Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Шарипов, Ньютоновский нормальный сдвиг в многомерной римановой геометрии, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 6, 105–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 10:36:56

УДК 514.7

Р. А. Шарипов

Ньютоновский нормальный сдвиг в многомерной римановой геометрии

Найдено явное описание всех ньютоновских динамических систем, допускающих нормальный сдвиг в римановых многообразиях размерности $n \geq 3$. На основе этого результата исследуется кинематика нормального сдвига гиперповерхностей вдоль траекторий таких динамических систем.

Библиография: 58 названий.

§ 1. Введение

В серии работ [1]–[14], написанных в 1993–1996 гг., была построена теория, которая выделяет и описывает специальный класс *ньютоновских динамических систем, допускающих нормальный сдвиг* гиперповерхностей в римановых и финслеровых многообразиях. По результатам этих работ была подготовлена докторская диссертация [15] и кандидатская диссертация [16]. Однако часть результатов, изложенных в диссертации [15], осталась не опубликованной. Кроме того, в процессе подготовки диссертации [15] в работе [14] была обнаружена ошибка. Ее устранение позволило получить новый результат, состоящий в явном и исчерпывающем описании всех ньютоновских динамических систем, допускающих нормальный сдвиг в римановых многообразиях размерности $n \geq 3$.¹ Цель настоящей работы состоит в том, чтобы изложить полученный результат и на его основе дать описание *кинематики нормального сдвига гиперповерхностей*, более явное, чем это было возможно ранее. На основе этого же результата получается новое (более простое) доказательство основной теоремы из [15; гл. 6, § 7], а также дается ответ на вопрос, заданный А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко при обсуждении результатов диссертации [15] на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений в МГУ.

Классическая конструкция нормального сдвига гиперповерхностей в римановом многообразии M хорошо известна. В своем первоначальном виде она относится к случаю $M = \mathbb{R}^3$ со стандартной плоской евклидовой метрикой. Пусть S – двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$. Из каждой точки p на S отложим отрезок длины t в направлении вектора нормали $\mathbf{n} = \mathbf{n}(p)$. Обозначим второй конец такого отрезка

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00068) и Академии наук республики Башкортостан.

¹Этот результат не имеет прямого и тривиального обобщения на случай динамических систем в финслеровых многообразиях, рассмотренный в главе 8 диссертации [15]. Но не исключено, что он все же может иметь какой-то аналог в финслеровой геометрии. Вопрос пока не изучен.

через p_t . Точки p_t заметут некоторую поверхность S_t , как это показано на рис. 1. Отображение $f_t: S \rightarrow S_t$, переводящее S в S_t , и есть *классический нормальный сдвиг*, известный также как *преобразование Бонне*.

Рис. 1

При переходе от $M = \mathbb{R}^3$ к произвольному римановому многообразию M поверхности заменяются гиперповерхностями, а прямолинейные отрезки, соединяющие точки p и p_t , заменяются отрезками геодезических линий. В такой форме классическая конструкция нормального сдвига гиперповерхностей известна как *геодезический нормальный сдвиг*. Конструкция геодезического сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$ содержит числовой параметр t , т.е. она определяет целое семейство гиперповерхностей S_t . При изменении параметра t точки p_t движутся по геодезическим линиям (называемым здесь *траекториями сдвига*). В локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ на M траектории геодезического сдвига задаются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\ddot{x}^k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Здесь $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x^1, \dots, x^n)$ — компоненты метрической связности Γ для римановой метрики $\mathbf{g}$ многообразия M . Свойство нормальности геодезического сдвига выражается следующим хорошо известным фактом.

ТЕОРЕМА 1.1. *Все гиперповерхности S_t в конструкции геодезического нормального сдвига ортогональны траекториям сдвига.*

Иными словами, траектории сдвига, задаваемые уравнениями (1.1), пересекают каждую гиперповерхность S_t трансверсально и в точках пересечения проходят вдоль векторов нормали к ней.

