Общероссийский математический портал

К. Г. Малютин, Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 6, 51–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:40:15

УДК 517.535.4

К. Г. Малютин

Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости

Пусть $\gamma(r)$ – функция роста. Пусть $v(z)$ является истинно δ -субгармонической функцией в смысле Гришина в комплексной полуплоскости, т.е. $v = v_1 - v_2$, где v_1, v_2 – истинно субгармонические функции ($\limsup_{z \rightarrow t} v_i(z) \leq 0$, $i = 1, 2$, для каждого вещественного t), пусть $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ – ее полная мера, и пусть $T(r, v)$ – ее неванлинновская характеристика. Класс $J\delta(\gamma)$ функций конечного γ -типа определяется следующим образом: $v \in J\delta(\gamma)$, если существуют положительные константы A и B такие, что $T(r, v) \leq A\gamma(Br)/r$. Коэффициенты Фурье функции v определяются стандартным способом: $c_k(r, v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta$, $r > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Основной результат работы заключается в эквивалентности следующих утверждений: 1) $v \in J\delta(\gamma)$; 2) $N(r) \leq A_1\gamma(B_1r)/r$, где $N(r) = N(r, \lambda_+)$ или $N(r) = N(r, \lambda_-)$, $|c_k(r, v)| \leq A_2\gamma(B_2r)$. Кроме того, доказывается, что $J\delta(\gamma) = JS(\gamma) - JS(\gamma)$, где $JS(\gamma)$ – класс истинно субгармонических функций конечного γ -типа.

Библиография: 15 названий.

Введение. В 60-х годах в работах американских математиков Л. Рубела, Б. Тейлора, Д. Майлза, Д. Шиа и др. начал широко применяться метод рядов Фурье для изучения свойств целых и мероморфных функций. Этот метод является эффективным при решении ряда общих задач теории мероморфных функций и устанавливает ее связь с теорией рядов Фурье. Одним из преимуществ этого метода является то, что он позволяет исследовать функции с довольно нерегулярным ростом на бесконечности и функции бесконечного порядка.

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на $[0, \infty)$, называется *функцией роста*. Пусть f – мероморфная в комплексной плоскости функция, $Z(f)$ ($W(f)$) – множество ее нулей (полюсов), $T(r, f)$ – неванлинновская характеристика, $c_k(r, f)$ – коэффициенты Фурье функции f . Функция f называется *функцией конечного γ -типа*, если существуют положительные постоянные A и B такие, что $T(r, f) \leq A\gamma(Br)$ для всех $r > 0$. Класс таких функций обозначим через Γ , через Γ_E обозначим класс целых функций конечного γ -типа. Ниже через $A, B, \dots$ мы будем обозначать положительные константы, которые могут изменяться на протяжении статьи. Рубел и Тейлор [1] доказали эквивалентность трех следующих утверждений:

- 1) $f \in \Gamma$;
- 2) последовательность $Z(f)$ (или $W(f)$) имеет конечную γ -плотность,

$$c_k(r, f) \leq A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{Z},$$

- при некоторых положительных A, B и всех $r > 0$;
 3) последовательности $Z(f)$ и $W(f)$ имеют конечную γ -плотность,

$$c_k(r, f) \leq \frac{A}{|k| + 1} \gamma(Br), \quad k \in \mathbb{Z},$$

при некоторых (возможно, других, но не зависящих от k) положительных A, B и всех $r > 0$.

Используя метод рядов Фурье, Д. Майлз [2] решил не поддававшуюся решению на протяжении ряда лет проблему представления мероморфной функции $f \in \Gamma$ в виде частного двух целых функций из класса Γ_E : $\Gamma = \Gamma_E / \Gamma_E$. В 80-е годы важные результаты в этом направлении были получены А. А. Кондратьевым [3]–[5], который обобщил теорию Левина – Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста на мероморфные функции произвольного γ -типа.

В данной работе мы распространяем некоторые из отмеченных выше результатов на функции, определенные в полуплоскости. Причем мы доказываем наши утверждения сразу для δ -субгармонических функций. Переход в полуплоскость вызывает определенные трудности, связанные со сложным поведением функции в окрестности границы. Отличие от плоскости проявляется уже при получении критериев принадлежности δ -субгармонической функции заданному классу. Так, например, никакое обобщение аналога пункта 3) критерия Рубела–Тейлора в полуплоскости невозможно.

Автор выражает глубокую признательность А. Ф. Гришину за ценные замечания, сделанные в процессе работы над этой статьей.

1. Основные результаты. Обозначим через $J\delta$ класс истинно δ -субгармонических функций, а через $J\delta(\gamma(r))$ – класс истинно δ -субгармонических функций конечного γ -типа (определения этих классов даны ниже) в верхней полуплоскости.

ТЕОРЕМА 1. Пусть γ – функция роста, $v \in J\delta$. Следующие два утверждения эквивалентны:

- 1) $v \in J\delta(\gamma(r))$;
- 2) мера $\lambda_+(v)$ (или $\lambda_-(v)$) имеет конечную γ -плотность,

$$|c_k(r, v)| \leq A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N},$$

при некоторых положительных A, B и всех $r > 0$.

Здесь $\lambda(v) = \lambda_+(v) - \lambda_-(v)$ – полная мера функции v .

Заметим, что из условия 1) не следует такое усиление 3): $|c_k(r)| \leq \varepsilon_k \gamma(Br)$, где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Справедлив также аналог результата Д. Майлза для полуплоскости: $J\delta(\gamma(r)) = JS(\gamma(r)) - JS(\gamma(r))$, где $JS(\gamma(r))$ – класс истинно субгармонических функций конечного γ -типа.

2. Классы функций в $\mathbb{C}_+$. В работе будем использовать терминологию из [6], [7]. Обозначим через $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ верхнюю полуплоскость. Через $C(a, r)$ будем обозначать открытый круг радиуса r с центром в точке a , через Ω_+ – пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$: $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$. Субгармоническая в $\mathbb{C}_+$ функция v называется *истинно субгармонической*, если $\overline{\lim}_{z \rightarrow t} v(z) \leq 0$ для любого числа $t \in \mathbb{R}$. Класс истинно субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$ обозначим через JS . Пусть SK – класс субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$, имеющих положительную гармоническую мажоранту в любой ограниченной области в $\mathbb{C}_+$. Функции класса SK обладают следующими свойствами [6]:

- а) $v(z)$ имеет некасательный предел $v(t)$ почти всюду на вещественной оси, $v(t) \in L^1_{\text{loc}}(-\infty, \infty)$;
- б) на вещественной прямой существует знакопеременная мера ν такая, что

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(t + iy) dt = \nu([a, b]) - \frac{1}{2}\nu(\{a\}) - \frac{1}{2}\nu(\{b\}).$$

Мера ν называется *граничной мерой* функции v ;

- с) $d\nu(t) = v(t) dt + d\sigma(t)$, где σ – сингулярная мера относительно меры Лебега.

