Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Марченков, О невозможности получения $(n+1)$ -местных непрерывных функций из n -местных с помощью некоторых непрерывных операторов, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 6, 71–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm573>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:13:16

УДК 519.716

С. С. Марченков

**О невозможности получения $(n + 1)$ -местных
непрерывных функций из n -местных
с помощью некоторых непрерывных операторов**

Рассматриваются непрерывные функции, заданные на единичном кубе. Вводится понятие регулятора непрерывности, которое в определении равномерной непрерывности отражает переход “от ε к δ ”. Ставится задача о возможности получения $(n + 1)$ -местных непрерывных функций с регулятором непрерывности δ из n -местных функций с тем же регулятором непрерывности с помощью равномерно непрерывных операторов с регуляторами непрерывности, которые являются суперпозициями регулятора δ . Доказывается невозможность решения этой задачи для регуляторов непрерывности $\delta(\varepsilon)$ таких, что для любого $\alpha \geq 0$, начиная с некоторого ε_α , справедливо неравенство $\delta(\varepsilon) \geq \varepsilon^{1+\alpha}$.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Одной из стандартных задач, часто встречающихся в различных разделах математики, является задача построения отображений вида $X^{n+1} \rightarrow X$ ($n \geq 2$), исходя из отображений $X^n \rightarrow X$. При решении этой задачи, как правило, прибегают к использованию суперпозиций (композиций) отображений. Существует значительное число задач, которые можно решить этим приемом. Так, для любого непустого множества X всякую $(n + 1)$ -местную функцию ($n \geq 2$), заданную на X , можно представить в виде суперпозиции n -местных (и даже двуместных) функций, заданных на X ; любую $(n + 1)$ -местную непрерывную функцию ($n \geq 2$), заданную на единичном кубе, можно представить в виде суперпозиции непрерывных функций, зависящих от двух переменных [1]–[3], и т. д.

С другой стороны, область применения этого приема ограничена. Имеется целый ряд важных задач, где суперпозициями функций от n переменных некоторого класса нельзя получить все функции от $n + 1$ переменных этого класса. К таким классам относятся, например, классы функций заданной гладкости (см. [4]–[9]), классы близких к непрерывным функциям конечно-автоматных функций [10], детерминированных функций [11] и некоторые другие.

При доказательствах невозможности представления всех $(n + 1)$ -местных функций некоторого класса K в виде суперпозиций функций из K от меньшего числа переменных обычно находят некоторое “наследственное” свойство, которым обладают все n -местные функции из K и которое переходит на функции, реализуемые суперпозициями n -местных функций из K . Вместе с тем доказывают, что не все

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00351).

$(n+1)$ -местные функции из K обладают этим свойством. Для непрерывных функций в качестве такого свойства рассматривают сложность некоторых приближений. При этом приближения могут выбираться как из класса K , так и из других классов, вообще говоря, не связанных с K .

В работе [11] при изучении классов непрерывных, автоматных и рекурсивных функций впервые было предложено рассматривать в качестве приближений булевские операторы, а в качестве наследственного свойства – сложность реализации булевских операторов схемами из функциональных элементов. Близкий подход был применен при исследовании суперпозиций непрерывных функций, заданных на бэровском пространстве [12]. Здесь удалось найти границу для модуля непрерывности функции, которая позволяет отделить положительное решение вопроса о представимости $(n+1)$ -местных функций с помощью суперпозиций функций от меньшего числа переменных от отрицательного решения. Прием, примененный в [12], дал основание предположить, что подобные результаты могут иметь место и для обычных непрерывных функций. Ниже мы подтверждаем это предположение, рассматривая, правда, лишь отрицательную сторону вопроса.

В качестве основного модельного объекта в работе рассматривается класс $\mathbf{C}$ непрерывных функций, заданных на единичном кубе. Изучается вопрос о представимости $(n+1)$ -местных функций из $\mathbf{C}$ (класс $\mathbf{C}^{(n+1)}$) в виде суперпозиций функций из $\mathbf{C}^{(n)}$, а также с помощью равномерно непрерывных операторов, во многом аналогичных операции (оператору) суперпозиции. В качестве характеристики непрерывных функций выбран регулятор непрерывности $\delta(\varepsilon)$, который для равномерно непрерывных функций указывает на зависимость “ δ от ε ” в определении равномерной непрерывности. Доказано, что если для любого положительного действительного α регулятор непрерывности $\delta(\varepsilon)$, начиная с некоторого ε_α , удовлетворяет неравенству $\delta(\varepsilon) \geq \varepsilon^{1+\alpha}$, то в классе $\mathbf{C}_\delta^{(n+1)}$, определяемом регулятором $\delta(\varepsilon)$, существуют функции, которые невозможно выразить через функции класса $\mathbf{C}_\delta^{(n)}$ с помощью равномерно непрерывных операторов с регуляторами непрерывности вида $\delta^{(m)}(\varepsilon)$ (m -кратная суперпозиция регулятора δ). В частности, аналогичное утверждение справедливо для оператора суперпозиции.

В качестве приближений непрерывных функций выбраны дискретные (k, l) -функции, которые определены в узлах равномерной решетки с шагом 2^{-k} и принимают значения, кратные 2^{-l} . Для классов $\mathbf{G}$ непрерывных функций вводится понятие (k, l) -емкости как наименьшее число (k, l) -функций, приближающих функции класса $\mathbf{G}$. Доказательство центрального результата работы базируется на оценке сверху для (k, l) -емкости класса функций, получаемых из функций класса $\mathbf{C}_\delta^{(n)}$ действием равномерно непрерывных операторов с указанными выше ограничениями на регуляторы непрерывности.

Отметим еще следующий факт: большинство утверждений работы доказывается в предположении, что $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$. Это предположение несущественно и носит чисто технический характер, позволяющий упростить ряд рассуждения. Напротив, условия типа $\delta(\varepsilon) \geq \varepsilon^{1+\alpha}$ имеют принципиальный характер, они задают границу применимости предложенного в работе метода доказательства.

Основные результаты работы, касающиеся представления функций с помощью равномерно непрерывных операторов, содержатся в п. 4. Хотя оператор супер-

позиции формально может быть рассмотрен в п. 4 наряду с другими равномерно непрерывными операторами, мы сочли необходимым посвятить суперпозициям непрерывных функций отдельно п. 3. Это сделано по следующим причинам. Во-первых, понятия регулятора непрерывности, (k, l) -приближения, (k, l) -емкости и сопутствующие этим понятиям оценки наиболее естественно и просто рассматривать и устанавливать для суперпозиций непрерывных функций. А во-вторых, в данной области исследований оператор суперпозиции среди равномерно непрерывных операторов представляется нам наиболее интересным.

2. Основные понятия. Пусть $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$. Обозначим через $\mathbf{F}$ множество всех функций $\varphi: I^n \rightarrow I$ ($n = 1, 2, \dots$), заданных на I . При любом n на множестве I^n определим метрику ρ : если $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, то

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}.$$

Через $\mathbf{C}$ обозначим множество всех непрерывных функций из $\mathbf{F}$. Если $\mathbf{M}$ – некоторый класс функций, то через $\mathbf{M}^{(n)}$ будем обозначать множество всех n -местных функций из $\mathbf{M}$.

