Общероссийский математический портал

И. Х. Сабитов, О решениях уравнения $\Delta u = f(x, y)e^{cu}$ в некоторых специальных случаях, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 6, 89–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:32:33

УДК 517.946

И. Х. Сабитов

О решениях уравнения $\Delta u = f(x, y)e^{cu}$ в некоторых специальных случаях

Рассматривается уравнение $\Delta u = f(x, y)e^{cu}$, в котором коэффициент $f(x, y)$ является модулем или квадратом модуля некоторой голоморфной функции, и в этом случае дается полное описание общего вида решений уравнения. Дается также исследование ряда задач, которые обычно ставят для эллиптических уравнений.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Мы рассмотрим уравнение $\Delta u = f(x, y)e^{cu}$ в случаях, когда коэффициент $f(x, y)$ является модулем или квадратом модуля некоторой голоморфной функции от переменной $z = x + iy$. Оказывается, в этом случае существует простой геометрический метод, позволяющий дать *полное* описание решений этого уравнения, причем оно может быть задано как в односвязной, так и в многосвязной области на плоскости. Кроме того, мы укажем еще способ сведения этого уравнения к уравнению Лиувилля с постоянным коэффициентом, что тоже позволяет получить общий вид решения уравнения в некоторой другой форме. Эти описания общего решения могут быть использованы для изучения ряда задач, которые обычно ставятся для эллиптических уравнений (теорема Лиувилля, задача Дирихле, изолированные особенности и т. д.).

2. Представление общего решения. Сначала рассмотрим случай задания уравнения в односвязной области D .

ТЕОРЕМА 1. Пусть в односвязной области D задано уравнение

$$\Delta u = f(x, y)e^{-2u}, \quad (1)$$

в котором коэффициент $f(x, y) = |F(z)|^2$, где $F(z) \neq 0$ – голоморфная в D функция. Тогда общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(x, y) = \ln(|\varphi(z)|^2 + |\psi(z)|^2), \quad (2)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – голоморфные в D функции, определяемые формулами

$$\varphi^2(z) = C\Phi(z) \exp\left(\frac{c}{2} \int_{z_0}^z \frac{F}{\Phi} dz\right), \quad \psi^2(z) = \frac{\Phi}{C} \exp\left(-\frac{c}{2} \int_{z_0}^z \frac{F}{\Phi} dz\right), \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Университеты России – фундаментальные исследования” (грант № 992213).

где c , $|c| = 1$, и $C \neq 0$ – постоянные числа, z_0 – произвольно выбранная точка области D , а $\Phi(z)$ – любая голоморфная в D функция, удовлетворяющая условию, что в любой точке $z = a$, в которой $\Phi(a) = 0$, должно быть

$$\Phi'(a) = \pm \frac{cF(a)}{2} \quad (4)$$

(это условие, в частности, означает, что Φ может иметь только простые нули).

Обратно, если голоморфная в D функция $\Phi(z)$ удовлетворяет в нулях условию (4) и функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определены равенствами (3), то функция (2) является решением уравнения (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, y) \in C^2$ – некоторое решение уравнения (1). Введем в области D метрику $ds^2 = \Lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$, $\Lambda = e^u$. Для кривизны K этой метрики имеем уравнение

$$-Ke^{2u} = \Delta u = \frac{|F(z)|^2}{e^{4u}} e^{2u}.$$

Следовательно,

$$K = -\frac{|F(z)|^2}{\Lambda^4}. \quad (5)$$

Наряду с этим рассмотрим квадратичную форму

$$\Pi = L(x, y) dx^2 + 2M(x, y) dx dy + N(x, y) dy^2,$$

коэффициенты которой определены равенствами $L + N = 0$ и $M + iL = c_0 F(z)$, где c_0 – произвольная постоянная с условием $|c_0| = 1$. Для M и L выполнены уравнения Коши–Римана

$$M_x - L_y = 0, \quad M_y + L_x = 0. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) составляют для метрики ds^2 и формы Π систему уравнений Гаусса и Петерсона–Кодаши, поэтому в $\mathbb{R}^3$ существует поверхность S , для которой ds^2 является первой, а Π – второй квадратичными формами. Средняя кривизна этой поверхности равна нулю, следовательно, она является минимальной поверхностью. Известно [1], [2; с. 143], что координаты (X, Y, Z) точек любой односвязной минимальной поверхности допускают представление

$$X_x - iX_y = \varphi^2 - \psi^2, \quad Y_x - iY_y = i(\varphi^2 + \psi^2), \quad Z_x - iZ_y = 2\varphi\psi, \quad (7)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – голоморфные функции в D , определяемые самой поверхностью (в дальнейшем эти функции φ и ψ будем называть *определяющими*). Сразу же заметим, что наряду с парой (φ, ψ) пара $(-\varphi, -\psi)$ тоже является определяющей.

Легко показать, что для этой поверхности метрика имеет вид

$$ds^2 = (|\varphi|^2 + |\psi|^2)^2(dx^2 + dy^2), \quad (8)$$

функция $M + iL = c_0 F(z) = 2i(\psi\varphi' - \varphi\psi')$, $|c_0| = 1$, а кривизна равна

$$K = -4 \frac{|\varphi\psi' - \psi\varphi'|^2}{(|\varphi|^2 + |\psi|^2)^4}. \quad (9)$$

Следовательно, $u = \ln \Lambda = \ln(|\varphi|^2 + |\psi|^2)$, где функции φ и ψ должны удовлетворять уравнению

$$\varphi'(z)\psi(z) - \psi'(z)\varphi(z) = \frac{c}{2}F(z), \quad (10)$$

в котором c — произвольное комплексное число с модулем $|c| = 1$. Условие ограниченности u приводит к требованию отсутствия у φ и ψ общего нуля. Кроме того, так как $F(z) \neq 0$, нули у этих функций могут быть только простые. Решим с учетом этих требований уравнение (10). Положим $\varphi\psi = \Phi$, $\varphi/\psi = \Psi$ и разделим (10) на Φ . Получим уравнение

$$\frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\psi'}{\psi} = \frac{cF}{2\Phi},$$

решив которое, находим

$$\Psi = C \exp\left(\frac{c}{2} \int_{z_0}^z \frac{F}{\Phi} dz\right),$$

откуда для φ и ψ легко находим утверждаемый в теореме вид (3).