Для функции $v \in SK$ определим, следуя [6], полную меру λ как

$$\lambda(K) = 2\pi \int_{\mathbb{C}_+ \cap K} \operatorname{Im} \zeta d\mu(\zeta) - \nu(K),$$

где μ – риссовская мера функции v . Мера λ обладает следующими свойствами:

- 1) λ – конечная мера на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$;
- 2) λ – положительная мера вне $\mathbb{R}$;
- 3) λ равна нулю в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Наоборот, если мера λ удовлетворяет условиям 1)–3), то существует функция $v \in SK$ с полной мерой, равной λ . Совокупность условий 1)–3) в дальнейшем будем обозначать через $\{\mathbf{G}\}$; если, кроме того, мера λ неотрицательная и на $\mathbb{R}$, то через $\{\mathbf{G}^+\}$.

Если D – ограниченная область в $\mathbb{C}_+$, $D_1 = D \cup (\partial D \cap \mathbb{R})$, $v \in SK$, $z \in D$, то

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{D_1} \frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| d\lambda(\zeta) + h(z),$$

где h – гармоническая функция в D , а если $[a, b] \subset \{\mathbb{R} \cap \partial D\}$, то h допускает непрерывное продолжение нулем на (a, b) , $\frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right|$ считается продолженной по непрерывности на вещественную ось. Полная мера λ определяет функцию $v \in SK$ так же, как мера Рисса μ определяет субгармоническую функцию в $\mathbb{C}$. Точнее, если функции $v_1, v_2 \in SK$ и каждая имеет полную меру λ , то существует вещественная целая функция g такая, что $v_2(z) - v_1(z) = \operatorname{Im} g(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$.

Справедливы следующие утверждения [6].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. $JS \subset SK$.

Полная мера функции $v \in JS$ является положительной мерой, чем и обоснован термин “истинно субгармоническая функция”. Отметим также, что множество JS является конусом, т.е. если $v_1, v_2 \in JS$, $\alpha \geq 0$, то $v_1 + v_2, \alpha v_1 \in JS$.

Введем теперь класс истинно δ -субгармонических функций $J\delta = JS - JS$. Заметим, что $J\delta$ – есть наиболее широкий класс δ -субгармонических функций в полуплоскости, для которых можно определить неванлинновскую характеристику. Действительно, все неванлинновские характеристики δ -субгармонической функции определяются посредством меры, соответствующей этой функции. Так, для функции, δ -субгармонической во всей плоскости, такой мерой будет ее риссовская мера, для функции класса $J\delta$ – ее полная мера, в определение которой входит граничная мера ν . Граничное поведение любой функции, на входящей в класс $J\delta$, определяется обязательно некоторой обобщенной функцией на вещественной оси, не являющейся мерой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. $J\delta = SK - SK$.

Для заданной меры λ обозначим

$$d\lambda_m(\zeta) = \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} \tau^{m-1} d\lambda(\zeta) \quad (\zeta = \tau e^{i\varphi}), \quad \lambda_m(r) = \lambda_m(\overline{C(0, r)}),$$

где $\frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi}$ при $\varphi = 0, \pi$ определяется по непрерывности.

Следующая формула – это формула Карлемана в обозначениях А. Ф. Гришина:

$$\frac{1}{r^k} \int_0^\pi v(re^{i\varphi}) \sin k\varphi d\varphi = \int_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt + \frac{1}{r_0^k} \int_0^\pi v(r_0 e^{i\varphi}) \sin k\varphi d\varphi, \quad (1)$$

в частности, при $k = 1$

$$\frac{1}{r} \int_0^\pi v(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi = \int_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3} dt + \frac{1}{r_0} \int_0^\pi v(r_0 e^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi \quad (2)$$

для всех $r > r_0$.

Отметим еще неравенство, которое будет полезно в дальнейшем:

$$\begin{aligned} |\lambda_m(r)| &= \left| \iint_{C(0, r)} d\lambda_m(\zeta) \right| = \left| \iint_{C(0, r)} \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} \tau^{m-1} d\lambda(\zeta) \right| \\ &\leq m \iint_{C(0, r)} \tau^{m-1} d|\lambda|(\zeta) \leq mr^{m-1} |\lambda|(r). \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим через $D_+(R_1, R_2) = \overline{C_+(0, R_2)} \setminus C_+(0, R_1)$, $R_1 < R_2$. Для функций $v \in J\delta$ справедливо представление в полукольце $z \in D_+(R_1, R_2)$:

$$\begin{aligned} v(z) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{D_+(R_1, R_2)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{R_2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_2 e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_2 e^{i\varphi}) d\varphi \\ &\quad + \frac{R_1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_1 e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_1 e^{i\varphi}) d\varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

и в полукруге $z \in C_+(0, R)$:

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{C_+(0, R)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, Re^{i\varphi})}{\partial n} v(Re^{i\varphi}) d\varphi,$$

где $G(z, \zeta)$ – функция Грина полукольца (полукруга), $\frac{\partial G}{\partial n}$ означает производную по внутренней нормали, функция $K(z, \zeta) = \frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} G(z, \zeta)$ при $\zeta \in D_+(R_1, R_2)$ ($z \in C_+(0, R)$) продолжена по непрерывности на вещественную ось при $R_1 \leq |t| \leq R_2$.

Используя теорию эллиптических функций (см., например, [8; гл. VIII]), можно получить разложения ядра в формуле (4) при $R_1 = qR$, $R_2 = R/q$, $q \in (0, 1)$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \tau e^{i\varphi}$:

$$G(z, \zeta) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{\tau}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} r^{2m}}{R^{2m}}\right) \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{\tau^{2m}}\right) \times \sin m\theta \sin m\varphi, \quad qR \leq \tau < r < \frac{1}{q}R, \quad (5)$$

$$G(z, \zeta) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{r}{\tau}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{r^{2m}}\right) \left(1 - \frac{q^{2m} \tau^{2m}}{R^{2m}}\right) \times \sin m\theta \sin m\varphi, \quad qR \leq r < \tau \leq \frac{1}{q}R, \quad (6)$$

$$\frac{\partial G(z, t)}{\partial n} = \frac{2}{t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{t}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{t^{2m}}\right) \times \left(1 - \frac{q^{2m} r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta, \quad qR \leq |t| \leq r \leq \frac{1}{q}R, \quad (7)$$

$$\frac{\partial G(z, t)}{\partial n} = \frac{2}{t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{r}{t}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} t^{2m}}{R^{2m}}\right) \times \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{r^{2m}}\right) \sin m\theta, \quad qR \leq r \leq |t| \leq \frac{1}{q}R, \quad (8)$$

$$\frac{\partial G(z, qRe^{i\varphi})}{\partial n} = \frac{4}{qR} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{qR}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \quad (9)$$

$$\frac{\partial G(z, (1/q)Re^{i\varphi})}{\partial n} = \frac{4q}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{qr}{R}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{r^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi. \quad (10)$$

3. Коэффициенты Фурье функций класса $J\delta$. Коэффициенты Фурье функции $v \in J\delta$ определяются обычным образом [9]:

$$c_k(r, v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin k\theta d\theta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из формулы (1) получим следующие выражения для коэффициентов Фурье при $r > r_0$:

$$c_k(r, v) = \alpha_k r^k + \frac{2r^k}{\pi} \int_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

где $\alpha_k = r_0^{-k} c_k(r_0, v)$.

