Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Хрычёв, Оптимальное программное управление: существование и аппроксимация, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 5, 125–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm567>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 10:08:40

УДК 517.977

Д. А. Хрычѐв

Оптимальное программное управление: существование и аппроксимация

Доказано существование оптимального программного управления для задачи Майера со случайными параметрами при достаточно общих условиях на динамическую систему. Рассмотрен способ получения субоптимальных управлений, основанный на дискретизации распределения случайных параметров. Показана возможность распространения указанных результатов на задачи с распределенными параметрами.

Библиография: 11 названий.

Введение

Управление стохастической системой, не использующее информации о ее состоянии и зависящее, следовательно, только от времени, называют *программным*. Различным вопросам, связанным с программным управлением, посвящена довольно обширная литература; в то же время, этот раздел теории оптимального управления разработан гораздо менее подробно, чем, например, теория управления детерминированной системой или теория адаптивного управления стохастической системой.

В настоящей работе рассмотрены два вопроса: о существовании оптимального программного управления и о приближенном его отыскании. Что касается первого, то здесь автор стремился получить аналоги соответствующих результатов для детерминированных систем [1], [2], по возможности не усиливая налагаемых на задачу ограничений. Следует отметить, что в отношении необходимых условий оптимальности подобная работа уже была проделана в [3].

В основном сформулированное намерение удалось выполнить: в приводимых ниже теоремах существования 1.1 и 1.2 имеется лишь одно существенное ограничение по сравнению с детерминированным случаем — требование разделения переменной u (управление) и переменных x и ω (фазовая переменная и случайный параметр) в правых частях уравнений состояния системы (условие д) в теореме 1.1).

Второй вопрос — о субоптимальных управлениях — решается путем перехода от исходной стохастической задачи к детерминированной, получающимся в результате дискретизации распределения случайных параметров (т.е. замены указанного распределения близкими ему атомарными мерами). Оказалось, что эффективность такой аппроксимации существенно зависит от фазовых ограничений. Например, в случае их отсутствия оптимальные (или субоптимальные) управления для приближенных задач образуют минимизирующую последовательность для функционала качества исходной задачи, причем даже при более слабых условиях, чем в теоремах существования (в частности, в отсутствие упоминавшегося условия разделения переменных). В то же время, при наличии фазового ограничения вида

$$x(\cdot) \in X \quad \text{п.н.,}$$

где X – замкнутое подмножество пространства $C(0, 1; \mathbb{R}^n)$ траекторий динамической системы, можно гарантировать лишь сходимость минимальных значений функционалов качества приближенных задач к минимуму функционала качества исходной. Рассмотрены также другие случаи фазовых ограничений.

В § 2 показана возможность перенесения описанных результатов на системы с распределенными параметрами. Все рассмотрение проведено на примере нелинейного уравнения гиперболического типа со случайными правой частью и начальными условиями, управляемого аддитивно входящей в правую часть функцией.

Несколько слов о методах, с помощью которых получены результаты работы.

Методы, использованные при доказательстве теорем существования, частью аналогичны применявшимся в уже упомянутых работах [1], [2] (в разделе, касающемся задач с распределенными параметрами, – в работе [4]), частью же примыкают к методам построения статистических решений уравнений с частными производными, разработанными М. И. Вишиком с соавторами [5].

Автор не встречал описаний предложенного им в настоящей работе способа аппроксимации оптимального управления. При этом метод дискретизации распределения, лежащий в его основе, неоднократно применялся при решении других задач; в частности, в [6] он был использован при доказательстве разрешимости стохастического гиперболического уравнения, аналогичного приведенному в § 2.

§ 1. Системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями

Пусть U – метризуемый компакт, Ω – полное сепарабельное метрическое пространство с метрикой ρ_Ω и $\varphi(t, x, u, \omega)$ – функция со значениями в $\mathbb{R}^n$, заданная на $(0, 1) \times \mathbb{R}^n \times U \times \Omega$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t), \omega) \quad \text{при п.в. } t \in (0, 1), \quad (1.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

$$u(t) \in U_t \quad \text{при п.в. } t \in (0, 1), \quad (1.3)$$

где U_t , $t \in (0, 1)$, – заданные подмножества U . Параметр ω и начальное значение x_0 предполагаются случайными, а $u(t)$ играет роль управляющей функции. Таким образом, решение $x(t)$ задачи (1.1), (1.2) (если оно существует) зависит от управления $u = u(\cdot)$ и случайного вектора $\lambda = (x_0, \omega)$:

$$x(t) = x(t, u, \lambda).$$

Введем функционал качества в форме Майера:

$$\mathcal{J}(u) = Mg(x(1)) \rightarrow \inf, \quad (1.4)$$

где $g(x)$ – непрерывная функция $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, M – оператор математического ожидания.

Задача (1.1)–(1.4) дополняется фазовым ограничением одного из следующих двух видов:

$$x(\cdot) \in X \quad \text{п.н.}, \quad (1.5)$$

где X – некоторое подмножество пространства $\mathcal{C} = C(0, 1; \mathbb{R}^n)^1$, либо

$$\mathfrak{M}_l(\cdot) \in X_l, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (1.6)$$

где $\mathfrak{M}_l(t) = M[\bigotimes^l x(t)]$, $t \in [0, 1]$, $-l$ -й момент решения $x(t)$, X_l – заданное подмножество пространства $\mathcal{C}_l = C(0, 1; \bigotimes^l \mathbb{R}^n)$, $l = 1, 2, \dots, L$ (пространство $\mathcal{C}_1$, очевидно, совпадает с $\mathcal{C}$).

Сформулируем условия, обеспечивающие разрешимость задачи (1.1), (1.2). При этом будем использовать запись $K \Subset Y$ для обозначения того факта, что K является компактным подмножеством топологического пространства Y .

а) Функция $\varphi(t, x, u, \omega)$ является каратеодориевской по аргументам $t \in (0, 1)$ и $(x, u, \omega) \in \mathbb{R}^n \times U \times \Omega$ (т.е. при п.в. $t \in (0, 1)$ $\varphi(t, x, u, \omega)$ непрерывна по совокупности переменных x, u, ω и при всех $(x, u, \omega) \in \mathbb{R}^n \times U \times \Omega$ измерима по t). Для произвольного $R > 0$ и каждого $K \Subset \Omega$ существует неотрицательная функция $f_{R,K}(t) \in L_1(0, 1)$ такая, что при п.в. $t \in (0, 1)$ $|\varphi(t, x, u, \omega)| \leq f_{R,K}(t) \quad \forall u \in U, x \in B_R = \{|x| \leq R\}$ и $\omega \in K$.

б) Для произвольных $R > 0$ и $K \Subset \Omega$ существует функция $d_{R,K}(t) \in L_1(0, 1)$ такая, что при п.в. $t \in (0, 1)$ $|\varphi(t, x, u, \omega) - \varphi(t, x', u, \omega)| \leq d_{R,K}(t)|x - x'| \quad \forall u \in U, x, x' \in B_R$ и $\omega \in K$.

в) Существуют измеримые по Борелю неотрицательные функции $V(x, \omega)$ и $c(\omega)$, ограниченные на компактных подмножествах пространств $\mathbb{R}^n \times \Omega$ и Ω соответственно, такие, что $V(\cdot, \omega) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$, $V(x, \omega) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ равномерно по ω , пробегающему компактные подмножества Ω , и при п.в. $t \in (0, 1)$ $\nabla_x V(x, \omega) \cdot \varphi(t, x, u, \omega) \leq c(\omega)V(x, \omega) \quad \forall u \in U, x \in \mathbb{R}^n$ и $\omega \in \Omega$.

Выполнение условий а)–в) гарантирует существование на отрезке $[0, 1]$ и единственность решения $x(t, u, \lambda)$ задачи (1.1), (1.2) при любой измеримой управляющей функции $u = u(t)$ со значениями в U и любом $\lambda = (x_0, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$. В дальнейшем множество измеримых управлений $u: (0, 1) \rightarrow U$ будем обозначать через $\mathcal{U}$, а условия а)–в) будем считать выполненными на протяжении всего параграфа.

Следующая лемма доказывается применением стандартных методов оценивания.

ЛЕММА 1.1. *Для произвольного $R > 0$ и каждого $K \Subset \Omega$ найдутся константы M и $C > 0$ и монотонно возрастающие на $\mathbb{R}_+$ функции $\xi(\varepsilon)$ и $\zeta(\varepsilon)$, стремящиеся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0+$, такие, что при любом управлении $u \in \mathcal{U}$ и любых $t, t' \in [0, 1]$, $\lambda = (x_0, \omega)$, $\lambda' = (x'_0, \omega') \in B_R \times K$ выполняются неравенства*

$$|x(t, u, \lambda)| \leq M, \quad (1.7)$$

$$|x(t, u, \lambda) - x(t', u, \lambda')| \leq C|x_0 - x'_0| + \xi(\rho_\Omega(\omega, \omega')) + \zeta(|t - t'|). \quad (1.8)$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Для произвольного управления $u \in \mathcal{U}$ отображение $\lambda \rightarrow x(\cdot, u, \lambda)$ действует непрерывно из $\mathbb{R}^n \times \Omega$ в $\mathcal{C}$.*

Условимся обозначать символом $\mathcal{B}(Y)$ борелевскую σ -алгебру топологического пространства Y . Пусть $\Lambda = \mathbb{R}^n \times \Omega$ – пространство случайных параметров задачи (1.1), (1.2), μ – распределение на $\mathcal{B}(\Lambda)$ случайного вектора $\lambda = (x_0, \omega)$. Для

¹Здесь и ниже $C(0, 1; V)$ – пространство непрерывных функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, со значениями в метрическом пространстве V .