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}$, тогда функция φ равномерно непрерывна на I . Зависимость “ δ от ε ” в определении равномерной непрерывности формализуем в виде понятия регулятора непрерывности. Функцию $\delta(\varepsilon)$ положительной действительной переменной ε , принимающую положительные действительные значения, назовем *регулятором непрерывности* функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, если $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и для любых значений $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n$ из справедливости неравенств

$$|x_1 - x'_1| < \delta(\varepsilon), \dots, |x_n - x'_n| < \delta(\varepsilon)$$

следует справедливость неравенства

$$|\varphi(x_1, \dots, x_n) - \varphi(x'_1, \dots, x'_n)| < \varepsilon.$$

Множество всех функций из $\mathbf{C}$, имеющих регулятор непрерывности δ , обозначим через $\mathbf{C}_\delta$.

Из приведенного определения следует, что если $\delta(\varepsilon)$ – регулятор непрерывности функции φ и неравенство $\gamma(\varepsilon) \leq \delta(\varepsilon)$ выполняется для любого ε , то γ – также регулятор непрерывности функции φ . В связи с этим в дальнейшем будем предполагать, что регуляторы непрерывности $\delta(\varepsilon)$ подчиняются условию монотонности: если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $\delta(\varepsilon_1) \leq \delta(\varepsilon_2)$.

Для любого натурального числа l обозначим через J_l множество, состоящее из $2^l + 1$ двоично-рациональных чисел $i \cdot 2^{-l}$ ($i = 0, 1, \dots, 2^l$). Если k, l – натуральные числа, то дискретную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, отображающую множество J_k^n в множество J_l , будем называть (k, l) -*функцией*. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}$. Назовем (k, l) -функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ (k, l) -*приближением* функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, если для любых значений $x_1, \dots, x_n \in I$ и любых значений $x'_1, \dots, x'_n \in J_k$ из справедливости неравенств

$$|x_1 - x'_1| < 2^{-k}, \dots, |x_n - x'_n| < 2^{-k} \quad (1)$$

следует справедливость неравенства

$$|\varphi(x_1, \dots, x_n) - f(x'_1, \dots, x'_n)| < 2^{-l}. \quad (2)$$

Пусть k, l, n — натуральные числа, $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}^{(n)}$ и каждая функция из $\mathbf{G}$ имеет некоторое (k, l) -приближение. Назовем (k, l) -емкостью класса $\mathbf{G}$ наименьшее возможное число элементов такого множества (k, l) -функций, которое для каждой функции из $\mathbf{G}$ содержит хотя бы одно ее (k, l) -приближение. Через $\text{cap}(\mathbf{G}, k, l)$ будем обозначать (k, l) -емкость класса $\mathbf{G}$.

Если функция φ принадлежит классу $\mathbf{C}$, то, как нетрудно убедиться, для любого натурального l найдется такое k , что функция φ имеет (k, l) -приближение. Это высказывание уточняется в утверждении 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}_\delta$, k, l — натуральные числа и

$$k > -\log_2 \delta(2^{-(l+1)}). \quad (3)$$

Тогда функция φ имеет (k, l) -приближение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое (k, l) -приближение f определим следующим образом. Если $(x'_1, \dots, x'_n) \in J_k^n$, то $f(x'_1, \dots, x'_n)$ полагаем равным ближайшему к $\varphi(x'_1, \dots, x'_n)$ элементу множества J_l (если таких элементов два, то выбираем наименьший из них). Очевидно, что

$$|\varphi(x'_1, \dots, x'_n) - f(x'_1, \dots, x'_n)| \leq 2^{-(l+1)}. \quad (4)$$

Из (3) следует, что $2^{-k} < \delta(2^{-(l+1)})$. Значит, согласно включению $\varphi \in \mathbf{C}_\delta$ неравенство

$$|\varphi(x_1, \dots, x_n) - \varphi(x'_1, \dots, x'_n)| < 2^{-(l+1)} \quad (5)$$

будет выполняться для значений $x_1, \dots, x_n$ из I , как только выполняются неравенства (1). Сопоставление неравенств (4), (5) приводит к неравенству (2).

3. Суперпозиции непрерывных функций. При определении понятий формулы и суперпозиции мы придерживаемся в основном книги [10].

Пусть $\mathbf{M}$ — некоторый класс функций. По индукции определим понятие *формулы над $\mathbf{M}$* . Если φ есть обозначение n -местной функции из $\mathbf{M}$, а $x_1, \dots, x_n$ — различные символы переменных, то выражение $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называем формулой над $\mathbf{M}$. Пусть ψ есть обозначение r -местной функции из $\mathbf{M}$, а $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ — либо формулы над $\mathbf{M}$, либо символы переменных (не обязательно различные). Тогда выражение $\psi(\Phi_1, \dots, \Phi_r)$ есть формула над $\mathbf{M}$.

Параллельно определению понятия формулы над $\mathbf{M}$ введем понятие *функции, реализуемой формулой (над $\mathbf{M}$)*. Если φ — обозначение n -местной функции из $\mathbf{M}$, то формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ реализует функцию из $\mathbf{M}$, обозначением которой служит φ . Пусть ψ есть обозначение r -местной функции из $\mathbf{M}$, а $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ — либо формулы над $\mathbf{M}$, либо символы переменных. Будем предполагать, что формулам Φ_i , отличным от символов переменных, уже сопоставлены функции $\varphi_i(x_1^i, \dots, x_{n_i}^i)$, реализуемые этими формулами. Если Φ_i является символом переменной x^i , то сопоставим ей тождественную функцию $\varphi_i(x^i) = x^i$. Тогда формула $\psi(\Phi_1, \dots, \Phi_r)$

реализует функцию $\psi(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ (по понятным техническим причинам мы не выписываем переменных, от которых зависят функции $\varphi_1, \dots, \varphi_r$).

Функции, реализуемые формулами над $\mathbf{M}$, носят название *суперпозиций функций из $\mathbf{M}$* , или *суперпозиций над множеством $\mathbf{M}$* . В конкретных случаях для заданной суперпозиции над $\mathbf{M}$, реализуемой формулой Φ над $\mathbf{M}$, указывают все те функции $\varphi_1, \dots, \varphi_s$, из которых построена формула Φ (например, в виде $\Phi[\varphi_1, \dots, \varphi_s]$), и говорят о суперпозиции функций $\varphi_1, \dots, \varphi_s$.

Сделаем еще два замечания относительно суперпозиций функций из классов $\mathbf{C}_\delta$. Если $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$, то переменную x^i в индуктивных шагах определений формулы и функции, реализуемой формулой, можно рассматривать как тождественную функцию $\varphi_i(x^i) = x^i$, которая в данном случае принадлежит классу $\mathbf{C}_\delta$. В связи с этим при построениях сложных формул отпадает необходимость в отдельном рассмотрении случая символа переменной и случая формулы, не являющейся символом переменной.

