Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Многообразие Фано с единственной эллиптической структурой,
Матем. сб., 2001, том 192, номер 5, 145–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 10:47:21

УДК 513.6

И. А. Чельцов

Многообразие Фано с единственной эллиптической структурой

В работе дается пример трехмерного многообразия Фано, которое имеет единственное представление в виде расслоения на эллиптические кривые. Другие примеры рационально связных многообразий с таким свойством пока неизвестны.

Библиография: 5 названий.

Все рассматриваемые многообразия проективны и определены над $\mathbb{C}$. Основные определения, понятия и обозначения содержатся в работе [1].

Автор благодарен В. А. Исковских, А. В. Пухликову и В. В. Шокурову за полезные идеи и интересные замечания.

§ 1. Введение

В этой статье мы изучим свойства следующего трехмерного многообразия.

Основной объект. Пусть $\theta: X \rightarrow \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие, разветвленное в секстике S , такое, что X имеет ровно одну особую точку O , которая является обыкновенной двойной точкой.

Бирациональная геометрия многообразия X изучалась в работе [2], где был доказан следующий результат.

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ЖЕСТКОСТЬ МНОГООБРАЗИЯ X . *Выполняется равенство*

$$\mathrm{Bir} X = \mathrm{Aut} X,$$

и многообразие X бирационально не изоморфно

- (1) *многообразиям Мори¹, которые не изоморфны многообразию X ,*
- (2) *расслоениям на коники,*
- (3) *расслоениям на поверхности с размерностью Кодайры $-\infty$.*

Кроме бирациональной жесткости, многообразие X обладает рядом других интересных свойств.

Работа написана при частичной поддержке гранта NSF DMS-9800807.

¹Под многообразиями Мори мы будем подразумевать многообразия Фано с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями и группой Пикара $\mathbb{Z}$.

Эллиптические структуры на многообразии X . Пусть $f: W \rightarrow X$ – раздутие особой точки O . Тогда линейная система $| -K_W |$ свободна и морфизм

$$\varphi|_{-K_W}: W \rightarrow \mathbb{P}^2$$

является расслоением на эллиптические кривые.

Заметим, что образ в $\mathbb{P}^3$ слоя построенного эллиптического расслоения является прямой, проходящей через точку $\theta(O)$.

Соглашение. Мы будем отождествлять расслоения, которые бирационально эквивалентны (как расслоения).

Цель настоящей статьи – доказать следующий результат.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Многообразие X не может быть бирационально перестроено в другие эллиптические расслоения.*

Заметим, что каждая рационально связная поверхность бирационально изоморфна бесконечному числу различных расслоений на эллиптические кривые.

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. На сегодняшний день многообразие X – единственный пример рационально связного многообразия, которое представляется (в классе бирационально изоморфных многообразий) в качестве эллиптического расслоения единственным способом.

Наши методы также описывают другие интересные свойства многообразия X .

КЗ СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИИ X . Пусть $\mathcal{P}$ – пучок в антиканонической линейной системе $| -K_X |$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{P}}} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

разрешает неопределенности отображения $\varphi_{\mathcal{P}}$. Тогда общий слой морфизма g является гладкой поверхностью типа КЗ.

Следующий результат дополняет основную теорему.

ДОБАВОЧНАЯ ТЕОРЕМА. *Многообразие X бирационально не изоморфно*

- (1) *многообразиям Фано с каноническими особенностями, не бирегулярным многообразиям X ,*
- (2) *расслоениям на поверхности с размерностью Кодайры нуль, кроме расслоений на КЗ поверхности, которые были построены ранее в этом параграфе.*

§ 2. Вспомогательные объекты

Теперь мы рассмотрим объекты, которые будут использоваться в процессе доказательства основной теоремы.