произвольного управления $u \in \mathcal{U}$ обозначим через Π_u совместное распределение на $\mathcal{B}(\Lambda \times \mathcal{C})$ случайного вектора λ и решения $x(\cdot, u, \lambda)$:

$$\Pi_u(B) = \mu\{\lambda : (\lambda, x(\cdot, u, \lambda)) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\Lambda \times \mathcal{C}). \quad (1.9)$$

ЛЕММА 1.2. Семейство мер $\{\Pi_u : u \in \mathcal{U}\}$ слабо компактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, и пусть $R_\varepsilon > 0$ и $K_\varepsilon \in \Omega$ таковы, что $\mu(B_{R_\varepsilon} \times K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Для каждого $u \in \mathcal{U}$ определим множество

$$Q_{\varepsilon, u} = \{(\lambda, x(\cdot, u, \lambda)) : \lambda \in B_{R_\varepsilon} \times K_\varepsilon\} \in \mathcal{B}(\Lambda \times \mathcal{C})$$

и положим $Q_\varepsilon = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} Q_{\varepsilon, u}$. Из леммы 1.1 с учетом теоремы Арцела следует, что множество Q_ε подкомпактно, а его замыкание $\overline{Q}_\varepsilon$, следовательно, компактно в $\Lambda \times \mathcal{C}$. Далее, для любого управления $u \in \mathcal{U}$ $\Pi_u(\overline{Q}_\varepsilon) \geq \Pi_u(Q_{\varepsilon, u}) = \mu(B_{R_\varepsilon} \times K_\varepsilon)$, и доказательство леммы завершается ссылкой на теорему Прохорова [7; теорема 6.1].

Для произвольного управления $u \in \mathcal{U}$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}_u$, действующий на вектор $(\lambda, x) = (x_0, \omega, x) \in \Lambda \times \mathcal{C}$ по формуле

$$\mathcal{A}_u(\lambda, x) = (\dot{x}(\cdot) - \varphi(\cdot, x(\cdot), u(\cdot), \omega), x(0) - x_0). \quad (1.10)$$

Легко проверяется, что оператор $\mathcal{A}_u$ действует непрерывно из пространства $\Lambda \times \mathcal{C}$ в $H^{-1}(0, 1; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$, где $H^{-1}(0, 1; \mathbb{R}^n)$ – соболевское пространство [8] функций, заданных на интервале $(0, 1)$, со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Пусть, далее, $\pi: \Lambda \times \mathcal{C} \rightarrow \Lambda$ – проекция, $\pi(\lambda, x) = \lambda$.

ЛЕММА 1.3. Борелевская мера Π на $\Lambda \times \mathcal{C}$ совпадает с распределением Π_u , определенным в (1.9), тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A}_u^* \Pi = \delta_0 \quad \text{и} \quad \pi^* \Pi = \mu, \quad (1.11)$$

где δ_0 – единичная мера, сосредоточенная в нуле пространства $H^{-1}(0, 1; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}_u^* \Pi$ и $\pi^* \Pi$ – образы меры Π при отображениях $\mathcal{A}_u$ и π :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_u^* \Pi(B) &= \Pi(\mathcal{A}_u^{-1}(B)) & \forall B \in \mathcal{B}(H^{-1}(0, 1; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n), \\ \pi^* \Pi(B') &= \Pi(\pi^{-1}(B')) & \forall B' \in \mathcal{B}(\Lambda). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Pi = \Pi_u$, то (1.11) очевидно. Обратно, пусть для меры Π справедливы равенства (1.11). Обозначим через Γ_u график отображения $\lambda \rightarrow x(\cdot, u, \lambda)$:

$$\Gamma_u = \{(\lambda, x(\cdot, u, \lambda)) : \lambda \in \Lambda\} = \{(\lambda, x) \in \Lambda \times \mathcal{C} : \mathcal{A}_u(\lambda, x) = 0\} \in \mathcal{B}(\Lambda \times \mathcal{C}).$$

В силу первого из соотношений (1.11)

$$\Pi(\Gamma_u) = \Pi(\mathcal{A}_u^{-1}(0)) = \delta_0(0) = 1,$$

а потому для произвольного множества $B \in \mathcal{B}(\Lambda \times \mathcal{C})$

$$\begin{aligned} \Pi(B) &= \Pi(B \cap \Gamma_u) = \Pi(\pi^{-1}(\pi(B \cap \Gamma_u)) \cap \Gamma_u) \\ &= \Pi(\pi^{-1}(\pi(B \cap \Gamma_u))) = \pi^* \Pi(\pi(B \cap \Gamma_u)) \\ &= \mu(\pi(B \cap \Gamma_u)) = \mu\{\lambda : (\lambda, x(\cdot, u, \lambda)) \in B\}, \end{aligned}$$

откуда в силу (1.9) имеем $\Pi = \Pi_u$. Отметим, что измеримость по Борелю множества $\pi(B \cap \Gamma_u)$ (а значит, и множества $\pi^{-1}(\pi(B \cap \Gamma_u))$) вытекает из непрерывности отображения $\lambda \rightarrow x(\cdot, u, \lambda)$, так как $\pi(B \cap \Gamma_u) = \{\lambda : (\lambda, x(\cdot, u, \lambda)) \in B\}$.

Назовем управление $u \in \mathcal{U}$ *допустимым*, если:

- 1) оно удовлетворяет условию (1.3);
- 2) $\mathcal{J}(u) < \infty$;
- 3) решение $x(t, u, \lambda)$ удовлетворяет фазовому ограничению (1.5) или (1.6) в случае его наличия.

Множество допустимых управлений обозначим через $\mathcal{U}_d$. Будем предполагать выполненным условие

г) множество $\mathcal{U}_d$ непусто.

Докажем теорему о существовании оптимального управления для задачи с фазовым ограничением (1.5).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть помимо б)–г) выполнены условия:

д) функция φ представляется в виде

$$\varphi(t, x, u, \omega) = \sum_{i=1}^m \beta_i(t, x, \omega) \chi_i(t, u),$$

где χ_i и β_i , $i = 1, 2, \dots, m$, — каратеодориевские функции со значениями в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно;

е) существуют функции $h_i(t) \in L_{p_i}(0, 1)$, $1 < p_i \leq \infty$, такие, что при п.в. t

$$|\chi_i(t, u)| \leq h_i(t) \quad \forall u \in U, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

ж) для произвольных $R > 0$ и $K \Subset \Omega$ существуют функции $b_{i,R,K}(t) \in L_{q_i}(0, 1)$, $q_i = p_i/(p_i - 1)$ ($q_i = 1$, если $p_i = \infty$), $i = 1, 2, \dots, m$, для которых при п.в. t

$$|\beta_i(t, x, \omega)| \leq b_{i,R,K}(t) \quad \forall x \in B_R \quad \text{и} \quad \omega \in K;$$

з) при п.в. $t \in (0, 1)$ множества U_t замкнуты в U ;

и) множество $\{(t, u) : t \in (0, 1), u \in U_t\}$ измеримо по Борелю;

к) при п.в. $t \in (0, 1)$ множества $W_t = \{(\chi_1(t, u), \chi_2(t, u), \dots, \chi_m(t, u)) : u \in U_t\}$ выпуклы;

л) множество X замкнуто в $\mathcal{C}$.

Тогда существует по меньшей мере одно оптимальное управление для задачи (1.1)–(1.5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Выполнение условия а) следует из д)–ж).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим минимизирующий функционал (1.4) последовательность управлений $u_k \in \mathcal{U}_d$. Пусть $\Pi_k = \Pi_{u_k}$ — распределения (1.9). Согласно лемме 1.2 и условию е) существует подпоследовательность $\{k'\} \subset \{k\}$ такая, что $\Pi_{k'} \rightarrow \Pi$ слабо на $\Lambda \times \mathcal{C}$ и $\chi_i(t, u_{k'}(t)) \rightarrow \psi_i(t)$ слабо в $L_{p_i}(0, 1)$, $i = 1, \dots, m$ (*-слабо, если $p_i = \infty$), при $k' \rightarrow \infty$, где Π — некоторая борелевская мера на $\Lambda \times \mathcal{C}$,

ψ_i — некоторая функция из $L_{p_i}(0, 1)$. При помощи стандартных выкладок, использующих свойства выпуклости и теорему об измеримой выборке [2], доказывалось существование управления $\hat{u}(t) \in U_t$ такого, что $\psi_i(t) = \chi_i(t, \hat{u}(t))$ при п.в. t , $i = 1, 2, \dots, m$.

Покажем, что распределение $\Pi_{\hat{u}}$, отвечающее управлению $\hat{u}$ согласно (1.9), совпадает с предельной мерой Π .