Теперь исследуем, когда у функций φ и ψ их возможные нули будут не общие и простые. Для этого, очевидно, прежде всего необходимо, чтобы свободно выбираемая функция $\Phi(z)$ имела простые нули. Далее, если точка $z = a$ — нуль функции Φ , то в окрестности этой точки интеграл в (3) имеет представление вида

$$\frac{cF(a)}{2\Phi'(a)} \ln(z - a) + \text{голоморфная функция},$$

поэтому $\varphi^2(z)$ может быть однозначной и ограниченной в окрестности точки $z = a$ в том и только том случае, когда $\frac{cF(a)}{2\Phi'(a)} = \pm 1$, что и утверждалось в формуле (4). При этом если равенство верно со знаком “+”, то $z = a$ — простой корень функции φ , если же знак “−”, то в этой точке нуль функции ψ . Теорема доказана.

ПРИМЕР. Одно из наиболее простых решений получается при выборе $\Phi(z) = \frac{c}{2} z F(z)$. Тогда имеем решение $u = \frac{\ln f(x, y)}{2} + \ln\left(\left|\frac{Cz^2}{2}\right| + \left|\frac{1}{2C}\right|\right)$ с любой постоянной $C \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказанная теорема позволяет найти также общее решение уравнения более общего вида

$$\Delta u = f(x, y)e^{ku}, \quad k = \text{Const} < 0 \quad (11)$$

(с прежним условием на $f(x, y)$), так как оно заменой неизвестной функции по формуле $u = -\frac{2}{k} v$ сводится к уравнению вида (1) для v с коэффициентом $-\frac{kf}{2}$ в правой части.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Эта же теорема позволяет полностью описать решения уравнения (1) в случае, когда его коэффициент $f(x, y) > 0$ является в D модулем некоторой голоморфной функции $F_0(z) \neq 0$. Действительно, выберем в D некоторую однозначную ветвь $F(z)$ функции $\sqrt{F_0(z)}$ и, получив представление $f = |F(z)|^2$, можем применить предыдущую теорему. Заметим, что на вид решения выбор однозначной ветви функции $\sqrt{F_0(z)}$ не влияет, так как две ее ветви отличаются только знаком, и при смене выбора ветви соответственно в формуле (3) функции φ^2 и ψ^2 только поменяются местами, что на вид функции u из (2) не повлияет.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При соответствующем инвариантном толковании оператора Лапласа и коэффициента $f(x, y)$ уравнение (1) может быть изучено также и на римановых поверхностях.

3. О единственности представления решения в виде (2). Рассмотрим теперь вопрос о единственности выбора функций φ и ψ в представлении (2) *данного* решения $u(x, y)$ уравнения (1). Для этого сначала исследуем, как изменяются функции φ и ψ , определяющие минимальную поверхность по формулам (7), при движениях этой поверхности в пространстве. Пусть минимальная поверхность S с координатами ее точек X, Y, Z после движения перешла в некоторое положение S_1 с координатами точек X_1, X_2, X_3 , и пусть в формуле вида (7) поверхности S_1 соответствуют функции φ_1 и ψ_1 . Пусть вращательной части движения S (вместе с возможным зеркальным отражением) соответствует ортогональная матрица

$$O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (12)$$

(вектор параллельного переноса на выбор функций φ и ψ не влияет). Тогда

$$X_k = a_{k1}X + a_{k2}Y + a_{k3}Z, \quad k = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Связь между координатами минимальной поверхности и функциями φ и ψ в (7) следующая:

$$\varphi^2 = \frac{X_u - iX_v}{2} - i\frac{Y_u - iY_v}{2}, \quad \psi^2 = -\frac{X_u - iX_v}{2} - i\frac{Y_u - iY_v}{2}, \quad (14)$$

поэтому из этих формул и из (13) для функций φ_1 и ψ_1 получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 &= \frac{a_{11}(X_u - iX_v) + a_{12}(Y_u - iY_v) + a_{13}(Z_u - iZ_v)}{2} \\ &\quad - i\frac{a_{21}(X_u - iX_v) + a_{22}(Y_u - iY_v) + a_{23}(Z_u - iZ_v)}{2} \\ &= \frac{a_{11}(\varphi^2 - \psi^2) + ia_{12}(\varphi^2 + \psi^2) + 2a_{13}\varphi\psi}{2} \\ &\quad - \frac{a_{21}(\varphi^2 - \psi^2) + ia_{22}(\varphi^2 + \psi^2) + 2a_{23}\varphi\psi}{2} \\ &= \frac{a_{11} + a_{22} + i(a_{12} - a_{21})}{2}\varphi^2 + \frac{a_{22} - a_{11} + i(a_{12} + a_{21})}{2}\psi^2 + (a_{13} - ia_{23})\varphi\psi. \end{aligned}$$

Учитывая известные соотношения между элементами ортогональной матрицы, последнюю формулу можно представить в более компактном виде:

$$\varphi_1^2 = \left(\sqrt{\frac{(a_{11} + a_{22}) + i(a_{12} - a_{21})}{2}} \varphi + \sqrt{\frac{(-a_{11} + a_{22}) + i(a_{12} + a_{21})}{2}} \psi \right)^2$$

или

$$\varphi_1 = \sqrt{A_{11}} \varphi + \sqrt{A_{12}} \psi, \quad (15)$$

где

$$A_{11} = \frac{(a_{11} + a_{22}) + i(a_{12} - a_{21})}{2}, \quad A_{12} = \frac{(-a_{11} + a_{22}) + i(a_{12} + a_{21})}{2}. \quad (16)$$

Аналогичные вычисления дают

$$\psi_1 = -\sqrt{A_{12}} \varphi + \sqrt{A_{11}} \psi. \quad (17)$$

Как правильно выбрать в (15) и (17) ветви корней? Это нужно сделать, исходя из того, что φ_1^2 , ψ_1^2 и $\varphi_1\psi_1$ должны определять по формулам (7) для поверхности S_1 те же значения координат ее точек, которые получаются по (13) из X, Y, Z после применения к S движения с матрицей (12). Для указания такого выбора ветвей корней в (15) и (17) нам понадобится следующая

ЛЕММА 1. *Для ортогональной матрицы O из (12) верны равенства*

$$\begin{aligned} a_{13} &= \varepsilon(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \equiv \varepsilon\Delta_1, \\ a_{23} &= \varepsilon(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) \equiv -\varepsilon\Delta_2, \\ a_{33} &= \varepsilon(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \equiv \varepsilon\Delta_3, \end{aligned} \quad (18)$$

