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}_+^n$. Для такой квазиоднородной функции $f(t)$ степени α имеем

$$\begin{aligned} (f(t), \varphi(t)) &= \frac{1}{k^\alpha} (f(k^{a_1} t_1, \dots, k^{a_n} t_n), \varphi(t)) \\ &= \frac{1}{k^{\alpha+|a|-1}} (F(kr, e), \varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n)) \\ &= (F(r, e), \varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

(см. (1.20)). Поэтому ее обобщенное сферическое представление является однородной по r функцией степени $\beta = \alpha + |a| - 1$ на V_a . Из (3.40) для любой $\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ получаем

$$(f(t), \varphi(t)) = \begin{cases} (r_{J_a}^{\alpha+|a|-1} \otimes \Psi(e), \varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n)), & \text{если } -\alpha - |a| \notin J_a; \\ (\Delta_{-\alpha-|a|}(r) \otimes \Psi(e) + r_{J_a}^{\alpha+|a|-1} \otimes \Phi(e), \varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n)), & \text{если } -\alpha - |a| \in J_a. \end{cases}$$

Здесь $\Psi(e)$ и $\Phi(e)$ – обобщенные функции из $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, причем $(\Phi(e), \psi(e)) = 0$ при любой $\psi(e) \in \mathcal{E}_{-\alpha-|a|}^a$.

Таким образом, справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. Для того чтобы обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ была однородной степени α относительно группы преобразований, определяемой вектором $a \in \mathbb{R}_+^n$, необходимо и достаточно, чтобы для нее выполнялись следующие условия:

1) если $-\alpha \notin \{(a, \ell), \ell \in \mathbb{N}^n\}$, то существует функция $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что

$$\begin{aligned} (f(t), \varphi(t)) &= \int_0^\infty r^{\alpha+|a|-1} \left(\Phi(e), \left(\varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\substack{(m,a) < -\alpha-|a| \\ m \in \mathbb{Z}_+^n}} r^{(m,a)} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) E_m(e) \right) \right)_e dr \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \quad (4.16) \end{aligned}$$

2) если $-\alpha \in \{(a, \ell), \ell \in \mathbb{N}^n\}$, то существуют, во-первых, обобщенная функция $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, для которой при любом j , удовлетворяющем условию $(j, a) = -\alpha - |a|$, выполнено равенство

$$(\Phi(e), E_j(e)) = 0, \quad (4.17)$$

и, во-вторых, постоянные A_m , где мультииндекс $m \in \mathbb{Z}_+^n$, $(m, a) = -\alpha - |a|$, такие, что

$$\begin{aligned} (f(t), \varphi(t)) &= \int_0^\infty r^{\alpha+|a|-1} \left(\Phi(e), \left(\varphi(r^{a_1} e_1, \dots, r^{a_n} e_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\substack{(m,a) < -\alpha - |a| \\ m \in \mathbb{Z}_+^n}} r^{(m,a)} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) E_m(e) \right) \right) dr \\ &+ \sum_{\substack{(m,a) = -\alpha - |a| \\ m \in \mathbb{Z}_+^n}} A_m \varphi^{(m)}(0) \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Нетрудно показать, что обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ квазиоднородна степени α относительно группы преобразований аргумента, определяемой вектором $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, только тогда, когда она удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^n a_i t_i \frac{f(t)}{dt_i} = \alpha f(t), \quad (4.19)$$

так что утверждение 4.3 дает представление обобщенных функций, удовлетворяющих обобщенному уравнению Эйлера (4.19).

§ 5. Некоторые применения полученных результатов

В этом параграфе мы рассмотрим обобщенные функции из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, асимптотически однородные в нуле по группе преобразований, определяемой вектором a (см. определение 0.2), и изучим их связь с особенностями функций, голоморфных в трубчатых областях над ортантами.