Пусть $(\lambda_k, x_k) \rightarrow (\lambda, x)$ при $k \rightarrow \infty$ в $\Lambda \times \mathcal{C}$. Из (1.10), условий д)–ж) и полной непрерывности вложения $L_1(0, 1; \mathbb{R}^n) \subset H^{-1}(0, 1; \mathbb{R}^n)$ заключаем, что

$$\mathcal{A}_{u_{k'}}(\lambda_{k'}, x_{k'}) \rightarrow \mathcal{A}_{\hat{u}}(\lambda, x) \quad \text{в} \quad H^{-1}(0, 1; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$$

по выбранной выше подпоследовательности $\{k'\}$. Отсюда по известному свойству слабой сходимости мер [7; теорема 5.5] следует, что $\mathcal{A}_{u_{k'}}^* \Pi_{k'} \rightarrow \mathcal{A}_{\hat{u}}^* \Pi$, $k' \rightarrow \infty$, слабо на пространстве $H^{-1}(0, 1; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$. Поскольку $\mathcal{A}_{u_k}^* \Pi_k = \delta_0$ в силу леммы 1.3, то же верно и для предельной меры. Далее, $\pi^* \Pi_{k'} \rightarrow \pi^* \Pi$, $k' \rightarrow \infty$, слабо на Λ в силу непрерывности π и, значит, $\pi^* \Pi = \mu$. Из леммы 1.3 теперь следует, что Π совпадает с распределением $\Pi_{\hat{u}}$.

Покажем, что

$$\mathcal{J}(\hat{u}) \leq \inf_{u \in \mathcal{U}_d} \mathcal{J}(u). \quad (1.12)$$

Действительно, из непрерывности и ограниченности снизу на $\mathcal{C}$ функционала $g(x(1))$ и сходимости $\Pi_{k'} \rightarrow \Pi_{\hat{u}}$ получим:²

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\hat{u}) &= \int g(x(1)) d\Pi_{\hat{u}} \leq \liminf_{k' \rightarrow \infty} \int g(x(1)) d\Pi_{k'} \\ &= \liminf_{k' \rightarrow \infty} \mathcal{J}(u_{k'}) = \inf_{u \in \mathcal{U}_d} \mathcal{J}(u). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Докажем, наконец, что $\hat{u}$ — допустимое управление. Для этого достаточно установить выполнение фазового ограничения (1.5). Заметим, что в силу определения (1.9) условие (1.5) эквивалентно следующему:

$$\Pi_u(\Lambda \times X) = 1. \quad (1.14)$$

Условие (1.14) выполнено для распределений Π_k , соответствующих $u_k \in \mathcal{U}_d$, а потому, благодаря замкнутости X , и для предельного распределения $\Pi = \Pi_{\hat{u}}$:

$$\Pi_{\hat{u}}(\Lambda \times X) \geq \limsup_{k' \rightarrow \infty} \Pi_{k'}(\Lambda \times X) = 1.$$

Таким образом, $\hat{u}(t)$ — допустимое, а значит (вследствие (1.12)), оптимальное управление. Теорема доказана.

Сформулируем теорему существования для задачи с фазовым ограничением (1.6).

²Здесь и ниже, если не указана область интегрирования, интеграл берется по всему пространству, на котором задана мера.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнены условия б)–к), а также

- л') множества X_l замкнуты в $\mathcal{C}_l$, $l = 1, \dots, L$;
 м) существуют положительные константы D , R_0 , ρ_1 и ρ_2 такие, что:
- 1) $\rho = \rho_1 \rho_2 > L$;
 - 2) $V(x, \omega) \geq D|x|^{\rho_1} \quad \forall x: |x| \geq R_0, \forall \omega \in \Omega$;
 - 3) $M[V(x_0, \omega)e^{c(\omega)}]^{\rho_2} < \infty$
- (функции $V(x, \omega)$ и $c(\omega)$ введены в условии в)).

Тогда существует по меньшей мере одно оптимальное управление для задачи (1.1)–(1.4), (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство теоремы 1.1 вплоть до момента проверки выполнения фазового ограничения, на чем и остановимся.

Из в) и леммы Гронуолла следует, что для произвольных $u \in \mathcal{U}$ и $\lambda = (x_0, \omega)$ решение $x(t) = x(t, u, \lambda)$ задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет оценке

$$V(x(t), \omega) \leq V(x_0, \omega)e^{c(\omega)t} \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.15)$$

Из (1.15) и условия м) вытекает существование моментов $M[\bigotimes^l x(t)]$ порядков $l = 1, 2, \dots, L$ у всех решений $x(t)$.

Пусть $x_k(t) = x(t, u_k, \lambda)$, $\hat{x}(t) = x(t, \hat{u}, \lambda)$, где u_k и $\hat{u}$ – такие же управления, как в доказательстве теоремы 1.1. Поскольку $u_k \in \mathcal{U}_d$, для решений $x_k(t)$ ограничение (1.6) выполнено. Покажем, что равномерно на отрезке $[0, 1]$ $M[\bigotimes^l x_k(t)] \rightarrow M[\bigotimes^l \hat{x}(t)]$ при $k = k' \rightarrow \infty$, откуда в силу замкнутости множеств X_l в $\mathcal{C}_l$ будет следовать справедливость (1.6) для $\hat{x}(t)$.

Пусть $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_l}$ – некоторая компонента тензора $\bigotimes^l x$, $1 \leq l \leq L$. Для произвольного $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} M\Phi(x_k(t)) - M\Phi(\hat{x}(t)) &= \int \Phi(x(t))(d\Pi_k - d\Pi) = \int \Phi_N(x(t))(d\Pi_k - d\Pi) \\ &+ \int (\Phi(x(t)) - \Phi_N(x(t))) d\Pi_k + \int (\Phi_N(x(t)) - \Phi(x(t))) d\Pi, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $\Phi_N(x) = \Phi(x)$, если $|\Phi(x)| \leq N$, $\Phi_N(x) = \pm N$ при $\Phi(x) > N$ и $\Phi(x) < -N$ соответственно ($N > 0$).

Первый интеграл в правой части (1.16) сходится к нулю при $k = k' \rightarrow \infty$ для каждого N в силу слабой сходимости $\Pi_{k'} \rightarrow \Pi$. Второй (и, аналогично, третий) допускает оценку

$$\begin{aligned} \left| \int (\Phi(x(t)) - \Phi_N(x(t))) d\Pi_k \right| &\leq \int_{\{|\Phi(x(t))| > N\}} |\Phi(x(t))| d\Pi_k \\ &\leq \int_{\{|x(t)| > N^{1/l}\}} |x(t)|^l d\Pi_k \leq \frac{1}{N^{\rho-l}} \int_{\{|x(t)| > N^{1/l}\}} |x(t)|^\rho d\Pi_k \\ &\leq \frac{1}{D^{\rho_2} N^{\rho-l}} \int [V(x(t), \omega)]^{\rho_2} d\Pi_k \leq \frac{M[V(\lambda)e^{c(\omega)}]^{\rho_2}}{D^{\rho_2} N^{\rho-l}} \end{aligned}$$

для любых k и $N \geq R_0^l$ в силу условия м) и (1.15). Отсюда с учетом м) следует поточечная сходимость $M\Phi(x_{k'}(t)) \rightarrow M\Phi(\hat{x}(t))$.

Для доказательства равномерности полученной сходимости заметим, что множество функций $\{M\Phi(x(t))\}$, где $x(t)$ – всевозможные решения задачи (1.1), (1.2), равномерно непрерывно. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, а $R_\varepsilon > 0$ и $K_\varepsilon \in \Omega$ таковы, что $\mu(B_{R_\varepsilon} \times K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Тогда для произвольного решения $x(t)$

$$\begin{aligned} |M\Phi(x(t)) - M\Phi(x(t'))| &\leq \int_{B_{R_\varepsilon} \times K_\varepsilon} |\Phi(x(t, \lambda)) - \Phi(x(t', \lambda))| d\mu \\ &\quad + \int_{\Lambda \setminus (B_{R_\varepsilon} \times K_\varepsilon)} (|\Phi(x(t, \lambda))| + |\Phi(x(t', \lambda))|) d\mu \\ &\leq l \int_{B_{R_\varepsilon} \times K_\varepsilon} |x(t, \lambda) - x(t', \lambda)| \max_t |x(t, \lambda)|^{l-1} d\mu \\ &\quad + \int_{\Lambda \setminus (B_{R_\varepsilon} \times K_\varepsilon)} (|x(t, \lambda)|^l + |x(t', \lambda)|^l) d\mu \\ &\leq l M^{l-1} \zeta(|t - t'|) + 2\varepsilon^{(\rho-l)/\rho} \left(R_0^\rho \varepsilon + \frac{M[V(\lambda)e^{c(\omega)}]^\rho}{D^{\rho^2}} \right)^{l/\rho} \end{aligned}$$

в силу (1.7), (1.8), условия м) и неравенства Гёльдера. Из полученной оценки следует равномерная непрерывность $\{M\Phi(x(t))\}$, чем и завершается доказательство теоремы.

Перейдем к изложению результатов об аппроксимации. Основная идея предлагаемого метода состоит в замене распределения μ близкой ему в смысле метрики Прохорова атомарной (т.е. сосредоточенной на конечном множестве точек) мерой μ_j , что превращает рассматриваемую задачу со случайными параметрами в детерминированную.

Опишем построение атомарных мер μ_j .