Второе замечание касается “нерегулярных” формул и суперпозиций. Очевидно, что формулы типа

$$\varphi_0(\varphi_1(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1), \dots, \varphi_r(x_1^r, \dots, x_{n_r}^r)), \quad (6)$$

где $\{x_1^1, \dots, x_{n_1}^1\}, \dots, \{x_1^r, \dots, x_{n_r}^r\}$ — произвольные множества переменных, в техническом плане малоудобны. Гораздо предпочтительнее выглядят случаи, когда

$$n_1 = \dots = n_r, \quad x_1^1 = \dots = x_1^r, \quad \dots, \quad x_{n_1}^1 = \dots = x_{n_1}^r.$$

Однако если $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}_\delta$, а π — подстановка на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, то, очевидно, функция $\varphi(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$ также принадлежит классу $\mathbf{C}_\delta$. Кроме того, если функция ψ определяется через функцию φ с помощью тождества

$$\psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

(введение фиктивных переменных $x_{n+1}, \dots, x_{n+p}$), то функция ψ будет принадлежать классу $\mathbf{C}_\delta$. Эти соображения позволяют вместо формул и суперпозиций типа (6) над множеством $\mathbf{C}_\delta$ рассматривать лишь формулы и суперпозиции вида

$$\varphi_0(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_r(x_1, \dots, x_n)). \quad (7)$$

Следующее утверждение показывает, как при суперпозиции меняется регулятор непрерывности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\varphi_0 \in \mathbf{C}_\gamma$, $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in \mathbf{C}_\delta$ и функция $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ реализуется формулой (7). Тогда $\varphi \in \mathbf{C}_\beta$, где $\beta(\varepsilon) = \delta(\gamma(\varepsilon))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, из соотношения $\varphi_0 \in \mathbf{C}_\gamma$ следует, что при выполнении неравенств

$$|y_1 - y'_1| < \gamma(\varepsilon), \dots, |y_r - y'_r| < \gamma(\varepsilon) \quad (8)$$

будет выполняться неравенство

$$|\varphi_0(y_1, \dots, y_r) - \varphi_0(y'_1, \dots, y'_r)| < \varepsilon. \quad (9)$$

В свою очередь, из соотношений $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in \mathbf{C}_\delta$ выводим, что при любом i , $1 \leq i \leq r$, неравенство

$$|\varphi_i(x_1, \dots, x_n) - \varphi_i(x'_1, \dots, x'_n)| < \gamma(\varepsilon) \quad (10)$$

будет иметь место, как только будут справедливы неравенства

$$|x_1 - x'_1| < \delta(\gamma(\varepsilon)), \dots, |x_n - x'_n| < \delta(\gamma(\varepsilon)). \quad (11)$$

Сопоставление формул (7)–(11) завершает доказательство утверждения.

Если s – натуральное число, то посредством $\delta^{(s)}(\varepsilon)$ будем обозначать s -кратную суперпозицию функции δ :

$$\delta^{(s)}(\varepsilon) = \underbrace{\delta(\delta(\dots \delta(\varepsilon) \dots))}_{s \text{ раз}}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$ и функция φ реализуется формулой над $\mathbf{C}_\delta$, содержащей s символов функций (среди них возможны повторения). Тогда $\varphi \in \mathbf{C}_\beta$, где $\beta(\varepsilon) = \delta^{(s)}(\varepsilon)$.

Будем обозначать через $\lceil \alpha \rceil$ ближайшее сверху целое к действительному числу α .

Связь операции (оператора) суперпозиции с (k, l) -приближениями устанавливается в утверждениях 3, 4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r \in \mathbf{C}_\delta$, функция φ реализуется формулой (7) и

$$k(l) = \lceil 1 - \log_2 \delta(2^{-(l+1)}) \rceil. \quad (12)$$

Если f_0 – $(k(l), l)$ -приближение функции φ_0 , а $f_1, \dots, f_r$ – $(k^{(2)}(l), k(l))$ -приближения функций $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, то функция

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, \dots, x_n)) \quad (13)$$

является $(k^{(2)}(l), l)$ -приближением функции φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $m = k(l), k = k^{(2)}(l)$. Согласно утверждению 1 функции φ_0 и $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ имеют соответственно (m, l) - и (k, m) -приближения. Поэтому определение функции f по формуле (13) корректно. Убедимся, что (k, l) -функция f является (k, l) -приближением функции φ . В самом деле, пусть $(x_1, \dots, x_n) \in I^n, (x'_1, \dots, x'_n) \in J_k^n$ и выполняются неравенства (1). Тогда согласно определению (k, m) -приближения для любого $i, 1 \leq i \leq r$, будем иметь

$$|\varphi_i(x_1, \dots, x_n) - f_i(x'_1, \dots, x'_n)| < 2^{-m}. \quad (14)$$

Поскольку функция f_0 является (m, l) -приближением функции φ_0 , из (14) следует, что справедливо неравенство

$$|\varphi_0(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_r(x_1, \dots, x_n)) - f_0(f_1(x'_1, \dots, x'_n), \dots, f_r(x'_1, \dots, x'_n))| < 2^{-l}.$$

Остается воспользоваться определениями функций φ и f .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon, \varphi_1, \dots, \varphi_s \in \mathbf{C}_\delta$, функция $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ реализуется формулой Φ , составленной из символов функций $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ (среди функций $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ могут быть повторения), и функция $k(l)$ определяется по формуле (12). Тогда существуют такие натуральные числа $p, p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$, зависящие только от Φ , что $(k^{(p)}(l), l)$ -приближение f функции φ реализуется формулой, полученной из формулы Φ заменой каждой функции φ_i ее $(k^{(p_i)}(l), k^{(q_i)}(l))$ -приближением f_i ($1 \leq i \leq s$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$ и замечания, сделанные выше относительно структуры суперпозиций, будем предполагать, что при построении формулы Φ из символов функций $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ применяются лишь “регулярные” подформулы вида (7). Допустим, что в формуле Φ самым “внешним” символом функции является, например, φ_1 , так что

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(\Phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \Phi_r(x_1, \dots, x_n)),$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ — формулы, составленные из символов функций $\varphi_2, \dots, \varphi_s$. И пусть формулы $\Phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \Phi_r(x_1, \dots, x_n)$ реализуют соответственно функции $\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_r(x_1, \dots, x_n)$. Согласно утверждению 1 существует $(k(l), l)$ -функция f_1 , которая является $(k(l), l)$ -приближением функции φ_1 .