Идея обобщения конструкции геодезического нормального сдвига, реализованная в работах [1]–[14], очень проста. Она состоит в замене (1.1) несколько более сложными обыкновенными дифференциальными уравнениями по t :

$$\ddot{x}^k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = F^k(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n). \quad (1.2)$$

При $M = \mathbb{R}^3$ и $\Gamma_{ij}^k = 0$ уравнения (1.2) выражают второй закон Ньютона и описывают движение материальной точки с единичной массой в поле сил, определяемом правыми частями этих уравнений. Оказывается, в случае произвольного риманового многообразия эти уравнения также имеют физическую интерпретацию.

Они описывают динамику сложных механических систем с голономными связями. Многообразие M возникает как конфигурационное пространство таких систем, его размерность определяется реальным числом степеней свободы системы (после учета связей). При этом M каноническим образом оснащается структурой риманового многообразия – метрика на нем задается квадратичной формой кинетической энергии:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

(подробности см. в главе 2 диссертации [15]). В силу аналогии со вторым законом Ньютона для материальных точек уравнения (1.2) называются уравнениями *ньютоновской динамической системы* на римановом многообразии. А вектор $\mathbf{F}$, компоненты которого определяются правыми частями уравнений (1.2), называется *вектором силы*. Он задает *силовое поле* ньютоновской динамической системы (1.2).

Отметим, что выбор тех или иных локальных координат при задании ньютоновской динамической системы несущественен. При замене одних координат другими вид уравнений (1.2) не меняется, хотя входящие в них компоненты связности и компоненты вектора силы преобразуются по стандартным формулам, которые хорошо известны из курса дифференциальной геометрии (см., например, [17]–[20]). Это свойство выражает *координатную ковариантность* дифференциальных уравнений (1.2).

§ 2. Ньютоновский нормальный сдвиг гиперповерхностей

Сформулировав идею обобщения классической конструкции геодезического нормального сдвига, вкратце опишем то, как она была реализована в работах [1]–[14]. Пусть S – некоторая гиперповерхность в M . В локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ на M каждая точка p гиперповерхности S характеризуется своими координатами $x^1(p), \dots, x^n(p)$ и вектором нормали $\mathbf{n}(p)$ в этой точке. Используем ньютоновскую динамическую систему (1.2) для задания сдвига гиперповерхности S . С этой целью с каждой точкой $p \in S$ свяжем следующие начальные данные для системы дифференциальных уравнений (1.2):

$$x^k|_{t=0} = x^k(p), \quad \dot{x}^k|_{t=0} = \nu(p) \cdot n^k(p). \quad (2.1)$$

Здесь $n^k(p)$ – k -я компонента вектора нормали $\mathbf{n}(p)$, а $\nu(p)$ – некоторая скалярная величина, зависящая от точки $p \in S$. Решение задачи Коши с начальными данными (2.1) для уравнений (1.2) – это набор функций

$$\begin{cases} x^1 = x^1(t, p), \\ \dots\dots\dots \\ x^n = x^n(t, p), \end{cases} \quad (2.2)$$

который в параметрической форме задает траекторию $r = r(t, p)$ ньютоновской динамической системы с силовым полем $\mathbf{F}$. Такая траектория при $t = 0$ пересекает

гиперповерхность S в точке p и проходит в направлении вектора нормали $\mathbf{n}(p)$. Параметр $\nu(p)$ определяет величину начальной скорости на этой траектории:

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \nu(p) \cdot \mathbf{n}(p). \quad (2.3)$$

Выбор тех или иных локальных координат для построения траектории несущественен. Смена локальных координат меняет функции (2.2), но не меняет самой кривой $r = r(t, p)$. Это является следствием координатной ковариантности уравнений (1.2) и начальных данных (2.1).

Рис. 2

Выпустив из каждой точки $p \in S$ траекторию $r = r(t, p)$, определяемую заданием начальной скорости (2.3), и выбрав точку $p_t = r(t, p)$, соответствующую некоторому фиксированному значению параметра t , мы получим гиперповерхность S_t и отображение сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$ (см. рис. 2). Однако здесь имеются два нюанса. Параметр t на траектории $r = r(t, p)$ динамической системы (1.2) никак не связан с ее длиной. Интервал изменений этого параметра всегда включает точку $t = 0$, но он может быть ограничен:

$$t_1(p) < t < t_2(p),$$

а границы этого интервала, вообще говоря, зависят от точки $p \in S$. По этой причине для фиксированного t отображение сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$ может быть определено не во всех точках гиперповерхности S .