ПОДВИЖНАЯ ЛОГ-ПАРА. Под *подвижной лог-парой*

$$(X, M_X) = \left(X, \sum_{i=1}^n b_i \mathcal{M}_i \right)$$

мы будем подразумевать многообразие X и формальную конечную линейную комбинацию линейных систем $\mathcal{M}_i$ без неподвижных компонент таких, что все $b_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Заметим, что при необходимости лог-пара (X, M_X) может рассматриваться как обычная лог-пара.

Наблюдение. Прямой образ границы M_X естественно определен для всех бирациональных отображений.

Мы будем считать, что лог-канонические дивизоры всех рассматриваемых лог-пар являются $\mathbb{Q}$ -Картье дивизорами. Следовательно, для подвижной лог-пары имеют место такие классические понятия, как дискрепантности, терминальность, каноничность, лог-терминальность и лог-каноничность.

ЦЕНТР КАНОНИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ. Собственное неприводимое и приведенное подмногообразие Y многообразия X называется *центром канонических особенностей* подвижной лог-пары (X, M_X) , если существуют бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и f -исключительный дивизор $E \subset W$ такие, что

$$a(X, M_X, E) \leq 0 \quad \text{и} \quad f(E) = Y.$$

МНОЖЕСТВО ЦЕНТРОВ КАНОНИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ. Через $\text{CS}(X, M_X)$ будем обозначать в дальнейшем множество всех центров канонических особенностей подвижной лог-пары (X, M_X) .

Из работы [3] вытекает следующий важный результат.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ. *Каноническая модель единственна, если она существует.*

Для произвольной подвижной лог-пары (X, M_X) рассмотрим такой бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$, что подвижная лог-пара

$$(W, M_W) = (W, f^{-1}(M_X))$$

имеет канонические особенности.

ОТОБРАЖЕНИЕ ИИТАКИ И РАЗМЕРНОСТЬ КОДАИРЫ. Если линейная система $|n(K_W + M_W)|$ не пуста для $n \gg 0$, то отображение

$$I(X, M_X) = \varphi_{|n(K_W + M_W)|} \circ f^{-1} \quad \text{для} \quad n \gg 0$$

называется *отображением Иитаки* подвижной лог-пары (X, M_X) , а число

$$\kappa(X, M_X) = \dim(I(X, M_X)(X))$$

называется *размерностью Кодайры* подвижной лог-пары (X, M_X) . В противном случае считается, что отображение $I(X, M_X)$ не определено ни в одной точке многообразия X и $\kappa(X, M_X) = -\infty$.

Можно показать следующее.

ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ. *Отображение Иитаки $I(X, M_X)$ и размерность Кодaira $\kappa(X, M_X)$ не зависят от выбора отображения f .*

Заметим, что отображение Иитаки и размерность Кодaira априори зависят от натурального числа $n \gg 0$ в их определении. Можно показать, что размерность Кодaira от этого числа не зависит. Более того, в размерности 3 из лог-избыточности (см. [1]) следует, что отображение Иитаки также зависит только от свойств подвижной лог-пары.

Мы будем работать в основном с подвижными лог-парами и будем называть их просто лог-парами.

§3. Лог-Калаби-Яо структуры

Теперь мы покажем связь между предыдущим параграфом и основной теоремой. При этом мы будем использовать обозначения из §1.

Можно показать, что

$$\mathrm{Pic} X = \mathbb{Z}K_X \text{ и } K_X \sim \theta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)).$$

Зафиксируем лог-пару (X, M_X) . Выберем $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$ такое, что

$$K_X + \lambda M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0,$$

где $\lambda = +\infty$ для $M_X = \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В случае $\lambda = 1$ мы будем называть лог-пару (X, M_X) *лог-Калаби-Яо многообразием*.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. *Предположим, что (X, M_X) – лог-Калаби-Яо многообразие. Тогда лог-пара (X, M_X) канонична, $\kappa(X, M_X) = 0$ и*

$$\mathrm{CS}(X, M_X) = \begin{cases} \{O\}, \\ \{\mathrm{Bs} \mathcal{P}\} & \text{для пучка } \mathcal{P} \text{ в } |-K_X| \text{ такого, что } O \notin \mathrm{Bs} \mathcal{P}, \\ \{\mathrm{Bs} \mathcal{P}, O\} & \text{для пучка } \mathcal{P} \text{ в } |-K_X| \text{ такого, что } O \in \mathrm{Bs} \mathcal{P}, \\ \emptyset. \end{cases}$$