Пусть σ_j и ε_j , $j = 1, 2, \dots$, – сходящиеся к нулю последовательности положительных чисел. Для каждого j возьмем компактное в Λ подмножество $\mathcal{K}_j$ такое, что $\mathcal{K}_j$ содержится в носителе $\text{supp } \mu$ меры μ и $\mu(\mathcal{K}_j) > 1 - \sigma_j$. В $\mathcal{K}_j$ выберем конечную $\frac{\varepsilon_j}{2}$ -сеть $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_j}\}$.

Пусть, далее, $\varkappa_j(t)$ – определенная при $t \geq 0$ непрерывная функция, причем $\varkappa_j(t) > 0$ при $t < \varepsilon_j$ и $\varkappa_j(t) = 0$ при $t \geq \varepsilon_j$. Очевидно, функции

$$\gamma_i(\lambda) = \frac{\varkappa_j(\rho_\Lambda(\lambda, \lambda_i))}{\sum_{l=1}^{N_j} \varkappa_j(\rho_\Lambda(\lambda, \lambda_l))}, \quad \lambda \in \mathcal{K}_j, \quad i = 1, 2, \dots, N_j,$$

образуют разбиение единицы на $\mathcal{K}_j$, причем $\gamma_i(\lambda) = 0$ при $\rho_\Lambda(\lambda, \lambda_i) \geq \varepsilon_j$ (здесь $\rho_\Lambda(\lambda, \lambda') = |x_0 - x'_0| + \rho_\Omega(\omega, \omega')$, $\lambda = (x_0, \omega)$, $\lambda' = (x'_0, \omega') \in \Lambda$ – метрика в Λ).

Обозначим символом δ_λ единичную меру, сосредоточенную в точке $\lambda \in \Lambda$, и положим

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_i \delta_{\lambda_i}, \quad \text{где } \alpha_i = \int_{\mathcal{K}_j} \gamma_i(\lambda) d\mu. \quad (1.17)$$

Рассмотрим задачи (1.1)–(1.5) и (1.1)–(1.4), (1.6) в ситуации, когда их случайные параметры имеют распределение μ_j (меры μ_j , вообще говоря, не являются вероятностными, но для краткости в отношении их используется теоретико-вероятностная терминология). Обозначим $x_i(t) = x(t, u, \lambda_i)$ и $\varphi_i(t, x, u) = \varphi(t, x, u, \omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, N_j$, где $\lambda_i = (x_{0i}, \omega_i)$ – элементы выбранной нами

$\frac{\varepsilon_j}{2}$ -сети. Пусть M_j – оператор математического ожидания на вероятностном пространстве $(\Lambda, \mathcal{B}(\Lambda), \mu_j)$. Тогда соотношения (1.1)–(1.6) эквивалентны следующим:

$$\dot{x}_i(t) = \varphi_i(t, x_i(t), u(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N_j, \quad (1.18)$$

$$x_i(0) = x_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots, N_j, \quad (1.19)$$

$$u(t) \in U_t, \quad (1.20)$$

$$\mathcal{J}_j(u) = M_j g(x(1)) = \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_i g(x_i(1)) \rightarrow \inf, \quad (1.21)$$

$$x_i(\cdot) \in X, \quad i = 1, 2, \dots, N_j, \quad (1.22)$$

и, наконец,

$$\mathfrak{M}_{l,j}(\cdot) \in X_l, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (1.23)$$

где $\mathfrak{M}_{l,j}(t) = M_j[\otimes^l x(t)] = \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_i [\otimes^l x_i(t)]$.

Покажем, что полученные детерминированные задачи (1.18)–(1.22) и (1.18)–(1.21), (1.23) в известном смысле аппроксимируют исходные.

ЛЕММА 1.4. *Последовательность мер μ_j слабо на пространстве Λ сходится к μ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить [7], что

$$M_j \psi = \int \psi(\lambda) d\mu_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} M\psi = \int \psi(\lambda) d\mu$$

для любой ограниченной равномерно непрерывной на Λ функции $\psi(\lambda)$. Согласно (1.17)

$$\begin{aligned} M_j \psi - M\psi &= \int_{\mathcal{K}_j} \sum_{i=1}^{N_j} \gamma_i(\lambda) \psi(\lambda_i) d\mu - \int \psi(\lambda) d\mu \\ &= \int_{\mathcal{K}_j} \sum_{i=1}^{N_j} \gamma_i(\lambda) (\psi(\lambda_i) - \psi(\lambda)) d\mu - \int_{\Lambda \setminus \mathcal{K}_j} \psi(\lambda) d\mu, \end{aligned}$$

откуда следует оценка

$$|M_j \psi - M\psi| \leq m_\psi(\varepsilon_j) \mu(\mathcal{K}_j) + \sigma_j \max_{\Lambda} |\psi(\lambda)|, \quad (1.24)$$

где $m_\psi(\varepsilon) = \max_{\rho_\Lambda(\lambda, \lambda') \leq \varepsilon} |\psi(\lambda) - \psi(\lambda')|$ – модуль непрерывности функции ψ , $m_\psi(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Учитывая стремление к нулю ε_j и σ_j , из (1.24) выводим утверждение леммы.

Ниже последовательность ε_j выбирается с таким расчетом, чтобы обеспечить сходимость $M_j g(x(1))$ к $Mg(x(1))$ – функционалу качества (1.4).

Возьмем последовательности чисел $R_1 \leq R_2 \leq \dots$ и компактов $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \Omega$ такие, что $\mathcal{K}_j \subset B_{R_j} \times K_j$, $j = 1, 2, \dots$. Пусть $M = M_j$ – константа из оценки (1.7), соответствующая числу R_j и компакт K_j ,

$$m_g^j(\varepsilon) = \max\{|g(x) - g(x')| : x, x' \in B_{M_j}, |x - x'| \leq \varepsilon\} \quad (1.25)$$

– модуль непрерывности функции g на шаре B_{M_j} . Выберем ε_j таким образом, чтобы

$$m_g^j(C_j\varepsilon_j + \xi_j(\varepsilon_j)) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \quad (1.26)$$

где $C = C_j$ и $\xi = \xi_j$ – соответствующие R_j и K_j константа и функция из оценки (1.8) (указанный выбор ε_j возможен, поскольку $\xi_j(\varepsilon) \rightarrow 0$ и $m_g^j(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$).

ЛЕММА 1.5. *Пусть последовательность ε_j выбрана с учетом требования (1.26). Предположим, далее, что либо функция $g(x)$ ограничена, либо выполнено условие*

н) существуют положительные константы r , G и M_0 такие, что

$$M[V(\lambda)e^{c(\omega)}]^r < \infty$$

и $g(x) \leq G[V(x, \omega)]^r \quad \forall x : |x| \geq M_0, \forall \omega \in \Omega$. Тогда функционалы $\mathcal{J}_j(u) = M_j g(x(1))$ сходятся при $j \rightarrow \infty$ к $\mathcal{J}(u) = Mg(x(1))$ равномерно по всевозможным управлениям $u \in \mathcal{U}$.

Доказательство приведем для случая, когда $g(x)$ неограничена.

Аналогично выкладкам из леммы 1.4

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_j(u) - \mathcal{J}(u) &= \int_{\mathcal{K}_j} \sum_{i=1}^{N_j} \gamma_i(\lambda) [g(x(1, u, \lambda_i)) - g(x(1, u, \lambda))] d\mu \\ &\quad - \int_{\Lambda \setminus \mathcal{K}_j} g(x(1, u, \lambda)) d\mu, \end{aligned}$$

откуда в силу оценок (1.7), (1.8), (1.15) и условия н)

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_j(u) - \mathcal{J}(u)| &\leq \int_{\mathcal{K}_j} \sum_i \gamma_i(\lambda) m_g^j(|x(1, u, \lambda_i) - x(1, u, \lambda)|) d\mu \\ &\quad + G \int_{\Lambda \setminus \mathcal{K}_j} [V(x(1, u, \lambda), \omega)]^r d\mu + \max_{|x| \leq M_0} g(x) \mu(\Lambda \setminus \mathcal{K}_j) \\ &\leq m_g^j(C_j\varepsilon_j + \xi_j(\varepsilon_j)) \mu(\mathcal{K}_j) \\ &\quad + G \int_{\Lambda \setminus \mathcal{K}_j} [V(\lambda)e^{c(\omega)}]^r d\mu + \sigma_j \max_{|x| \leq M_0} g(x). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Правая часть полученного неравенства не зависит от $u \in \mathcal{U}$ и стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$ в силу выбора ε_j и σ_j и условия н). Лемма доказана.

Следующая теорема характеризует степень эффективности рассматриваемой аппроксимации для задачи без фазовых ограничений.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть выполнены условия леммы 1.5, $\widehat{\mathcal{J}}_j = \inf_{u \in \mathcal{U}_d} \mathcal{J}_j(u)$ и u_j – субоптимальные (оптимальные) управления для задач (1.18)–(1.21) ($j = 1, 2, \dots$) такие, что $\Delta_j = \mathcal{J}_j(u_j) - \widehat{\mathcal{J}}_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда u_j – минимизирующая последовательность управлений для функционала качества задачи (1.1)–(1.4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что при отсутствии фазовых ограничений и в условиях леммы 1.5 любое удовлетворяющее (1.3) управление допустимо как для исходной, так и для приближенных задач.

