Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Дифференциальное исчисление на пространстве минимальных деревьев Штейнера в римановых многообразиях, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 6, 31–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm571>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 04:11:47

УДК 514.77+512.816.4+517.924.8

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Дифференциальное исчисление на пространстве минимальных деревьев Штейнера в римановых многообразиях

В работе показано, что длина минимального остовного дерева, длина минимального дерева Штейнера и отношение Штейнера, рассматриваемые как функции конечных подмножеств связного полного риманова многообразия, дифференцируемы по направлениям. Кроме того, вычислены производные этих функций и приведены некоторые свойства их критических точек. В том числе получен геометрический критерий критичности для отношения Штейнера. Этот критерий дает существенные ограничения на геометрию множеств, для которых отношение Штейнера достигает своего минимума, т.е. тех множеств, на которых отношение Штейнера граничного множества равно отношению Штейнера объемлющего пространства.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

Настоящая статья посвящена исследованию дифференциальных свойств и критических точек функций, строящихся по экстремальным деревьям, затягивающим конечные подмножества связных полных римановых многообразий. Мы будем рассматривать следующие функции: длина минимального дерева Штейнера, длина минимального остовного дерева и отношение Штейнера. Напомним, что *минимальное остовное дерево*, или, короче, MST, затягивающее данное конечное подмножество N связного полного риманова многообразия W , — это связный взвешенный граф, множество вершин которого совпадает с N , весовая функция — это порожденная римановой метрикой функция расстояния между смежными вершинами, а вес — наименьший возможный среди весов всех таких графов. *Минимальное дерево Штейнера* (для краткости, SMT), затягивающее данное конечное подмножество $N \subset W$, — это минимальное остовное дерево, затягивающее конечное подмножество $\bar{N} \subset W$, $\bar{N} \supset N$, имеющее наименьший возможный вес. Уже на примере трехточечного подмножества плоскости можно убедиться в том, что длина SMT может быть меньше длины MST. Задача поиска SMT на плоскости — это классическая *проблема Штейнера* (исторический обзор, посвященный проблеме Штейнера, см. в [1] или в [2]). Благодаря широкому спектру важных практических приложений эта задача имеет большой прикладной интерес. При этом на практике важно уметь быстро решать эту задачу для большого количества граничных точек. Однако, как было показано в [3], проблема Штейнера является

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 00-15-96059, 98-01-00240) и фонда INTAS (грант № 97-0808).

NP-трудной. Как следствие появилось много работ, посвященных приближенному решению проблемы. Одним из естественных приближений является минимальное остовное дерево MST, для которого эффективные алгоритмы построения хорошо известны. Естественно, при построении подобных приближений необходимо оценивать возможную погрешность. В случае, когда в качестве приближения выбирается MST, за меру погрешности принято брать отношение длин SMT и MST, которое называется *отношением Штейнера* соответствующего граничного множества. Наибольшая возможная погрешность, т.е. наименьшее по всем граничным множествам отношение Штейнера, называется *отношением Штейнера объемлющего пространства*.

В последние годы интерес к проблеме Штейнера вышел за рамки исследования алгоритмов. Становится понятно, что проблема Штейнера представляет собой частный случай общей одномерной вариационной задачи, в которой допускаются экстремали с ветвлениями. Общий подход к задачам такого типа предложен в [4]. Например, соединение классической теории геодезических с проблемой Штейнера привело к возникновению качественно новой теории разветвленных геодезических (см. [2]). В рамках этого подхода естественно появляется задача изучения дифференциальных свойств рассматриваемых объектов. Эффективность подобных методов уже была продемонстрирована в работах Рубинштейна и др. (см. [5]–[7]), где в случае, когда объемлющее пространство является плоскостью, было получено полное описание минимальных деревьев Штейнера для широкого класса граничных множеств, исходя из дифференциальных свойств отношения Штейнера. Отметим также работы Ду и Хванга [8], [9], в которых вычислено отношение Штейнера плоскости $\mathbb{R}^2$, работу Рубинштейна и Венга [10], где вычислено отношение Штейнера стандартной двумерной сферы, а также совместные работы Цислика и авторов [11], [12], в которых вычислены отношения Штейнера плоских торов, плоских бутылок Клейна, проективной плоскости постоянной кривизны и получены оценки на отношение Штейнера римановых многообразий.

Цель настоящей статьи – показать, что в случае, когда W – связное полное риманово многообразие, длина MST, длина SMT и отношение Штейнера, заданные на фазовом пространстве точек граничного множества N , дифференцируемы по направлениям, и описать некоторые свойства “критических точек” этих функций. Мы приведем геометрический критерий критичности множества N для функции $m(N)$, равной отношению Штейнера множества N (см. теорему 4.1). Этот критерий дает, в частности, существенные ограничения на геометрию множеств N , для которых $m(N)$ достигает своего минимума, т.е. тех множеств, на которых $m(N)$ равно отношению Штейнера объемлющего пространства.

Авторы выражают искреннюю признательность А. Т. Фоменко за постоянное внимание к их работе. Мы очень благодарны А. В. Болсинову, предложившему нам изящное доказательство леммы 3.1, а также В. В. Рыжикову и Д. Цислику за полезные обсуждения.

§ 2. Необходимые определения и предварительные результаты

Пусть V – произвольное конечное множество. Напомним, что *графом G на множестве V* называется пара (V, E) , где E – некоторое конечное семейство пар элементов множества V . В семействе E могут встречаться пары с одинаковыми эле-

ментами, а также одинаковые пары. Элементы из V называются *вершинами графа* G , а элементы из E — *ребрами графа* G . Ребра вида (v, v) называются *петлями*, а повторяющиеся пары из E называются *кратными ребрами*. Если задан граф G , то множество его вершин обычно обозначается через $V(G)$, а множество его ребер — через $E(G)$. Для удобства мы будем часто обозначать ребро $e = \{x, y\} \in E(G)$ через xy .

Иногда бывает удобно рассматривать граф как топологическое пространство, склеенное из отрезков, каждый из которых соответствует некоторому ребру графа. Такие графы мы будем называть *топологическими*, а непрерывные отображения топологического графа G в топологическое пространство будем называть *топологическими сетями*; при этом топологический граф G , а также обычный граф, соответствующий G , назовем *типом* этой топологической сети, или ее *топологией*. Таким образом, ребра топологической сети — это непрерывные кривые в объемлющем пространстве. Кроме того, вся терминология теории топологических пространств переносится на топологические графы и сети. Если объемлющее пространство является гладким многообразием, то топологическую сеть в таком пространстве назовем *гладкой* (*кусочно гладкой*), если все ребра сети являются гладкими (кусочно гладкими).

Граф G называется *взвешенным*, если на множестве его ребер задана неотрицательная функция $\omega: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, называемая *весовой функцией*. При этом число $\omega(e)$ называется *весом ребра* $e \in E(G)$. Сумма весов всех ребер взвешенного графа G называется *весом графа* G и обозначается через $\omega(G)$. Если G — связный взвешенный граф, то из всех связных остовных подграфов в G наименьшего веса всегда можно выбрать дерево. Каждое такое дерево называется *минимальным остовным деревом* и обозначается через MST_G . Отметим, что если все веса строго больше нуля, то любой связный остовный подграф в G наименьшего веса является деревом.

Пусть W — множество, ρ — некоторая метрика на W и N — произвольное конечное подмножество в W . Пусть G — полный граф на множестве N . Метрика ρ порождает весовую функцию, ставящую в соответствие каждому ребру $xy \in E(G)$ число $\rho(x, y)$. Эту весовую функцию мы будем обозначать той же буквой ρ . Минимальное остовное дерево во взвешенном графе G обозначим через MST_N . *Числом Штейнера множества* N называется величина

$$\sigma(N) = \inf_{\{\bar{N}: \bar{N} \supset N\}} \rho(\text{MST}_{\bar{N}}),$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным подмножествам $\bar{N}$ в W , содержащим N .