Предположим, что нам удалось найти такие $(k^{(p)}(l), k(l))$ -функции $g_1, \dots, g_r$, которые являются $(k^{(p)}(l), k(l))$ -приближениями функций $\psi_1, \dots, \psi_r$. Тогда $(k^{(p)}(l), l)$ -функция

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_r(x_1, \dots, x_n))$$

будет $(k^{(p)}(l), l)$ -приближением функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. В самом деле, проведем стандартные рассуждения: если

$$(x_1, \dots, x_n) \in I^n, \quad (x'_1, \dots, x'_n) \in J_{k^{(p)}(l)}^{(n)}$$

и выполняются неравенства

$$|x_1 - x'_1| < 2^{-k^{(p)}(l)}, \dots, |x_n - x'_n| < 2^{-k^{(p)}(l)}, \quad (15)$$

то согласно определению $(k^{(p)}(l), k(l))$ -приближения для любого i , $1 \leq i \leq r$, будем иметь

$$|\psi_i(x_1, \dots, x_n) - g_i(x'_1, \dots, x'_n)| < 2^{-k(l)}. \quad (16)$$

В свою очередь, из определения $(k(l), l)$ -приближения и неравенств (16) следует, что

$$|\varphi_1(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_r(x_1, \dots, x_n)) - f_1(g_1(x'_1, \dots, x'_n), \dots, g_r(x'_1, \dots, x'_n))| < 2^{-l}. \quad (17)$$

Соединяя (15)–(17) с определениями функций φ и f , получаем, что функция f есть $(k^{(p)}(l), l)$ -приближение функции φ .

С каждой из функций ψ_i ($1 \leq i \leq r$) поступим далее таким же образом, как и с функцией φ . Основное отличие здесь состоит в том, что при рассмотрении самого “внешнего” для формулы Φ_i символа функции следует определять не $(k(l), l)$ -приближение, как это было для формулы Φ и функции φ_1 , а $(k^{(2)}(l), k(l))$ -приближение.

Еще одно замечание необходимо сделать по поводу “выравнивания” параметра p в $(k^{(p)}(l), k(l))$ -приближениях $g_1, \dots, g_r$ функций $\psi_1, \dots, \psi_r$. Дело в том, что формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ могут иметь различную структуру и, в частности, различную глубину (максимальное число “вложенных” друг в друга символов функций). Это может привести к тому, что на некоторых этапах построения приближений появятся формулы вида

$$g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_t(x_1, \dots, x_n)),$$

где $g, h_1, \dots, h_t$ суть соответственно $(k^{(m)}(l), k^{(v)}(l))$ -, $(k^{(m_1)}(l), k^{(m)}(l))$ -, $\dots$, $(k^{(m_t)}(l), k^{(m)}(l))$ -функции, причем не все числа $m_1, \dots, m_t$ равны между собой. В этом случае следует воспользоваться монотонностью функции k и утверждением 1, взять $q = \max_{1 \leq i \leq t} m_i$ и вместо $(k^{(m_1)}(l), k^{(m)}(l))$ -, $\dots$, $(k^{(m_t)}(l), k^{(m)}(l))$ -приближений $h_1, \dots, h_t$ рассмотреть более “точные” $(k^{(q)}(l), k^{(m)}(l))$ -приближения $h'_1, \dots, h'_t$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$, $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in \mathbf{C}_\delta^{(n)}$, формула Φ построена из символов функций $\varphi_1, \dots, \varphi_s$, а натуральное число p определяется по формуле Φ согласно утверждению 4. Тогда существует такое натуральное число m , зависящее только от формулы Φ , что для множества

$$\mathbf{G} = \{\Phi[\varphi_1, \dots, \varphi_s] : \varphi_1, \dots, \varphi_s \in \mathbf{C}_\delta^{(n)}\}$$

справедлива оценка

$$\text{cap}(\mathbf{G}, k^{(p)}(l), l) \leq h(l)^{s \cdot h(l)^n}, \quad (18)$$

где

$$h(l) = 2^{k^{(m)}(l)} + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m — максимум из чисел $p, p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$, определяемых в утверждении 4. Как вытекает из утверждения 4, $(k^{(p)}(l), l)$ -приближение функции $\varphi = \Phi[\varphi_1, \dots, \varphi_s]$ полностью определяется $(k^{(p_1)}(l), k^{(q_1)}(l))$ -, $\dots$, $(k^{(p_s)}(l), k^{(q_s)}(l))$ -приближениями функций $\varphi_1, \dots, \varphi_s$. В силу монотонности функции $k(l)$ число различных $(k^{(p_i)}(l), k^{(q_i)}(l))$ -приближений (для любых функций из $\mathbf{C}_\delta^{(n)}$) не превосходит числа $(k^{(m)}(l), k^{(m)}(l))$ -приближений. Последняя величина равна

$$h(l)^{h(l)^n}.$$

Поскольку функции $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ в формуле Φ можно выбирать независимым образом, верхней оценкой числа возможных $(k^{(p)}(l), l)$ -приближений для функций вида $\Phi[\varphi_1, \dots, \varphi_s]$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in \mathbf{C}_\delta^{(n)}$, будет являться s -я степень величины $h(l)^{h(l)^n}$, что доказывает неравенство (18).

4. Равномерно непрерывные операторы. Любая формула $\Phi[\varphi_1, \dots, \varphi_s]$, где функция φ_i зависит от n_i переменных, задает некоторый оператор на $\mathbf{F}^{(n_1)} \times \dots \times \mathbf{F}^{(n_s)}$. Мы хотим рассмотреть произвольные операторы, которые обладают свойствами, аналогичными свойствам из утверждений 3 и 4. Для этого при любом натуральном n зададим на $\mathbf{F}^{(n)}$ метрику ρ :

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{x_1, \dots, x_n \in I} |\varphi(x_1, \dots, x_n) - \psi(x_1, \dots, x_n)|.$$

Пусть оператор $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ определен на подмножестве $\mathbf{G}$ множества $\mathbf{F}^{(n_1)} \times \dots \times \mathbf{F}^{(n_s)}$ и отображает $\mathbf{G}$ в множество $\mathbf{F}^{(n)}$. Оператор Φ называется *непрерывным* в точке $(\varphi_1, \dots, \varphi_s) \in \mathbf{G}$, если для любого положительного действительного ε найдется положительное действительное δ такое, что для любой точки $(\varphi'_1, \dots, \varphi'_s) \in \mathbf{G}$ из справедливости неравенств

$$\rho(\varphi_1, \varphi'_1) < \delta, \dots, \rho(\varphi_s, \varphi'_s) < \delta$$

следует справедливость неравенства

$$\rho(\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s), \Phi(\varphi'_1, \dots, \varphi'_s)) < \varepsilon.$$

Как и в случае непрерывных функций, оператор Φ называется *равномерно непрерывным* на $\mathbf{G}$, если в приведенном выше определении значение δ не зависит от точки $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$. По аналогии с равномерно непрерывными функциями вводим понятие *регулятора непрерывности* $\delta(\varepsilon)$. Класс всех равномерно непрерывных операторов, имеющих регулятор непрерывности δ , обозначим через $\mathcal{H}_\delta$.

Далее мы будем рассматривать равномерно непрерывные операторы, заданные на декартовых произведениях множеств $\mathbf{C}^{(n)}$ и $\mathbf{C}_\delta^{(n)}$. Приведем некоторые примеры таких операторов.