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в (11), получим

$$\begin{aligned} c_k(r, v) &= \alpha_k r^k + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{C_+(0, r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) \\ &+ \frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) - \frac{1}{r^k \pi k} \iint_{C_+(0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\zeta = \tau e^{i\varphi}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Коэффициенты Фурье $c_k(r, v)$ функции класса $J\delta$ являются непрерывными функциями от r .

Это вытекает из того, что правые части соотношений (11) являются непрерывными в каждой точке r функциями.

4. Суб- и δ -субгармонические функции конечного γ -типа. Пусть $v \in J\delta$, $v = v_+ - v_-$, λ — полная мера функции v , $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — жорданово разложение меры λ (заметим, что λ_- не есть полная мера v_-). Обозначим через

$$\begin{aligned} m(r, v) &:= \frac{1}{r} \int_0^\pi v_+(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi, \quad N(r, v) := \int_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3} dt, \\ T(r, v) &:= m(r, v) + N(r, v) + m(r_0, -v), \end{aligned}$$

где r_0 — произвольное положительное число, при желании можно считать $r_0 = 1$, $r > r_0$.

В этих обозначениях формула Карлемана (2) может быть записана в следующем виде:

$$T(r, v) = T(r, -v). \quad (13)$$

Мы предположим теперь, что функция роста γ удовлетворяет условию:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(r)}{r} > 0. \quad (14)$$

Функция $v \in J\delta$ называется функцией конечного γ -типа, если существуют постоянные A и $B > 0$ такие, что

$$T(r, v) \leq \frac{A}{r} \gamma(Br)$$

для всех $r > r_0$.

Класс данных δ -субгармонических функций конечного γ -типа обозначим через $J\delta(\gamma(r))$. Через $JS(\gamma(r))$ обозначим класс истинно субгармонических функций конечного γ -типа.

ЛЕММА 1. Класс $J\delta(\gamma(r))$ – вещественное линейное пространство, а класс $JS(\gamma(r))$ – конус.

Это утверждение вытекает из (13) и неравенства $T(r, \sum v_j) \leq \sum T(r, v_j)$.

Положительная мера λ имеет конечную γ -плотность, если при некоторых положительных A и B выполняется неравенство

$$N(r, \lambda) := \int_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3} dt \leq \frac{A}{r} \gamma(Br)$$

для всех $r > r_0$.

Положительная мера λ в комплексной плоскости называется *мерой конечного γ -типа*, если существуют положительные постоянные A и B такие, что для всех $r > 0$

$$\lambda(r) \leq rA\gamma(Br). \quad (15)$$

ЛЕММА 2. Если мера λ имеет конечную γ -плотность, то она является мерой конечного γ -типа.

Доказательством служат неравенства

$$N(er, \lambda) = \int_{r_0}^{er} \frac{\lambda(t)}{t^3} dt \geq \int_r^{er} \frac{\lambda(t)}{t^3} dt \geq \frac{\lambda(r)}{e^2 r^2}.$$

5. Доказательство теоремы 1. Пусть $v \in J\delta(\gamma(r))$. Заметим вначале, что каждая из мер $\lambda_+(v)$ и $\lambda_-(v)$ имеет конечную γ -плотность. Мера $\lambda_-(v)$ имеет конечную γ -плотность по определению класса $J\delta(\gamma(r))$. То, что мера $\lambda_+(v)$ имеет конечную γ -плотность, следует из формулы (13). Из этой же формулы мы получаем, что

$$\int_0^\pi |v(re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi \leq A\gamma(Br). \quad (16)$$

Заметим также, что мера $|\lambda| = \lambda_+ + \lambda_-$ имеет конечную γ -плотность, а значит, удовлетворяет неравенству (15). Из (16) следует неравенство

$$|c_k(r, v)| \leq kA\gamma(Br). \quad (17)$$

Из формулы (1) получаем

$$c_k(r, v) = \frac{1}{2^k} c_k(2r, v) - \frac{2r^k}{\pi} \int_r^{2r} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt,$$

откуда с учетом (3), (15), (17) следует неравенство

$$|c_k(r, v)| \leq \frac{k}{2^k} A\gamma(2Br) + \frac{2}{\pi} A\gamma(Br).$$

Тем самым, импликация 1) $\implies$ 2) доказана.

Пусть теперь выполнено условие 2) теоремы. Из неравенства $|c_1(r, v)| \leq A\gamma(Br)$ и формулы (2) следует, что если одна из мер $\lambda_+(v)$ или $\lambda_-(v)$ имеет конечную

γ -плотность, то и другая мера имеет конечную γ -плотность, и, таким образом, мера $|\lambda|$ имеет конечную γ -плотность. Далее мы оценим $v_+(z)$, используя формулу (4) при $R_1 = r/2$, $R_2 = 2r$. Используя разложение в ряд Фурье (9), (10) при $q = 1/2$, $R = r = |z|$, получим:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, 2re^{i\varphi})}{\partial n} v(2re^{i\varphi}) d\varphi + \frac{r}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, (r/2)e^{i\varphi})}{\partial n} v\left(\frac{1}{2}re^{i\varphi}\right) d\varphi \right| \\ & \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{4^m}{1+4^m} \left[2|c_m(2r, v)| + 8 \left| c_m\left(\frac{1}{2}r, v\right) \right| \right] \leq A\gamma(Br). \end{aligned}$$

Из этого неравенства и формулы (4) получаем

$$v_+(z) \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{D_+(r/2, 2r)} K(z, \zeta) d\lambda_-(\zeta) + A\gamma(Br).$$

Теперь, используя ортогональность системы полиномов $\{\sin k\theta\}$, $k = 1, 2, \dots$, на отрезке $[0, \pi]$ и формулы (5)–(8), имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi v_+(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \left[\iint_{D_+(r/2, r)} + \iint_{D_+(r, 2r)} \right] K(z, \zeta) d\lambda_-(\zeta) \right\} \\ & \quad \times \sin \theta d\theta + 2A\gamma(Br) \leq \frac{1}{2} \iint_{D_+(r/2, r)} \frac{\sin \varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \frac{\tau}{r} \frac{4}{5} \left(1 - \frac{r^2}{4\tau^2} \right) d\lambda_-(\zeta) \\ & \quad + \frac{1}{2} \iint_{D_+(r, 2r)} \frac{\sin \varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \frac{r}{\tau} \frac{4}{5} \left(1 - \frac{\tau^2}{4r^2} \right) d\lambda_-(\zeta) + 2A\gamma(Br) \\ & \leq \frac{2}{5r} \int_{r/2}^r \left(1 - \frac{r^2}{4\tau^2} \right) d\lambda_-(\tau) + \frac{2}{5r} \int_r^{2r} \left(1 - \frac{\tau^2}{4r^2} \right) d\lambda_-(\tau) + 2A\gamma(Br) \\ & \leq \frac{2}{5r} \int_{r/2}^{2r} d\lambda_-(\tau) + 2A\gamma(Br) \leq \frac{2\lambda_-(2r)}{5r} + 2A\gamma(Br). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $v \in J\delta(\gamma(r))$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть γ – функция роста, $v \in JS$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $v \in JS(\gamma(r))$;
- 2) $|c_k(r, v)| \leq A\gamma(Br)$, $k \in \mathbb{N}$, при некоторых положительных A , B и всех $r > 0$.