Если существует такое дерево G на множестве $\bar{N} \subset W$, $N \subset \bar{N}$, что $\rho(G) = \sigma(N)$, то G называется *минимальным деревом Штейнера на множестве* N , или *минимальным деревом Штейнера, затягивающим множество* N . Отметим, что, вообще говоря, данное множество N могут затягивать много разных минимальных деревьев Штейнера, как, например, в случае, когда W — стандартная евклидова плоскость, а N — множество вершин квадрата. Если для нас не важно, какое из минимальных деревьев Штейнера, затягивающих N , рассматривать, то

произвольное такое дерево будем обозначать через SMT_N . При этом вместо $\sigma(N)$ мы будем иногда писать $\rho(\text{SMT}_N)$.

Для дальнейшего нам понадобится еще одно определение числа и минимального дерева Штейнера, эквивалентное данному. Пусть G – связный граф и ∂G – некоторое подмножество множества его вершин. Будем называть такое ∂G *границей графа G* , вершины из ∂G – *граничными*, а все остальные вершины – *подвижными*, или *не граничными*. Пусть $\varphi: \partial G \rightarrow W$ – произвольное отображение. Такие отображения назовем *граничными*. Произвольное отображение $\Gamma: V(G) \rightarrow W$ такое, что $\Gamma|_{\partial G} = \varphi$, будем называть *комбинаторной сетью типа G с границей φ* , а граничное отображение φ будем обозначать через $\partial\Gamma$. Кроме того, мы говорим, что Γ *затягивает* $N = \varphi(\partial G) \subset W$ по граничному отображению $\varphi = \partial\Gamma$.

Ограничения отображения Γ на вершины и ребра графа G будем называть соответственно *вершинами* и *ребрами* комбинаторной сети Γ . Ребра из G , отображающиеся при действии Γ в одну точку из W , назовем *вырожденными* ребрами комбинаторной сети Γ , а остальные ребра – *невырожденными*. Комбинаторная сеть, не содержащая вырожденных ребер, называется *невырожденной*.

Пусть G – произвольный граф и D – некоторое семейство его ребер. Построим новый граф G/D , выбросив из G все ребра, входящие в D , и отождествив каждую пару $\{x, y\}$ вершин графа G таких, что $xy \in D$. Будем говорить, что граф G/D получен из G *слабой факторизацией* по ребрам из D . Если H – произвольный подграф, то через G/H будем обозначать граф, полученный слабой факторизацией графа G по всем ребрам подграфа H . Отметим, что если H – связный подграф, то G/H – обычный факторграф. Понятие слабой факторизации очевидным образом переносится на сети: здесь, однако, факторизовать можно только по вырожденным ребрам. При этом если рассматривается топологическая сеть, то дополнительно предполагается, что соответствующие ребра исходной и профакторизованной сетей совпадают как непрерывные кривые.

Пусть Γ – произвольная сеть. Тогда сеть, полученная из Γ слабой факторизацией по множеству всех вырожденных ребер сети Γ , называется *приведенной сетью* для Γ .

Пусть, как и выше, W – множество, на котором задана функция расстояний ρ , и $\Gamma: G \rightarrow W$ – произвольная сеть. Определим на G весовую функцию, поставив в соответствие каждому ребру $e = xy$ из G , соединяющему вершины x и y , число $\omega(e) = \omega(xy) = \rho(\Gamma(x), \Gamma(y))$, которое мы будем называть *длиной ребра* $\Gamma: e \rightarrow W$. Ясно, что длина ребра комбинаторной сети равна 0 тогда и только тогда, когда это ребро вырождено. Отметим, что если Γ – взаимно однозначное отображение, то, отождествляя вершины графа G с точками из $\overline{N} = \Gamma(V(G))$ посредством отображения Γ , мы можем считать граф G заданным на множестве $\overline{N}$. Если же Γ не биективно, то G также можно рассматривать как граф, построенный на $\overline{N}$, в котором некоторые точки берутся с кратностью, т.е. рассматривается несколько экземпляров таких вершин.¹ Как и выше, сумма длин всех ребер комбинаторной сети называется *длиной* этой сети.

В терминах комбинаторных сетей число Штейнера $\sigma(N)$ множества N – это точная нижняя грань чисел $\rho(\Gamma)$ по всем комбинаторным сетям Γ , затягивающим N .

¹Множества, элементы которых рассматриваются с некоторыми кратностями, иногда называют *мультимножествами* (см., например, [13]).

Отметим, что данное выше определение числа Штейнера отличается от предыдущего лишь тем, что теперь мы допускаем вырожденные ребра (это удобно по техническим соображениям). В частности, комбинаторная сеть Γ , на которой достигается $\sigma(N)$, уже не обязана быть деревом. Тем не менее, каждая такая Γ после слабой факторизации по всем вырожденным ребрам превращается в невырожденную сеть, являющуюся SMT_N .

Задание числа Штейнера в терминах комбинаторных сетей имеет свои преимущества. Одно из них видно из следующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Число Штейнера $\sigma(N)$ равно точной нижней грани чисел $\rho(\Gamma)$, взятой по всем комбинаторным сетям $\Gamma: G \rightarrow W$ таким, что граф G является бинарным деревом, граница ∂G которого совпадает с множеством вершин степени 1, а $\partial \Gamma$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами ∂G и N .*

Отметим, что, вообще говоря, не для всякого N существует SMT_N . Одной из причин этого может служить неполнота метрического пространства (W, ρ) . Однако даже если потребовать, чтобы пространство W было полным, этого оказывается недостаточно для существования SMT_N . Приведем соответствующий пример.

ПРИМЕР. Пусть X — множество неотрицательных целых чисел. Введем на X функцию расстояния $\bar{\rho}$, положив

$$\bar{\rho}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y. \end{cases}$$

Легко проверить, что $(X, \bar{\rho})$ — полное метрическое пространство.² Положим $W = X \times X \times X$, и для любых $x = (x^1, x^2, x^3) \in W$ и $y = (y^1, y^2, y^3) \in W$ пусть $\rho(x, y) = \max_i \bar{\rho}(x^i, y^i)$. Ясно, что (W, ρ) — полное метрическое пространство. Наконец, определим множество N так: $N = \{A_1, A_2, A_3\}$, где $A_1 = (0, 0, 0)$, $A_2 = (1, 0, 1)$ и $A_3 = (0, 1, 1)$.

Отметим, что треугольник $A_1 A_2 A_3$ равносторонний со стороной длины 2, поэтому $\rho(\text{MST}_N) = 4$. С другой стороны, для произвольной точки $S \notin N$ выполняется $\rho(A_i, S) > 1$, поэтому длина любого дерева, построенного на $N \cup \{S\}$, строго больше 3. С другой стороны, при $t > 1$ для $S = (t, t, t)$ имеем

$$\sum_i \rho(A_i, S) = 3 + \frac{3}{t} \rightarrow 3 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

поэтому $\rho(\text{SMT}_N) = 3$. Таким образом, в полном метрическом пространстве (W, ρ) не существует минимального дерева Штейнера, затягивающего N .

Однако число Штейнера $\sigma(N)$ существует всегда. В дальнейшем нам будет удобно, даже если SMT_N не существует, обозначать число Штейнера $\sigma(N)$ через $\rho(\text{SMT}_N)$.

² Авторы пользуются случаем поблагодарить В.В. Рыжикова, сообщившего нам об этой конструкции.

Сформулируем простое условие существования SMT_N . Для этого рассмотрим следующую конструкцию. Пусть, как и выше, (W, ρ) – метрическое пространство, G – связный граф с границей ∂G и $\varphi: \partial G \rightarrow W$ – граничное отображение. Обозначим через $[G, \varphi]$ множество всех комбинаторных сетей Γ типа G с границей φ . Каждая такая сеть, очевидно, однозначно задается положением своих подвижных вершин, поэтому $[G, \varphi]$ можно рассматривать как декартово произведение копий пространства W , взятых в количестве, равном числу подвижных вершин графа G . Положим

$$\sigma[G, \varphi] = \inf_{\Gamma \in [G, \varphi]} \rho(\Gamma).$$

Отметим, что число Штейнера множества $N \subset W$ может быть определено так:

$$\sigma(N) = \inf_{G, \varphi} \inf_{\Gamma \in [G, \varphi]} \sigma[G, \varphi],$$

где все графы G и граничные отображения φ такие, что $N = \varphi(\partial G)$.