Пусть $f(z) \in H(T^C)$, где C – острый, выпуклый, открытый конус в $\mathbb{R}^n$, а $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ – трубчатая область над конусом C . Это означает, что $f(z)$ голоморфна в T^C и удовлетворяет в этой области оценке

$$|f(z)| \leq A \frac{(1 + |z|)^d}{\Delta_C^b(y)}, \quad z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in C, \quad (5.1)$$

с некоторыми постоянными A, b, d . Здесь $\Delta_C(y)$ – расстояние от $y \in C$ до границы конуса C (см. [7]).

Известно, что у $f(z)$ существует граничное значение в $\mathcal{S}'$ при $y \rightarrow +0$, так что

$$f(x) = b.v.f(z) = \lim_{y \rightarrow +0} f(x + iy), \quad y \in C', \quad (5.2)$$

где $C' \Subset C$.

В качестве конусов C далее будут служить ортанты $\{\pm y_i > 0\}$ в $\mathbb{R}^n$. Их 2^n штук. Перенумеруем их и обозначим ℓ -й ортант через $\mathbb{R}_\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, 2^n$.

Отметим, что расстояние от $y \in \mathbb{R}_\ell^n$ до границы ортанта $\Delta_{\mathbb{R}_\ell^n}(y) = \min\{|y_i|, i = 1, \dots, n\}$. Кроме того, для любого вектора $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ группа $\{U_k^{-a}, k > 0\}$ оставляет инвариантной каждую из трубчатых областей $T^{\mathbb{R}_\ell^n}$. Это позволяет ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция и $a = (a_1, \dots, a_n)$ – вектор из $\mathbb{R}_+^n$. Положим $z = |z|\zeta$, где $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $|\zeta| = 1$. Будем говорить, что голоморфная функция $f(z) \in H(T^{\mathbb{R}_\ell^n})$ ведет себя в нуле вдоль траекторий группы $\{U_k^{-a}\}$ как $\rho(k)$, если

1) существует функция $g_\ell(\zeta)$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} f(U_k^{-a}\zeta) = g_\ell(\zeta) \quad \forall \zeta \in T^{\mathbb{R}_\ell^n} \cap \{|\zeta| = 1\}; \quad (5.3)$$

2) существуют числа b и c такие, что

$$\left| \frac{1}{\rho(k)} f(U_k^{-a}\zeta) \right| \leq \frac{c}{\varphi^b}, \quad \zeta \in T^{\mathbb{R}_\ell^n} \cap \{|\zeta| = 1\}, \quad (5.4)$$

где $\varphi = \min_i \{|\operatorname{Im} \zeta_i|, i = 1, 2, \dots, n\}$, т.е. φ – это расстояние от точки на единичной сфере, определяемой вектором $\operatorname{Im} \zeta$, до границы ортанта $\mathbb{R}_\ell^n$.

При этом будем писать

$$f(U_k^{-a}z) \sim \rho(k)g_\ell(\zeta), \quad k \sim \infty, \quad \zeta \in T^{\mathbb{R}_\ell^n} \cap \{|\zeta| = 1\}.$$

Имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть $f(z) \in H(T^{\mathbb{R}_q^n})$ и $f(x) = b.v.f(z)$. Для того чтобы $f(x) \in AO_\rho^{-a}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(U_k^{-a}z) \sim \rho(k)g_q(\zeta), \quad k \sim \infty, \quad \zeta \in T^{\mathbb{R}_q^n} \cap \{|\zeta| = 1\}.$$