Эта теорема – непосредственное следствие теоремы 1, так как для функции класса JS мера λ_- равна нулю.

В дополнение к теореме 1 покажем, что из условия 1) не следует такое усиление 3): $|c_k(r)| \leq \varepsilon_k \gamma(Br)$, где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это показывает следующий

ПРИМЕР. Рассмотрим неположительную, гармоническую в $\mathbb{C}_+$ функцию

$$v(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \operatorname{Im} \frac{2^{(\rho+1)k}}{z - 2^k}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Функция v удовлетворяет соотношению $v(2z) = 2^\rho v(z)$. Действительно,

$$v(2z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \operatorname{Im} \frac{2^{(\rho+1)k}}{2z - 2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \operatorname{Im} \frac{2^{(\rho+1)k}}{z - 2^{k-1}} = 2^\rho \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \operatorname{Im} \frac{2^{(\rho+1)k}}{z - 2^k}.$$

Отсюда получаем

$$C_1 r^\rho \leq \int_0^\pi |v(re^{i\varphi})| \sin \varphi d\varphi \leq C_2 r^\rho,$$

где

$$C_1 = 2^{-\rho} \inf_{1 \leq r \leq 2} \left(- \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right),$$

$$C_2 = 2^\rho \sup_{1 \leq r \leq 2} \left(- \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right).$$

Пусть $z = re^{i\theta}$, $2^{k_0} < r < 2^{k_0+1}$. Из разложения

$$v(re^{i\theta}) = - \sum_{2^k < r} 2^{\rho(k+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{mk} \sin(m+1)\theta}{r^{m+1}} - \sum_{2^k > r} 2^{\rho k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m \sin m\theta}{2^{mk}}$$

непосредственным подсчетом убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} c_n(r, v) &= -\frac{1}{r^n} \sum_{2^k < r} 2^{k(\rho+n)} - r^n \sum_{2^k > r} 2^{k(\rho-n)} \\ &= -\frac{1}{r^n} \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k(\rho+n)} - r^n \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{k(\rho-n)} \\ &= -\frac{1}{r^n} \frac{2^{k_0(\rho+n)}}{1 - 2^{-(\rho+n)}} - r^n \frac{2^{(k_0+1)(\rho-n)}}{1 - 2^{\rho-n}}. \end{aligned}$$

В силу утверждения 3.1 эти соотношения имеют место и при $r = r_0 = 2^{k_0}$:

$$\begin{aligned} c_n(r_0, v) &= -\frac{1}{2^{k_0}} \frac{2^{k_0(\rho+n)}}{1 - 2^{-(\rho+n)}} - 2^{k_0} \frac{2^{(k_0+1)(\rho-n)}}{1 - 2^{\rho-n}} \\ &= -\frac{r_0^\rho}{1 - 2^{-(\rho+n)}} - \frac{2^\rho r_0^\rho}{2^n (1 - 2^{\rho-n})}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство

$$|c_n(r_0, v)| \geq r_0^\rho, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как число $r_0 = 2^{k_0}$ может быть выбрано как угодно большим, то последнее неравенство показывает невозможность усиления теоремы 1.

6. Анализ мер в полуплоскости. Для описания полных мер суб- и δ -субгармонических функций из классов $J\delta(\gamma(r))$ нам понадобятся некоторые специальные свойства мер в полуплоскости. В то время как понятие конечной γ -плотности характеризует меру круга, вводимое ниже понятие γ -сбалансированности будет характеризовать в некотором смысле распределение меры по аргументам. Совокупность же этих понятий и составит понятие γ -допустимости. Аналогичное понятие для мероморфных функций во всей плоскости рассматривали Л. Рубел и Б. Тейлор [1]. Как будет показано ниже, γ -допустимые меры, и только они, являются полными мерами функций из класса $SK(\gamma(r))$. Но доказательство этого факта нетривиально и требует еще одного понятия. Дело в том, что, как уже отмечалось, субгармоническая функция не определяется единственным образом своей полной мерой. Совокупность же $\lambda(v)$, $\{\alpha_k(v)\}$ характеризует субгармоническую функцию v единственным образом. Поэтому нам придется изучать не одни лишь меры λ , а некие тандемы – пары (λ, α) , определенным образом взвешенных относительно функции роста γ . В связи с этим по аналогии с коэффициентами Фурье субгармонической функции будут рассмотрены коэффициенты Фурье пары (λ, α) .

Пусть λ – мера, удовлетворяющая условиям $\{\mathbf{G}^+\}$, γ – некоторая функция роста. Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S_+(r; k, \lambda) = \frac{1}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) + \frac{1}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{C_+(0, r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta),$$

где $\zeta = \tau e^{i\varphi}$, $r_0 > 0$ – фиксированное число,

$$S_+(r_1, r_2; k, \lambda) = S_+(r_2; k, \lambda) - S_+(r_1; k, \lambda), \quad r_1 \leq r_2.$$

Будем иногда пользоваться сокращенными обозначениями $S_+(r; k) = S_+(r; k, \lambda)$ и т.д.

Мера λ называется γ -сбалансированной, если существуют положительные постоянные A, B , при которых

$$S_+(r_1, r_2; k, \lambda) \leq \frac{A\gamma(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\gamma(Br_2)}{r_2^k} \quad (18)$$

для всех $r_2 > r_1 > 0$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Мера λ называется γ -допустимой, если она γ -сбалансирована и имеет конечную γ -плотность. Условия γ -сбалансированности и конечной γ -плотности независимы. Заметим, что условия конечной γ -плотности и (18) при $k = 1$ эквивалентны.

Мера λ называется γ -взвешенной, если существуют последовательность вещественных чисел $\alpha = \{\alpha_k\}$ и положительные постоянные A, B , при которых для всех $r > 0$, $k \in \mathbb{N}$ выполняется

$$|\alpha_k + S_+(r; k, \lambda)| \leq \frac{A\gamma(Br)}{r^k}.$$

Пусть γ – функция роста. Положим $p[\gamma] = \infty$, если для всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma(r) r^{-p} > 0,$$

и

$$p[\gamma] = \min \left\{ p : p \in \mathbb{N}, \lim_{r \rightarrow \infty} \gamma(r) r^{-p} = 0 \right\}$$

в противном случае.