Пусть оператор $\Phi_1(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r)$ задан на множестве

$$\mathbf{C}_\delta^{(r)} \times \mathbf{C}^{(n)} \times \dots \times \mathbf{C}^{(n)} \quad (19)$$

формулой (7). Из соотношения $\varphi_0 \in \mathbf{C}_\delta$ следует, что оператор Φ_1 равномерно непрерывен на множестве (19) и принадлежит классу $\mathcal{H}_\delta$.

Пусть оператор $\Phi_2(\varphi_1, \varphi_2)$ определен на множестве $\mathbf{C}^{(n)} \times \mathbf{C}^{(n)}$ формулой

$$\Phi_2(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \cdot \varphi_2(x_1, \dots, x_n).$$

Так как функция $y_1 \cdot y_2$ принадлежит, например, классу $\mathbf{C}_{\varepsilon/3}$, оператор Φ_2 равномерно непрерывен на $\mathbf{C}^{(n)} \times \mathbf{C}^{(n)}$ и принадлежит классу $\mathcal{H}_{\varepsilon/3}$.

Пусть оператор $\Phi_3(\varphi)$ определен на множестве $\mathbf{C}^{(n+1)}$ формулой

$$\Phi_3(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x_1, \dots, x_n, y) dy.$$

Тогда оператор Φ_3 равномерно непрерывен на $\mathbf{C}^{(n+1)}$ и $\Phi_3 \in \mathcal{H}_\iota$, где $\iota(\varepsilon) = \varepsilon$.

Пусть $K(x_1, \dots, x_n, y)$ – фиксированная функция из $\mathbf{C}^{(n+1)}$, а оператор $\Phi_4(\varphi)$ определен на множестве $\mathbf{C}^{(1)}$ формулой

$$\Phi_4(\varphi) = \int_0^1 K(x_1, \dots, x_n, y) \varphi(y) dy.$$

Тогда оператор Φ_4 равномерно непрерывен на $\mathbf{C}^{(1)}$ и $\Phi_4 \in \mathcal{H}_\iota$.

Следующее утверждение вполне аналогично утверждению 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ – оператор из $\mathcal{H}_\gamma$, $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in \mathbf{C}_\delta$ и $\varphi = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$. Тогда $\varphi \in \mathbf{C}_\beta$, где $\beta(\varepsilon) = \delta(\gamma(\varepsilon))$.

Так же, как и для функций, понятие суперпозиции можно ввести и для операторов. В принципиальном плане понятия формулы и оператора, реализуемого формулой, ничем не отличаются от соответствующих понятий для функций. Аналогии можно продолжить и далее при рассмотрении непрерывных и равномерно непрерывных операторов. Так, если оператор $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ принадлежит классу $\mathcal{H}_\delta$, а оператор $\Psi(\varphi_1, \dots, \varphi_s, \varphi_{s+1}, \dots, \varphi_t)$ определяется через оператор Φ согласно тождеству

$$\Psi(\varphi_1, \dots, \varphi_s, \varphi_{s+1}, \dots, \varphi_t) = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$$

(введение фиктивных переменных $\varphi_{s+1}, \dots, \varphi_t$), то оператор Ψ также принадлежит классу $\mathcal{H}_\delta$.

В дальнейшем будут рассматриваться классы $\mathcal{H}_\delta$ с регуляторами непрерывности δ , удовлетворяющими условию $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$. Каждому такому классу $\mathcal{H}_\delta$ принадлежит тождественный оператор $E(\varphi) = \varphi$. Учитывая этот факт и то, что перестановка переменных в операторе из класса $\mathcal{H}_\delta$ приводит к оператору из этого же класса, в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением лишь “регулярных” суперпозиций операторов вида

$$\Phi_0(\Phi_1(\varphi_1, \dots, \varphi_s), \dots, \Phi_r(\varphi_1, \dots, \varphi_s)). \quad (20)$$

Следующее утверждение является еще одним аналогом утверждения 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть $\Phi_0 \in \mathcal{H}_\gamma$, $\Phi_1, \dots, \Phi_r \in \mathcal{H}_\delta$ и оператор $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ определяется формулой (20). Тогда $\Phi \in \mathcal{H}_\beta$, где $\beta(\varepsilon) = \delta(\gamma(\varepsilon))$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$ и оператор Φ реализуется суперпозицией операторов класса $\mathcal{H}_\delta$. Тогда найдется такое натуральное число m , что $\Phi \in \mathcal{H}_\beta$, где $\beta(\varepsilon) = \delta^{(m)}(\varepsilon)$.

Следующая лемма представляет собой аналог утверждения 3.

ЛЕММА 1. Пусть $\gamma(\varepsilon) \leq \varepsilon$, $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$, $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ — оператор из класса $\mathcal{H}_\gamma$, отображающий $\mathbf{C}^{(n_1)} \times \dots \times \mathbf{C}^{(n_s)}$ в $\mathbf{C}^{(n)}$. Тогда существует такой дискретный оператор $\Psi(f_1, \dots, f_s)$, что для любого натурального m и любых функций $\varphi_1 \in \mathbf{C}^{(n_1)}, \dots, \varphi_s \in \mathbf{C}^{(n_s)}$ если

$$l > [2 - \log_2 \gamma(2^{-(m+2)})], \quad k > [-\log_2 \delta(2^{-(l+1)})]$$

и $f_1, \dots, f_s$ суть (k, l) -приближения функций $\varphi_1, \dots, \varphi_s$, то функция $f = \Psi(f_1, \dots, f_s)$ есть (k, m) -приближение функции $\varphi = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор Ψ зададим следующим образом. Пусть $f_1, \dots, f_s$ — произвольные (k, l) -функции. Для любого i , $1 \leq i \leq s$, по функции $f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ определим непрерывную функцию $\varphi'_i(x_1, \dots, x_{n_i})$. Возьмем произвольную точку $(x_1, \dots, x_{n_i})$ из множества I^{n_i} . Если $(x_1, \dots, x_{n_i}) \in J_k^{n_i}$, то полагаем

$$\varphi'_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = f_i(x_1, \dots, x_{n_i}). \quad (21)$$

В противном случае выберем такие точки $(x'_1, \dots, x'_{n_i})$ и $(x''_1, \dots, x''_{n_i})$ из $J_k^{n_i}$, что

$$x'_1 \leq x_1 \leq x''_1, \dots, x'_{n_i} \leq x_{n_i} \leq x''_{n_i}$$

и при любом j , $1 \leq j \leq n_i$, число x'_j является ближайшим слева, а число x''_j — ближайшим справа к числу x_j . Положим

$$\varphi'_i(x_1, \dots, x_{n_i}) = \frac{\rho_2 \cdot f_i(x'_1, \dots, x'_{n_i}) + \rho_1 \cdot f_i(x''_1, \dots, x''_{n_i})}{\rho_1 + \rho_2},$$

где ρ_1, ρ_2 — расстояния от $(x_1, \dots, x_{n_i})$ до $(x'_1, \dots, x'_{n_i})$ и $(x''_1, \dots, x''_{n_i})$ соответственно.