в которых $\varepsilon = \det O = \pm 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что квадрат любого элемента ортогональной матрицы (более общо – унитарной матрицы) равен квадрату соответствующего ему дополнительного минора, является фактом, вообще говоря, известным из университетского курса линейной алгебры (см., например, задачу 7.3.24 из [3]), поэтому имеем

$$a_{13} = \varepsilon_1\Delta_1, \quad a_{23} = \varepsilon_2\Delta_2, \quad a_{33} = \varepsilon_3\Delta_3, \quad \varepsilon_k = \pm 1, \quad k = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Отсюда разложением определителя ортогональной матрицы (10) по элементам 3-го столбца получаем

$$\det O = \pm 1 = a_{13}\Delta_1 - a_{23}\Delta_2 + a_{33}\Delta_3 = \varepsilon_1\Delta_1^2 - \varepsilon_2\Delta_2^2 + \varepsilon_3\Delta_3^2.$$

С другой стороны,

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 1.$$

Если $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 \neq 0$, то из этих равенств получаем, что все ε_1 , $-\varepsilon_2$ и ε_3 должны иметь один и тот же знак, равный знаку определителя ортогональной матрицы; обозначив этот общий знак через ε , получаем (18). Если же один из миноров

равен нулю, скажем $\Delta_1 = 0$, а Δ_2 и Δ_3 не равны 0, то тогда $-\varepsilon_2$ и ε_3 снова должны иметь один и тот же знак, равный знаку определителя ортогональной матрицы, а так как $a_{13} = 0$, то первое равенство в (19) справедливо при любом выборе ε_1 , в частности, можем выбрать $\varepsilon_1 = \varepsilon = -\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ и тем самым получить (18). При равенстве нулю двух миноров, скажем при $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, доказательство аналогично. Лемма доказана.

Теперь с использованием леммы 1 и ее обозначений легко показать, что выбор ветвей корней в коэффициентах перехода от φ, ψ к функциям φ_1, ψ_1 по формулам (15) и (17) должен быть следующий:

$$\sqrt{A_{11}} = \varepsilon \sqrt{A_{11}}, \quad \sqrt{A_{12}} = \varepsilon \sqrt{A_{12}},$$

а связь между $\sqrt{A_{11}}$ и $\sqrt{A_{12}}$ (когда оба этих корня отличны от нуля) дается условием $\sqrt{A_{11}} = -\varepsilon \frac{a_{31} + ia_{32}}{1 - \varepsilon a_{33}} \sqrt{A_{12}}$. Обозначая $\alpha = \sqrt{A_{11}}, \beta = \sqrt{A_{12}}$, для элементов матрицы (10) имеем равенства

$$\begin{aligned} a_{11} - ia_{21} &= \alpha^2 - \beta^2, & a_{22} + ia_{12} &= \alpha^2 + \beta^2, \\ a_{13} - ia_{23} &= 2\alpha\beta, & a_{31} + ia_{32} &= -2\varepsilon\alpha\bar{\beta}, & a_{33} &= \varepsilon(|\alpha|^2 - |\beta|^2), \end{aligned} \quad (20)$$

в которых

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (21)$$

Метрики поверхностей S и S_1 совпадают, что выражается в равенстве

$$|\varphi_1|^2 + |\psi_1|^2 = (|A_{11}| + |A_{12}|)(|\varphi|^2 + |\psi|^2) = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)(|\varphi|^2 + |\psi|^2) = |\varphi|^2 + |\psi|^2.$$

Проведенное исследование подытожим в виде следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если S и S_1 — две конгруэнтные минимальные поверхности, отличающиеся на движение с матрицей (12), то соответствующие им по формуле (7) функции φ, ψ и φ_1, ψ_1 связаны унитарным преобразованием

$$\varphi_1 = \alpha\varphi + \beta\psi, \quad \psi_1 = -\varepsilon\bar{\beta}\varphi + \varepsilon\bar{\alpha}\psi, \quad (22)$$

в котором комплексные коэффициенты α и β со свойством (21) определяются элементами матрицы (12) через равенства (20), и определитель матрицы перехода равен $\varepsilon = \det O$.

Пусть теперь известно, что минимальная поверхность S_1 изометрична данной минимальной поверхности S . Тогда известно (см., например, [4; § 118], [1], [5]), что поверхность S_1 движением в пространстве может быть приведена в такое положение S_2 , когда в соответствующих по изометрии точках нормалей к S и S_2 параллельны и координаты X_2, Y_2, Z_2 точек поверхности S_2 имеют представление вида (7), в котором вместо φ и ψ будут следующие определяющие функции:

$$\varphi_2 = \varphi e^{i\theta/2}, \quad \psi_2 = \psi e^{i\theta/2}, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Заметим, что единичная нормаль к обеим поверхностям S и S_2 имеет вид

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\varphi|^2 + |\psi|^2} \{ \varphi \bar{\psi} + \bar{\varphi} \psi, i(\varphi \bar{\psi} - \bar{\varphi} \psi), |\psi|^2 - |\varphi|^2 \}.$$

Для коэффициентов второй формы поверхности S_2 имеем

$$M_2 + iL_2 = 2i(\psi\varphi' - \varphi\psi')e^{i\theta} = (M + iL)e^{i\theta},$$

т.е. неопределенная постоянная c_0 , входящая в определение функции $M + iL = c_0 F(z)$, как раз соответствует выбору какой-либо конкретной минимальной поверхности из семейства изометричных минимальных поверхностей с метрикой $ds^2 = e^{2u}(dx^2 + dy^2)$.