ТЕОРЕМА 3. Пусть мера λ имеет конечную γ -плотность. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) λ — γ -сбалансирована;
- 2) λ — γ -взвешена;
- 3) λ — γ -допустима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 3) эквивалентны по определению. Докажем, что из 1) следует 2). Для $1 \leq k < p[\gamma]$, $k \in \mathbb{N}$, имеем

$$\inf\{r^{-k}\gamma(Br) : r > 0\} > 0,$$

поэтому при всех k , $1 \leq k < p[\gamma] \leq \infty$, существует $r_k > 0$ такое, что неравенство

$$\frac{\gamma(Br_k)}{r_k^k} \leq 2 \frac{\gamma(Br)}{r^k}$$

выполняется для всех $r > 0$. Для этих k определим

$$\alpha_k = -S_+(r_k; k). \quad (19)$$

Для $k \geq p[\gamma]$, $p[\gamma] < \infty$, существует последовательность $\{r_j\}$, $r_j \uparrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma(Br_j)r_j^{-p[\gamma]} = 0. \quad (20)$$

По предположению имеем

$$S_+(r_m, r_j; k) \leq \frac{A\gamma(Br_m)}{r_m^k} + \frac{A\gamma(Br_j)}{r_j^k}.$$

Из (20) следует фундаментальность последовательности $\{S_+(r_j; k)\}$. Для $k \geq p[\gamma]$ положим

$$\alpha_k = -\lim_{j \rightarrow \infty} S_+(r_j; k). \quad (21)$$

Таким образом, если $1 \leq k < p[\gamma]$, то

$$|\alpha_k + S_+(r; k)| = S_+(r_k, r; k) \leq \frac{A\gamma(Br_k)}{r_k^k} + \frac{A\gamma(Br)}{r^k} \leq 3 \frac{A\gamma(Br)}{r^k}.$$

Если же $k \geq p[\gamma]$, то

$$|\alpha_k + S_+(r; k)| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} S_+(r, r_j; k) \leq \frac{A\gamma(Br)}{r^k} + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A\gamma(Br_j)}{r_j^k} = \frac{A\gamma(Br)}{r^k}.$$

Итак, мера λ — γ -взвешена и импликация 1) $\implies$ 2) установлена. Из 2), в свою очередь, следует 1), так как

$$|S_+(r_1, r_2; k)| = |S_+(r_2; k) + \alpha_k - \alpha_k - S_+(r_1; k)| \leq |\alpha_k + S_+(r_1; k)| + |\alpha_k + S_+(r_2; k)|.$$

Теорема 3, таким образом, полностью доказана.

Рассмотрим отдельно случай, когда $\gamma(r) = r^{\rho(r)} = V(r)$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Валирона, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho \leq 1$.

ЛЕММА 3. Пусть $\gamma(r) = V(r)$, λ – мера, удовлетворяющая условиям $\{\mathbf{G}^+\}$. Справедливы такие утверждения:

- 1) мера λ имеет конечную γ -плотность тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \lambda(r) \{rV(r)\}^{-1} < \infty;$$

- 2) если ρ не целое, то каждая мера λ с конечной γ -плотностью является γ -допустимой;
 3) если ρ целое, то λ γ -допустима тогда и только тогда, когда она имеет конечную γ -плотность, и $\frac{1}{L(r)}[\alpha_\rho + S_+(r; \rho, \lambda)]$ является ограниченной функцией от r , где $L(r) = V(r)/r^\rho$, α_ρ – постоянное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если λ имеет конечную γ -плотность, то из леммы 2 и свойств уточненного порядка следует, что $\lambda(r) = O(V(r)r)$, $r \rightarrow \infty$, а если $\lambda(r) \leq AV(r)r$, $A > 0$, то (см. [10; § 12, свойство 3]) при $\rho > 1$

$$N(r, \lambda) \leq A \int_{r_0}^r \frac{V(t)}{t^2} dt = \frac{A}{\rho-1} \frac{V(r)}{r} + o\left(\frac{V(r)}{r}\right).$$

Случай $\rho = 1$ относится к п. 3).

2) Так как $k \neq \rho$ при $k \in \mathbb{N}$, то, используя неравенство $\lambda(r) \leq AV(r)r$, при некотором $A > 0$ имеем (считая, что $r_1 \leq r_2$), как и в п. 1),

$$\begin{aligned} |S_+(r_1, r_2; k, \lambda)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\lambda(t)}{t^{k+1}} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\lambda(r_2)}{r_2^{k+1}} - \frac{\lambda(r_1)}{r_1^{k+1}} + (k+1) \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+2}} dt \right] \\ &\leq \frac{AV(r_2)}{r_2^k} + A(k+1) \int_{r_1}^{r_2} \frac{V(t)}{t^{k+1}} dt \leq A \frac{k+1}{|\rho-k|} \left(\frac{V(r_2)}{r_2^k} + \frac{V(r_1)}{r_1^k} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

т.е. λ γ -сбалансирована. По теореме 3 она является γ -допустимой.

3) Пусть ρ целое, мере λ присуща конечная γ -плотность и $\frac{1}{L(r)}S_+(r; \rho, \lambda)$ – ограниченная функция от r . При $k \neq \rho$ имеем (22). Но так как функция $\frac{1}{L(r)}[\alpha_\rho + S_+(r; \rho, \lambda)]$ ограничена некоторым числом $B > 0$, то

$$\begin{aligned} |S_+(r_1, r_2; \rho, \lambda)| &\leq |\alpha_\rho + S_+(r_1; \rho, \lambda)| + |\alpha_\rho + S_+(r_2; \rho, \lambda)| \\ &\leq B(L(r_1) + L(r_2)) = B \left(\frac{V(r_2)}{r_2^\rho} + \frac{V(r_1)}{r_1^\rho} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (22) получаем, что λ γ -сбалансирована. На основании теоремы 3 она является γ -допустимой. Обратное следует из теоремы 3.

Для $k \in \mathbb{N}$ и меры λ , удовлетворяющей условиям $\{\mathbf{G}^+\}$, обозначим

$$S'_+(r; k) = S'_+(r; k, \lambda) = \frac{1}{\pi k r^k} \iint_{C_+(0, r)} \frac{\tau^k \sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta), \quad \zeta = \tau e^{i\varphi}.$$

ЛЕММА 4. *Справедливо неравенство*

$$|S'_+(r, k)| \leq \frac{N(er, \lambda)re^2}{\pi}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и при доказательстве леммы 2, имеем

$$|S'_+(r, k)| \leq \frac{\lambda(r)}{\pi r} \leq \frac{N(er, \lambda)re^2}{\pi}.$$

Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}$ — некоторая последовательность вещественных чисел. Функции

$$c_k(r; \lambda, \alpha) = r^k \{\alpha_k + S_+(r; k)\} - S'_+(r; k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

называются *коэффициентами Фурье* пары (λ, α) .

Пара (λ, α) называется *γ -допустимой*, если существуют положительные постоянные A, B , при которых

$$|c_k(r; \lambda, \alpha)| \leq A\gamma(Br), \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (25)$$

и мера λ имеет конечную γ -плотность.

ТЕОРЕМА 4. *Мера λ является γ -допустимой тогда и только тогда, когда существует такая последовательность α , что пара (λ, α) γ -допустима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ γ -допустима. Тогда по теореме 3 она γ -взвешенна, и мы можем взять в качестве α последовательность, входящую в определение γ -взвешенности. Тогда соотношение (25) следует при $k \in \mathbb{N}$ из неравенства

$$|c_k(r; \lambda, \alpha)| \leq r^k |\alpha_k + S_+(r; k)| + |S'_+(r; k)|,$$

леммы 4 и выбора последовательности α .