Пусть $\widehat{\mathcal{J}} = \inf_{u \in \mathcal{U}_d} \mathcal{J}(u)$, u_ε — субоптимальное (оптимальное) управление для задачи (1.1)–(1.4) такое, что $\mathcal{J}(u_\varepsilon) - \widehat{\mathcal{J}} < \varepsilon$. Тогда

$$\mathcal{J}(u_j) - \widehat{\mathcal{J}} = \mathcal{J}(u_j) - \mathcal{J}_j(u_j) + \mathcal{J}_j(u_j) - \mathcal{J}_j(u_\varepsilon) + \mathcal{J}_j(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u_\varepsilon) + \mathcal{J}(u_\varepsilon) - \widehat{\mathcal{J}}.$$

Поскольку $\mathcal{J}(u_j) - \widehat{\mathcal{J}} \geq 0$, нас интересует только оценка этой разности сверху. Разности $\mathcal{J}(u_j) - \mathcal{J}_j(u_j)$ и $\mathcal{J}_j(u_\varepsilon) - \mathcal{J}(u_\varepsilon)$ стремятся к нулю при $j \rightarrow \infty$ согласно лемме 1.5. Поскольку управление u_ε является допустимым для задачи (1.18)–(1.21), разность $\mathcal{J}_j(u_j) - \mathcal{J}_j(u_\varepsilon) \leq \mathcal{J}_j(u_j) - \widehat{\mathcal{J}}_j = \Delta_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ по условию теоремы. Наконец, разность $\mathcal{J}(u_\varepsilon) - \widehat{\mathcal{J}}$ меньше ε , и в силу произвольности ε получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь задачу с фазовыми ограничениями (1.6). При наличии фазовых ограничений множества допустимых управлений $\mathcal{U}_d$ исходной и $\mathcal{U}_{d_j}$ приближенных задач не совпадают. Это вынуждает прибегнуть к некоторому видоизменению условий (1.23) с тем, чтобы обеспечить хотя бы включение $\mathcal{U}_{d_j} \subset \mathcal{U}_d$.

Выберем последовательность ε_j удовлетворяющей помимо (1.26) также условию

$$M_j^{L-1}(C_j \varepsilon_j + \xi_j(\varepsilon_j)) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

где M_j , C_j и ξ_j такие же, как в (1.25) и (1.26).

Пусть выполнено кроме а)–в) условие м). Для $l = 1, 2, \dots, L$ и $j = 1, 2, \dots$ определим константы

$$\begin{aligned} \nu_{l,j} = n^l & \left[l M_j^{l-1}(C_j \varepsilon_j + \xi_j(\varepsilon_j)) + R_0^l \sigma_j \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_j^{(\rho-l)/\rho}}{D^{l/\rho_1}} \left(\int_{\Lambda \setminus \mathcal{X}_j} [V(\lambda) e^{c(\omega)}]^{\rho_2} d\mu \right)^{l/\rho} \right]. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Из сделанных предположений следует, что $\nu_{l,j} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, $l = 1, 2, \dots, L$.

Положим

$$X_{l,j} = C([C X_l]_{\nu_{l,j}}), \quad (1.29)$$

где символами C и $[\cdot]_\nu$ обозначаются соответственно дополнение к множеству и ν -окрестность множества в метрическом пространстве.

Заменим ограничение (1.23) на

$$\mathfrak{M}_{l,j}(\cdot) \in X_{l,j}, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (1.30)$$

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть выполнены условия леммы 1.5 и условие м), и пусть множества X_l открыты в $\mathcal{C}_l$. Тогда:

- 1) существует j_0 такое, что при всех $j \geq j_0$ множества $X_{l,j}$ непусты;
- 2) существует $j_1 \geq j_0$ такое, что при всех $j \geq j_1$ множество допустимых управлений задачи (1.18)–(1.21), (1.30) непусто;
- 3) если u_j , $j = j_1, j_1 + 1, \dots$, — такое субоптимальное управление для задачи (1.18)–(1.21), (1.30), что $\Delta_j = \mathcal{J}_j(u_j) - \widehat{\mathcal{J}}_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, то u_j образуют минимизирующую последовательность управлений для задачи (1.1)–(1.4), (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение теоремы является следствием открытости множеств X_l и сходимости $\nu_{l,j}$ к нулю.

Рассмотрим, далее, произвольное управление $u \in \mathcal{U}$, и пусть $x(t) = x(t, u, \lambda)$, $\mathfrak{M}_l(t) = M[\bigotimes^l x(t)]$ и $\mathfrak{M}_{l,j}(t) = M_j[\bigotimes^l x(t)]$. Тогда, оценивая аналогично (1.27), получаем:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}_l(t) - \mathfrak{M}_{l,j}(t)| &\leq \int_{\mathcal{K}_j} \sum_i \gamma_i(\lambda) \left| \bigotimes^l x(t, \lambda_i) - \bigotimes^l x(t, \lambda) \right| d\mu \\ &\quad + \int_{\Lambda \setminus \mathcal{K}_j} \left| \bigotimes^l x(t, \lambda) \right| d\mu \\ &\leq l n^l \int_{\mathcal{K}_j} \sum_i \gamma_i(\lambda) |x(t, \lambda_i) - x(t, \lambda)| \max_{\lambda \in \mathcal{K}_j} |x(t, \lambda)|^{l-1} d\mu \\ &\quad + n^l \int_{\Lambda \setminus \mathcal{K}_j} |x(t, \lambda)|^l d\mu \leq \nu_{l,j}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Отсюда в силу определения множеств $X_{l,j}$ следует, что допустимые управления для задач (1.18)–(1.21), (1.30) будут таковыми и для задачи (1.1)–(1.4), (1.6).

С другой стороны, если u – допустимое управление для исходной задачи, то в силу (1.6) и открытости множеств X_l расстояния $\nu_l = \text{dist}(\mathfrak{M}_l(\cdot), CX_l)$ положительны. Выбрав номер $j = j(u)$ с таким расчетом, чтобы при всех $j \geq j(u)$ выполнялось $\nu_{l,j} < \nu_l/2$ для $l = 1, 2, \dots, L$, из (1.31) получим, что

$$\text{dist}(\mathfrak{M}_{l,j}, CX_l) \geq \text{dist}(\mathfrak{M}_l, CX_l) - \|\mathfrak{M}_{l,j} - \mathfrak{M}_l\|_{\mathcal{C}_l} \geq \nu_l - \nu_{l,j} > \nu_{l,j}.$$

Отсюда в силу (1.29) $\mathfrak{M}_{l,j}(\cdot) \in X_{l,j}$ и, значит, управление u допустимо для задач (1.18)–(1.21), (1.30) при $j \geq j(u)$.

Для доказательства второго утверждения теоремы теперь остается сослаться на условие г), третье же доказывается применением выкладки, использовавшейся в теореме 1.3.

Для задачи с фазовым ограничением (1.5) получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.5. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1.1 и леммы 1.5. Пусть, далее, $\widehat{\mathcal{J}}$ – инфимум функционала качества задачи (1.1)–(1.5), $\widehat{\mathcal{J}}_j$ – задачи (1.18)–(1.22). Тогда $\widehat{\mathcal{J}}_j \rightarrow \widehat{\mathcal{J}}$ при $j \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В приводимом ниже доказательстве мы следуем схеме, предложенной А. Дончевым в [9; §2.2].

Для замкнутого множества X условие (1.5) эквивалентно тому, что $x(\cdot, \lambda) \in X \forall \lambda \in \text{supp } \mu$. Поэтому любое допустимое для задачи (1.1)–(1.5) управление будет допустимым и для приближенных задач.

Пусть $\widehat{u}$ – оптимальное управление для исходной задачи (существующее согласно теореме 1.1). Тогда в силу леммы 1.5 $\mathcal{J}_j(\widehat{u}) \rightarrow \mathcal{J}(\widehat{u}) = \widehat{\mathcal{J}}$ при $j \rightarrow \infty$, откуда, поскольку $\mathcal{J}_j(\widehat{u}) \geq \widehat{\mathcal{J}}_j$, заключаем, что

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \widehat{\mathcal{J}}_j \leq \widehat{\mathcal{J}}. \quad (1.32)$$

Докажем, что

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \widehat{\mathcal{J}}_j \geq \widehat{\mathcal{J}}. \quad (1.33)$$

Предположим обратное, т.е. что существует подпоследовательность $\{j'\} \subset \{j\}$, для которой

$$\lim_{j' \rightarrow \infty} \widehat{\mathcal{J}}_{j'} < \widehat{\mathcal{J}}. \quad (1.34)$$

Пусть $\widehat{u}_j$ – оптимальное управление для приближенной задачи, Π_j – распределение случайного вектора $(\lambda, x(\cdot, \widehat{u}_j, \lambda))$, заданного на вероятностном пространстве $(\Lambda, \mathcal{B}(\Lambda), \mu_j)$:

$$\Pi_j(B) = \mu_j\{\lambda : (\lambda, x(\cdot, \widehat{u}_j, \lambda)) \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\Lambda \times \mathcal{C}).$$

Из леммы 1.4 следует плотность семейства мер μ_j , откуда так же, как в лемме 1.2, выводится плотность и, значит, слабая компактность семейства Π_j .