Обозначим через $\text{Bin}(N)$ объединение всех $[G, \varphi]$ таких, что G – бинарное дерево с границей ∂G , составленной из всех вершин степени 1, и φ задает взаимно однозначное соответствие между ∂G и $N \subset W$.

Из предложения 2.1 вытекают следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Число Штейнера конечного подмножества N метрического пространства (W, ρ) равно*

$$\sigma(N) = \min_{[G, \varphi] \subset \text{Bin}(N)} \sigma[G, \varphi] = \inf_{\Gamma \in \text{Bin}(N)} \rho(\Gamma).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Если для каждого $[G, \varphi] \subset \text{Bin}(N)$ можно найти дерево $\Gamma \in [G, \varphi]$, для которого $\rho(\Gamma) = \sigma[G, \varphi]$, то SMT_N существует.*

Покажем, что условие следствия 2.2 выполняется для связных полных римановых многообразий с функциями расстояния, порожденными римановыми метриками.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Пусть W – полное связное риманово многообразие и ρ – порожденная римановой метрикой функция расстояния на W . Тогда для каждого $[G, \varphi]$ существует такая сеть Γ , что $\rho(\Gamma) = \sigma[G, \varphi]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть Γ_i – последовательность сетей из $[G, \varphi]$ такая, что $\rho(\Gamma_i) \rightarrow \sigma[G, \varphi]$ при $i \rightarrow \infty$. Легко видеть, что образы всех сетей Γ_i лежат в некотором замкнутом шаре B , который в силу полноты является компактом. Следовательно, можно выбрать такую подпоследовательность сетей Γ_{i_k} , что для каждой подвижной вершины v графа G последовательность $\Gamma_{i_k}(v)$ сходится к некоторой точке w_v . Положив $\Gamma(v) = w_v$ для каждой такой v и определив Γ на ∂G равным φ , получим комбинаторную сеть $\Gamma \in [G, \varphi]$, для которой в силу непрерывности функции расстояния выполняется $\rho(\Gamma) = \sigma[G, \varphi]$, что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть W – связное полное риманово многообразие. Тогда для любого конечного подмножества $N \subset W$ существует невырожденное SMT_N . Более того, каждое невырожденное SMT_N является приведенной сетью для некоторого бинарного дерева из $\text{Bin}(N)$.

Пусть W – связное полное риманово многообразие, N – его конечное подмножество и Γ – некоторая комбинаторная сеть из $[G, \varphi]$. Построим по Γ топологическую сеть $\tilde{\Gamma}$. Для этого сопоставим каждому ребру xy графа G некоторую кратчайшую геодезическую, соединяющую точки $\Gamma(x)$ и $\Gamma(y)$. Легко видеть, что полученное семейство кривых определяет топологическую сеть с параметризующим графом $\tilde{G}$, комбинаторная структура которого совпадает со структурой графа G . Топологическая сеть $\tilde{\Gamma}$ называется *геометрической реализацией* сети Γ , а топологический граф $\tilde{G}$ – *топологической реализацией* графа G . Отметим, что сеть Γ может иметь много разных, задающих разные подмножества в W геометрических реализаций. Более общо, топологическая сеть, все ребра которой представляют собой геодезические (быть может, не кратчайшие), называется *геодезической сетью*. Каждая геометрическая реализация по определению является геодезической сетью.

Напомним формулы первой вариации длины геодезической сети (см. подробно в [14]). Пусть $\Gamma: G \rightarrow W$ – некоторая геодезическая сеть. Для каждой вершины x сети Γ обозначим через ν_x сумму единичных векторов направлений приходящих в x неточечных ребер. Если таких ребер нет, то положим $\nu_x = 0$. Отметим, что одна точка многообразия может соответствовать многим вершинам сети Γ , поэтому к ней может быть приложено несколько векторов ν_x .

Рассмотрим гладкое однопараметрическое семейство $\Gamma_t: G \rightarrow W$ геодезических сетей, $t \in [0, 1]$. Такие семейства называются (однопараметрическими) *деформациями* геодезической сети $\Gamma = \Gamma_0$. Для каждой вершины x сети Γ рассмотрим гладкую кривую $\gamma_x(t) = \Gamma_t(x)$ и положим $E_x = \gamma'_x(0)$. Семейство векторов E_x называется *полем деформации* Γ_t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Длина $\ell(t)$ сети Γ_t дифференцируема при $t = 0+$, причем

$$\left. \frac{d\ell}{dt} \right|_{t=0+} = \sum_x \langle \nu_x, E_x \rangle + \sum_{xy} \|E_x - E_y\|,$$

где первая сумма берется по всем вершинам x сети Γ , а вторая – по всем вырожденным ребрам xy этой сети.

Введем следующее обозначение:

$$A(\Gamma_t) = \sum_x \langle \nu_x, E_x \rangle + \sum_{xy} \|E_x - E_y\|,$$

где E – поле деформации Γ_t , определенное в вершинах сети Γ .

Из формулы первой вариации легко выводится следующее утверждение, описывающее локальное устройство SMT .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть Γ – некоторая геометрическая реализация произвольного невырожденного SMT_N в связном полном римановом многообразии W . Тогда Γ – геодезическое дерево, у которого все вершины степени 1

являются граничными, угол между любыми двумя смежными ребрами больше или равен 120° , причем если общая вершина этих ребер – подвижная вершина степени 2, то угол между ними равен 180° . В частности, степени вершин дерева Γ не превосходят 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть Γ – некоторая геометрическая реализация произвольного SMT_N в связном римановом многообразии W . Подвижные вершины степени 2 дерева Γ называются *фиктивными*: если такие вершины выбросить из дерева, склеив приходящие в них ребра, то полученное дерево останется геометрической реализацией соответствующего SMT_N . Обратно, каждое SMT_N можно перестроить, не меняя его длину, добавив очевидным образом произвольное количество подвижных вершин степени 2. В дальнейшем, не ограничивая общности, мы всегда будем предполагать, что все рассматриваемые деревья не содержат подвижных вершин степени 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отношением Штейнера $m(N)$ конечного подмножества N метрического пространства (W, ρ) называется величина³

$$m(N) = \frac{\rho(\text{SMT}_N)}{\rho(\text{MST}_N)}.$$

Отношение Штейнера $m(W)$ метрического пространства (W, ρ) – это точная нижняя грань чисел $m(N)$,

$$m(W) = \inf_{\{N: N \subset W\}} m(N),$$

взятая по всевозможным конечным подмножествам пространства W , состоящим более чем из одной точки.

Ясно, что $0 < m(N) \leq 1$ и $0 \leq m(W) \leq 1$.

Цель настоящей статьи – показать, что в случае, когда W – связное полное риманово многообразие, функции $\rho(\text{MST}_N)$, $\rho(\text{SMT}_N)$ и $m(N)$, заданные на фазовом пространстве точек из N , дифференцируемы по направлениям, и описать некоторые свойства “критических точек” этих функций. Мы приведем геометрический критерий критичности множества N для функции $m(N)$. Этот критерий дает, в частности, существенные ограничения на геометрию множеств N , для которых $m(N) = m(W)$, т.е. тех множеств, на которых достигается отношение Штейнера.

§3. Дифференцируемость длин SMT и MST по направлениям

Пусть W – связное полное риманово многообразие, компактное или нет, $N = \{x_1, \dots, x_n\} \subset W$ и $N_t = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, $t \in [0, 1]$, $x_i(0) = x_i$, – некоторая гладкая деформация множества N , т.е. набор гладких кривых $x_i(t)$. Обозначим через $E_i \in T_{x_i}W$ вектор скорости кривой $x_i(t)$ при $t = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Функции $\rho_m(t) = \rho(\text{MST}_{N_t})$ и $\rho_s(t) = \rho(\text{SMT}_{N_t})$ дифференцируемы по t при $t = 0+$.

³Рассматриваются множества N , состоящие более чем из одной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать t настолько малым, что все множества N_t состоят из одного и того же количества различных точек.