Предположим теперь, что выполнено соотношение (25). Тогда при $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$r^k |\alpha_k + S_+(r; k)| = |c_k(r; \lambda, \alpha) + S'_+(r; k)| \leq A\gamma(Br) + \frac{N(r, \lambda)r}{\pi \ln 2} \leq A_1\gamma(Br).$$

Таким образом, мера λ является γ -взвешенной. По теореме 3 она γ -допустима.

7. Описание полных мер суб- и δ -субгармонических функций конечного γ -типа. Целью настоящего пункта является, во-первых, установление двух критериев, характеризующих полные меры суб- и δ -субгармонических функций конечного γ -типа. Для этого доказана теорема о существовании субгармонической функции с заданной последовательностью $\{c_k(r; \lambda, \alpha)\} = \{c_k(r; v)\}$, а также использован анализ мер, развитый в предыдущем пункте.

Во-вторых, рассматривается проблема о представлении δ -субгармонической функции $v \in J\delta(\gamma(r))$ в виде разности двух субгармонических функций из класса $JS(\gamma(r))$. Решение этой проблемы для мероморфных во всей плоскости функций принадлежит Д. Майлзу [2].

ТЕОРЕМА 5. Пусть $c_k(r) = c_k(r; \lambda, \alpha)$ – коэффициенты Фурье пары (λ, α) , удовлетворяющие условию

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |c_k(r)| \leq C(r), \quad r > 0. \quad (26)$$

Тогда существует единственная субгармоническая функция v , для которой полная мера $\lambda(v) = \lambda$ и $c_k(r; v) = c_k(r)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $r > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 5. Пусть v_1, v_2 – субгармонические функции в полукруге $C_+(0, R)$, имеющие при всех $k \in \mathbb{Z}$ одинаковые коэффициенты Фурье. Тогда $v_1 \equiv v_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при любом r , $0 < r < R$, коэффициенты Фурье функций v_1 и v_2 равны, то почти для всех $\theta \in [0, \pi]$ при любом фиксированном r имеет место $v_1(re^{i\theta}) = v_2(re^{i\theta})$ (см. [12; гл. 2, п. 2.4]). Утверждение леммы тогда следует из равенства (см., например, [11])

$$v(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \iint_{|\zeta - z| \leq \varepsilon} v(\zeta) ds(\zeta),$$

где $ds(\zeta)$ – элемент площади. Это можно получить переходом к повторному интегралу

$$v(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \iint v(z + \rho e^{i\theta}) \rho d\rho d\theta$$

по области $|z| - \varepsilon \leq \rho \leq |z| + \varepsilon$, $\theta_1(\rho) \leq \theta \leq \theta_2(\rho)$.

Докажем теперь теорему. Определим

$$\Phi(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\rho) \sin k\varphi.$$

Согласно (26) для каждого $\rho > 0$ функция $\Phi(\rho e^{i\varphi}) \in \mathbf{D}^2$ (см., например, [13]), где $\mathbf{D}^2$ – множество распределений порядка не выше 2. Для $\rho > 0$ полагаем

$$P_\rho(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{C_+(0, \rho)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta), \quad a_\rho(z) = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, \rho e^{i\varphi})}{\partial n} \Phi(\rho e^{i\varphi}) d\varphi,$$

$$v_\rho(z) = a_\rho(z) + P_\rho(z),$$

где G – функция Грина полукруга $C_+(0, \rho)$.

Функция $v_\rho(z)$, очевидно, субгармонична в полукруге $C_+(0, \rho)$. Покажем, что $c_k(r; v_\rho) = c_k(r)$ при $r \leq \rho$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$P_\rho(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(r) \sin k\theta.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда, используя формулу

$$\frac{\partial G(re^{i\theta}, \rho e^{i\varphi})}{\partial n} = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{\rho^{m+1}} \sin m\theta \sin m\varphi$$

и находя коэффициенты Фурье функции $a_\rho(re^{i\theta})$, получаем

$$c_k(r, v_\rho) = \left(\frac{r}{\rho}\right)^k c_k(\rho) + d_k(r). \quad (27)$$

Коэффициенты Фурье функции $P_\rho(re^{i\theta})$ находятся из формулы (12):

$$\begin{aligned} d_k(r) &= \alpha_k(P_\rho) + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{C_+(0, r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) \\ &+ \frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta \tau^k} d\lambda(\zeta) - \frac{1}{r^k \pi k} \iint_{C_+(0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta). \end{aligned}$$

Из формулы (1), интегрируя по частям и учитывая, что $P_\rho(\rho e^{i\theta}) = 0$, $\theta \in [0, \pi]$, находим

$$\begin{aligned} \alpha_k(P_\rho) &= -\frac{2}{\pi} \int_{r_0}^{\rho} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt = -\frac{1}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{C_+(0, r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) \\ &- \frac{1}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, \rho)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta \tau^k} d\lambda(\zeta) + \frac{1}{\rho^{2k} \pi k} \iint_{C_+(0, \rho)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta). \end{aligned}$$

Подставляя это представление в выражение для $d_k(r)$, получим

$$\begin{aligned} d_k(r) &= -\frac{1}{r^k \pi k} \iint_{C_+(0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) \\ &- \frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(r, \rho)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta \tau^k} d\lambda(\zeta) + \frac{r^k}{\pi k \rho^{2k}} \iint_{C_+(0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta). \end{aligned}$$

Кроме того, по определению коэффициентов Фурье пары имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k c_k(\rho) &= r^k \left[\alpha_k + \frac{1}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{C_+(0, r_0)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta) \right. \\ &\left. + \frac{1}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, \rho)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta \tau^k} d\lambda(\zeta) \right] - \frac{r^k}{\pi k \rho^{2k}} \iint_{C_+(0, \rho)} \frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im} \zeta} \tau^k d\lambda(\zeta). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение и выражение для $d_k(r)$ в (27), получаем требуемое равенство для $k \in \mathbb{N}$.

Если $\rho' > \rho$, то функция $v_{\rho'}$ — продолжение функции v_ρ . Действительно, при $0 \leq r < \rho$ $c_k(r, v_\rho) = c_k(r) = c_k(r, v_{\rho'})$ и по лемме 5 $v_\rho(z) \equiv v_{\rho'}(z)$, если $z \in C_+(0, \rho)$.

Положим теперь $v(z) = v_\rho(z)$ при $|z| < \rho$. Очевидно, функция $v(z)$ субгармоническая и удовлетворяет требованиям теоремы. Единственность ее следует из леммы 5. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы мера λ была полной мерой истинно субгармонической функции v конечного γ -типа, необходимо и достаточно, чтобы λ была γ -допустимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda = \lambda(v)$ для некоторой функции $v \in JS(\gamma(r))$, то по теореме 3 пара $(\lambda, \alpha(v))$, где $\alpha(v) = \{\alpha_k\}$ – последовательность из (12), является γ -допустимой. Согласно теореме 4 мера λ γ -допустима.