Пусть

$$\varphi'(x_1, \dots, x_n) = \Phi(\varphi'_1, \dots, \varphi'_s).$$

Функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Psi(f_1, \dots, f_s)$$

определим следующим образом: если $(x_1, \dots, x_n) \in J_k^n$, то $f(x_1, \dots, x_n)$ есть ближайшее к $\varphi'(x_1, \dots, x_n)$ число из J_m^n (если таких числа два, то выбираем наименьшее из них).

Пусть $1 \leq i \leq s$, $\varphi_i \in \mathbf{C}_\delta^{(n_i)}$, функция f_i является (k, l) -приближением функции φ_i , а функция φ'_i определяется по функции f_i описанным выше способом. Докажем, что в этом случае

$$\rho(\varphi_i, \varphi'_i) < 2^{-(l-2)}. \quad (22)$$

В самом деле, если $(x_1, \dots, x_{n_i}) \in J_k^{n_i}$, то согласно определению (k, l) -приближения имеем

$$|\varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i}) - f_i(x_1, \dots, x_{n_i})| < 2^{-l}. \quad (23)$$

Вместе с тем в этом случае выполняется равенство (21). Поэтому

$$|\varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i}) - \varphi'_i(x_1, \dots, x_{n_i})| < 2^{-l}.$$

Предположим, что $(x_1, \dots, x_{n_i}) \notin J_k^{n_i}$. Как и выше, определяем тогда для набора $(x_1, \dots, x_{n_i})$ наборы $(x'_1, \dots, x'_{n_i})$ и $(x''_1, \dots, x''_{n_i})$ из $J_k^{n_i}$. Поскольку

$$x''_1 - x'_1 \leq 2^{-k}, \dots, x''_{n_i} - x'_{n_i} \leq 2^{-k},$$

$\varphi_i \in \mathbf{C}_\delta$ и $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$, из определения числа k следует, что

$$|\varphi_i(x'_1, \dots, x'_{n_i}) - \varphi_i(x''_1, \dots, x''_{n_i})| < 2^{-l}.$$

Отсюда и из неравенств (23), рассматриваемых для $(x'_1, \dots, x'_{n_i})$ и $(x''_1, \dots, x''_{n_i})$, вытекает, что

$$|f_i(x'_1, \dots, x'_{n_i}) - f_i(x''_1, \dots, x''_{n_i})| < 3 \cdot 2^{-l}.$$

Следовательно, из определения функции φ'_i получаем, что

$$|\varphi'_i(x_1, \dots, x_{n_i}) - f_i(x'_1, \dots, x'_{n_i})| < 3 \cdot 2^{-l}. \quad (24)$$

Однако функция f_i есть (k, l) -приближение функции φ_i . Поэтому

$$|\varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i}) - f_i(x'_1, \dots, x'_{n_i})| < 2^{-l}. \quad (25)$$

На основании неравенств (24), (25) заключаем, что

$$|\varphi_i(x_1, \dots, x_{n_i}) - \varphi'_i(x_1, \dots, x_{n_i})| < 2^{-(l-2)}.$$

Тем самым, (22) установлено.

Из неравенств (22), справедливых для любого i , $1 \leq i \leq s$, неравенства $\gamma(\varepsilon) \leq \varepsilon$, определения числа l и соотношения $\Phi \in \mathcal{H}_\gamma$ следует, что

$$\rho(\varphi, \varphi') < 2^{-(m+2)}. \quad (26)$$

Пусть $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(z_1, \dots, z_n) \in J_k^n$ и

$$|x_1 - z_1| < 2^{-k}, \dots, |x_n - z_n| < 2^{-k}.$$

Согласно утверждению 5 имеем $\varphi \in \mathbf{C}_\beta$, где $\beta(\varepsilon) = \delta(\gamma(\varepsilon))$. Соединяя это с определением чисел k и l , приходим к неравенству

$$|\varphi(x_1, \dots, x_n) - \varphi(z_1, \dots, z_n)| < 2^{-(m+2)}. \quad (27)$$

Используя (26) и (27), получаем

$$|\varphi(x_1, \dots, x_n) - \varphi'(z_1, \dots, z_n)| < 2^{-(m+1)}. \quad (28)$$

Однако по определению функции f имеем

$$|\varphi'(z_1, \dots, z_n) - f(z_1, \dots, z_n)| < 2^{-(m+1)}. \quad (29)$$

Окончательно (28) и (29) дают

$$|\varphi(x_1, \dots, x_n) - f(z_1, \dots, z_n)| < 2^{-m}.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$, $r > 0$, $\gamma(\varepsilon) = \delta^{(r)}(\varepsilon)$, $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ — оператор из класса $\mathcal{H}_\gamma$, определенный на множестве $(\mathbf{C}_\delta^{(n)})^s$,

$$\mathbf{G} = \{\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s) : \varphi_1, \dots, \varphi_s \in \mathbf{C}_\delta^{(n)}\}, \quad (30)$$

$$k(l) = \lceil 3 - \log_2 \delta(2^{-(l+2)}) \rceil. \quad (31)$$

Тогда

$$\text{cap}(\mathbf{G}, k^{(r+1)}(l), l) \leq h(l)^{s \cdot h(l)^n}, \quad (32)$$

где

$$h(l) = 2^{k^{(r+1)}(l)} + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в лемме 1

$$\gamma(\varepsilon) = \delta^{(r)}(\varepsilon), \quad n_1 = \dots = n_s = n, \quad m = l, \quad l = k^{(r)}(l), \quad k = k^{(r+1)}(l).$$

Дискретный оператор Ψ , построенный в лемме 1, по любым $(k^{(r+1)}(l), k^{(r)}(l))$ -приближениям $f_1, \dots, f_s$ функций $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ из класса $\mathbf{C}_\delta^{(n)}$ дает некоторое $(k^{(r+1)}(l), l)$ -приближение $\Psi(f_1, \dots, f_s)$ функции $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$. Следовательно, $(k^{(r+1)}(l), l)$ -емкость множества $\mathbf{G}$ можно оценить сверху s -й степенью числа всевозможных $(k^{(r+1)}(l), k^{(r)}(l))$ -функций. Учитывая монотонность функции $k(l)$, получаем

$$\begin{aligned} \text{cap}(\mathbf{G}, k^{(r+1)}(l), l) &\leq ((2^{k^{(r)}(l)} + 1)^{(2^{k^{(r+1)}(l)} + 1)^n})^s \\ &\leq (2^{k^{(r+1)}(l)} + 1)^{s \cdot (2^{k^{(r+1)}(l)} + 1)^n} = h(l)^{s \cdot h(l)^n}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Полученное следствие интересно сравнить со следствием из утверждения 4.

Если H — конечное множество, то через $|H|$ будем обозначать число его элементов.