Оказывается, что и основная, и добавочная теоремы легко выводятся из центральной теоремы.

Основываясь на центральной теореме, можно получить достаточно подробное описание границы M_X в случае, когда особенности лог-пары (X, M_X) не терминальны.

УТОЧНЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ. *Предположим, что (X, M_X) – лог-Калаби-Яо многообразие и лог-пара (X, M_X) не терминальна. Тогда*

$$M_X = \psi^{-1}(M_Y),$$

где рациональное отображение $\psi: X \dashrightarrow Y$ является композицией двойного накрытия θ и проекции из $\theta(\mathrm{CS}(X, M_X))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z – объединение кривых в $\text{CS}(X, M_X)$, если последнее множество содержит кривую. В противном случае пусть $Z = O$.

Заметим, что в случае, когда множество $\text{CS}(X, M_X)$ содержит точку O ,

$$\text{mult}_O(M_X) = 1.$$

Последнее следует из теоремы Корти (см. § 6).

Рассмотрим линейную систему $\mathcal{H}$ поверхностей в линейной системе $|-K_X|$, содержащих Z . Выберем бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ такой, что линейная система $f^{-1}(\mathcal{H})$ свободна, многообразие W гладко, а морфизм f является изоморфизмом вне Z . Пусть

$$g = \varphi_{\mathcal{H}} \circ f \quad \text{и} \quad (W, M_W) = (W, f^{-1}(M_X)).$$

Зафиксируем достаточно общий дивизор D в линейной системе $f^{-1}(\mathcal{H})$.

Возможны четыре случая: $\theta(Z)$ не содержится в S ; $\theta(Z)$ – прямая в S , не проходящая через точку $\theta(O)$; $\theta(Z)$ – прямая, содержащаяся в поверхности S и проходящая через точку $\theta(O)$; $Z = O$.

Предположим, что $\theta(Z) \not\subset S$. Можно считать, что многообразие W содержит ровно один f -исключительный дивизор, лежащий над общей точкой каждой неприводимой компоненты S . Тогда

$$M_W|_D \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^k c_i F_i|_D,$$

где все $f(F_i)$ являются точками на X , а все числа c_i рациональны. Отсюда следует, что граница M_W лежит в слоях расслоения g и

$$I(X, M_X) = g \circ f^{-1}.$$

Предположим, что $\theta(Z)$ является прямой, лежащей на поверхности S и не проходящей через точку $\theta(O)$. Мы можем считать, что морфизм f есть композиция раздутия кривой Z и раздутия сечения исключительной поверхности первого раздутия. Тогда

$$M_W|_D \sim_{\mathbb{Q}} a(X, M_X, E_2)E_2|_D,$$

где E_2 – исключительная поверхность второго раздутия. С другой стороны, несложно увидеть, что кривая $E_2|_D$ гладкая и рациональная, а поверхность D является гладкой поверхностью типа КЗ. Таким образом,

$$a(X, M_X, E_2) = 0.$$

Из последнего вытекает, что граница M_W содержится в слоях отображения g и

$$I(X, M_X) = g \circ f^{-1}.$$

Предположим, что $\theta(Z)$ – прямая в S , проходящая через точку $\theta(O)$. Можно считать, что морфизм f является композицией раздутия особой точки O , раздутия