Докажем дифференцируемость функции $\rho_m(t)$. Начнем со следующей леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ — две гладкие кривые на W , определенные на отрезке $[0, 1]$. Тогда функция $f(t) = \rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ дифференцируема при $t = 0+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим⁴ $A_i = \gamma_i(0)$. Рассмотрим всевозможные натурально параметризованные кратчайшие геодезические $\delta: [0, s] \rightarrow W$, соединяющие $A_1 = \delta(0)$ и $A_2 = \delta(s)$, где $s = \rho(A_1, A_2)$. Для каждой такой геодезической δ положим

$$a(\delta) = \langle \delta'(s), \gamma_2'(0) \rangle - \langle \delta'(0), \gamma_1'(0) \rangle,$$

и пусть $a = \inf_{\delta} a(\delta)$. Покажем, что эта точная нижняя грань достигается на некоторой кратчайшей геодезической δ_0 . Действительно, пусть δ_i — последовательность, для которой $a(\delta_i) \rightarrow a$ при $i \rightarrow \infty$. В силу компактности единичной сферы в касательном пространстве $T_{A_1}W$ из последовательности $\{\delta_i\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\delta_{i_k}\}$, для которой сходится последовательность векторов $\delta_{i_k}'(0)$. По теореме о непрерывной зависимости геодезических от начальных условий последовательность δ_{i_k} сходится к некоторой кривой δ_0 в классе $C^1[0, s]$. Кривая δ_0 , очевидно, является кратчайшей геодезической, что и требовалось.

Покажем теперь, что производная функции $f(t)$ при $t = 0+$ существует и равна a . Для этого сначала включим геодезическую δ_0 в произвольное гладкое семейство $\delta_t: [0, s] \rightarrow W$, $t \in [0, 1]$, гладких кривых такое, что $\delta_t(0) = \gamma_1(t)$ и $\delta_t(s) = \gamma_2(t)$. Обозначим через $\ell(t)$ длину кривой δ_t . По формуле первой вариации длины кривой функция $\ell(t)$ дифференцируема при $t = 0+$ и ее производная равна $a(\delta_0) = a$. Поэтому для любой стремящейся к нулю последовательности $\{t_i\} \subset [0, 1]$ имеем

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\rho(\gamma_1(t_i), \gamma_2(t_i)) - s}{t_i} \leq a.$$

Для завершения доказательства леммы достаточно показать, что

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\rho(\gamma_1(t_i), \gamma_2(t_i)) - s}{t_i} \geq a.$$

Предположим противное, а именно, пусть существует стремящаяся к нулю последовательность $\{t_i\} \subset [0, 1]$, для которой

$$\exists \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\rho(\gamma_1(t_i), \gamma_2(t_i)) - s}{t_i} < a.$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют из последовательности $\{t_i\}$ выбрать подпоследовательность $\{t_{i_k}\}$ и кратчайшие геодезические δ_k , где δ_k

⁴Это доказательство было предложено А. В. Болсиновым. Мы пользуемся случаем поблагодарить его за сотрудничество.

соединяет точки $\gamma_1(t_{i_k})$ и $\gamma_2(t_{i_k})$ такие, что последовательность кривых $\{\delta_k\}$ сходится в C^1 к некоторой кратчайшей геодезической $\hat{\delta}$, соединяющей точки A_1 и A_2 . Из формулы первой вариации длины кривой и определения a вытекает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(\gamma_1(t_{i_k}), \gamma_2(t_{i_k})) - s}{t_{i_k}} = \langle \hat{\delta}'(s), \gamma_2'(0) \rangle - \langle \hat{\delta}'(0), \gamma_1'(0) \rangle \geq a$$

—противоречие. Лемма доказана.

Для завершения доказательства дифференцируемости функции $\rho_m(t)$ сформулируем следующую очевидную лемму.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\{f_i(t)\}$, $t \in [0, 1]$, — конечный набор функций, дифференцируемых при $t = 0+$ и таких, что значения $f_i(0)$ одинаковы при всех i . Тогда функция $f(t) = \min_i f_i(t)$ также дифференцируема при $t = 0+$. При этом $f'(0) = \min_i f'_i(0)$.

Перейдем теперь к функции длины для SMT_N . Поступим по аналогии с леммой 3.1. Пусть Γ — произвольное невырожденное SMT_N и $\tilde{\Gamma}$ — некоторая геометрическая реализация этого дерева. Рассмотрим произвольное бинарное дерево $\Gamma' \in \text{Bin}(N)$, для которого Γ является приведенной сетью. В качестве геометрической реализации $\tilde{\Gamma}'$ сети Γ' выберем геодезическую сеть, для которой $\tilde{\Gamma}$ является приведенной сетью. Рассмотрим произвольную гладкую деформацию $\tilde{\Gamma}'_t$, $t \in [0, 1]$, бинарного дерева $\tilde{\Gamma}' = \tilde{\Gamma}'_0$, совпадающую с N_t на множестве граничных вершин. Будем говорить, что деформация $\tilde{\Gamma}'_t$ порождает деформацию приведенной сети $\tilde{\Gamma}$, если каждое вырожденное ребро сети $\tilde{\Gamma}'$ остается вырожденным в процессе деформации. Обозначим через ν_x сумму единичных векторов направленных ребер дерева $\tilde{\Gamma}$, входящих в его вершину x .

ЛЕММА 3.3. Точная нижняя грань значений $A(\tilde{\Gamma}'_t)$, взятая по всем гладким деформациям $\tilde{\Gamma}'_t$ дерева $\tilde{\Gamma}'$, совпадающим с N_t на множестве граничных вершин, не зависит от выбора $\Gamma' \in \text{Bin}(N)$, достигается на каждой деформации, порождающей некоторую деформацию $\tilde{\Gamma}_t$ приведенной сети $\tilde{\Gamma}$, и равна

$$A(\tilde{\Gamma}_t) = \sum_{x \in N} \langle \nu_x, E_x \rangle.$$

В частности, $A(\tilde{\Gamma}_t)$ зависит только от дерева $\tilde{\Gamma}$ и деформации N_t граничного множества N и не зависит от конкретного вида деформации $\tilde{\Gamma}_t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой сети $\tilde{\Gamma}'$ и ее деформации $\tilde{\Gamma}'_t$ из предложения 2.3 вытекает, что

$$A(\tilde{\Gamma}'_t) = c + \sum_{x \notin \partial \Gamma'} \langle \nu_x, E_x \rangle + \sum_{\substack{xy \\ x \notin \partial \Gamma'}} \|E_x - E_y\|,$$

где c — величина, зависящая лишь от поля деформации в граничных вершинах сети, суммирование в первой сумме ведется по всем подвижным вершинам сети Γ' , а во

второй – по всем вырожденным ребрам сети Γ' таким, что x – подвижная вершина. Часть выражения $A(\tilde{\Gamma}'_t)$, отличную от c , обозначим через $\bar{A}(\tilde{\Gamma}'_t)$:

$$\bar{A}(\tilde{\Gamma}'_t) = \sum_{x \notin \partial\Gamma'} \langle \nu_x, E_x \rangle + \sum_{\substack{xy \\ x \notin \partial\Gamma'}} \|E_x - E_y\|.$$

Отметим, что слагаемые в этом выражении, соответствующие подвижным вершинам (степени 3) дерева Γ' , не инцидентным вырожденным ребрам этого дерева, равны нулю, так как равны нулю соответствующие векторы ν_x . Таким образом, ненулевой вклад в $\bar{A}(\tilde{\Gamma}'_t)$ могут давать лишь те подвижные вершины дерева Γ' , которые инцидентны вырожденным ребрам этого дерева.

Выражение $\bar{A}(\tilde{\Gamma}'_t)$ задает функцию от всех E_x , определенную на прямом произведении касательных пространств к многообразию W . Так как у сети Γ , являющейся SMT_N , степени вершин не превосходят трех, а все вершины степени 1 и 2 являются граничными и так как у сети Γ' все вершины степени 1 граничные, а все вершины степени 3 подвижные, то каждая связная компонента H множества вырожденных ребер сети Γ' состоит не более чем из двух ребер. При этом если компонента H состоит из одного ребра, то одна из ее вершин, скажем x , граничная степени 1, а другая, скажем y , подвижная степени 3; если же H состоит из двух ребер, то общая вершина z этих ребер подвижная степени 3, одна из двух оставшихся вершин, скажем x , граничная степени 1, а другая, скажем y , подвижная степени 3. Из сказанного выше вытекает, что выражение $\bar{A}(\tilde{\Gamma}'_t)$ можно разбить на слагаемые, каждое из которых соответствует некоторому H .