ЛЕММА 2. Пусть для любого положительного действительного α существует такое ε_α , что при $\varepsilon \leq \varepsilon_\alpha$ выполняется неравенство

$$\delta(\varepsilon) \geq \varepsilon^{1+\alpha}. \quad (33)$$

Пусть далее b, d, n, r, s — натуральные числа, функция $k(l)$ определяется согласно (31) и для всякого натурального l задано множество H_l $(n+1)$ -местных $(k^{(r+1)}(l), l)$ -функций, причем

$$|H_l| \leq h(l)^{s \cdot h(l)^n}, \quad (34)$$

где

$$h(l) = 2^{k^{(r+1)}(l)} + 1.$$

Тогда найдется такое значение $l_0, l_0 > b + d$, что для любого $l, l \geq l_0$, существует $(n+1)$ -местная $(l-b, l)$ -функция f , которая принимает лишь значения 0 и 2^{-l} , равна 0 на границе и вне куба

$$[2^{-d}, 2^{-d+1}]^{n+1} \quad (35)$$

и отличается от любой функции множества H_l на множестве

$$[2^{-d}, 2^{-d+1}]^{n+1} \cap J_{l-b}^{n+1}. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (33) и определения функции $k(l)$ следует, что для любого положительного действительного α найдется такое l_α , что при $l \geq l_\alpha$ будет выполняться неравенство

$$k(l) \leq 3 + (1 + \alpha)(l + 2).$$

Отсюда вытекает, что для заданных натуральных чисел n, r можно выбрать такое число $l_{n,r}$, что при $l \geq l_{n,r}$ будет справедливо соотношение

$$h(l) = 2^{k^{(r+1)}(l)} + 1 \leq 2^{(1+1/(2n))l+c},$$

где c — константа, зависящая от r . Пользуясь неравенством (34), при $l \geq l_{n,r}$ будем иметь

$$|H_l| \leq 2^{s((1+1/(2n))l+c)2^{(n+1/2)l+nc}}. \quad (37)$$

С другой стороны, число всех $(l-b, l)$ -функций, принимающих лишь значения 0, 2^{-l} и равных 0 на границе и вне куба (35), равно

$$2^{(2^{l-d-b}-2)^{n+1}} = 2^{2^{-(d+b)(n+1)}(2^l - 2^{d+b+1})^{n+1}}. \quad (38)$$

Сравнивая (37) и (38), видим, что при достаточно больших l величина (38) будет больше правой части неравенства (37). Лемма доказана.

Напомним, что через ι мы обозначили тождественную функцию, $\iota(\varepsilon) = \varepsilon$.

ЛЕММА 3. Пусть $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$ и для любого положительного действительного α существует такое ε_α , что при $\varepsilon \leq \varepsilon_\alpha$ выполняется неравенство (33). Пусть далее d, n, r, s – натуральные числа, $\gamma(\varepsilon) = \delta^{(r)}(\varepsilon)$ и $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ – оператор из класса $\mathcal{H}_\gamma$, определенный на множестве $(\mathbf{C}_\delta^{(n)})^s$ и отображающий его в множество $\mathbf{F}^{(n+1)}$. Тогда существует непрерывная $(n+1)$ -местная функция φ_d из класса $\mathbf{C}_\varepsilon$, которая равна 0 на границе и вне куба (35) и которая отлична от любой функции из множества (30) в точках куба (35).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для всякого натурального l множество H_l состоит из $(n+1)$ -местных $(k^{(r+1)}(l), l)$ -функций, которые в качестве $(k^{(r+1)}(l), l)$ -приближений для функций из множества (30) появляются в следствии из леммы 1. Согласно этому следствию для числа $|H_l|$ справедлива оценка (34). В силу леммы 2 найдутся число l_0 и $(n+1)$ -местная $(l_0 - 2, l_0)$ -функция f , которая принимает лишь значения 0 и 2^{-l_0} , равна 0 на границе и вне куба (35) и отличается от любой функции множества H_{l_0} на множестве (36), где $l = l_0$ и $b = 2$ (далее на множество (36) с параметрами $l = l_0$ и $b = 2$ мы будем ссылаться как на множество (36₀)). Очевидно, что это отличие составляет величину, не меньшую, чем 2^{-l_0} . Поэтому если нам удастся определить $(n+1)$ -местную функцию из класса $\mathbf{C}_\varepsilon$, которая равна 0 на границе и вне куба (35) и которая совпадает с функцией f в точках множества (36₀), то лемма будет доказана.

Пусть $x' = (x'_1, \dots, x'_{n+1})$ – внутренняя точка куба (35), принадлежащая множеству $J_{l_0-2}^{n+1}$, и пусть $f(x') = 2^{-l_0}$. Определим “конус” $C_{x'}(x_1, \dots, x_{n+1})$: если

$$m = \max\{|x_1 - x'_1|, \dots, |x_{n+1} - x'_{n+1}|\} \leq 2^{-l_0},$$

то положим

$$C_{x'}(x_1, \dots, x_{n+1}) = 2^{-l_0} - m,$$

если же $m > 2^{-l_0}$, то пусть $C_{x'}(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$. Функцию $\varphi_d(x_1, \dots, x_{n+1})$ образуем из конусов $C_{x'}$:

$$\varphi_d(x_1, \dots, x_{n+1}) = \max C_{x'}(x_1, \dots, x_{n+1}),$$

где максимум берется по всем точкам x' множества (36₀), в которых функция f принимает значение 2^{-l_0} .

Очевидно, что функция φ_d совпадает с функцией f в точках множества (36₀). Покажем, что φ_d принадлежит классу $\mathbf{C}_\varepsilon$.

Возьмем положительное действительное ε . Выберем в кубе (35) любые точки $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$, $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$, для которых

$$\rho(y, z) < \varepsilon. \quad (39)$$

При $\varepsilon > 2^{-l_0}$ неравенство

$$|\varphi_d(y_1, \dots, y_{n+1}) - \varphi_d(z_1, \dots, z_{n+1})| < \varepsilon \quad (40)$$

выполняется потому, что функция φ_d принимает неотрицательные значения, не превосходящие 2^{-l_0} .

Пусть $\varepsilon \leq 2^{-l_0}$. Если в шарах радиуса 2^{-l_0} с центрами в точках y и z нет точек множества (36₀), в которых функция f принимает значение 2^{-l_0} , то согласно определению $\varphi_d(y) = \varphi_d(z) = 0$. Поэтому неравенство (40) выполняется тривиальным образом.

Пусть, например, в шаре радиуса 2^{-l_0} с центром в точке y имеется точка y' из множества (36₀), в которой функция f равна 2^{-l_0} . Тогда в силу неравенства $\varepsilon \leq 2^{-l_0}$ и по выбору решетки $J_{l_0-2}^{n+1}$ в шаре радиуса 2^{-l_0} с центром в точке z либо нет аналогичной точки z' , либо эта точка z' совпадает с точкой y' . Рассмотрим обе возможности.

В первом случае согласно определению функции φ_d имеем

$$\varphi_d(y) = 2^{-l_0} - m, \quad \varphi_d(z) = 0, \quad (41)$$

где $m = \rho(y, y')$. Поскольку $\rho(y', z) > 2^{-l_0}$, в силу неравенства треугольника получаем

$$m + \rho(y, z) > 2^{-l_0}.$$

Это неравенство вместе с (39) дает $m > 2^{-l_0} - \varepsilon$. Следовательно, соотношения (41) приводят к неравенству (40).