Учитывая, что S_1 получается из S_2 движением и соответственно используя утверждение 1, получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если минимальная поверхность S_1 изометрична минимальной поверхности S , то соответствующие им по формуле (7) определяющие функции выражаются друг через друга линейными соотношениями вида*

$$\varphi_1 = \alpha e^{i\theta/2} \varphi + \beta e^{i\theta/2} \psi, \quad \psi_1 = -\varepsilon \bar{\beta} e^{i\theta/2} \varphi + \varepsilon \bar{\alpha} e^{i\theta/2} \psi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (23)$$

в которых постоянные (относительно переменных (x, y)) комплексные коэффициенты α и β удовлетворяют (21). При конгруэнтности поверхностей S и S_1 в (23) надо положить $\alpha = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В дальнейшем нам понадобится описание изометричных минимальных поверхностей, поэтому приведем формулы, дающие определяющие функции при изгибании данной минимальной поверхности в ее зеркальный образ (относительно плоскости $z = 0$):

$$\varphi_t = e^{i(t+\theta)/2} \varphi, \quad \psi_t = e^{i(-t+\theta)/2} \psi$$

(надо подобрать закон непрерывного изменения параметра $t = t(\theta)$ таким образом, чтобы было $t(0) = 0$, $t(\pi) = \pi$, тогда при изменении t и θ от 0 до π получаем изгибание исходной минимальной поверхности (X, Y, Z) на ее зеркальный образ $X, Y, -Z$; например достаточно взять $t = \theta$). Таким образом, зеркальному образу S_1 минимальной поверхности S соответствуют функции $\varphi_1 = -\varphi$ и $\psi_1 = \psi$.

Возвращаясь теперь к теме, обозначенной в заголовке этого пункта, как итог предыдущего исследования можем сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Если дано некоторое решение $u(x, y)$ уравнения (1), то функции φ и ψ для его представления в виде (2) определяются неоднозначно, но любые две пары таких функций связаны друг с другом линейными равенствами вида (23).*

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Выбор значения параметра θ в (23) однозначно связан с выбором коэффициента c , $|c| = 1$, в (10).

4. Случай обращения в нуль коэффициента $f(x, y)$. Пусть теперь $f(x, y)$ является квадратом модуля голоморфной функции $F(z)$ с возможным обращением ее в нуль. Тогда представление решений уравнения (1) в виде (2) останется, конечно, справедливым, только теперь относительно “свободной” функции $\Phi(z)$ нужно предположить, что она имеет корень кратности $n > 1$ в той и только той точке $z = a$, в которой $F(z)$ имеет нуль кратности $n - 1$, причем должно выполняться равенство $\frac{cF^{(n-1)}(a)}{2\Phi^{(n)}(a)} = \pm 1$. Что касается простых нулей функции Φ , то они, как и раньше, могут быть только в точках, в которых $F(z)$ не обращается в нуль, с одновременным выполнением равенства (4). Все эти требования нужны для обеспечения отсутствия у функций φ и ψ общих нулей.

Рассуждением, аналогичным проведенному в замечании 2, можно рассмотреть и случай, когда f является модулем голоморфной функции, имеющей в некоторых точках нули четного порядка. Но случай, когда $f = |F(z)|$ и $F(z)$ имеет нуль нечетного порядка, требует более сложных рассуждений, которые мы сейчас и проведем.

Пусть $f = |F(z)|$ и $F(z) = (z - z_0)^{2n+1}f_0(z)$, $f_0(z)$ – голоморфная функция и $f_0(z_0) \neq 0$. Введем функцию

$$F^*(z) = (z - z_0)^n \sqrt{(z - z_0)f_0(z)} \equiv (z - z_0)^n \sqrt{z - z_0} F_0(z),$$

где для корня берется некоторая его ветвь. Рассмотрим окрестность точки $z = z_0$. В ней функция $M + iL = cF^*(z)$ двузначна, причем после обхода вокруг точки z_0 эта функция приходит к своему начальному значению с противоположным знаком. Выделим около точки $z = z_0$ некоторую малую область D , не охватывающую эту особую точку, и пусть решению уравнения в этой области соответствует минимальная поверхность S . После обхода вокруг точки z_0 этой же области будет соответствовать поверхность S_1 , конгруэнтная S , но получаемая из S движением с применением зеркального отображения, так как вторые формы этих поверхностей имеют противоположные знаки (геометрически это очевидно, а вот формальное доказательство: с учетом формулы (22) имеем $-\frac{c}{2}F^*(z) = \varphi'_1\psi_1 - \psi'_1\varphi = \varepsilon(\varphi'\psi - \psi'\varphi) = \varepsilon\frac{c}{2}F^*(z) \Rightarrow \varepsilon = \det O = -1$). Ясно, что движением (собственным) можно привести S в такое положение S_0 , чтобы поверхности S_0 и S_1 были зеркально симметричны относительно плоскости $z = 0$, поэтому можно считать, что соответствующие этим поверхностям определяющие функции связаны равенствами $\varphi_0 = -\varphi_1$, $\psi_0 = \psi_1$. Это значит, что функция $\Phi = \varphi_0\psi_0$ должна быть двузначной. Положим $\Phi F^*(z) = \Phi_0(z)$, где Φ_0 – однозначная функция. Применяя формулу (3), получаем

$$\begin{aligned}\varphi_0^2(z) &= \frac{C\Phi_0(z)}{(z - z_0)^n \sqrt{z - z_0} F_0(z)} \exp\left(\frac{c}{2} \int_{z_0}^z \frac{(z - z_0)^{2n+1} F_0^2}{\Phi_0} dz\right), \\ \psi_0^2(z) &= \frac{\Phi_0(z)}{C(z - z_0)^n \sqrt{z - z_0} F_0(z)} \exp\left(-\frac{c}{2} \int_{z_0}^z \frac{(z - z_0)^{2n+1} F_0^2}{\Phi_0} dz\right).\end{aligned}$$

Так как $\varphi_0(z_0) = 0$, $\psi_0(z_0) \neq 0$ и функция Φ_0 однозначна, то $\Phi_0(z)$ должна иметь

вид $\Phi_0(z) = \frac{cF_0^2(z_0)}{2n+3}(z-z_0)^{2n+2}(1+\dots)$, что нам дает

$$\varphi_0^2(z) = cC \frac{F_0(z_0)}{2n+3}(z-z_0)^{2n+3}(1+\dots), \quad \psi_0^2(z) = \frac{cF_0(z_0)}{(2n+3)C}(1+\dots).$$

Таким образом, и в рассматриваемом случае можно выписать общее решение уравнения, однако оно уже *не будет аналитическим*, а будет гладкости $C^{2n+2,1}$.

ПРИМЕР. Для уравнения $\Delta u = r^{2n+1}e^{-2u}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $n \geq 0$, предыдущие рассуждения дают, например, простейшее его решение $u = \ln\left(\frac{C}{2n+3}r^{2n+3} + \frac{1}{C(2n+3)}\right)$, $C > 0$, аналитическое при $2n+1$ четном, гладкости $C^{2n+2,1}$ при $2n+1$ нечетном и класса $C^{[2n+3],\alpha}$, $\alpha = 2n+3 - [2n+3]$, при нецелых $2n+1$.