собственного прообраза кривой Z и раздутья сечения на исключительной поверхности второго раздутья. В этом случае

$$M_W|_D \sim_{\mathbb{Q}} (a(X, M_X, E)E + a(X, M_X, E_2)E_2)|_D,$$

где E и E_2 – исключительные поверхности первого и третьего раздутья соответственно. С другой стороны, $E|_D$ и $E_2|_D$ являются гладкими рациональными кривыми на гладкой КЗ поверхности D , которые трансверсально пересекаются в одной точке. Следовательно,

$$a(X, M_X, E) = a(X, M_X, E_2) = 0.$$

Из последнего легко вытекает, что граница M_W лежит в слоях расслоения g и

$$I(X, M_X) = g \circ f^{-1}.$$

Предположим теперь, что $Z = O$. В этом случае морфизм g – эллиптическое расслоение. Можно считать, что f – раздутье точки O . Для достаточно общего слоя C расслоения g

$$M_W \cdot C = 0.$$

Следовательно, M_W лежит в слоях расслоения g и

$$I(X, M_X) = g \circ f^{-1}.$$

§ 4. Отображения Иитаки

СЛЕДСТВИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ. *Выполняются следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \lambda = 1 &\iff \kappa(X, M_X) = 0, \\ \lambda < 1 &\iff \kappa(X, M_X) > 0, \\ \lambda > 1 &\iff \kappa(X, M_X) = -\infty. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, лог-пары с $\kappa(X, M_X) = 1$ или 2 могут быть описаны достаточно подробно.

ТЕОРЕМА-ОПИСАНИЕ I. *Предположим, что $\kappa(X, M_X) = 1$. Тогда лог-пара (X, M_X) не канонична, отображение Иитаки $I(X, M_X)$ является композицией двулистного накрытия θ и проекции из некоторой прямой в $\mathbb{P}^3$ и*

$$M_X = I(X, M_X)^{-1}(\mathbb{P}^1).$$

ТЕОРЕМА-ОПИСАНИЕ II. *Пусть $\kappa(X, M_X) = 2$. Тогда лог-пара (X, M_X) не канонична, отображение Иитаки $I(X, M_X)$ является композицией отображения θ и проекции из точки $\theta(O)$ в $\mathbb{P}^3$ и*

$$M_X = I(X, M_X)^{-1}(\mathbb{P}^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ-ОПИСАНИЙ I и II. Из центральной теоремы следует каноничность лог-пары $(X, \lambda M_X)$. Таким образом,

$$\kappa(X, M_X) \geq \kappa(X, \lambda M_X) = 0.$$

Предположим, что лог-пара $(X, \lambda M_X)$ терминальна. Возьмем $\delta \in \mathbb{Q} \cap (\lambda, 1)$ такое, что лог-пара $(X, \delta M_X)$ все еще терминальна. Тогда

$$3 = \kappa(X, \delta M_X) \leq \kappa(X, M_X) \leq 2.$$

Следовательно,

$$\text{CS}(X, \lambda M_X) \neq \emptyset.$$

Теперь осталось применить уточнение центральной теоремы.

Что можно сказать о лог-парах на многообразии X , которые имеют размерность Кодайры $-\infty$?

ТЕОРЕМА-ОПИСАНИЕ III. *Из $\kappa(X, M_X) = -\infty$ следует, что $\text{CS}(X, M_X) = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По центральной теореме особенности лог-пары $(X, \lambda M_X)$ канонические. Утверждение следует из неравенства $\lambda > 1$.

Заметим, что бирациональная жесткость многообразия X следует из теоремы-описания III.

§ 5. Бирациональная геометрия многообразия X

В этом параграфе мы докажем основную и добавочную теоремы, а также бирациональную жесткость многообразия X , используя результаты предыдущего параграфа, центральную теорему и уточнение центральной теоремы.

ТЕОРЕМА А. *Многообразие X не бирационально расслоению, общий слой которого имеет размерность Кодайры $-\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что ρ – бирациональная перестройка многообразия X в расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$, общий слой которого имеет размерность Кодайры $-\infty$.