Повторяя рассуждения теоремы 1.1, устанавливаем существование меры Π и удовлетворяющего (1.3) управления $\bar{u}$ таких, что $\Pi_j \rightarrow \Pi$ слабо на $\Lambda \times \mathcal{C}$ и $\chi_i(\cdot, \widehat{u}_j(\cdot)) \rightarrow \chi_i(\cdot, \bar{u}(\cdot))$, $i = 1, \dots, m$, слабо (*-слабо) в $L_{p_i}(0, 1)$ по некоторой подпоследовательности $j = j'' \rightarrow \infty$, $\{j''\} \subset \{j'\}$.

Пусть $\mathcal{A}_u$ – оператор (1.10), π – проекция $\Lambda \times \mathcal{C} \rightarrow \Lambda$. Согласно лемме 1.3 $\mathcal{A}_{\widehat{u}_j}^* \Pi_j = \delta_0$ и $\pi^* \Pi_j = \mu_j$. Переходя в обоих равенствах к пределу при $j = j'' \rightarrow \infty$, с учетом леммы 1.4 получаем $\mathcal{A}_{\bar{u}}^* \Pi = \delta_0$ и $\pi^* \Pi = \mu$. Последнее означает (лемма 1.3) совпадение Π с распределением $\Pi_{\bar{u}}$, задаваемым формулой (1.9). Поэтому аналогично (1.13)

$$\mathcal{J}(\bar{u}) = \int g(x(1)) d\Pi \leq \liminf_{j'' \rightarrow \infty} \int g(x(1)) d\Pi_{j''} = \lim_{j' \rightarrow \infty} \widehat{\mathcal{J}}_{j'}. \quad (1.35)$$

Покажем теперь, что для $x(t, \bar{u})$ выполняется фазовое ограничение (1.5) и, значит, $\bar{u} \in \mathcal{U}_d$. Для этого достаточно проверить выполнение условия (1.14):

$$\Pi_{\bar{u}}(\Lambda \times X) \geq \limsup_{j'' \rightarrow \infty} \Pi_{j''}(\Lambda \times X) = \limsup_{j'' \rightarrow \infty} \mu_{j''}(\Lambda) = 1.$$

Таким образом, $\widehat{\mathcal{J}} \leq \mathcal{J}(\bar{u}) \leq \lim_{j' \rightarrow \infty} \widehat{\mathcal{J}}_{j'}$ в силу (1.35), что противоречит предположению (1.34) и тем самым доказывает (1.33). Наконец, из (1.32) и (1.33) следует утверждение теоремы.

Аналогичный доказанному результат справедлив для задачи с фазовым ограничением (1.6) в случае замкнутых множеств X_l . Для обеспечения включения $\mathcal{U}_d \subset \mathcal{U}_{d_j} \quad \forall j$, существенно использовавшегося в доказательстве, заменим фазовые ограничения (1.23) в приближенных задачах на

$$\mathfrak{M}_{l,j}(\cdot) \in \overline{[X_l]_{\nu_{l,j}}}, \quad (1.36)$$

где $\nu_{l,j}$ – константы из (1.28), черта над знаком множества означает его замыкание. Потребуем дополнительно непрерывности функции Ляпунова $V(x, \omega)$ по совокупности аргументов и при построении приближенных мер μ_j последовательность ε_j выберем удовлетворяющей помимо (1.26) также условию

$$m_V^j((C_j + 1)\varepsilon_j + \xi_j(\varepsilon_j)) \leq c_0 = \text{const} \quad \forall j, \quad (1.37)$$

где $m_V^j(\varepsilon) = \max\{|V(\lambda) - V(\lambda')| : \lambda, \lambda' \in B_{M_j} \times K_j, \rho_\Lambda(\lambda, \lambda') \leq \varepsilon\}$ – модуль непрерывности $V(\lambda)$ на компакте $B_{M_j} \times K_j$, причем C_j, ξ_j, K_j и M_j здесь те же, что и в (1.25), (1.26). Разумеется, выполнения (1.37) можно добиться при любой константе $c_0 > 0$, поскольку $m_V^j(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть выполнены условия теоремы 1.2 и леммы 1.5, а также условие (1.37). Пусть, далее, $\widehat{\mathcal{J}}$ – инфимум функционала качества задачи (1.1)–(1.4), (1.6), $\widehat{\mathcal{J}}_j$ – задачи (1.18)–(1.21), (1.36). Тогда $\widehat{\mathcal{J}}_j \rightarrow \widehat{\mathcal{J}}$ при $j \rightarrow \infty$.

Доказательство состоит из соответствующим образом модифицированных фрагментов доказательств теорем 1.5 и 1.2 и потому опускается.

В заключение приведем выражения для констант M и C и функции $\xi(\varepsilon)$, введенных в лемме 1.1 и используемых при аппроксимации:

$$M = \sup\{|x| : \exists \omega \in K \text{ такое, что } V(x, \omega) \leq T\},$$

где $T = \sup\{V(x_0, \omega)e^{c(\omega)} : x_0 \in B_R, \omega \in K\}$;

$$C = \exp\left\{\int_0^1 d_{M,K}(\tau) d\tau\right\},$$

где $d_{M,K}(\tau)$ – функция из условия б); наконец,

$$\xi(\varepsilon) = C \int_0^1 m_{\varphi,M,K}(\tau, \varepsilon) d\tau,$$

где

$$m_{\varphi,M,K}(\tau, \varepsilon) = \sup\{|\varphi(\tau, x, u, \omega) - \varphi(\tau, x, u, \omega')| : \\ u \in U, x \in B_M, \omega, \omega' \in K, \rho_\Omega(\omega, \omega') \leq \varepsilon\}.$$

§2. Задачи с распределенными параметрами

В настоящем разделе показывается, что методы §1 могут быть применены в ситуации, когда динамическая система описывается уравнением с частными производными, имеющим случайные параметры. Не ставя себе цели получения сколько-нибудь общих результатов, проведем все исследование на примере одного нелинейного гиперболического уравнения, изучавшегося в [10] и ряде последующих работ.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\mathcal{O}$ класса C^∞ , Q – цилиндр $(0, 1) \times \mathcal{O} \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – оператор Лапласа, $\rho > 0$ – константа. Рассматривается краевая задача

$$y''_{tt}(t, x) - \Delta y + |y|^\rho y = F(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (2.1)$$

$$y|_{t=0} = y_0(x), \quad y'_t|_{t=0} = y_1(x), \quad (2.2)$$

$$y|_{x \in \partial\mathcal{O}} = 0, \quad (2.3)$$

где F , y_0 и y_1 – заданные функции.

Пусть $H^s = H^s(\mathcal{O})$ и $\dot{H}^s = \dot{H}^s(\mathcal{O})$ – пространства Соболева [8] с нормой $\|\cdot\|_s$, $L_p = L_p(\mathcal{O})$ – лебегово пространство, норма в котором будет обозначаться символом $|\cdot|_p$. Для нормы и скалярного произведения в пространстве L_2 используются соответственно обозначения $|\cdot|$ и $(\cdot, \cdot)$.

Обозначим $V = \overset{\circ}{H}^1 \cap L_{\rho+2}$, $H = L_2$, $V' = H^{-1} + L_{(\rho+2)/(\rho+1)}$ – пространство, сопряженное к V . Введем пространство траекторий задачи (2.1)–(2.3)

$$Y = \{\varphi = \varphi(t) \in L_\infty(0, 1; V) : \varphi' \in L_\infty(0, 1; H), \varphi'' \in L_2(0, 1; V')\}$$

и функционал энергии

$$E(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \|\varphi\|_1^2 + \frac{1}{\rho+2} |\varphi|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2} |\psi|^2, \quad (2.4)$$

где $\varphi \in V$, $\psi \in H$.

Мы будем опираться на полученные в [10] результаты о существовании, единственности и непрерывной зависимости от исходных данных решений задачи (2.1)–(2.3), сведя их для компактности в одну теорему.

ТЕОРЕМА 2.1 (Лионс [10]). Пусть $y_0 \in V$, $y_1 \in H$, $F \in L_2(Q)$. Тогда задача (2.1)–(2.3) обладает решением y , принадлежащим пространству Y и удовлетворяющим энергетическому неравенству

$$E(y(t), y'_t(t)) \leq E(y_0, y_1) + \int_0^t (F(\tau), y'_t(\tau)) d\tau \quad (2.5)$$

$$\forall t \in [0, 1].$$

Если ρ удовлетворяет условию:

$$\begin{array}{ll} \rho \leq 2/(n-2) & \text{при } n \geq 3, \\ \rho \text{ произвольно} & \text{при } n = 1, 2, \end{array} \quad (2.6)$$

то решение задачи (2.1)–(2.3) единственно в классе Y , а отображение

$$(y_0, y_1, F) \rightarrow y(y_0, y_1, F),$$

сопоставляющее начальным условиям и правой части задачи (2.1)–(2.3) ее решение, действует непрерывно из $V \times H \times L_2(Q)$ в Y . При этом для произвольных $y_0, \tilde{y}_0 \in V$, $y_1, \tilde{y}_1 \in H$ и $F, \tilde{F} \in L_2(Q)$ решения $y = y(y_0, y_1, F)$ и $\tilde{y} = y(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{F})$ удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} & \|y(t) - \tilde{y}(t)\|_1^2 + |y'_t(t) - \tilde{y}'_t(t)|^2 \\ & \leq C(y, \tilde{y})(\|y_0 - \tilde{y}_0\|_1^2 + |y_1 - \tilde{y}_1|^2 + \|F - \tilde{F}\|_{L_2(Q)}^2) \quad \forall t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (2.7)$$

где функция $C(y, \tilde{y})$ ограничена на ограниченных подмножествах Y .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В силу теоремы вложения Соболева при выполнении условия (2.6) $\overset{\circ}{H}^1 \subset L_{\rho+2}$ и потому $V = \overset{\circ}{H}^1$ и, соответственно, $V' = H^{-1}$.