5. Устранимые особые точки. Представление решения уравнения (1) в виде (2) позволяет также доказать следующее утверждение об устранимости изолированной особенности решения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в окрестности точки $z = z_0$ функция $f(x, y) = |F(z)|^2$, где $F(z) \neq 0$ — однозначная голоморфная функция аргумента $z = x + iy$, и пусть $u(x, y)$ — однозначное решение уравнения (1) в проколотой окрестности точки $z = z_0$, ограниченное при $z \rightarrow z_0$. Тогда функцию u можно доопределить в точке z_0 так, что она будет регулярным решением (1) в окрестности этой точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим проколотую окрестность точки z_0 через $\dot{D}$ и будем считать для простоты записи, что $z_0 = 0$, а $\dot{D}$ является кругом с проколотым центром в начале координат. Пусть теперь S — минимальная поверхность, построенная над областью параметров $\dot{D}$, как и в доказательстве теоремы 1, по метрике $ds^2 = e^{2u}(dx^2 + dy^2)$ и по коэффициентам второй формы с $M + iL = cF(z)$, $|c| = 1$. Если голоморфные функции φ и ψ , построенные по поверхности S , оказались в $\dot{D}$ однозначными, то в силу ограниченности $u(x, y)$ они тоже будут ограниченными, и особая точка $z = 0$ будет для них устранимой, причем пределы обеих этих функций в $z = 0$ не могут равняться нулю, иначе u , как это видно из (2), окажется при $z \rightarrow 0$ неограниченной. Тем самым u допускает вместе с φ и ψ регулярное (аналитическое) продолжение в особую точку. Пусть одна или обе функции φ и ψ оказались в $\dot{D}$ неоднозначными. Тогда будем считать, что поверхность S построена по полному продолжению этих функций в $\dot{D}$. Рассмотрим некоторую малую окрестность точки, скажем $z = \varepsilon > 0$, не охватывающую начало координат; обозначим ее D_ε . Пусть S_0 — часть поверхности S , соответствующая этой окрестности, а S_0^+ — часть S , соответствующая этой же области после однократного обхода вокруг точки $z = 0$. Эти части поверхности S изометричны (так как u по условию однозначна в $\dot{D}$) и имеют одинаковую вторую форму (так как $F(z)$ по условию является однозначной), поэтому в силу единственности восстановления поверхности по ее двум формам поверхности S_0 и S_0^+ конгруэнтны. Пусть φ_0, ψ_0 — функции в D_ε ,

определяющие поверхность S_0 , и пусть после обхода вокруг особой точки φ_0 и ψ_0 переходят соответственно в функции φ_0^+ и ψ_0^+ , определяющие поверхность S_0^+ . Так как S_0 и S_0^+ конгруэнтны, то φ_0, ψ_0 и φ_0^+, ψ_0^+ связаны унитарным преобразованием вида (22):

$$\varphi_0^+ = \alpha\varphi_0 + \beta\psi_0, \quad \psi_0^+ = -\varepsilon\bar{\beta}\varphi_0 + \varepsilon\bar{\alpha}\psi_0. \quad (24)$$

Так как $cF(z) = \varphi_0^{+'}\psi_0^+ - \psi_0^{+'}\varphi_0^+ = \varepsilon(\varphi_0'\psi_0 - \psi_0'\varphi_0) = \varepsilon cF(z)$, то $\varepsilon = 1$. Непрерывным движением в пространстве приведем поверхность S_0 в такое новое положение S_1 , в котором определяющие для S_1 функции φ_1, ψ_1 после обхода вокруг особой точки переходят в им пропорциональные, т.е.

$$\varphi_1^+ = \lambda\varphi_1, \quad \psi_1^+ = \varepsilon_1\bar{\lambda}\psi_1 \quad (25)$$

(здесь мы используем описанный в [6; гл. V] прием). Функции φ_1, ψ_1 связаны с φ_0, ψ_0 некоторым унитарным преобразованием

$$\varphi_1 = A\varphi_0 + B\psi_0, \quad \psi_1 = -\bar{B}\varphi_0 + \bar{A}\psi_0, \quad |A|^2 + |B|^2 = 1.$$

После обхода вокруг $z = 0$ имеем

$$\varphi_1^+ = A\varphi_0^+ + B\psi_0^+, \quad \psi_1^+ = -\bar{B}\varphi_0^+ + \bar{A}\psi_0^+.$$

Подставляем сюда (19) и получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1^+ &= (A\alpha - B\varepsilon\bar{\beta})\varphi_0 + (A\beta + B\varepsilon\bar{\alpha})\psi_0 = \lambda\varphi_1 = \lambda(A\varphi_0 + B\psi_0), \\ \psi_1^+ &= (-\bar{B}\alpha - \bar{A}\varepsilon\bar{\beta})\varphi_0 + (-\bar{B}\beta + \bar{A}\varepsilon\bar{\alpha})\psi_0 = \varepsilon_1\bar{\lambda}\psi_1 = \varepsilon_1\bar{\lambda}(-\bar{B}\varphi_0 + \bar{A}\psi_0). \end{aligned}$$

Так как переход от S_0 к S_1 не содержит зеркального отражения, то ε и ε_1 должны быть одного знака, т.е. должно быть $\varepsilon_1 = \varepsilon = 1$. С учетом этого обе однородные системы

$$\begin{cases} (\alpha - \lambda)A - \bar{\beta}B = 0, \\ \beta A + (\bar{\alpha} - \lambda)B = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (\bar{\lambda} - \alpha)\bar{B} - \varepsilon\bar{\beta}\bar{A} = 0, \\ \beta\bar{B} + (\bar{\lambda} - \bar{\alpha})\bar{A} = 0 \end{cases}$$

дают для определения λ одинаковое уравнение $\lambda^2 - (\alpha + \bar{\alpha})\lambda + 1 = 0$, оба корня которого $\lambda_{1,2} = \text{Re } \alpha \pm i\sqrt{1 - (\text{Re } \alpha)^2}$ удовлетворяют нужному условию $|\lambda| = 1$. Пусть в (20) положено $\lambda = e^{i\theta}$ (и $\varepsilon = 1$). Введем функции $\Phi_1 = z^{-\rho}\varphi_1$ и $\Psi_1 = z^\rho\psi_1$, где $\rho = \frac{1}{2\pi} \arg \lambda$. Эти функции однозначны в окрестности нуля, и поэтому они допускают в окрестности точки $z = 0$ обычное разложение Лорана, что дает для функций φ_1 и ψ_1 следующие представления:

$$\varphi_1 = z^\rho \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad \psi_1 = z^{-\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n.$$