Возьмем “достаточно большой” очень обильный дивизор H на Z . Выберем такое число $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$, что лог-пара

$$(X, M_X) = (X, \mu \rho^{-1}(|\tau^*(H)|))$$

является лог-Калаби-Яо многообразием.

По построению

$$\kappa(X, M_X) = -\infty,$$

что противоречит центральной теореме.

ТЕОРЕМА Б. *Выполняется равенство $\text{Bir } X = \text{Aut } X$, и многообразие X бирационально не изоморфно никакому многообразию Фано с каноническими особенностями, которое не изоморфно самому многообразию X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем несколько более сильное утверждение. Предположим, что существует такое бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow Y$, что многообразие Y имеет канонические особенности, а антиканонический дивизор численно эффективен и объемен. Нам нужно показать, что ρ — изоморфизм.

Хорошо известно, что для $n \gg 0$ линейная система $|-nK_Y|$ свободна. Рассмотрим лог-пары

$$(Y, M_Y) = \left(Y, \frac{1}{n} |-nK_Y|\right) \quad \text{и} \quad (X, M_X) = (X, \rho^{-1}(M_Y)).$$

По следствию центральной теоремы лог-пара (X, M_X) является лог-Калаби-Яо многообразием, а по уточнению центральной теоремы она терминальна.

Значит, мы можем рассмотреть такое число $\zeta \in \mathbb{Q}_{>1}$, что обе лог-пары $(X, \zeta M_X)$ и $(Y, \zeta M_Y)$ являются каноническими моделями. По теореме единственности ρ — изоморфизм.

ТЕОРЕМА В. *Все перестройки многообразия X в расслоения, общий слой которых имеет размерность Кодаиры нуль, описаны в §1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ — бирациональная перестройка многообразия X в такое расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$, что размерность Кодаиры общего слоя τ равна нулю.

Возьмем “достаточно большой” очень обильный дивизор H на многообразии Z . Утверждение следует из равенства

$$\kappa(X, \rho^{-1}(|\tau^*(H)|)) = \dim Z$$

и теорем-описаний I и II.

§6. Доказательство центральной теоремы

В этом параграфе мы докажем центральную теорему.

Зафиксируем лог-Калаби-Яо многообразие (X, M_X) .

Глобальная стратегия: 1) показать, что множество $\text{CS}(X, M_X)$ не содержит точек, кроме, может быть, точки O ; 2) доказать, что лог-пара (X, M_X) канонична в точке O ; 3) описать кривые, принадлежащие множеству $\text{CS}(X, M_X)$.

Для воплощения глобальной стратегии в жизнь нам понадобятся несколько вспомогательных результатов.

Следующий результат доказан в работе [4].

ТЕОРЕМА СВЯЗНОСТИ ШОКУРОВА. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- (1) $f: W \rightarrow X$ — морфизм нормальных многообразий такой, что $f_*(\mathcal{O}_W) = \mathcal{O}_X$;
- (2) $D = \sum_{i=1}^n d_i D_i$ — дивизор такой, что D_i f -исключителен, если $d_i < 0$;
- (3) $-(K_W + D)$ является f -численно эффективным и f -объемным $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором;
- (4) $g: V \rightarrow W$ — лог-разрешение лог-пары (W, D) .

Тогда дивизор

$$\sum_{a(W, D, E) \leq -1} E$$

связен в окрестности любого слоя морфизма $f \circ g$.