Второй нюанс связан с возможностью появления особых точек (каустик) на гиперповерхности S_t при достаточно больших по модулю значениях t . Это накладывает еще одно ограничение на возможный диапазон изменения параметра t . Следует отметить, что такое ограничение на t есть и в классической конструкции геодезического нормального сдвига.

Перечисленные обстоятельства ограничивают возможность выбора больших по модулю значений t . Однако если интересоваться лишь близкими к нулю значениями t , что мы и будем делать в дальнейшем, можно воспользоваться следующей леммой.

ЛЕММА 2.1. Если параметр $\nu(p)$ в (2.3) является гладкой и не обращающейся в нуль функцией на S , то для любой точки $p \in S$ найдутся некоторая ее окрестность $S' = O_S(p)$ на S и некоторое число ε такие, что отображения сдвига $f_t: S' \rightarrow S'_t$ определены при всех $-\varepsilon < t < +\varepsilon$ и составляют гладкое однопараметрическое семейство диффеоморфизмов.

Эта лемма является немедленным следствием теорем о существовании, единственности и гладкой зависимости от начальных данных для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [21] и [22]). С учетом леммы 2.1 мы можем говорить об отображениях $f_t: S \rightarrow S_t$, возможно определенных лишь локально, как о конструкции сдвига гиперповерхности S вдоль траекторий ньютоновской динамической системы с силовым полем $\mathbf{F}$. Функция $\nu(p)$ на S есть дополнительный параметр в такой конструкции.

По построению сдвиг S вдоль траекторий динамической системы (1.2) обладает свойством нормальности при $t = 0$. То есть траектории сдвига пересекают начальную гиперповерхности S по нормали к ней. Однако сохраняется ли это свойство при $t \neq 0$? То есть выполнена ли здесь теорема, аналогичная теореме 1.1? Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный (соответствующие примеры рассмотрены в [16]). Но имеются случаи, когда свойство нормальности выполнено в полном объеме. Мы выделим их, сформулировав следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Сдвиг $f_t: S \rightarrow S_t$ гиперповерхности S вдоль траекторий ньютоновской динамической системы с силовым полем $\mathbf{F}$ называется *нормальным сдвигом*, если все гиперповерхности S_t (при всех допустимых значениях параметра t) ортогональны траекториям сдвига.

§ 3. Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг

От чего зависит выполнение условия нормальности сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$, сформулированного в определении 1.1? От выбранной гиперповерхности S , от силового поля $\mathbf{F}$ рассматриваемой ньютоновской динамической системы, и еще есть произвол в выборе функции $\nu(p)$ на S . В случае тождественно нулевого силового поля $\mathbf{F} = 0$ (что соответствует геодезическому потоку на многообразии M), выбор $\nu(p) = 1$ приводит к выполнению условия нормальности сдвига из определения 2.1 на любой гиперповерхности $S \subset M$. Нет ли других силовых полей, для которых имеет место нечто подобное? Стремление выяснить это и стало толчком для написания препринта [1]. Здесь возникло понятие ньютоновской динамической системы, допускающей нормальный сдвиг, ставшее центральным в последующих исследованиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Ньютоновская динамическая система на римановом многообразии M называется *допускающей нормальный сдвиг*, если для любой гиперповерхности S в M и любой точки $p_0 \in S$ найдется окрестность $S' = O_S(p_0)$ точки p_0 на S и найдется гладкая функция $\nu(p)$ в S' такая, что определяемый этой функцией сдвиг $f_t: S' \rightarrow S'_t$ вдоль траекторий рассматриваемой динамической системы является нормальным сдвигом в смысле определения 2.1.