В дальнейшем условие (2.6) предполагается выполненным.

Нам понадобится следующая

ЛЕММА 2.1. Пространство Y вполне непрерывно вложено в пространство $Z = \{\varphi \in C(0, 1; L_q) : \varphi' \in C(0, 1; V')\}$, где $q = \max\{2, \rho + 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить компактность вложений

$$Y \subset C(0, 1; L_q),$$

$$\{\psi \in L_\infty(0, 1; H) : \psi' \in L_2(0, 1; V')\} \subset C(0, 1; V').$$

Компактность второго вложения непосредственно вытекает из теоремы Дубинского [5; гл. IV, теорема 4.1]. Докажем полную непрерывность первого вложения.

Согласно теореме вложения Соболева при выполнении (2.6) V вполне непрерывно вложено в L_q (в [11] показано, что это верно и в отсутствие условия (2.6)). Поэтому в силу интерполяционного неравенства [8; гл. 1, теорема 16.4] для произвольного $\eta > 0$ найдется константа C_η такая, что при всех $y \in Y$, $t, t' \in [0, 1]$

$$|y(t) - y(t')|_q \leq \eta \|y(t) - y(t')\|_V + C_\eta |y(t) - y(t')|$$

$$\leq 2\eta \|y\|_{L_\infty(0,1;V)} + C_\eta |t - t'| \|y'_t\|_{L_\infty(0,1;H)}.$$

Таким образом, любое ограниченное в Y семейство функций равномерно непрерывно в $C(0, 1; L_q)$, и компактность вложения $Y \subset C(0, 1; L_q)$ следует из теоремы Дубинского.

Ниже пространство Y будет снабжаться двумя топологиями: естественной, порожденной нормой

$$\|\varphi\|_Y = \|\varphi\|_{L_\infty(0,1;V)} + \|\varphi'\|_{L_\infty(0,1;H)} + \|\varphi''\|_{L_2(0,1;V')},$$

и индуцированной вложением $Y \subset Z$, т.е. порожденной нормой

$$\|\varphi\|_Z = \|\varphi\|_{C(0,1;L_q)} + \|\varphi'\|_{C(0,1;V')}. \quad (2.8)$$

Пространство Y , снабженное нормой (2.8), будем обозначать через $\tilde{Y}$, оставив обозначение Y для естественной топологии. Очевидно, $\tilde{Y}$ — сепарабельное метрическое (неполное) пространство.

Поставим задачу оптимального управления решением динамической системы (2.1)–(2.3), предполагая, что управляющая функция $u(t, x)$ аддитивным образом входит в правую часть $F(t, x)$ уравнения (2.1), т.е.

$$F(t, x) = u(t, x) + f(t, x), \quad (2.9)$$

и удовлетворяет ограничению

$$u \in \mathcal{U}, \quad (2.10)$$

где $\mathcal{U}$ — некоторое ограниченное подмножество $L_2(Q)$. Функции $f \in L_2(Q)$, $y_0 \in V$ и $y_1 \in H$ в дальнейшем предполагаются случайными, а функционал качества задается в виде

$$\mathcal{J}(u) = M \|y(1) - z_0\|_1^2 \rightarrow \inf, \quad (2.11)$$

где z_0 — некоторая фиксированная функция из $\overset{\circ}{H}^1$, M — оператор математического ожидания.

Пусть $\Lambda = V \times H \times L_2(Q)$ — пространство случайных параметров задачи (2.1)–(2.3), μ — распределение на $\mathcal{B}(\Lambda)$ случайного вектора $\lambda = (y_0, y_1, f)$. Для произвольного управления $u \in L_2(Q)$ и вектора $\lambda \in \Lambda$ обозначим через $y(u, \lambda)$ отвечающее им решение задачи (2.1)–(2.3). Пусть, наконец, Π_u — распределение случайного вектора $(\lambda, y(u, \lambda))$:

$$\Pi_u(B) = \mu\{\lambda : (\lambda, y(u, \lambda)) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\Lambda \times \tilde{Y}). \quad (2.12)$$

ЛЕММА 2.2. Семейство мер $\{\Pi_u, u \in \mathcal{U}\}$ слабо компактно на $\Lambda \times \tilde{Y}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что из неравенства (2.5) в силу леммы Гронуолла следует оценка

$$\begin{aligned} E(y(t), y'_t(t)) &\leq e^t \left(E(y_0, y_1) + \frac{1}{2} \|F\|_{L_2(Q)}^2 \right) \\ &\leq e(E(y_0, y_1) + \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|f\|_{L_2(Q)}^2), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Согласно (2.1) $y''_{tt} = \Delta y - |y|^\rho y + F$. Отсюда получим, что при п.в. $t \in (0, 1)$

$$\|y''_{tt}(t)\|_{V'} = \sup_{\{v \in V, \|v\|_V=1\}} |(y''_{tt}(t), v)| \leq \|y(t)\|_1 + |y(t)|_{\rho+2}^{\rho+1} + |F(t)|,$$

и потому с учетом (2.4)

$$\|y''_{tt}\|_{L_2(0,1;V')}^2 \leq C_\rho \left[1 + \left(\sup_t E(y(t), y'_t(t)) \right)^{1+\rho/(\rho+2)} + \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|f\|_{L_2(Q)}^2 \right], \quad (2.14)$$

где константа C_ρ не зависит от y .

Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем компакт $K_\varepsilon \subset \Lambda$ такой, что $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Тогда в силу (2.13) и (2.14) существует такое $R = R_\varepsilon > 0$, что для любых $\lambda \in K_\varepsilon$ и $u \in \mathcal{U}$ $y(u, \lambda) \in B_R = \{\|y\|_Y \leq R\}$ (напомним, что $\mathcal{U}$ ограничено в $L_2(Q)$).

Согласно лемме 2.1 шар B_R предкомпактен в Z . Поскольку B_R компактен в $*$ -слабой топологии Y , то из любой сходящейся в Z последовательности $\{z_n\} \subset B_R$ можно выбрать $*$ -слабо сходящуюся в Y (к тому же пределу) подпоследовательность. Значит, B_R замкнут и, следовательно, компактен в Z . Учитывая, что $B_R \subset \tilde{Y}$ и пространство $\tilde{Y}$ снабжено топологией Z , заключаем, что B_R компактен также и в $\tilde{Y}$.

Заметим теперь, что в силу (2.12) для произвольного $u \in \mathcal{U}$ $\Pi_u(K_\varepsilon \times B_R) = \mu\{\lambda \in K_\varepsilon : y(u, \lambda) \in B_R\} = \mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, и потому утверждение леммы следует из теоремы Прохорова.

Для произвольного $u \in L_2(Q)$ введем оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_u(\lambda, y) &= (y''_{tt} - \Delta y + |y|^\rho y - u - f, y(0) - y_0, y'_t(0) - y_1), \\ \lambda &= (y_0, y_1, f) \in \Lambda, \quad y \in Y. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Оператор $\mathcal{A}_u$ действует непрерывно из $\Lambda \times \tilde{Y}$ в пространство $H^{-s}(Q) \times L_q \times V'$, где $s = [(n+3)/2]$ — целая часть числа $(n+3)/2$ (при рассмотрении слагаемого $|y|^\rho y$ ссылаемся на теорему вложения Соболева).

Пусть π — проекция $(\lambda, y) \rightarrow \lambda$, $\Lambda \times \tilde{Y} \rightarrow \Lambda$. Справедлив аналог леммы 1.3, получаемый дословным повторением ее доказательства:

ЛЕММА 2.3. Борелевская мера Π на $\Lambda \times \tilde{Y}$ совпадает с распределением Π_u , $u \in L_2(Q)$, тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A}_u^* \Pi = \delta_0 \quad \text{и} \quad \pi^* \Pi = \mu,$$

где δ_0 – единичная мера, сосредоточенная в нуле пространства $H^{-s}(Q) \times L_q \times V'$.

Назовем управление *допустимым*, если $u \in \mathcal{U}$ и $\mathcal{J}(u) < \infty$. (Пример выполнения второго условия: пусть

$$M[E(y_0, y_1) + \|f\|_{L_2(Q)}^2] < \infty. \quad (2.16)$$

Тогда в силу оценки (2.13) $\mathcal{J}(u) < \infty \forall u \in L_2(Q)$.)

Будем предполагать, что множество допустимых управлений непусто.