ЛЕММА КОРТИ [5; теорема 3.1]. Пусть P – гладкая точка на поверхности H и для некоторых неотрицательных рациональных чисел a_1 и a_2

$$P \in \text{LCS}(H, (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + M_H),$$

где граница M_H подвижна, а неприводимые и приведенные кривые Δ_1 и Δ_2 пересекаются нормально в точке P . Тогда

$$\text{mult}_P(M_H^2) \geq \begin{cases} 4a_1a_2, & \text{если } a_1 \leq 1 \text{ или } a_2 \leq 1, \\ 4(a_1 + a_2 - 1), & \text{если } a_1 > 1 \text{ или } a_2 > 1. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ КОРТИ. Предположим, что $P \in \text{LCS}(H, M_H)$, где P – гладкая точка на поверхности H , а лог-пара (H, M_H) подвижна. Тогда

$$\text{mult}_P(M_H^2) \geq 4.$$

ТЕОРЕМА КОРТИ [5; теорема 3.11]. Предположим, что $O \in \text{CS}(X, M_X)$, где O – обыкновенная двойная точка на трехмерном многообразии X , а лог-пара (X, M_X) подвижна. Тогда

$$\text{mult}_O(M_X) \geq 1.$$

Что мы будем делать теперь?

Локальная стратегия: 1) используя теорему связности Шокурова и лемму Корти, показать, что множество $\text{CS}(X, M_X)$ не содержит гладких точек многообразия X ; 2) вывести из теоремы Корти, что лог-пара (X, M_X) канонична в точке O .

ЛЕММА I. Множество $\text{CS}(X, M_X)$ не содержит гладких точек многообразия X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\text{CS}(X, M_X)$ содержит гладкую точку P .

Рассмотрим лог-пару

$$(X, B_X) = (X, H_X + M_X),$$

где дивизор H_X – достаточно общее гиперплоское сечение многообразия X , проходящее через точку P .

По построению

$$P \in \text{LCS}(X, B_X).$$

Таким образом, по теореме связности Шокурова

$$P \in \text{LCS}(H_X, M_X|_{H_X}).$$

Следовательно, по лемме Корти

$$\text{mult}_P(M_X^2) = \text{mult}_P((M_X|_{H_X})^2) \geq 4.$$

С другой стороны,

$$2 = -K_X \cdot M_X^2 \geq \text{mult}_P(M_X^2).$$

Из неравенства

$$2 = -K_X \cdot M_X^2 \geq 2 \text{mult}_P^2(M_X)$$

и теоремы Корти вытекает следующая лемма.

ЛЕММА II. *Лог-пара (X, M_X) канонична в точке O .*

Итак, чтобы доказать центральную теорему, мы можем считать, что множество $\text{CS}(X, M_X)$ содержит неприводимую и приведенную кривую C .

Локальная стратегия: 1) показать, что $\theta(C)$ – прямая в $\mathbb{P}^3$; 2) доказать, что все компоненты кривой $\theta^{-1}(\theta(C))$ принадлежат множеству $\text{CS}(X, M_X)$.

Неравенство

$$2 = -K_X \cdot M_X^2 \geq \text{mult}_C(M_X^2)(-K_X) \cdot C \geq -K_X \cdot C \geq \deg \theta(C)$$

легко приводит к следующему утверждению.

ЛЕММА III. $-K_X \cdot C \leq 2$ и кривая $\theta(C)$ является либо коникой, либо прямой.

ЛЕММА IV. $\theta(C)$ – прямая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Из леммы III следует, что $-K_X \cdot C = 2$, кривая $\theta(C)$ является коникой, морфизм $\theta|_C$ является изоморфизмом и

$$\text{mult}_C(M_X) = 1.$$

Выберем достаточно общий дивизор H в линейной системе $|-K_X|$. Поверхность H является гладкой поверхностью типа КЗ, которая пересекает кривую C ровно в двух различных точках x_1 и x_2 .

Пусть $g: V \rightarrow H$ – раздутие точек x_1 и x_2 . Положим $E_1 = g^{-1}(x_1)$ и $E_2 = g^{-1}(x_2)$. Тогда линейная система

$$|g^*(H|_H) - E_1 - E_2|$$

содержит ровно один эффективный дивизор D .