Условие, сформулированное в определении 3.1, было названо *условием нормальности* для динамической системы с силовым полем $\mathbf{F}$. Первоначально в [1]

был рассмотрен случай $M = \mathbb{R}^2$. Были выведены дифференциальные уравнения в частных производных на компоненты силового поля $\mathbf{F}$, выполнение которых обеспечивало выполнение условия нормальности из определения 3.1. Эти уравнения получили название *уравнений нормальности* (а точнее *уравнений слабой нормальности*). Здесь же в препринте [1] были построены первые нетривиальные примеры динамических систем, допускающих нормальный сдвиг. При переходе от случая $M = \mathbb{R}^2$ к многомерному случаю $M = \mathbb{R}^n$ в [1] обнаружилось, что к уравнениям слабой нормальности присоединяются *дополнительные уравнения нормальности*. Перечисленные результаты в краткой форме были анонсированы в [4] и были опубликованы в полном варианте в [2] и [3]. Затем они были обобщены на случай произвольного риманового многообразия. Это было сделано в работах [6] и [7]. Основным результатом работы [6] стал вывод уравнений слабой нормальности для этой более общей геометрической ситуации. Приведем эти уравнения пока без комментариев:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \left(v^{-1} F_i + \sum_{j=1}^n \tilde{\nabla}_i (N^j F_j) \right) P_k^i = 0, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\nabla_i F_j + \nabla_j F_i - 2v^{-2} F_i F_j) N^j P_k^i \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{F^j \tilde{\nabla}_j F_i}{v} - \sum_{r=1}^n \frac{N^r N^j \tilde{\nabla}_j F_r}{v} F_i \right) P_k^i = 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Дополнительные уравнения нормальности для силового поля $\mathbf{F}$ ньютоновских динамических систем были выведены в работе [7]. Они имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_\varepsilon^i P_\sigma^j \left(\sum_{m=1}^n N^m \frac{F_i \tilde{\nabla}_m F_j}{v} - \nabla_i F_j \right) \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_\varepsilon^i P_\sigma^j \left(\sum_{m=1}^n N^m \frac{F_j \tilde{\nabla}_m F_i}{v} - \nabla_j F_i \right), \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_\sigma^j \tilde{\nabla}_j F^i P_i^\varepsilon = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \frac{P_m^j \tilde{\nabla}_j F^i P_i^m}{n-1} P_\sigma^\varepsilon. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Результаты работ [6] и [7] были анонсированы в [10]. При выводе уравнений (3.2) обнаружилось, что определение 3.2 целесообразно слегка модифицировать. Было добавлено условие нормировки на функцию $\nu(p)$:

$$\nu(p_0) = \nu_0. \quad (3.3)$$

В результате возникло условие сильной нормальности, формулируемое так.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Ньютоновская динамическая система с силовым полем $\mathbf{F}$ на римановом многообразии M называется системой, допускающей нормальный сдвиг (*в сильном смысле*), если для любой гиперповерхности S в M , для любой точки $p_0 \in S$ и для любого вещественного числа $\nu_0 \neq 0$ найдется окрестность

$S' = O_S(p_0)$ точки p_0 на S и найдется гладкая не обращающаяся в нуль в S' функция $\nu(p)$, нормированная условием (3.3) и такая, что определяемый этой функцией сдвиг $f_t: S' \rightarrow S'_t$ вдоль траекторий рассматриваемой динамической системы является нормальным сдвигом в смысле определения 2.1.

Условие сильной нормальности из определения 3.2 влечет выполнение условия нормальности из определения 3.1. Его взаимосвязь с уравнениями нормальности (3.1) и (3.2) дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.1. *Ньютоновская динамическая система на римановом многообразии M допускает нормальный сдвиг в сильном смысле тогда и только тогда, когда ее силовое поле $\mathbf{F}$ удовлетворяет уравнениям нормальности (3.1) и (3.2) одновременно.*

Теорема 3.1 была доказана в работе [11]. Подробное изложение этого доказательства можно найти в диссертации [15]. Мы не будем его здесь приводить, поскольку это вызвало бы необходимость воспроизвести многие детали вывода уравнений (3.1) и (3.2), что стало бы дублированием работ [6] и [7]. Вместо этого прокомментируем сами уравнения нормальности (3.1) и (3.2).