Если $\rho \neq 0$, то легко видеть, что $0 < |\rho| < 1$, поэтому ни при одном выборе коэффициентов в найденных рядах мы не сможем добиться, чтобы функция $u = \ln(|\varphi_1|^2 + |\psi_1|^2)$ была в окрестности нуля ограниченной (или оба слагаемых под знаком логарифма будут стремиться к нулю, или одно из слагаемых будет неограниченным). Следовательно, $\arg \lambda = 0$, а это означает, что функции φ_1 и ψ_1 однозначны и ограничены, поэтому их особенность устранима вместе с особенностью для решения $u(x, y)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Убрать условие ограниченности для возможности устранения особенности нельзя. Действительно, рассмотрим функции $\varphi = z^\alpha$ и $\psi = z^\beta$, где $\alpha + \beta = 1$, $\alpha > \beta > 0$. Они по уравнению (9) порождают функцию $F(z) = 2(\alpha - \beta) = \text{Const} \neq 0$ и для $f = |F(z)|^2$ уравнение (1) в окрестности начала координат имеет решение $u = \ln(r^{2\alpha} + r^{2\beta})$, неограниченное при $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 0$. Вместе с тем из доказательства видно, что если условие ограниченности решения заменить более широким условием возможности его роста, но порядка, меньшего, чем $\ln r$, $r \rightarrow 0$, например допустить рост порядка $\ln \ln r$, то эта особенность будет также устранена.

6. Случай многосвязной области. Рассмотрим теперь случай задания уравнения (1) в многосвязной области D на плоскости (x, y) . Снова предположим, что коэффициент $f(x, y)$ является квадратом модуля некоторой голоморфной в D функции $F(z)$. Точно такими же рассуждениями, как и при доказательстве теоремы 1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Любое решение уравнения (1) в многосвязной области может быть представлено в виде (2), в котором функции φ и ψ имеют вид (3) с теми же ограничениями, что и в теореме 1, но с дополнительным условием, что функция

$$|\varphi|^2 + |\psi|^2 = |C| |\Phi(z)| \exp\left(\operatorname{Re} \frac{c}{2} \int_{z_0}^z \frac{F}{\Phi} dz\right) + \frac{|\Phi(z)|}{|C|} \exp\left(-\operatorname{Re} \frac{c}{2} \int_{z_0}^z \frac{F}{\Phi} dz\right)$$

является однозначной функцией в D .

Мы могли бы использовать эту теорему для изучения решений в случае, когда функция $F(z)$ имеет изолированную особенность, но это лучше сделать на основе другого представления решений, которое будет дано в п. 8.

7. Аналог теоремы Лиувилля. Если уравнение (1) задано на всей плоскости, то из представления (3) немедленно получаем, что оно *не имеет решений, ограниченных на всей плоскости*. С другой стороны, если нам известен порядок роста функции $|F(z)| = f(x, y)$ на бесконечности и дано априорное требование логарифмического порядка роста решения, то можно установить, каков будет порядок роста функций φ и ψ . Именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. Если функция $F(z)$ имеет на бесконечности порядок роста $|z|^n$, а рост функций φ и ψ тоже степенной, то эти функции будут степени не выше, чем $n + 1$, причем максимальный рост будет порядка не ниже, чем $[n/2] + 1$. Следовательно, в этом случае решения уравнения имеют рост порядка вида $O(\ln r)$, $r \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как аналитические на всей плоскости функции $F(z)$, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют степенной рост, то они являются многочленами. Пусть $\varphi = a_N z^N + \dots$, $\psi = b_K z^K + \dots$, $a_N \neq 0$, $b_K \neq 0$, $N \geq K$, $N > n + 1$. Допустим сначала, что $N > K$. Из равенства (9) имеем, что $N + K - 1 = n$, или $N =$

$n - K + 1 > n + 1$, что невозможно. Значит, остается возможность $N = K$. В этом случае, записывая φ и ψ в виде

$$\varphi = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_0, \quad \psi = b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \dots + b_0, \\ a_N \neq 0, \quad b_N \neq 0,$$

для выражения $\varphi' \psi - \psi' \varphi$ получаем следующее представление:

$$\varphi' \psi - \psi' \varphi = \sum_{m=N-1}^{2N-2} c_m z^m + \sum_{m=0}^{N-2} d_m z^m, \quad (26)$$

где $c_m = \sum_{j=m-N+1}^N (2j-m-1) a_j b_{m-j+1}$. Так как в силу (9) разность $\varphi' \psi - \psi' \varphi$ должна иметь порядок z^n , то в (26) все коэффициенты $c_j = 0$. При $m = 2N - 2$ имеем $a_N b_{N-1} - a_{N-1} b_N = 0$, откуда $a_{N-1} = \frac{a_N}{b_N} b_{N-1}$. Покажем, что все $a_j = \frac{a_N}{b_N} b_j$, $j \leq N - 1$. Пусть это верно для $j \geq k - N + 2$, и пусть $j = k - N + 1$. Для коэффициента c_k имеем:

$$c_k = (k - 2N + 1) a_{k-N+1} b_N + (2N - k - 1) a_N b_{k-N+1} \\ + \sum_{j=k-N+2}^{N-1} (2j - k - 1) a_j b_{k-j+1} = 0.$$

Если учесть, что по индукционному предположению $a_j = \frac{a_N}{b_N} b_j$, $j \geq k - N + 2$, то нетрудно видеть, что сумма в выражении для c_k равна нулю (для этого достаточно сложить попарно слагаемые, разность номеров которых постоянна и равна $2N - k - 1$, а при нечетном $k = 2s + 1$ остающееся без пары слагаемое с номером $j = s + 2$ само равно нулю). Следовательно, $a_{k-N+1} = \frac{a_N}{b_N} b_{k-N+1}$, что и утверждалось.

Теперь получаем, что $\varphi = \frac{a_N}{b_N} \psi$, т.е. $\varphi' \psi - \psi' \varphi \equiv 0$, что невозможно.