Заметим, что D – гладкая кривая рода 2.

С другой стороны,

$$(g^{-1}(M_X|_H)) \sim_{\mathbb{Q}} g^*(H|_H) - E_1 - E_2$$

и

$$(g^{-1}(M_X|_H))^2 = 0.$$

Таким образом, линейная система $|nD|$ не содержит неподвижных компонент для $n \gg 0$ и $D^2 = 0$.

Следовательно, для некоторого $n \gg 0$ линейная система $|nD|$ свободна и

$$\varphi_{|nD|}(V) = \mathbb{P}^1.$$

Значит, для $k \in (1, n]$ расслоение $\varphi_{|nD|}$ обладает кратным слоем kD . Из последнего вытекает, что род кривой D равен 1.

Теперь мы завершим

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ. Предположим, что

$$\mathrm{CS}(X, M_X) \neq \emptyset \text{ и } \mathrm{CS}(X, M_X) \neq \{O\}.$$

Из лемм I–IV следует, что $\mathrm{CS}(X, M_X)$ содержит гладкую рациональную кривую C такую, что $-K_X \cdot C = 1$. Более того, $C \notin S$. Следовательно,

$$\theta^{-1}(\theta(C)) = C \cup C',$$

где кривая C' также гладка и рациональна и $-K_X \cdot C' = 1$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{H}$ поверхностей в линейной системе $|-K_X|$, содержащих кривые C и C' . Выберем бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ такой, что пучок $f^{-1}(\mathcal{H})$ свободен, многообразие W гладкое, а f – изоморфизм вне кривых C и C' . Положим

$$(W, M_W) = (W, f^{-1}(M_X))$$

и зафиксируем достаточно общий дивизор D в пучке $f^{-1}(\mathcal{H})$.

Возможны два случая: кривые C и C' проходят через точку O ; кривые C и C' не проходят через точку O . В первом случае нам нужно показать, что

$$C' \in \mathrm{CS}(X, M_X) \text{ и } O \in \mathrm{CS}(X, M_X).$$

В последнем случае нам нужно показать, что

$$C' \in \mathrm{CS}(X, M_X).$$

Предположим, что кривые C и C' проходят через точку O . Можно считать, что f является композицией раздутия точки O , раздутия собственного прообраза кривой C и раздутия собственного прообраза кривой C' . Тогда

$$M_W|_D \sim_{\mathbb{Q}} (a(X, M_X, E)E + a(X, M_X, E_2)E_2)|_D,$$

где E и E_2 – исключительные поверхности первого и третьего раздутия соответственно. С другой стороны, гладкие и рациональные кривые $E|_D$ и $E_2|_D$ пересекаются на гладкой КЗ поверхности D в одной точке. Следовательно,

$$a(X, M_X, E) = a(X, M_X, E_2) = 0.$$

Теперь разберем случай, когда кривые C и C' не проходят через точку O . В этом случае мы можем считать, что f – композиция раздутия кривой C и раздутия собственного прообраза кривой C' . Тогда

$$M_W|_D \sim_{\mathbb{Q}} a(X, M_X, E_2)E_2|_D,$$

где E_2 – исключительная поверхность второго раздутия. Однако, с другой стороны, $E_2|_D$ – гладкая и рациональная кривая на гладкой КЗ поверхности D . Из последнего вытекает, что

$$a(X, M_X, E_2) = 0.$$

Список литературы

1. *Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K.* Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
2. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of a double spaces with singularities // J. Math. Sci. 1997. V. 85. P. 2128–2141.
3. *Shokurov V. V.* 3-fold log models // J. Math. Sci. 1996. V. 81. P. 2667–2699.
4. *Шокуров В. В.* Трехмерные логперестройки // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–201.
5. *Corti A.* Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // Explicit birational geometry of 3-folds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 259–312. (Lond. Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281.)

Москва
E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступила в редакцию
11.06.1999