Доказательство непосредственно следует из общей тауберовой теоремы (см. [4; § 4.2]). Для этого надо применить к $f(x)$ преобразование Фурье и учесть, что

$$\frac{1}{\rho_1(k)} F[f(U_k^a t)](x) = \frac{1}{\rho(k)} F[f(t)](U_k^{-a}x).$$

Здесь $F[\cdot]$ означает преобразование Фурье и $\rho(k) = k^{|a|} \rho_1(k)$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$, и $f(x) \in AO_\rho^{-a}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, где вектор $a \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда существуют

$$f_\ell(z) \in H(T^{\mathbb{R}_\ell^n}), \quad \ell = 1, 2, \dots, 2^n,$$

такие, что

$$f_\ell(U_k^{-a}z) \sim \rho(k)g_\ell(\zeta), \quad k \sim \infty, \quad \zeta \in T^{\mathbb{R}_\ell^n} \cap \{|\zeta| = 1\}, \quad (5.5)$$

причем

$$f(x) = \sum_{\ell} b.v.f_\ell(z). \quad (5.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n = 1$, как будет доказано далее, утверждение теоремы 5.1 останется справедливым для некритических порядков автомодельности $\rho(k)$, т.е. для $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Отметим, что в этом случае без ограничения общности можно считать что $a = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к обратному преобразованию Фурье: $\tilde{f}(t) = F[f(x)](t)$. Отметим, что $\tilde{f}(t) \in AO_{\rho_1}^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$, где $\rho_1(k) = k^{-|a|}\rho(k)$. Достаточно доказать, что $\tilde{f}(t)$ можно представить в виде суммы $\sum_{\ell} \tilde{f}_{\ell}(t)$, где $\tilde{f}_{\ell}(t) \in AO_{\rho_1}^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ и $\text{supp } \tilde{f}_{\ell}(t) \subset \mathbb{R}_{\ell}^n$ (см. утверждение 5.1).

Считая, что порядок $\rho(k)$ равен α , рассмотрим два случая.

1) $\alpha \neq -(a_1 n_1 + \dots + a_n n_n)$, где $n_i = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n$. Тогда согласно теореме 4.1 (см. (4.2)–(4.5)) $\tilde{f}(t) = f_1(t) + f_0(t)$, где $f_0(t)$ имеет компактный носитель и достаточно много моментов, равных нулю. Пусть, например,

$$(f_0(t), t^j) = 0, \quad |j| \leq N, \quad (5.7)$$

с некоторым N . Функция $f_1(t)$ представлена формулой (4.5), с некоторым ν таким, что $-\nu - \alpha \notin \mathbb{Z}_+$, где функция $\gamma(r, e)$ непрерывна по r со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$ и

$$\gamma(r, e) \sim r^{\nu+N-1} \rho(r) \Psi(e), \quad r \rightarrow \infty, \quad (5.8)$$

для некоторой $\Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$. Так как функция $\gamma(r, e)$ непрерывна по r , то она разбивается на сумму $\sum_{\ell=1}^{2^n} \gamma^{\ell}(r, e)$ измеримых по r функций со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, имеющих ту же асимптотику при $r \rightarrow +\infty$ и $\text{supp } \gamma^{\ell}(r, e) \subset S^{n-1} \cap \mathbb{R}_{\ell}^n$ при любом $r > 1$. (См. доказательство теоремы 6.1 и теоремы П2 работы [8], в которых использованы результаты работ [9], [10].) Обозначим через $f_{1\ell}(t)$ обобщенную функцию, определяемую формулой (4.5), в которую вместо $\gamma(r, e)$ подставлена функция $\gamma^{\ell}(r, e)$ с индексом ℓ .

Далее, обобщенную функцию $f_0(t)$ представим в виде

$$f_0(t) = \sum_{\ell} f_{0\ell}(t), \quad \text{где } \text{supp } f_{0\ell}(t) \subset \mathbb{R}_{\ell}^n \cap \{|t| \leq 1\}. \quad (5.9)$$

Подправим $f_{0\ell}$ линейными комбинациями дельта-функций и их производных так, чтобы для каждой из них выполнялось условие (5.7). Для этого подберем числа

$$c_m^1, \quad m = (m_1, \dots, m_n), \quad |m| \leq M$$

(с достаточно большим M), так, чтобы

$$\left(f_{01}(t) + \sum_{|m|=1}^M c_m^1 \delta^{(m)}(t), t^j \right) = 0, \quad |j| \leq N. \quad (5.10)$$