Что касается утверждения о нижнем порядке роста, то оно проверяется непосредственным подсчетом по уравнению (10) допустимого порядка роста: если $\varphi \sim a z^{N-s}$, $\psi \sim b z^{N-t}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $N = [n/2] + 1$, то $\varphi' \psi - \psi' \varphi = O(z^{2N-(s+t+1)})$ и должно быть $2[n/2] + 1 - (s+t) \geq n$, что возможно, только если $s = 0$, $t = 0$ при n нечетном или же если либо $s = 0$, либо $t = 0$, т.е. в любом случае невозможно, чтобы оба порядка убывания $N - s$ и $N - t$ были меньше $N = [n/2] + 1$. Теорема доказана.

8. Сведение к уравнению Лиувилля с постоянным коэффициентом.

Оказывается, существует другой, совсем простой способ нахождения общего вида решения уравнения (1) и даже более общего уравнения (11) с любым k . Пусть дано уравнение

$$\Delta u = \varepsilon f(x, y) e^{-2u}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad f(x, y) > 0. \quad (27)$$

Прологарифмируем обе части уравнения (27):

$$\ln(\varepsilon \Delta u) = -2u + \ln f.$$

Положим $\varepsilon \Delta u = e^{2v} > 0$ и вычислим оператор Лапласа от обеих частей полученного выражения. Будем иметь:

$$\Delta v = -\varepsilon e^{2v} + \frac{1}{2} \Delta \ln f. \quad (28)$$

Если уравнение (28) решено, то решение уравнения находится очевидным образом: $u = -v + \frac{1}{2} \ln f$. Тем самым, решение уравнения (27) с любой знакопостоянной функцией $f(x, y)$ сводится к решению уравнения (28). Если, как в нашем случае, f является модулем аналитической функции, то (28) сводится к уравнению Лиувилля

$$\Delta v = -\varepsilon e^{2v}, \quad (29)$$

описывающему, соответственно значению $\varepsilon = \pm 1$, все метрики постоянной (единичной) положительной или отрицательной кривизны. Если известно одно решение v_0 такого уравнения, то общий вид его решения дается формулой [7]:

$$v = v_0(\Phi(z)) + \ln |\Phi'(z)|, \quad (30)$$

где $\Phi(z)$ – голоморфная функция с отличной от нуля производной (правда, как можно понять из контекста, в [7] утверждается, что это представление общего вида решения справедливо для любого уравнения $\Delta v = Ke^{2v}$, но на самом деле оно справедливо только в случае постоянного K , что у нас в (29) как раз имеет место). Одно частное решение уравнения (29) хорошо известно:

$$v_0 = \ln \frac{2}{1 + \varepsilon z \bar{z}}, \quad z = x + iy.$$

Отсюда для уравнения (27) при $f = |F(z)|^2$ имеем следующее представление общего решения:

$$u = \ln \frac{|F(z)|(1 + \varepsilon \Phi(z) \overline{\Phi(z)})}{2|\Phi'(z)|}. \quad (31)$$

Представление (31) было получено в предположении $f = |F(z)|^2 > 0$. На самом деле оно верно и при равенстве $F(z)$ нулю в некоторых точках при соответствующем выборе функции $\Phi(z)$. Действительно, непосредственная проверка дает, что функция $u(x, y)$ из (31) во всех точках своего существования является решением уравнения (27), а в точках, где $F(z) = 0$, ее можно доопределить по непрерывности, предварительно выбрав $\Phi(z)$ так, чтобы в этих точках $\Phi'(z)$ имела нули той же кратности, что и $F(z)$.

Из этого же представления можно получить новое доказательство аналога теоремы Лиувилля из предыдущего пункта, причем легко видеть, что если $\varepsilon = -1$, то решения на всей плоскости не существует ни при какой функции $F(z)$.

Теперь нетрудно видеть, что любое решение уравнения общего вида

$$\Delta u = \varepsilon f(x, y)e^{ku}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad k = \text{Const} \neq 0,$$

с $f = |F(z)|^2$ представимо в виде

$$u = -\frac{2}{k} \ln \frac{|kF(z)|(1 + \varepsilon \text{sign } k \Phi(z) \overline{\Phi(z)})}{4|\Phi'(z)|},$$

где $\Phi(z)$ – произвольная голоморфная функция.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Вид решения (30) подсказывает, что наряду с (1) можно рассматривать и уравнение

$$\Delta u = \varepsilon f(x, y) e^{-2u}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Его решение представимо в виде

$$u(x, y) = \ln(|\varphi(z)|^2 + \varepsilon|\psi(z)|^2),$$

где голоморфные функции φ и ψ определены по тем же формулам (3).

9. Определение голоморфной функции по ее сферической производной. Используем два полученных представления общего решения уравнения (1) для нахождения голоморфной функции $\Phi(z)$ по ее сферической производной $h(z)$, т. е. для решения уравнения

$$\frac{|\Phi'(z)|}{1 + \Phi(z)\overline{\Phi(z)}} = h(z). \quad (32)$$

Наш подход к этой задаче отличается от метода работы [7], в которой тоже дано ее решение. Функция $u = -\ln(2h(z))$, где $h(z) \neq 0$ – сферическая производная функции $\Phi(z)$, согласно (31) является решением уравнения $\Delta u = e^{-2u}$. Следовательно, по теореме 1 оно представляется в виде $u = \ln(|\varphi_0(z)|^2 + |\psi_0(z)|^2)$, где функции φ_0 и ψ_0 определяются по формулам (7), в которых X, Y, Z получаются как координаты радиуса-вектора минимальной поверхности, заданной ее известными первой и второй квадратичными формами (первая форма $I = \frac{1}{4h^2}(dx^2 + dy^2)$, вторая форма $II = L dx^2 + 2M dx dy - L dy^2$ с $M + iL = c$, где $c = c_0 = e^{i\alpha}$ – некоторое конкретное число). С другой стороны, по формуле (31) имеем $u = \ln\left(\frac{1}{2|\Phi'(z)|} + \frac{\Phi(z)\overline{\Phi(z)}}{2|\Phi'(z)|}\right)$, поэтому если положить

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\Phi'_0}} e^{i\alpha}, \quad \psi_0 = i \frac{\Phi_0}{\sqrt{2\Phi'_0}}, \quad (33)$$

то получим функции, удовлетворяющие уравнению (10):

$$\varphi'_0 \psi_0 - \psi'_0 \varphi_0 = -\frac{i}{2} e^{i\alpha} = \frac{c_0}{2i}.$$