Во втором случае имеем

$$\varphi_d(y) = 2^{-l_0} - m_1, \quad \varphi_d(z) = 2^{-l_0} - m_2,$$

где

$$m_1 = \rho(y, y'), \quad m_2 = \rho(z, y').$$

Пусть, например, $m_1 \geq m_2$. В силу неравенства треугольника получаем

$$\rho(y, y') \leq \rho(z, y') + \rho(y, z).$$

Отсюда и из (39) выводим, что $m_1 - m_2 < \varepsilon$. Поскольку

$$m_1 - m_2 = \varphi_d(z) - \varphi_d(y),$$

лемма тем самым доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$ и для любого положительного действительного α найдется такое ε_α , что при $\varepsilon \leq \varepsilon_\alpha$ выполняется неравенство (33). Пусть далее n – натуральное число, а последовательности натуральных чисел $\{r_1, r_2, \dots\}$ и операторов

$$\{\Phi_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{s_1}), \Phi_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{s_2}), \dots\},$$

определенных на декартовых степенях множеств $\mathbf{C}_\delta^{(n)}$, таковы, что при любом i имеет место включение $\Phi_i \in \mathcal{H}_{\gamma_i}$, где $\gamma_i(\varepsilon) = \delta^{(r_i)}(\varepsilon)$. Тогда в классе $\mathbf{C}_i^{(n+1)}$ существует функция, которая отлична от любой функции, представимой в виде $\Phi_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{s_i})$, где $i \geq 1$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_{s_i} \in \mathbf{C}_\delta^{(n)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого натурального d пусть φ_d — $(n+1)$ -местная функция из класса $\mathbf{C}_l$, которая согласно лемме 3 построена для множества (30), где $\Phi = \Phi_d$ и $s = s_d$. Будем также предполагать, что число l_0 , фигурирующее в доказательстве леммы 3, удовлетворяет неравенству $l_0 > d + 2$ и, кроме того, $l'_0 > l''_0$, если l'_0, l''_0 суть значения параметра l_0 , отвечающие значениям d_1, d_2 , где $d_1 > d_2$. Искомую функцию φ из класса $\mathbf{C}_l^{(n+1)}$ зададим равенством

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{d=1}^{\infty} \varphi_d(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

Из определения функций φ_d следует, что этим равенством функция φ корректно определяется на всем кубе I^{n+1} . Согласно лемме 3 каждая функция φ_d принадлежит классу $\mathbf{C}_l$, принимает значения из отрезка $[0, 2^{-l_0}]$ (значение l_0 выбрано в лемме 3 для данного значения d) и отлична от 0 только внутри куба (35). Поскольку при различных значениях d кубы (35) могут пересекаться разве что по одной точке, а функции φ_d принадлежат классу $\mathbf{C}_l$, для доказательства принадлежности функции φ классу $\mathbf{C}_l$ достаточно рассмотреть лишь случай, когда выбираются внутренние точки y, z кубов (35) с параметрами d_1, d_2 , где $d_1 \neq d_2$, и $\rho(y, z) < \varepsilon$. Можно считать, что $d_1 < d_2$. Пусть l'_0 и l''_0 — значения параметра l_0 из леммы 3, отвечающие значениям d_1 и d_2 . Если $\varepsilon > 2^{-l'_0}$, то

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| < \varepsilon, \quad (42)$$

поскольку

$$0 \leq \varphi(y) = \varphi_{d_1}(y) \leq 2^{-l'_0}, \quad 0 \leq \varphi(z) = \varphi_{d_2}(z) \leq 2^{-l''_0}, \quad 2^{-l''_0} < 2^{-l'_0}.$$

Пусть $\varepsilon \leq 2^{-l'_0}$. Согласно определению функции φ_{d_1} значение функции φ_{d_1} равно 0 в любой точке куба (35), где $d = d_1$, удаленной от границы куба менее, чем на $2^{-l'_0}$. Поскольку $\rho(y, z) < \varepsilon \leq 2^{-l'_0}$ и точка z не принадлежит кубу (35), где $d = d_1$, значение $\varphi_{d_1}(y)$ есть 0. Теперь для доказательства неравенства (42) можно воспользоваться принадлежностью функции φ_{d_2} классу $\mathbf{C}_l$.

Для завершения доказательства теоремы остается обратиться к определению функции φ и заметить, что согласно лемме 3 функция φ_{d_i} отличается от любой функции вида $\Phi_{d_i}(\varphi_1, \dots, \varphi_{s_i})$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_{s_i} \in \mathbf{C}_\delta^{(n)}$, в точках куба $[2^{-i}, 2^{-i+1}]^{n+1}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть n — натуральное число, $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$ и для любого положительного действительного α найдется такое ε_α , что при $\varepsilon \leq \varepsilon_\alpha$ выполняется неравенство (33). Тогда в классе $\mathbf{C}_l^{(n+1)}$ существует функция, которая отлична от любой функции, представимой суперпозицией функций из класса $\mathbf{C}_\delta^{(n)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было отмечено в начале этого пункта, оператор Φ_1 , определенный на множестве (20) формулой (7), принадлежит классу $\mathcal{H}_\delta$. Оператор Φ_1 отвечает простейшей суперпозиции функций. Для более сложных суперпозиций функций следует воспользоваться суперпозицией операторов типа оператора Φ_1 . Принадлежность получающихся при этом операторов классам вида $\mathcal{H}_\beta$, где $\beta(\varepsilon) = \delta^{(m)}(\varepsilon)$, установлена в следствии из утверждения 6.

Список литературы

1. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108. № 2. С. 179–182.
2. Арнольд В. И. О функциях трех переменных // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. № 4. С. 679–681.
3. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114. № 5. С. 953–956.
4. Витушкин А. Г. К тринадцатой проблеме Гильберта // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 4. С. 701–704.
5. Витушкин А. Г. О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955.
6. Колмогоров А. Н. Оценки минимального числа элементов ε -сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных // УМН. 1967. Т. 22. № 1. С. 192–195.
7. Витушкин А. Г., Хенкин Г. М. Линейные суперпозиции функций // УМН. 1967. Т. 22. № 1. С. 77–124.
8. Vitushkin A. G. On representation of functions by means of superpositions and related topics // Enseign. Math. (2). 1977. V. 23. № 3–4. P. 255–320.
9. Гашиков С. Б. О сложности приближенной реализации функциональных компактов в некоторых пространствах и о существовании функций с заданной по порядку сложностью // Фундамент. и прикл. матем. 1996. Т. 2. № 3. С. 675–774.
10. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
11. Марченков С. С. Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций // Проблемы кибернетики. № 37. М.: Наука, 1980. С. 5–17.
12. Марченков С. С. О суперпозициях непрерывных функций, заданных на бэровском пространстве // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 5. С. 696–705.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
 E-mail: marchen@applmat.msk.su

Поступила в редакцию
 24.08.2000