Положим

$$\tilde{f}_{01}(t) = f_{01}(t) + \sum_{|m|=1}^M c_m^1 \delta^{(m)}(t).$$

Предположим, что для $k = 1, 2, \dots, \ell - 1$, $1 < \ell < 2^n$, числа c_m^k уже выбраны и функции $\tilde{f}_{0k}(t)$ уже построены. Подберем числа c_m^ℓ так, чтобы

$$\left(f_{0\ell}(t) - \sum_{|m|=1}^M c_m^{\ell-1} \delta^{(m)}(t) + \sum_{|m|=1}^M c_m^\ell \delta^{(m)}(t), t^j \right) = 0. \quad (5.11)$$

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{0\ell}(t) &= f_{0\ell}(t) - \sum_{|m|=1}^M c_m^{\ell-1} \delta^{(m)}(t) + \sum_{|m|=1}^M c_m^\ell \delta^{(m)}(t), \quad 1 < \ell < 2^n, \\ \tilde{f}_{02^n}(t) &= f_{02^n}(t) - \sum_{|m|=1}^M c_m^{2^n-1} \delta^{(m)}(t). \end{aligned}$$

Очевидно, что для $\tilde{f}_{0\ell}$ выполнены соотношения (5.7) и (5.9), а именно,

$$(\tilde{f}_{0\ell}(t), t^j) = 0, \quad |j| \leq N, \quad f_0(t) = \sum_{\ell} \tilde{f}_{0\ell}(t).$$

Далее, положим $\tilde{f}_\ell(t) = f_{1\ell}(t) + \tilde{f}_{0\ell}(t)$. По теореме 4.1 (см. также замечание к теореме 4.2) $\tilde{f}_\ell \in AO_{\rho_1}^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ и ее носитель принадлежит $\overline{\mathbb{R}}_\ell^n$. Теорема в случае 1) доказана, в том числе и при $n = 1$.

2) Пусть теперь $\alpha \in \{-(a_1 n_1 + \dots + a_n n_n), n_i = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n\}$. В этом случае согласно теореме 4.2 (см. (4.9)–(4.15)) имеем $\tilde{f}(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t)$, где $f_0(t)$ имеет компактный носитель и достаточно много моментов, равных нулю (см. (5.7)). Функция $f_1(t)$ представлена формулой (4.12), где функция $\gamma(r, e)$ непрерывна по r со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, с некоторым ν таким, что $-\nu - \alpha \in \mathbb{Z}_+$, и имеет асимптотику, определяемую формулой (5.8). Функция $f_2(t)$ представлена формулой (4.15), где функция $\omega(r, e)$ непрерывна по r со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, с некоторым μ таким, что $-\mu - \alpha \notin \mathbb{Z}_+$ и имеет асимптотику, определяемую формулой

$$\omega(r, e) \sim r^{\mu+N-1} \rho(r) \Phi(e), \quad r \rightarrow \infty, \quad (5.12)$$

с некоторой $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, и ортогональна пространству $\mathcal{E}_{-\alpha}^a$, т.е.

$$(\omega(r, e), \varphi(e)) \equiv 0 \quad \forall \varphi(e) \in \mathcal{E}_{-\alpha}^a. \quad (5.13)$$