Предположим, что λ – γ -допустимая мера. На основании теоремы 4 существует последовательность α , при которой пара (λ, α) γ -допустима. По теореме 5 существует единственная субгармоническая функция v , для которой $\lambda(v) = \lambda$, $\alpha(v) = \alpha$ и $\{c_k(r, v)\} = \{c_k(r, \lambda, \alpha)\}$, $r > 0$. В соответствии с теоремой 2 $v \in JS(\gamma(r))$. Тем самым, теорема 6 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть λ – мера, $\rho(r)$ – уточненный порядок, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho \geq 1$. Если ρ не целое, то λ является полной мерой некоторой субгармонической функции порядка роста не выше $\rho(r)$ и нормального типа тогда и только тогда, когда*

(*) *существует постоянная $A > 0$ такая, что $\lambda(r) \leq AV(r)r$ для всех $r > 0$.*

При целом ρ это имеет место тогда и только тогда, когда выполняется () и*

$$\left| \frac{1}{L(r)} \alpha_\rho + \frac{1}{\pi \rho} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin \rho \varphi}{\tau^\rho \operatorname{Im} \zeta} d\lambda(\zeta) \right| \leq B$$

при некоторых постоянных α_ρ , $r_0 > 0$, $B > 0$ и всех $r > r_0$.

Эта теорема вытекает из теоремы 6 и леммы 3.

Введем некоторые понятия. Суммой двух мер λ_1 и λ_2 называется мера $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ такая, что $\lambda(G) = \lambda_1(G) + \lambda_2(G)$ для каждого λ_i -измеримого множества G ($i = 1, 2$). Сложение мер коммутативно и ассоциативно. При этом, очевидно, $\lambda(r) = \lambda_1(r) + \lambda_2(r)$. Если носитель меры λ' принадлежит носителю меры λ и при этом $\lambda'(G) \leq \lambda(G)$, то будем писать $\lambda' \leq \lambda$. Как следует из леммы 1, разность двух функций из $JS(\gamma(r))$ принадлежит классу $J\delta(\gamma(r))$. Теперь мы устанавливаем обратное утверждение: каждая функция v из класса $J\delta(\gamma(r))$ представляется в виде разности двух функций v_1 и v_2 из класса $JS(\gamma(r))$.

Класс элементов $v_1 - v_2$, $v_1, v_2 \in JS(\gamma(r))$, обозначим через $JS(\gamma(r)) - JS(\gamma(r))$.

ТЕОРЕМА 8. *Классы $J\delta(\gamma(r))$ и $JS(\gamma(r)) - JS(\gamma(r))$ совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы заметили выше, $JS(\gamma(r)) - JS(\gamma(r)) \subset J\delta(\gamma(r))$. Докажем обратное: $J\delta(\gamma(r)) \subset JS(\gamma(r)) - JS(\gamma(r))$.

Пусть $v \in J\delta(\gamma(r))$, $\lambda(v) = \lambda_+ - \lambda_-$. Достаточно доказать существование γ -допустимой меры $\lambda \geq \lambda_-$. Действительно, если таковая существует, то согласно теореме 6 существует субгармоническая функция $v_1 \in JS(\gamma(r))$, для которой $\lambda(v_1) = \tilde{\lambda}$. Тогда функция $v_2 = v + v_1$ субгармоническая и $v_2 \in JS(\gamma(r))$ на основании леммы 1. Но $v = v_2 - v_1$, и мы получаем требуемое представление.

Перейдем к построению такой меры $\tilde{\lambda}$. Обозначим

$$B_n = \{z : 2^n < |z| \leq 2^{n+1}\} \cap \overline{\mathbb{C}}_+, \quad q = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{2^m}.$$

Положим

$$g_n(\theta) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta}{2^m \sin \theta} \iint_{B_n} \frac{2^{mn} \sin m\varphi}{\tau^m \operatorname{Im} \zeta} d\lambda_-(\zeta), \quad \zeta = \tau e^{i\varphi},$$

$$p_n = \iint_{B_n} \frac{d\lambda_-(\zeta)}{\tau} = \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{d\lambda_-(t)}{t}, \quad f_n(\theta) = \sin \theta [g_n(\theta) + qp_n].$$

Поскольку

$$|g_n(\theta)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2}{2^m} \iint_{B_n} \frac{d\lambda_-(\zeta)}{\tau} = qp_n,$$

то

$$0 \leq f_n(\theta) \leq 2q \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{d\lambda_-(t)}{t}. \quad (28)$$

При $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, имеем

$$- \int_0^\pi \sin k\theta f_n(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} 2^{k(n-1)} \iint_{B_n} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda_-(\zeta),$$

т. е.

$$\iint_{B_n} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda_-(\zeta) + \frac{2^{-k(n-1)} 2}{\pi} \int_0^\pi \sin k\theta f_n(\theta) d\theta = 0. \quad (29)$$

Положим

$$L_n = \left[\frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi f_n(\theta) d\theta \right],$$

где $[\cdot]$ означает целую часть. Поскольку $f_n(\theta) \geq 0$, то существуют возрастающие точки θ'_j такие, что

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\theta'_j} f_n(\theta) d\theta = j, \quad j = 1, \dots, L_n,$$

причем θ'_j зависят от n . Пусть

$$W_n = \{b_j : b_j = 2^{n-1} e^{i\theta'_j}, j = 1, \dots, L_n\}, \quad W = \bigcup_{n \geq 1} W_n,$$

λ' – мера, сосредоточенная в точках множества W , $d\lambda'(b_j) = 2\pi \operatorname{Im} b_j$. Тогда мера $\tilde{\lambda} = \lambda_- + \lambda'$ искомая. Установим это. Из (28) следует, что

$$L_n \leq \frac{2q}{\pi} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{d\lambda_-(t)}{t}.$$

При $2^{n-1} < r \leq 2^n$ имеем

$$\begin{aligned} \int_r^{2^r} \frac{d\lambda'(t)}{t^2} &\leq \frac{2\pi}{r} L_{n+1} \leq \frac{4q}{r} \int_{2^{n+1}}^{2^{n+2}} \frac{d\lambda_-(t)}{t} \leq 32q \int_{2^{n+1}}^{2^{n+2}} \frac{d\lambda_-(t)}{t^2} \\ &\leq 32q \left(\int_r^{2^r} + \int_{2^r}^{4^r} \right) \frac{d\lambda_-(t)}{t^2}, \end{aligned}$$

а поскольку у меры λ_- γ -плотность конечная, то мера λ' имеет конечную γ -плотность, так как при любых $r_0 < r$

$$\int_{r_0}^r \frac{d\lambda'(t)}{t^2} \leq 64q \int_{r_0}^{2^r} \frac{d\lambda_-(t)}{t^2}.$$

Согласно (29)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi k} \left| \iint_{B_n} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda_-(\zeta) + \iint_{B_n} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\lambda'_-(\zeta) \right| \\ &= \frac{1}{\pi k} \left| 2\pi \sum_{j=1}^{L_n} \frac{\sin k\theta'_j}{2^{k(n-1)}} - \frac{2}{\pi 2^{k(n-1)}} \int_0^\pi \sin k\theta f_n(\theta) d\theta \right|. \end{aligned}$$