§ 4. Расширенная алгебра тензорных полей

Подобно уравнениям (1.2), уравнения (3.1) и (3.2) обладают свойством *координатной ковариантности*. Их запись предполагает выбор некоторых локальных координат $x^1, \dots, x^n$ в M . При переходе от одних локальных координат к другим все входящие в них величины меняются по вполне определенным правилам, однако вид самих уравнений (3.1) и (3.2) остается неизменным. Вектор силы $\mathbf{F}$, компоненты которого входят в уравнения (3.1) и (3.2), зависит от $x^1, \dots, x^n$ и от компонент вектора скорости $\mathbf{v}$, который является касательным вектором в точке p с координатами $x^1, \dots, x^n$. Иными словами, вектор $\mathbf{F}$ зависит от точки $q = (p, \mathbf{v})$ касательного расслоения TM .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Вектор-функция $\mathbf{F}$, которая каждой точке $q = (p, \mathbf{v})$ касательного расслоения TM ставит в соответствие некоторый вектор из касательного пространства $T_p(M)$ в точке $p = \pi(q)$, называется *расширенным векторным полем* на M .

Здесь $\pi: TM \rightarrow M$ — отображение канонического проектирования TM на базовое многообразие M . Рассмотрим тензорное произведение

$$T_s^r(p, M) = \overbrace{T_p(M) \otimes \dots \otimes T_p(M)}^{r \text{ раз}} \otimes \underbrace{T_p^*(M) \otimes \dots \otimes T_p^*(M)}_{s \text{ раз}}.$$

Пространство $T_s^r(p, M)$ называется пространством тензоров типа (r, s) в точке p на многообразии M . Элементы этого пространства называются *r раз контравариантными и s раз ковариантными тензорами*, или же просто тензорами типа (r, s) в точке $p \in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Тензорнозначная функция $\mathbf{X}$, которая каждой точке q касательного расслоения TM ставит в соответствие некоторый тензор из пространства $T_s^r(p, M)$ в точке $p = \pi(q)$, называется *расширенным тензорным полем* типа (r, s) на многообразии M .

В локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ расширенные тензорные поля представляются функциями удвоенного набора аргументов:

$$X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n). \quad (4.1)$$

В уравнения нормальности (3.1) и (3.2) входят компоненты нескольких расширенных тензорных полей. Сам вектор скорости $\mathbf{v}$ может рассматриваться как расширенное векторное поле на M . Его модуль $v = |\mathbf{v}|$ есть расширенное скалярное поле. Расширенное векторное поле $\mathbf{N}$ с компонентами $N^1, \dots, N^n$, которые входят в уравнения (3.1) и (3.2), определяется как отношение

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (4.2)$$

Это поле единичных векторов, направленных вдоль вектора скорости. И наконец, в уравнения (3.1) и (3.2) входят компоненты операторного поля $\mathbf{P}$. Это поле ортогональных проекторов на гиперплоскость, перпендикулярную вектору скорости. Компоненты P_j^i этого поля определяются формулой

$$P_j^i = \delta_j^i - N^i N_j. \quad (4.3)$$

Пусть $T_s^r(M)$ – множество гладких расширенных тензорных полей типа (r, s) . Оно является модулем над кольцом гладких расширенных скалярных полей, а следующая сумма является градуированной алгеброй над этим кольцом по отношению к операции тензорного умножения:

$$\mathbf{T}(M) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigoplus_{s=0}^{\infty} T_s^r(M). \quad (4.4)$$

Алгебра (4.4) называется *расширенной алгеброй тензорных полей* на многообразии M . В расширенной алгебре тензорных полей действуют две операции ковариантного дифференцирования ∇ и $\tilde{\nabla}$:

$$\nabla: T_s^r(M) \rightarrow T_{s+1}^r(M), \quad \tilde{\nabla}: T_s^r(M) \rightarrow T_{s+1}^r(M).$$