С функциями f_0 и f_1 поступаем точно так же, как и в предыдущем случае, т.е. находим $f_{0\ell}(t)$ и $f_{1\ell}(t)$ с носителем в $\overline{\mathbb{R}}_\ell^n$ соответственно, причем каждая $f_{0\ell}$ имеет компактный носитель и многие ее моменты равны нулю (см. (5.7)). С другой стороны, по той же теореме 4.2 $f_{1\ell}(t) \in AO_{\rho_1}^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ и выполнены соотношения

$$f_0(t) = \sum_{\ell} f_{0\ell}(t), \quad f_1(t) = \sum_{\ell} f_{1\ell}(t).$$

Для функции $f_2(t)$ покажем, что она представляется в виде суммы $\sum_{\ell} \tilde{f}_{2,\ell}(t)$, где

$$\text{supp } \tilde{f}_{2,\ell} \subset \overline{\mathbb{R}}_\ell^n, \quad \tilde{f}_{2,\ell}(t) \in AO_{\rho_1}^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Действительно, так как $\omega(r, e)$ непрерывна по r , то она разбивается на сумму $\sum_{\ell=1}^{2^n} \omega^\ell(r, e)$ измеримых по r функций со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, имеющих ту же асимптотику при $r \rightarrow +\infty$ и $\text{supp } \omega^\ell(r, e) \subset S^{n-1} \cap \mathbb{R}_\ell^n$ при любом r . Подправим функции ω^ℓ так, чтобы для каждой из них выполнялись соотношения (5.13).

Для этого предварительно заметим, что пространство $\mathcal{E}_{-\alpha}^a$ конечномерно. Пусть $\{E_s(e), s = 1, \dots, M\}$ – его базис. Покажем, что для любой точки $e_0 \in S^{n-1}$ существуют обобщенные функции $A_s(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, сосредоточенные в точке e_0 на сфере (т.е. линейные комбинации $\delta(e - e_0)$ и их производных в некоторой заранее выбранной карте в окрестности точки e_0), такие, что

$$(A_\tau(e), E_s(e)) = \delta_{\tau s}, \quad \tau, s = 1, 2, \dots, M. \quad (5.14)$$

Можно также считать, что в этой карте все $E_s(e)$ аналитичны.

Действительно, зафиксируем точку e_0 на сфере и найдем число N такое, чтобы M векторов $\{E_s^{(i)}(e_0), |i| \leq N\}$, $s = 1, \dots, M$, были линейно независимы в $\mathbb{C}^n$. Такое N найдется, так как в противном случае для любого N нашелся бы вектор $C^N = (c_1^N, \dots, c_M^N)$, $|C| = 1$, такой, что

$$\sum_{s=1}^M c_s^N \{E_s^{(i)}(e_0)\} = 0 \quad \forall |i| \leq N. \quad (5.15)$$

Выбирая из последовательности $\{C^N, N = 1, 2, \dots\}$ некоторую сходящуюся подпоследовательность (например сходящуюся к $C = (c_1, \dots, c_n)$), получим, что все производные ненулевой функции $\psi(e) = \sum_{s=1}^M c_s E_s(e)$, аналитической в окрестности e_0 на сфере, обращаются в нуль, что невозможно.

Теперь поскольку в матрице $\{E_s^{(i)}(e_0)\}$, $s = 1, \dots, M$, $|i| \leq N$, в силу линейной независимости строк существует минор $M \times M$ с детерминантом, отличным от нуля, то линейной заменой он приводится к единичной матрице. Таким образом, найдутся числа $c_{r,i}$ такие, что

$$\sum_{|i| \leq N} c_{r,i} E_s^{(i)}(e_0) = \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, \dots, M,$$

что и доказывает (5.14).

Поскольку $n > 1$, то без ограничения общности можно считать, что ортанты с соседними номерами имеют хотя бы один общий луч. Для каждого $\ell = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ фиксируем луч, принадлежащий $\mathbb{R}_\ell^n \cap \mathbb{R}_{\ell+1}^n$, и точку $e_0^\ell \in S^{n-1}$ – точку пересечения этого луча с единичной сферой. Пусть $A_\tau^\ell(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, $\tau = 1, \dots, M$, – обобщенные функции, при каждом ℓ удовлетворяющие соотношениям (5.17) с точкой e_0 равной e_0^ℓ . Далее положим