Если H состоит из одного ребра, то соответствующее слагаемое имеет вид

$$\langle \nu_y, E_y \rangle + \|E_y - E_x\|.$$

Так как Γ – это некоторое SMT_N , норма вектора ν_y не превосходит 1, поэтому

$$\langle \nu_y, E_y \rangle + \|E_y - E_x\| = \langle \nu_y, E_y - E_x \rangle + \|E_y - E_x\| + \langle \nu_y, E_x \rangle \geq \langle \nu_y, E_x \rangle,$$

причем если $E_x = E_y$, то равенство достигается.

Если же H состоит из двух ребер, то соответствующее слагаемое имеет вид

$$\langle \nu_z, E_z \rangle + \langle \nu_y, E_y \rangle + \|E_y - E_z\| + \|E_z - E_x\|.$$

Поскольку Γ – это некоторое SMT_N , то $\nu_y + \nu_z = 0$ и нормы векторов ν_y и ν_z равны 1, поэтому

$$\begin{aligned} & \langle \nu_z, E_z \rangle + \langle \nu_y, E_y \rangle + \|E_y - E_z\| + \|E_z - E_x\| \\ &= \langle \nu_y, E_y - E_z \rangle + \|E_y - E_z\| + \|E_z - E_x\| \geq \|E_z - E_x\| \geq 0, \end{aligned}$$

причем если $E_z = E_x = E_y$, то равенство нулю достигается. Таким образом, если деформация $\tilde{\Gamma}'_t$ порождает деформацию приведенной сети $\tilde{\Gamma}$, то выражение $\bar{A}(\tilde{\Gamma}'_t)$, а значит и $A(\tilde{\Gamma}'_t)$, достигает наименьшего значения. Осталось заметить, что

$$c = \sum_{x \in \partial\Gamma} \langle \nu_x, E_x \rangle = \sum_{x \in N} \langle \nu_x, E_x \rangle.$$

Лемма доказана.

Число $A(\tilde{\Gamma}_t)$, не зависящее в силу леммы 3.3 от конкретного вида деформации $\tilde{\Gamma}_t$, обозначим через $a(\tilde{\Gamma})$. Положим

$$a = \inf_{\Gamma, \tilde{\Gamma}} a(\tilde{\Gamma}),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным невырожденным Γ , являющимся SMT_N , и по всевозможным геометрическим реализациям $\tilde{\Gamma}$ каждого такого Γ .

ЛЕММА 3.4. *Существуют невырожденное дерево Γ , являющееся SMT_N , и его геометрическая реализация $\tilde{\Gamma}$ такие, что $a(\tilde{\Gamma}) = a$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\Gamma}_i$ – последовательность геометрических реализаций невырожденных деревьев Γ_i , являющихся SMT_N и таких, что $a(\tilde{\Gamma}_i) \rightarrow a$ при $i \rightarrow \infty$. В силу конечности семейства возможных типов деревьев Γ_i , не ограничивая общности, будем предполагать, что все деревья Γ_i имеют одинаковый тип (G', φ') , т.е. одинаковую топологию и граничное отображение. Далее, так как объемлющее многообразие W полное, не ограничивая общности, можно предполагать, что последовательность $\{\Gamma_i\}$ сходится к некоторой сети Γ' того же типа. В силу непрерывности функции расстояния Γ' также является SMT_N .

Построим геометрическую реализацию сети Γ' так. Из конечности числа ребер дерева Γ' и соображений, аналогичных приведенным в доказательстве леммы 3.1, вытекает, что из последовательности $\{\tilde{\Gamma}_i\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\tilde{\Gamma}_{i_k}\}$ такую, что для каждого ребра e графа G' соответствующие ему ребра геометрических деревьев $\tilde{\Gamma}_{i_k}$ или сходятся к точечной кривой, если e – вырожденное ребро сети Γ' , или сходятся в классе C^1 к некоторой невырожденной кратчайшей геодезической. При этом предельные кривые соединяют Γ' -образы инцидентных ребру e вершин. Совокупность построенных предельных кратчайших геодезических определяет геометрическую реализацию $\tilde{\Gamma}'$ сети Γ' .

Обозначим через Γ и $\tilde{\Gamma}$ приведенные сети для Γ' и $\tilde{\Gamma}'$ соответственно. Покажем, что $a(\tilde{\Gamma}) = a$. По определению

$$a(\tilde{\Gamma}) = \sum_{x \in \partial \Gamma} \langle \nu_x, E_x \rangle, \quad a(\tilde{\Gamma}_i) = \sum_{x \in \partial \Gamma} \langle \nu_x^i, E_x \rangle,$$

где ν_x (соответственно ν_x^i) – сумма единичных векторов направлений ν_{xp} (соответственно ν_{xq}^i), приходящих в вершину $x \in \partial \Gamma$ ребер сети $\tilde{\Gamma}$ (соответственно $\tilde{\Gamma}_i$), а E_x – вектор поля деформации в вершине $x \in \partial \Gamma$. Если все инцидентные вершине x ребра сети $\tilde{\Gamma}'$ невырождены, то

$$\langle \nu_x^{i_k}, E_x \rangle \rightarrow \langle \nu_x, E_x \rangle \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Предположим теперь, что вершина $x \in \partial \Gamma$ инцидентна вырожденным ребрам сети $\tilde{\Gamma}'$.

ЛЕММА 3.5. *В сделанных выше предположениях количество вырожденных ребер сети $\tilde{\Gamma}'$, инцидентных вершине x , равно единице.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 3.3, легко видеть, что связанная компонента H множества вырожденных ребер сети $\tilde{\Gamma}'$ состоит не более чем из двух ребер. Покажем, что компонента H не может состоять из двух ребер. Предположим противное, т.е. пусть сеть $\tilde{\Gamma}'$ содержит пару смежных вырожденных ребер. Обозначим через e_1 и e_2 соответствующие ребра из G' . Как и в доказательстве леммы 3.3, общая вершина ребер e_i имеет степень 3, одна из оставшихся вершин, инцидентных ребрам e_i , также имеет степень 3, а другая – степень 1.

Пусть f_1 – ребро графа G' , инцидентное общей вершине ребер e_1 и e_2 и отличное от этих ребер, а f_2 – одно из оставшихся ребер из G' , смежных с ребрами e_1 и e_2 . Обозначим через γ_{ij} геодезическую, являющуюся ребром сети $\tilde{\Gamma}_i$, соответствующим ребру f_j . Геодезические γ_{i1} и γ_{i2} стремятся в C^1 к геодезическим γ_1 и γ_2 , являющимся ребрами дерева $\tilde{\Gamma}$, выходящими из общей вершины степени 3. Ребро f_2 , очевидно, может быть выбрано так, что геодезические γ_j будут иметь противоположные направления. Последнее противоречит минимальности сети $\tilde{\Gamma}$. Лемма доказана.

Обозначим через e ребро графа G' , соответствующее единственному вырожденному ребру сети $\tilde{\Gamma}'$, инцидентному x . Пусть $e = vx$. Так как в силу соглашения (см. выше) все рассматриваемые деревья не имеют фиктивных вершин, т.е. подвижных вершин степени 2, вершина v графа G' является подвижной вершиной степени 3.

Обозначим через e_1 и e_2 отличные от e инцидентные v ребра из G' . По лемме 3.5 ребра e_1 и e_2 невырождены для сети $\tilde{\Gamma}'$.

Обозначим через $\gamma_1^{i_k}$, $\gamma_2^{i_k}$ и γ^{i_k} геодезические из $\tilde{\Gamma}_{i_k}$, соответствующие ребрам e_1 , e_2 и e . Далее, обозначим через w^{i_k} точку $\tilde{\Gamma}_{i_k}(v)$, через $b_1^{i_k}$, $b_2^{i_k}$ и b^{i_k} – единичные векторы направлений геодезических $\gamma_1^{i_k}$, $\gamma_2^{i_k}$ и γ^{i_k} , приходящих в точку w^{i_k} , а через a^{i_k} – единичный вектор направления геодезической γ^{i_k} , приходящей в точку x . Так как все сети $\tilde{\Gamma}_{i_k}$ удовлетворяют предложению 2.4, имеем $b_1^{i_k} + b_2^{i_k} + b^{i_k} = 0$. Кроме того, обозначим через γ_1 , γ_2 геодезические из $\tilde{\Gamma}$, соответствующие ребрам e_1 и e_2 . Пусть без ограничения общности ν_{x1} – вектор направления геодезической γ_1 , а ν_{x2} – вектор направления геодезической γ_2 . Ясно, что при $k \rightarrow \infty$

$$b_1^{i_k} \rightarrow \nu_{x1}, \quad b_2^{i_k} \rightarrow \nu_{x2}, \quad b^{i_k} + a^{i_k} \rightarrow 0,$$

где все эти соотношения следует понимать в некоторых локальных координатах. Поэтому $a^{i_k} \rightarrow \nu_{x1} + \nu_{x2}$ при $k \rightarrow \infty$. Фактически нами доказана следующая лемма.