По той же схеме, что и теоремы существования в § 1, доказывается

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть множество $\mathcal{U}$ выпукло и замкнуто в $L_2(Q)$. Тогда существует по меньшей мере одно оптимальное управление для задачи (2.1)–(2.3), (2.9)–(2.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем минимизирующую последовательность управлений $u_n \in \mathcal{U}$, и пусть $\Pi_n = \Pi_{u_n}$ – распределения (2.12). Перейдя к подпоследовательности, можем считать, что меры Π_n слабо на $\Lambda \times \tilde{Y}$ сходятся к некоторой мере Π , а управления u_n слабо в $L_2(Q)$ (и, следовательно, сильно в $H^{-s}(Q)$) сходятся к некоторой функции $\hat{u}$. Заметим сразу, что благодаря выпуклости множество $\mathcal{U}$ слабо замкнуто в $L_2(Q)$, а потому $\hat{u} \in \mathcal{U}$.

Так же как в теореме 1.1, устанавливается, что $\Pi = \Pi_{\hat{u}}$. Действительно, из сходимости $(\lambda_k, y_k) \rightarrow (\lambda, y)$ в $\Lambda \times \tilde{Y}$ и $u_k \rightarrow u$ в $H^{-s}(Q)$ следует, что $\mathcal{A}_{u_k}(\lambda_k, y_k) \rightarrow \mathcal{A}_u(\lambda, y)$ в $H^{-s}(Q) \times L_q \times V'$ – это вытекает непосредственно из структуры (2.15) оператора $\mathcal{A}_u$. Поэтому, переходя к пределу в соотношениях $\mathcal{A}_{u_n}^* \Pi_n = \delta_0$ и $\pi^* \Pi_n = \mu$, справедливых в силу леммы 2.3, получаем $\mathcal{A}_{\hat{u}}^* \Pi = \delta_0$ и $\pi^* \Pi = \mu$ и, значит, $\Pi = \Pi_{\hat{u}}$.

Покажем, что $\hat{u}$ – оптимальное управление. Для этого заметим, что функционал $\Phi(y) = \|y(1) - z_0\|_1^2$ полунепрерывен снизу на $\tilde{Y}$. Действительно, пусть $y_k \in A_c = \{y \in \tilde{Y} : \Phi(y) \leq c\}$ и $y_k \rightarrow y$ в $\tilde{Y}$. Тогда в силу компактности шара $\{\|z - z_0\|_1^2 \leq c\}$ в слабой топологии пространства H^1 найдутся подпоследовательность $\{k'\} \subset \{k\}$ и функция $v \in H^1$ такие, что $y_{k'}(1) \rightarrow v$ слабо в H^1 и $\|v - z_0\|_1^2 \leq c$. Учитывая сходимость $y_k(1) \rightarrow y(1)$ в L_q , заключаем, что $v = y(1)$. Следовательно, $y \in A_c$ и потому A_c замкнуто в $\tilde{Y}$.

Из полунепрерывности снизу функционала $\Phi(y)$ следует, что

$$\mathcal{J}(\hat{u}) = \int \Phi(y) d\Pi \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \Phi(y) d\Pi_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(u_n) = \inf \mathcal{J}(u),$$

и потому $\hat{u}$ – оптимальное управление.

Аналогично § 1 могут быть получены результаты об аппроксимации.

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ выберем в Λ такой компакт $\mathcal{K}_j$, что $\mu(\mathcal{K}_j) > 1 - 1/j$. Положим

$$C_j = \sup_{\substack{\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathcal{K}_j \\ u \in \mathcal{U}}} [(C(y(u, \lambda), y(u, \tilde{\lambda})))^{1/2} \cdot \|y(1, u, \lambda) - z_0\|_1], \quad (2.17)$$

где $y(u, \lambda) = y(t, u, \lambda)$ – соответствующее управлению u и вектору исходных данных λ решение задачи (2.1)–(2.3), $C(y, \tilde{y})$ – константа из оценки (2.7). В силу теоремы 2.1 $C_j < \infty$.

В каждом из компактов $\mathcal{K}_j$ возьмем $\frac{\varepsilon_j}{2}$ -сеть $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_j}\}$, причем ε_j выберем с таким расчетом, чтобы

$$C_j \varepsilon_j \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Так же как в § 1, построим меры

$$\mu_j = \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_i \delta_{\lambda_i},$$

где α_i определены в (1.17). Согласно лемме 1.4 $\mu_j \rightarrow \mu$ слабо на Λ .

Рассмотрим последовательность приближенных задач

$$(y_i)''_{tt} - \Delta y_i + |y_i|^\rho y_i = u + f_i, \quad i = 1, \dots, N_j, \quad (2.19)$$

$$y_i(0) = y_{0_i}, \quad (y_i)'_t(0) = y_{1_i}, \quad (2.20)$$

$$y_i|_{x \in \partial \mathcal{O}} = 0, \quad (2.21)$$

$$u \in \mathcal{U}, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{J}_j(u) = \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_i \|y_i(1) - z_0\|_1^2 \rightarrow \inf, \quad (2.23)$$

где $y_i = y(u, \lambda_i)$, $\lambda_i = (y_{0_i}, y_{1_i}, f_i)$, $i = 1, \dots, N_j$.

Справедлива

ЛЕММА 2.4. Пусть выполнено условие (2.16). Тогда равномерно по $u \in \mathcal{U}$ $\mathcal{J}_j(u) \rightarrow \mathcal{J}(u)$ при $j \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим разность

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_j(u) - \mathcal{J}(u) &= \int_{\mathcal{K}_j} \|y(1) - z_0\|_1^2 (d\mu_j - d\mu) - \int_{\Lambda \setminus \mathcal{K}_j} \|y(1) - z_0\|_1^2 d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{N_j} \int_{\mathcal{K}_j} \gamma_i(\lambda) (\|y_i(1) - z_0\|_1^2 - \|y(1) - z_0\|_1^2) d\mu - \int_{\Lambda \setminus \mathcal{K}_j} \|y(1) - z_0\|_1^2 d\mu, \end{aligned}$$

где обозначено $y(t) = y(t, u, \lambda)$, $y_i(t) = y(t, u, \lambda_i)$.

Поскольку

$$|\|y_i(1) - z_0\|_1^2 - \|y(1) - z_0\|_1^2| \leq \|y_i(1) - y(1)\|_1 (\|y_i(1) - z_0\|_1 + \|y(1) - z_0\|_1),$$

из (2.7), (2.17) и (2.13) получим

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_j(u) - \mathcal{J}(u)| &\leq \sum_{i=1}^{N_j} \int_{\mathcal{K}_j} \gamma_i(\lambda) \|\lambda - \lambda_i\|_\Lambda (C(y, y_i))^{1/2} (\|y(1) - z_0\|_1 \\ &\quad + \|y_i(1) - z_0\|_1) d\mu + 2 \int_{\Lambda \setminus \mathcal{K}_j} (E(y(1), y'_t(1)) + \|z_0\|_1^2) d\mu \\ &\leq 2C_j \varepsilon_j \mu(\mathcal{K}_j) + 2e \int_{\Lambda \setminus \mathcal{K}_j} (E(y_0, y_1) + \|f\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|z_0\|_1^2) d\mu \\ &\leq 2C_j \varepsilon_j + 2e \int_{\Lambda \setminus \mathcal{K}_j} (E(y_0, y_1) + \|f\|_{L_2(Q)}^2) d\mu + \frac{2e}{j} (\sup_{\mathcal{U}} \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|z_0\|_1^2). \end{aligned}$$

Учитывая (2.18), (2.16) и ограниченность $\mathcal{U}$, выводим отсюда утверждение леммы.

Обозначим $\widehat{\mathcal{J}}_j = \inf_{\mathcal{U}} \mathcal{J}_j(u)$. Справедлива

ТЕОРЕМА 2.3. *Предположим, что выполнено условие (2.16). Пусть u_j , $j = 1, 2, \dots$, – субоптимальные (оптимальные) управления для приближенных задач (2.19)–(2.23) такие, что $\Delta_j = \mathcal{J}_j(u_j) - \widehat{\mathcal{J}}_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда u_j образуют минимизирующую последовательность управлений для задачи (2.1)–(2.3), (2.9)–(2.11).*

Доказательство опирается на лемму 2.4 и повторяет доказательство теоремы 1.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Задача (2.1)–(2.3), (2.9)–(2.11) может быть дополнена фазовыми ограничениями вида (1.5) или (1.6); для получаемых задач справедливы аналогии соответствующих теорем из § 1.

Список литературы

1. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех., астроном. 1959. № 2. С. 25–32.
2. Экланд И., Теллам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
3. Докучаев Н. Г., Якубович В. А. Принцип максимума для стохастических дифференциальных уравнений с детерминированным управлением // Кибернетика и вычислительная техника. № 54. Киев: Наукова думка, 1982. С. 72–78.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
5. Вишик М. И., Фурсиков А. В. Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980.
6. Хрычëв Д. А. Об одном стохастическом квазилинейном гиперболическом уравнении // Матем. сб. 1981. Т. 116. № 3. С. 398–426.
7. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
8. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
9. Дончев А. Системы оптимального управления. М.: Мир, 1987.
10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
11. Вишик М. И., Комеч А. И. О разрешимости задачи Коши для уравнения Хопфа, соответствующего нелинейному гиперболическому уравнению // Труды сем. им. И. Г. Петровского. № 3. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 19–42.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики
(технический университет)

Поступила в редакцию
29.02.2000