$$\begin{cases} \widehat{\omega}^1(r, e) = \omega^1(r, e) - \mathcal{D}_1(r, e), \\ \widehat{\omega}^\ell(r, e) = \omega^\ell(r, e) + \mathcal{D}_{\ell-1}(r, e) - \mathcal{D}_\ell(r, e), & 2 \leq \ell \leq 2^n - 1, \\ \widehat{\omega}^{2^n}(r, e) = \omega^{2^n}(r, e) + \mathcal{D}_{2^n-1}(r, e), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1(r, e) &= \sum_{\tau=1}^M (\omega^1(r, e), E_\tau(e)) A_\tau^1(e), \\ \mathcal{D}_\ell(r, e) &= \sum_{\tau=1}^M (\omega^\ell(r, e) + \mathcal{D}_{\ell-1}(r, e), E_\tau(e)) A_\tau^\ell(e), \quad \ell = 2, \dots, 2^n - 1.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Нетрудно видеть, что по построению

$$\sum_{\ell=1}^{2^n} \hat{\omega}^\ell(r, e) = \omega(r, e), \quad \text{supp } \hat{\omega}^\ell(r, e) \subset \overline{\mathbb{R}}_\ell^n, \quad \ell = 1, 2, \dots, 2^n, \tag{5.17}$$

и, кроме того, выполнено условие ортогональности

$$(\hat{\omega}^\ell(r, e), E_s(e)) \equiv 0, \quad s = 1, \dots, M, \tag{5.18}$$

для $\ell = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ в силу (5.14) и для $\ell = 2^n$ в силу (5.13). Очевидно также, что для $\hat{\omega}^\ell(r, e)$ выполнено асимптотическое соотношение, аналогичное (5.12). Теперь соотношение (4.15), куда вместо $\omega(r, e)$ подставлено $\hat{\omega}^\ell(r, e)$, согласно теореме 4.2 (см. также замечание к ней) дает обобщенную функцию $f_{2\ell}(t) \in AO_{\rho_1}^a(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ с носителем в $\overline{\mathbb{R}}_\ell^n$. Полагая $\tilde{f}_\ell(t) = f_{0\ell}(t) + f_{1\ell}(t) + f_{2\ell}(t)$, завершаем доказательство теоремы.

Список литературы

- [1] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985; пер. с англ.: Eu. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., **508**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
- [2] O. von Grudzinski, *Quasihomogeneous distributions*, North-Holland Math. Stud., **165**, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [3] Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, “Асимптотически однородные обобщенные функции в сферическом представлении и некоторые применения”, *Докл. РАН*, **405**:1 (2005), 18–21; англ. пер.: Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav’yalov, “Asymptotically homogeneous generalized functions in spherical representation and applications”, *Dokl. Math.*, **72**:3 (2005), 839–842.
- [4] В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, М., 1986.
- [5] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Macmillan, New York–London, 1966.
- [6] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, вып. 1, Физматгиз, М., 1958; англ. пер.: I. M. Gel’fand, G. E. Shilov, *Generalized functions. Vol. I: Properties and operations*, Academic Press, New York–London, 1964.
- [7] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir, Moscow, 1979.
- [8] Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов, “Асимптотически однородные обобщенные функции и граничные свойства функций, голоморфных в трубчатых конусах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:6 (2006), 45–92; англ. пер.: Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav’yalov, “Asymptotically homogeneous generalized functions and boundary properties of functions holomorphic in tubular cones”, *Izv. Math.*, **70**:6 (2006), 1117–1164.

- [9] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 4-е изд., Наука, М., 1976; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1970.
- [10] В. С. Владимиров, *Методы теории функции многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of functions of many complex variables*, Cambridge, MA–London, MIT Press, 1966.

Ю. Н. Дрождинов (Yu. N. Drozhzhinov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: drozzin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
17.04.2008 и 27.11.2008

Б. И. Завьялов (B. I. Zav'yalov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: bzavial@mi.ras.ru