ЛЕММА 3.6. Пусть $\tilde{\Gamma}_i$ – последовательность геометрических реализаций невырожденных деревьев Γ_i одного типа G' , являющихся SMT_N , сходящаяся к некоторому Γ' (также являющемуся SMT_N) так, что для каждого ребра e графа G' соответствующие ему ребра геодезических деревьев $\tilde{\Gamma}_i$ или сходятся к точечной кривой, если e – вырожденное ребро сети Γ' , или сходятся в классе C^1 к некоторой невырожденной кратчайшей геодезической. Обозначим через ν_x^i и ν_x сумму единичных векторов направлений невырожденных ребер сетей $\tilde{\Gamma}_i$ и соответственно $\tilde{\Gamma}'$, входящих в вершину x . Тогда для каждой вершины $x \in \partial\Gamma'$ имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \nu_x^i = \nu_x.$$

Из леммы 3.6 вытекает, что

$$\langle \nu_x^{i_k}, E_x \rangle \rightarrow \langle \nu_x, E_x \rangle \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $a(\tilde{\Gamma}_{i_k}) \rightarrow a(\tilde{\Gamma})$. Лемма 3.4 доказана.

Итак, пусть Γ_0 – невырожденное SMT_N и $\tilde{\Gamma}_0$ – его геометрическая реализация, для которой $a(\tilde{\Gamma}_0) = a$ (обе эти сети существуют в силу леммы 3.4).

Рассмотрим произвольную гладкую деформацию $\tilde{\Gamma}_t$, $t \in [0, 1]$, сети $\tilde{\Gamma}_0$ в классе невырожденных геодезических сетей и обозначим через $\ell(t)$ длину сети $\tilde{\Gamma}_t$. Из предложения 2.3 вытекает, что функция $\ell(t)$ дифференцируема при $t = 0+$ и ее производная в этой точке равна a . Так как $\rho(\text{SMT}_{N_t}) \leq \ell(t)$, для любой стремящейся к нулю последовательности $\{t_i\} \subset [0, 1]$ выполнено:

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\rho(\text{SMT}_{N_{t_i}}) - \rho(\text{SMT}_N)}{t_i} \leq a.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\rho(\text{SMT}_{N_{t_i}}) - \rho(\text{SMT}_N)}{t_i} \geq a.$$

Предположим противное, а именно, пусть существует такая последовательность $\{t_i\} \subset [0, 1]$, для которой

$$\exists \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\rho(\text{SMT}_{N_{t_i}}) - \rho(\text{SMT}_N)}{t_i} < a.$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 3.4, переходя, если надо, к подпоследовательности, можно предполагать, что геометрические реализации $\tilde{\Gamma}_i$ невырожденных деревьев Γ_i , являющихся SMT_{N_i} , сходятся к некоторой геометрической реализации $\tilde{\Gamma}$ дерева Γ , также являющегося SMT_N . Но тогда, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 3.4, заключаем, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\rho(\text{SMT}_{N_{t_i}}) - \rho(\text{SMT}_N)}{t_i} = a(\tilde{\Gamma}).$$

Однако $a(\tilde{\Gamma}) \geq a$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения 3.1.

Доказывая предложение 3.1, мы на самом деле вычислили производные по направлению функций длин минимального остовного дерева и минимального дерева Штейнера (в предположении, что известны все геометрические реализации всех MST и SMT).

Пусть Γ – произвольная геометрическая реализация некоторого (невырожденного) MST_N или SMT_N , где N – произвольное конечное подмножество связного полного риманова многообразия W . В каждой точке $x \in N$ построим вектор $\nu_x(\Gamma)$, равный сумме единичных векторов направлений ребер сети Γ , приходящих в x . Далее, пусть N_t , $t \in [0, 1]$, – произвольная гладкая деформация граничного множества N . Для каждой точки $x \in N$ обозначим через E_x вектор скорости кривой $x(t)$, по которой точка x движется при деформации N_t , при $t = 0$. Нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *Функции $\rho(\text{SMT}_{N_t})$ и $\rho(\text{MST}_{N_t})$ дифференцируемы при $t = 0+$ и*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\rho(\text{SMT}_{N_t})}{dt} \right|_{t=0+} &= \inf_{\Gamma - \text{SMT}_N} \sum_{x \in N} \langle \nu_x(\Gamma), E_x \rangle, \\ \left. \frac{d\rho(\text{MST}_{N_t})}{dt} \right|_{t=0+} &= \inf_{\Gamma - \text{MST}_N} \sum_{x \in N} \langle \nu_x(\Gamma), E_x \rangle, \end{aligned}$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным геометрическим реализациям Γ всех SMT_N в первой формуле и соответственно всех MST_N во второй. Эти точные нижние грани достигаются на некоторых SMT_N и MST_N соответственно.

Рассмотрим вопрос о критических точках функции $\rho(\text{SMT}_N)$, т.е. о тех N , для которых производные функции $\rho(\text{SMT}_N)$ по всем направлениям имеют один и тот же знак. Ясно, что если множество N состоит более чем из одной точки, то функция $\rho(\text{SMT}_N)$ критических точек не имеет (любое ребро, инцидентное вершине степени один, можно как сжимать, так и растягивать). Однако если ограничиться рассмотрением множеств N , лежащих на некотором подмногообразии M объемлющего многообразия W , то вопрос становится содержательным. Приведем некоторые примеры.

ПРИМЕР. Пусть $W = \mathbb{R}^2$, а $M = S^1$ — стандартная окружность и $N = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечное подмножество окружности. Обозначим через $\{\Gamma^i\}$ семейство геометрических реализаций всех SMT_N . Пусть окружность задана параметрически в виде $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, и пусть τ_j — вектор скорости окружности в точке x_j . Далее, определим вектор $b^i \in \mathbb{R}^n$ так:

$$b^i = (\langle \nu_{x_1}(\Gamma^i), \tau_1 \rangle, \dots, \langle \nu_{x_n}(\Gamma^i), \tau_n \rangle).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Конечное подмножество $N \subset S^1$ является критической точкой функции $\rho(\text{SMT}_N)$, ограниченной на всевозможные конечные подмножества окружности S^1 , тогда и только тогда, когда выпуклая оболочка $\text{conv}\{b^i\}$ семейства векторов $\{b^i\}$ содержит нуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{E_{x_j}\}$ — поле гладкой деформации N_t множества N такой, что $N_t \subset S^1$ при каждом t . Тогда векторы E_{x_j} касаются S^1 , поэтому $E_{x_j} = c_j \tau_j$ для некоторых $c_j \in \mathbb{R}$ и $\langle E_{x_j}, \nu_{x_j}(\Gamma^i) \rangle = b_j^i c_j$, где b_j^i — это j -я компонента вектора b^i . Следовательно,

$$a(\Gamma^i) = \sum_j \langle \nu_{x_j}(\Gamma^i), E_{x_j} \rangle = \sum_j b_j^i c_j = \langle b^i, c \rangle,$$

где $c = (c_1, \dots, c_n)$.