Обозначим это выражение через δ_{kn} , разобьем интеграл, входящий в него, на сумму интегралов по промежуткам $[\theta'_{j-1}, \theta'_j]$, $j = 1, \dots, L_n$, $\theta'_0 = 0$, и промежутку $[\theta'_{L_n}, \pi]$, а затем к каждому из них применим теорему о среднем значении. Учитывая равенства

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{\theta'_{j-1}}^{\theta'_j} f_n(\theta) d\theta = 1, \quad j = 1, \dots, L_n,$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta_{kn} &= \frac{2}{k 2^{k(n-1)}} \left| \sum_{j=1}^{L_n} \sin k\theta'_j - \sum_{j=1}^{L_n} \frac{1}{\pi^2} \int_{\theta'_{j-1}}^{\theta'_j} \sin k\theta f_n(\theta) dt + \frac{1}{\pi^2} \int_{\theta'_{L_n}}^\pi \sin k\theta f_n(\theta) dt \right| \\ &= \frac{2}{k 2^{k(n-1)}} \left| \sum_{j=1}^{L_n} (\sin k\theta'_j - \sin k\varphi_j) + \frac{1}{\pi^2} \int_{\theta'_{L_n}}^\pi \sin k\theta f_n(\theta) dt \right| \\ &\leq \frac{2}{k 2^{k(n-1)}} \left[\sum_{j=1}^{L_n} |\sin k\theta'_j - \sin k\varphi_j| + 1 \right], \end{aligned}$$

где $\theta'_j \leq \varphi_j \leq \theta_j$, $j = 1, \dots, L_n$.

Поскольку

$$|\sin k\theta'_j - \sin k\varphi_j| \leq k(\theta'_j - \theta'_{j-1}), \quad j = 1, \dots, L_n,$$

то

$$\delta_{kn} \leq \frac{2\pi + 1}{2^{k(n-1)}}.$$

Таким образом, если $2^{n-1} \leq r_1 < r_2 \leq 2^{n+1}$, то, поскольку мера $\tilde{\lambda}$ имеет конечную γ -плотность, получим

$$|S_+(r_1, r_2; k, \tilde{\lambda})| = \frac{1}{k\pi} \left| \iint_{r_1 \leq \tau \leq r_2} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \operatorname{Im} \zeta} d\tilde{\lambda}(\zeta) \right| \leq \frac{1}{\pi r_1^k} \int_{r_1}^{4r_1} \frac{d\tilde{\lambda}(t)}{t} \leq \frac{A\gamma(Br_1)}{r_1^k},$$

где A и B – некоторые постоянные, не зависящие от n и k .

Если же $2^m \leq r_1 \leq 2^{m+1}$, $2^n \leq r_2 \leq 2^{n+1}$, $m < n - 1$, то, учитывая определение δ_{kn} и оценку для него, находим

$$|S_+(r_1, r_2; k, \tilde{\lambda})| \leq \sum_{l=m+2}^n \delta_{kl} + \int_{r_1}^{4r_1} \frac{d\tilde{\lambda}(t)}{t^{k+1}} + \int_{r_2}^{2r_2} \frac{d\tilde{\lambda}(t)}{t^{k+1}}.$$

Так как

$$\sum_{l=m+2}^n \delta_{kl} \leq (2\pi + 1) \sum_{l=m+2}^n \frac{1}{2^{k(l-1)}} \leq \frac{2(2\pi + 1)}{2^{k(m+1)}} \leq \frac{2(2\pi + 1)}{r_1^k},$$

то, учитывая, что $\tilde{\lambda}$ имеет конечную γ -плотность, получаем отсюда γ -сбалансированность меры $\tilde{\lambda}$. А значит, $\tilde{\lambda}$ γ -допустима.

Теорема доказана.

Заключение. На протяжении статьи мы предполагали при определении классов растущих функций, что функция роста $\gamma(r)$ удовлетворяет условию (14). Оно необходимо, если мы хотим использовать для определения роста классическую неванлинновскую характеристику $T(r, v)$, так как неравенство $T(r, v) \leq A\gamma(Br)/r$ уже накладывает это ограничение на функцию роста γ . Если мы хотим рассматривать общий случай, без всяких ограничений на функцию роста (например, случай $\gamma(r) = r^\rho$, $0 < \rho < 1$), то мы должны использовать более сложную характеристику, чем неванлинновская, а именно $v \in J\delta(\gamma(r))$, если

$$m(r_2, v) + m(r_1, -v) + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda_-(t)}{t^3} dt \leq \frac{A}{r_1} \gamma(Br_1) + \frac{A}{r_2} \gamma(Br_2)$$

для всех $r_2 > r_1 > 0$. В этом случае все утверждения нашей работы имеют место, а их доказательство автоматически повторяет приведенные выше рассуждения.

Заметим, что это определение и определение, данное выше, совпадают, если функция роста удовлетворяет условию (14).

Введенное в статье определение порядка в случае, когда функция v является субгармонической в полуплоскости и $\gamma(r) = r^\rho$, совпадает с определением, введенным Л. И. Ронкиным [14], и отличается от определения формального порядка, введенного А. Ф. Гришиным [6], и эквивалентных между собой определений порядка Е. Титчмарша и Н. В. Говорова [15]. Однако все эти понятия совпадают при $\rho > 1$. Качественное их отличие возникает при $\rho \leq 1$. В этом случае наше определение является наиболее широким, т.е. субгармоническая функция конечного порядка в смысле А. Ф. Гришина или Титчмарша–Говорова является функцией конечного порядка в смысле определения, данного в статье.

Список литературы

1. *Rubel L. A., Taylor B. A.* Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France. 1968. V. 96. P. 53–96.
2. *Miles J. B.* Quotient representations of meromorphic functions // J. Anal. Math. 1972. V. 25. P. 371–388.
3. *Кондратюк А. А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. I // Матем. сб. 1978. Т. 106(148). №3. С. 386–408.
4. *Кондратюк А. А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. II // Матем. сб. 1980. Т. 113(155). №1. С. 118–132.
5. *Кондратюк А. А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. III // Матем. сб. 1983. Т. 120(162). №3. С. 331–343.
6. *Гришин А. Ф.* Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций // Матем. физика, анализ, геометрия. 1994. Т. 1. №2. С. 193–215.
7. *Fedorov M. A., A. F. Grishin A. F.* Some questions of the Nevanlinna theory for the complex half-plane // Math. Physics, Analysis and Geometry. 1998. V. 1. №3. P. 223–271.
8. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
9. *Малютин К. Г.* Ряды Фурье и δ -субгармонические функции // Труды ИПММ НАН Украины. 1988. Т. 3. С. 146–157.
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
11. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
12. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. М.: Мир, 1985.
13. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.
14. *Ронкин Л. И.* Регулярность роста и D' -асимптотика голоморфных функций в $\mathbb{C}^+$ // Изв. вузов. Сер. матем. 1990. №2. С. 16–28.
15. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М.: Наука, 1986.

Украинская академия банковского дела,
г. Сумы
E-mail: malyutin@academia.sumy.ua

Поступила в редакцию
13.06.2000