Тогда из (33) имеем искомое решение

$$\Phi_0 = i \frac{\psi_0}{\varphi_0} e^{i\alpha}. \quad (34)$$

Далее, мы знаем, что в представлении (2) функции φ и ψ определяются не единственным образом. По теореме 2 связь между парами этих функций дается равенствами (23). Учитывая эту связь, получаем общий вид искомых функций Φ :

$$\Phi(z) = e^{i\lambda} \frac{a + b\Phi_0}{\bar{b} - \bar{a}\Phi_0}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (35)$$

Тем самым, мы получили следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы уравнение (32) имело голоморфное решение $\Phi(z)$, необходимо и достаточно, чтобы заданная функция $h(x, y)$ была решением уравнения $\Delta \ln h = -4h^2$, и в случае выполнения необходимого условия все решения даются формулой (35), в которой функция $\Phi_0(z)$ определяется по равенству (34).*

Из этой формулы, в частности, вытекает, что если аналитическая функция $\Phi(z)$ ищется по граничным значениям ее сферической производной и если эта граничная задача имеет некоторое решение, то она на самом деле имеет четырехпараметрическое множество решений.

Заметим, что такой вид решений указан и в [7].

10. Задача Дирихле. К сожалению, мы не можем привести какой-либо общей теоремы о решениях задачи Дирихле для уравнения (1), а ограничимся лишь примерами, подтверждающими сложность ожидаемой теории.

Так как задача Дирихле

$$\Delta u = f(x, y)e^{-2u}, \quad (x, y) \in D, \quad u|_{\partial D} = h$$

по формуле (29) сводится к задаче Дирихле для уравнения Лиувилля с постоянным коэффициентом:

$$\Delta v = -e^{2v}, \quad (x, y) \in D, \quad v|_{\partial D} = \ln |F| - h, \quad (36)$$

то достаточно привести соответствующие примеры для задачи (36).

Покажем, что бывают задачи Дирихле, имеющие по крайней мере два решения. Пусть область D является кругом $|z| \leq R$ радиуса $R \neq 1$. Стандартное решение

$$u_1 = \ln \frac{2}{1 + z\bar{z}} \quad (37)$$

уравнения

$$\Delta u = -e^{2u} \quad (38)$$

имеет на границе круга постоянное значение

$$u_1(t) = \ln \frac{2}{1 + R^2} = \text{Const} \neq 0, \quad \text{где } t = Re^{i\varphi}. \quad (39)$$

Это решение определяет метрику единичной сферы в области S , соответствующей кругу D при стереографической проекции сферы с северного полюса на плоскость ее экватора. Зададим теперь в том же круге D метрику сферы в области, соответствующей дополнению S до всей сферы, для чего метрику

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + w\bar{w})^2} (dx^2 + dy^2)$$

с области $|w| > R$ перенесем в D отображением $w = \Phi(z) = \frac{R^2}{z}$. Соответствующая функция $u_2 = \ln \Lambda$ будет иметь вид $u_2(z) = \ln \frac{2R^2}{R^4 + z\bar{z}}$, и она тоже будет

являться решением уравнения (38) (это проверяется непосредственными вычислениями или применением формулы (30): $u_2(z) = u_1(\Phi(z)) + \ln |\Phi'(z)|$). При $R \neq 1$ решения u_1 и u_2 различны, но их граничные значения на окружности $|z| = R$ одинаковы.

Этот пример может быть обобщен следующим образом. Пусть внешняя задача Дирихле

$$\Delta u(z) = -e^{2u}, \quad z \in \{D^- : |w| > R\}, \quad u|_{|z|=R} = h \quad (40)$$

имеет решение с условием, что $\Phi(z) = az + b + \frac{c}{z} + \dots$, $z \rightarrow \infty$, $a \neq 0$, где $\Phi(z)$ — аналитическая в D^- функция, участвующая в представлении решения уравнения (40) по формуле (30); тогда внутренняя задача Дирихле тоже разрешима. Действительно, на границе круга D^- функция Φ удовлетворяет условию

$$u(t) = \ln \frac{2|\Phi'(t)|}{1 + |\Phi(t)|^2} = h(t), \quad |t| = R.$$

Построим теперь в круге D^+ : $|z| < R$ функцию $\Psi^+(z) = \overline{\Phi(R^2/\bar{z})}$. Легко проверить, что в точке $z = 0$ функция $u^+(z) = \ln \frac{2|\Psi^{+'}(z)|}{1 + |\Psi^+(z)|^2}$ не имеет особенностей и, кроме того, на границе круга $u^+(t) = u(t)$, т.е. имеем решение внутренней задачи Дирихле с той же граничной функцией $h(t)$.

Вообще говоря, исходя из функции $\Phi(z)$, в круге D^+ помимо Ψ^+ можно построить еще одну функцию $H^+(z) = \Phi(R^2/z)$, которая даст еще одно решение $u_1^+(z) = \ln \frac{2|H^{+'}(z)|}{1 + |H^+(z)|^2}$ той же внутренней задачи Дирихле, но при дополнительном условии, что для краевой функции имеем свойство $h(t) = h(\bar{t})$. Мы не знаем, однако, примеров задачи с соответствующей функцией $h(t)$, для которой решения $u^+(z)$ и $u_1^+(z)$ были бы различны (если функция $\Phi(z)$ имеет разложение в ряд с действительными коэффициентами, то эти решения совпадают, как, например, в рассмотренном после формулы (36) примере).

Аналогичные рассуждения можно провести и для кругов с центрами $z_0 \neq 0$ при краевой функции $h(t) = \frac{2}{1 + t\bar{t}}$.

Список литературы

1. *Сабитов И. Х.* Минимальная поверхность // Матем. энциклопедия. Т. 3. М.: Советская энциклопедия, 1982. С. 684–690.
2. *Nitsche J. C. C.* Vorlesungen über Minimalflächen. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
3. *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.
4. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия. М.–Л.: ОНТИ НКТП, 1935.
5. *Сабитов И. Х.* Минимальная поверхность как диаграмма вращения сферы // Матем. заметки. 1967. Т. 2. №6. С. 645–656.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. III. Ч. 2. М.: ГИТТЛ, 1956.
7. *Векуа И. Н.* Замечания о свойствах решений уравнения $\Delta u = -Ke^{2u}$ // Сиб. матем. журн. 1960. Т. 1. №3. С. 331–342.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
22.05.2000