По теореме 3.1 N — критическая точка для функции $\rho(\text{SMT}_N)$, если и только если величина

$$a(N) = \min_i a(\Gamma^i)$$

или неотрицательна, или неположительна одновременно при всех $c \in \mathbb{R}^n$. Это равносильно тому, что не существует гиперплоскости, проходящей через начало координат, для которой одно из открытых полупространств, ею ограниченных, содержит все векторы b^i (в частности, из приведенных рассуждений вытекает, что $a(N) \leq 0$). Последнее означает, что $0 \in \text{conv}\{b^i\}$. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Множество $N \subset S^1$ вершин правильного многоугольника является критической точкой функции $\rho(\text{SMT}_N)$, ограниченной на всевозможные конечные подмножества окружности S^1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \geq 6$. По теореме Ярника–Кесслера–Ду–Хванга–Венга [15], [16] все SMT_N – это периметры без стороны. В сделанных выше обозначениях каждый вектор b^i имеет вид $(0, \dots, 0, \alpha, -\alpha, 0, \dots, 0)$ или $(-\alpha, 0, \dots, 0, \alpha)$, поэтому сумма всех этих векторов равна нулю и, значит, $0 \in \text{conv}\{b^i\}$. Случай $n \leq 6$ рассматриваются аналогично. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Множество $N \subset S^1$, не являющееся множеством вершин правильного многоугольника и такое, что каждое SMT_N представляет собой периметр без стороны, не является критической точкой функции $\rho(\text{SMT}_N)$, ограниченной на всевозможные конечные подмножества окружности S^1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e_1 и e_2 – смежные стороны многоугольника N , причем e_1 – самая длинная его сторона, а длина e_2 меньше длины e_1 . Обозначим через x_j общую вершину сторон e_i . Тогда для каждого Γ^i , являющегося SMT_N , компонента b_j^i вектора b^i отлична от нуля, и при всех i эти компоненты имеют один и тот же знак. Поэтому координатная гиперплоскость $y_j = 0$ (где y_k – стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$) ограничивает открытое полупространство, содержащее все b^i . Доказательство закончено.

ПРИМЕР. Конструкция предыдущего примера легко переносится на случай произвольного m -мерного подмногообразия $M \subset W$ связного полного риманова многообразия W . Пусть $N = \{x_1, \dots, x_n\}$ – конечное подмножество в M . Обозначим через $\{\Gamma^i\}$ семейство геометрических реализаций всех SMT_N . Пусть $T_j = T_{x_j}M$ – касательное пространство к M в точке x_j и $T = T_1 \times \dots \times T_n$ – изоморфное $\mathbb{R}^{nm}$ векторное пространство со скалярным произведением, индуцированным римановой метрикой на каждом T_j . Операцию проектирования пространства T на сомножитель T_j обозначим через π_j . Определим вектор $b^i \in T$ так:

$$b^i = (\pi_1(\nu_{x_1}(\Gamma^i)), \dots, \pi_n(\nu_{x_n}(\Gamma^i))).$$

Следующее утверждение доказывается по аналогии с утверждением 3.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Конечное подмножество $N \subset M$ является критической точкой функции $\rho(\text{SMT}_N)$, ограниченной на всевозможные конечные подмножества в M , тогда и только тогда, когда выпуклая оболочка $\text{conv}\{b^i\}$ семейства векторов $\{b^i\}$ содержит нуль.*

Например, пусть M – прямой круговой цилиндр $(\cos \varphi, \sin \varphi, z)$ в $W = \mathbb{R}^3$ и N – правильный n -угольник, вписанный в окружность $(\cos \varphi, \sin \varphi, \text{const})$. Тогда N – критическая точка функции $\rho(\text{SMT}_N)$, ограниченной на всевозможные конечные подмножества подмногообразия M .

ПРИМЕР. Наконец, обобщим предыдущую конструкцию на случай, когда граничное множество N изменяется в пределах некоторого заданного класса подмножеств. Пусть N , как и выше, состоит из n точек $\{x_1, \dots, x_n\}$ связного полного риманова многообразия W . Рассмотрим конфигурационное пространство $\Phi = \prod_{j=1}^n W$. Тогда множество N можно рассматривать как точку из Φ . Предположим, что фиксировано некоторое подмногообразие $M \subset \Phi$, содержащее N . Выясним, когда N является критической точкой функции $\rho(\text{SMT}_N)$ относительно деформаций N_t таких, что $N_t \in M$ при каждом t .

Как и выше, обозначим через $\{\Gamma^i\}$ семейство геометрических реализаций всех SMT_N . Каждая геометрическая реализация Γ^i задает вектор $\nu(\Gamma^i) = (\nu_{x_1}(\Gamma^i), \dots, \nu_{x_n}(\Gamma^i))$, являющийся в действительности элементом из касательного пространства $T_N \Phi$. Обозначим через π операцию ортогонального проектирования касательного пространства $T_N \Phi$ на касательное пространство $T_N M$ к подмногообразию M в точке N . Определим вектор $b^i \in T_N M$, положив

$$b^i = \pi(\nu(\Gamma^i)).$$

Следующее утверждение доказывается по аналогии с утверждением 3.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Конечное подмножество $N \in M$ является критической точкой функции $\rho(\text{SMT}_N)$, ограниченной на подмногообразии M , тогда и только тогда, когда выпуклая оболочка $\text{conv}\{b^i\}$ семейства векторов $\{b^i\}$ содержит нуль.*

§ 4. Критические точки отношения Штейнера

Из теоремы 3.1 вытекает следующий результат.

Пусть N — произвольное конечное подмножество связного полного риманова многообразия W , состоящее более чем из одной точки, и $N_t, t \in [0, 1]$, — произвольная гладкая деформация множества N . Напомним, что через $m(N)$ мы обозначили отношение Штейнера множества N , т.е. $m(N) = \rho(\text{SMT}_N)/\rho(\text{MST}_N)$. Пусть, как и выше, $\rho_s(t) = \rho(\text{SMT}_{N_t})$ и $\rho_m(t) = \rho(\text{MST}_{N_t})$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Функция $m(N_t)$ дифференцируема при $t = 0+$ и*

$$\left. \frac{dm(N_t)}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{1}{\rho_m(0)} (\rho'_s(0) - m(N) \rho'_m(0)).$$

Более того, существуют такие геометрические реализации Γ некоторого невырожденного SMT_N и Δ некоторого MST_N , что

$$\left. \frac{dm(N_t)}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{1}{\rho_m(0)} \sum_{x \in N} \langle \nu_x - m(N) \mu_x, E_x \rangle,$$

где E_x — это вектор скорости движения вершины $x \in N$ при деформации N_t при $t = 0$, ν_x — это сумма единичных векторов направлений ребер дерева Γ , входящих в вершину x , а μ_x — сумма единичных векторов направлений ребер дерева Δ , входящих в вершину x .

Конечное подмножество $N \subset W$ назовем *критической точкой для отношения Штейнера $m(N)$* , если для любой гладкой деформации $N_t, t \in [0, 1]$, $N_0 = N$,

граничного множества N производная функции $m(N_t)$ при $t = 0+$ имеет один и тот же знак (т.е. или всегда неотрицательна, или всегда неположительна).

Пусть $N = \{x_1, \dots, x_n\}$. Обозначим через $\{\Gamma_\alpha\}$ множество всех геометрических реализаций всевозможных SMT_N и через $\{\Delta_\beta\}$ – множество всех геометрических реализаций всевозможных MST_N . Далее, для каждого Γ_α обозначим через ν_α^j сумму единичных векторов направлений ребер дерева Γ_α , приходящих в вершину x_j , и положим $\nu_\alpha = (\nu_\alpha^1, \dots, \nu_\alpha^n)$. Аналогично, для каждого Δ_β обозначим через μ_β^j сумму единичных векторов направлений ребер дерева Δ_β , приходящих в его граничную вершину x_j , и положим $\mu_\beta = (\mu_\beta^1, \dots, \mu_\beta^n)$.

Отметим, что ν_α и μ_β – некоторые точки в пространстве $T = T_{x_1}W \times \dots \times T_{x_n}W$, на котором риманова метрика индуцирует скалярное произведение. Положим

$$A_N = \{\nu_\alpha\} \subset T, \quad B_N = \{\mu_\beta\} \subset T.$$

Опишем некоторые свойства множеств A_N и B_N . Из теоремы 3.1 вытекает следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Множества $A_N \subset T$ и $B_N \subset T$ являются замкнутыми и ограниченными. В частности, каждый линейный функционал достигает как на A_N , так и на B_N своих наименьшего и наибольшего значений. Множество A_N , кроме того, является экстремальным, т.е. лежит на границе своей выпуклой оболочки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность множеств A_N и B_N очевидна, так как степень любой граничной вершины в каждом рассматриваемом дереве меньше n . Замкнутость множества B_N вытекает из конечности числа типов всевозможных MST_N и следующего уже использованного нами выше факта: из каждой последовательности кратчайших геодезических, соединяющих фиксированные точки, можно выбрать C^1 -сходящуюся подпоследовательность. Замкнутость множества A_N вытекает из конечности числа типов всевозможных SMT_N и леммы 3.6.

Докажем теперь экстремальность множества A_N . Рассмотрим произвольный элемент ν_α из множества A_N . Пусть в соответствующем SMT_N вершина x_1 имеет степень 1. Рассмотрим линейный функционал, заданный вектором $E = (-\nu_\alpha^1, 0, \dots, 0)$. Очевидно, $\langle E, \nu_\alpha \rangle = -1$. С другой стороны, так как все $\dim W$ -мерные компоненты каждого вектора из A_N по норме не превосходят единицы,

$$\inf_{\nu \in A_N} \langle E, \nu \rangle \geq -1,$$

т.е. построенный нами линейный функционал достигает в точке ν_α своего наименьшего значения на множестве A_N . Последнее означает, что проходящая через ν_α гиперплоскость $\langle E, \nu \rangle = -1$ является опорной для множества A_N . В частности, ν_α лежит на границе множества $\text{conv } A_N$. Доказательство закончено.

Наконец, сформулируем геометрический критерий экстремальности граничного множества N для функции $m(N)$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Конечное множество $N \subset W$ является критической точкой отношения Штейнера, если и только если выполнено одно из следующих двух включений:*

$$\text{conv } A_N \subset \text{conv}(m(N)B_N), \quad \text{conv } A_N \supset \text{conv}(m(N)B_N),$$

где $m(N)B_N = \{m(N)\mu_1, \dots, m(N)\mu_q\}$. При этом первое включение соответствует случаю неотрицательности производных по направлению функции $m(N)$, а второе – случаю неположительности этих производных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай первого включения (случай второго рассматривается аналогично). Пусть N – критическая точка отношения Штейнера такая, что производная функции $m(N)$ вдоль любой гладкой деформации N_t неотрицательна. В силу следствия 4.1 это равносильно существованию таких $\nu_\alpha \in A_N$ и $\mu_\beta \in B_N$, что для любого $E \in T$

$$\langle \nu_\alpha, E \rangle \geq \langle m(N)\mu_\beta, E \rangle.$$

Кроме того, для любых $\nu_{\alpha'} \in A_N$ и $\mu_{\beta'} \in B_N$ имеем

$$\langle \nu_{\alpha'}, E \rangle \geq \langle \nu_\alpha, E \rangle, \quad \langle m(N)\mu_{\beta'}, E \rangle \geq \langle m(N)\mu_\beta, E \rangle.$$

Поэтому гиперплоскость $\Pi = \{x \mid \langle x, E \rangle = \langle m(N)\mu_\beta, E \rangle\}$ является опорной для множества $\text{conv}(m(N)B_N)$, а множество $\text{conv } A_N$ целиком содержится в том же полупространстве, ограниченном Π , что и $\text{conv}(m(N)B_N)$. В силу произвольности E последнее означает, что

$$\text{conv } A_N \subset \text{conv}(m(N)B_N).$$

Обратно, пусть

$$\text{conv } A_N \subset \text{conv}(m(N)B_N).$$

Возьмем произвольный вектор $E \in T$. Выберем гиперплоскость Π , перпендикулярную E , опорную для $\text{conv}(m(N)B_N)$ и такую, что $\text{conv}(m(N)B_N)$ лежит в том полупространстве, ограниченном Π , в которое направлен вектор E . В силу утверждения 4.1 гиперплоскость Π проходит через точку вида $m(N)\mu_\beta$ для некоторого $\mu_\beta \in B_N$. Поэтому для всех β' выполнено

$$\langle m(N)\mu_{\beta'}, E \rangle \geq \langle m(N)\mu_\beta, E \rangle,$$

откуда в силу включения

$$\text{conv } A_N \subset \text{conv}(m(N)B_N)$$

заключаем, что

$$\langle \nu_{\alpha'}, E \rangle \geq \langle m(N)\mu_\beta, E \rangle$$

для любого $\nu_{\alpha'} \in A_N$. Доказательство закончено.

Обобщим теорему 4.1 на случай, когда граничное множество N изменяется в пределах некоторого заданного класса подмножеств. Пусть N , как и выше, состоит из n точек $\{x_1, \dots, x_n\}$ связного полного риманова многообразия W . Как и в § 3, обозначим через Φ конфигурационное пространство $\prod_{j=1}^n W$. Предположим, что фиксировано некоторое подмногообразие $M \subset \Phi$, содержащее N . Выясним, когда N является критической точкой функции $m(N)$, ограниченной на подмногообразии M .

Как и в § 3, обозначим через π операцию ортогонального проектирования касательного пространства $T_N \Phi = T_{x_1} W \times \dots \times T_{x_n} W$ на касательное пространство $T_N M$ к подмногообразию $M \subset \Phi$ в точке N .

СЛЕДСТВИЕ 4.2. В обозначениях теоремы 4.1 конечное множество $N \subset W$ является критической точкой отношения Штейнера по отношению к гладким деформациям N_t таким, что $N_t \subset M$ для всех t , если и только если выполнено одно из следующих двух включений:

$$\operatorname{conv} \pi(A_N) \subset \operatorname{conv}(m(N)\pi(B_N)), \quad \operatorname{conv} \pi(A_N) \supset \operatorname{conv}(m(N)\pi(B_N)).$$

При этом первое включение соответствует случаю неотрицательности производных по направлению функции $m(N)$, а второе – случаю неположительности этих производных.

Список литературы

1. *Cieslik D.* Steiner minimal trees. Dordrecht: Kluwer, 1998.
2. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Разветвленные геодезические. Геометрическая теория локально минимальных сетей. Lewiston: Edwin Mellen Press, 1999. (Российские матем. научн. исследования. Т. 5.)
3. *Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S.* Some NP-complete geometric problems // Proc. 8th ann. ACM Symp. Theor. Comput. Hershey, 1976, 1976. P. 10–22.
4. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* Branching solutions of one-dimensional variational problems. Singapore: World Scientific, 2001.
5. *Hwang F. K., Weng J. F.* The shortest network under a given topology // J. Algorithms. 1992. V. 13. № 3. P. 468–488.
6. *Rubinstein J. H., Thomas D. A.* A variational approach to the Steiner network problem // Ann. Oper. Res. 1991. V. 33. P. 481–499.
7. *Thomas D. A., Rubinstein J. H., Cole T.* The Steiner minimal network for convex configuration // Preprint № 15. The Univ. of Melbourne, 1991.
8. *Du D. Z., Hwang F. K.* A proof of Gilbert–Pollak’s conjecture on the Steiner ratio // DIMACS Technical Report, 1990.
9. *Du D. Z., Hwang F. K.* An approach for proving lower bounds: solution of Gilbert–Pollak’s conjecture on the Steiner ratio // Proc. of the 31st Annual Symp. on Found. of Comp. Science, 1990.
10. *Rubinstein J. H., Weng J. F.* Compression theorems and Steiner ratios on spheres // J. Combin. Optimization. 1997. V. 1. P. 67–78.
11. *Иванов А. О., Тужилин А. А., Цислик Д.* Отношение Штейнера для римановых многообразий // Матем. заметки (в печати).
12. *Иванов А. О., Тужилин А. А., Цислик Д.* Отношение Штейнера для римановых многообразий // УМН. 2000. Т. 55. № 6. С. 139–140.
13. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.
14. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* Minimal networks. The Steiner problem and its generalizations. Boca Raton, FL: CRC Press, 1994.
15. *Jarník V., Kössler M.* O minimalních grafeth obeahujících n daných bodů // Čas. Pěst. Mat. a Fys. 1934. V. 63. P. 223–235.
16. *Du D. Z., Hwang F. K., Weng J. F.* Steiner minimal trees for regular polygons // Discrete Comput. Geom. 1987. V. 2. P. 65–84.