В локальных координатах действие ковариантного дифференцирования ∇ на тензорное поле $\mathbf{X}$ с компонентами (4.1) изображается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \nabla_m X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^m} - \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n v^a \Gamma_{ma}^b \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial v^b} \\ &+ \sum_{k=1}^r \sum_{a_k=1}^n \Gamma_{m a_k}^{i_k} X_{j_1 \dots a_k \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \sum_{k=1}^s \sum_{b_k=1}^n \Gamma_{m j_k}^{b_k} X_{j_1 \dots b_k \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Действие дифференцирования $\tilde{\nabla}$ на $\mathbf{X}$ дается более простой формулой:

$$\tilde{\nabla}_m X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial v^m}. \quad (4.6)$$

Формула (4.6) для компонент поля $\tilde{\nabla} \mathbf{X}$ содержит только производные по компонентам вектора скорости. Поэтому $\tilde{\nabla}$ называется *скоростным градиентом*. Второе ковариантное дифференцирование ∇ , определяемое формулой (4.5), называется *пространственным градиентом*.

Определение операторов ∇ и $\tilde{\nabla}$ формулами (4.5) и (4.6) предполагает выбор локальных координат на многообразии M . Такой способ задания операторов ∇ и $\tilde{\nabla}$ оказался вполне достаточным для нужд теории ньютоновских динамических систем, допускающих нормальный сдвиг. Однако имеется и другой (инвариантный) способ задания этих операторов, совсем не связанный с выбором локальных координат на M . Он естественным образом возникает при анализе дифференцирований в расширенной алгебре тензорных полей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Отображение $D: \mathbf{T}(M) \rightarrow \mathbf{T}(M)$ называется *дифференцированием* расширенной алгебры тензорных полей, если выполнены условия:

- 1) согласованность с градуировкой: $D(T_s^r(M)) \subset T_s^r(M)$;
- 2) $\mathbb{R}$ -линейность: $D(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = D(\mathbf{X}) + D(\mathbf{Y})$ и $D(\lambda \mathbf{X}) = \lambda D(\mathbf{X})$ для $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 3) перестановочность со свертываниями: $D(C(\mathbf{X})) = C(D(\mathbf{X}))$;
- 4) правило Лейбница: $D(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) = D(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{Y} + \mathbf{X} \otimes D(\mathbf{Y})$.

Из приведенных в диссертации [15] результатов заслуживает упоминания следующая структурная теорема, описывающая строение всех дифференцирований в расширенной алгебре тензорных полей $\mathbf{T}(M)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть M – вещественное гладкое многообразие, на котором задана расширенная аффинная связность Γ . Тогда всякое дифференцирование D расширенной алгебры тензорных полей $\mathbf{T}(M)$ раскладывается в сумму

$$D = \nabla_{\mathbf{X}} + \tilde{\nabla}_{\mathbf{Y}} + \mathbf{S},$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – некоторые два расширенных векторных поля, а $\mathbf{S}$ – вырожденное дифференцирование, заданное некоторым расширенным тензорным полем $\mathbf{S}$ типа $(1, 1)$ на M .

Теорема 4.1 является аналогом структурной теоремы для алгебры обычных (не расширенных) тензорных полей (см. [17]).

§ 5. Редукция уравнений нормальности в размерности $n \geq 3$

Если учесть формулы (4.2), (4.3), (4.5) и (4.6), то нетрудно видеть, что уравнения нормальности (3.1) и (3.2) представляют собой сильно переопределенную систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент силового поля $\mathbf{F}$ ньютоновской динамической системы. Анализ этих уравнений, предпринятый в работе [14], основан на скалярной подстановке

$$F_k = AN_k - |\mathbf{v}| \sum_{i=1}^n P_k^i \tilde{\nabla}_i A. \quad (5.1)$$

Формула (5.1) выражает компоненты вектора силы через одно скалярное поле A , имеющее смысл проекции вектора $\mathbf{F}$ на направление вектора скорости. Она является простым следствием первой части уравнений в системе (3.1). Поэтому при подстановке (5.1) в уравнения слабой нормальности (3.1) первая часть этих уравнений обращается в тождество. Вторая часть уравнений слабой нормальности в результате такой подстановки редуцируется к виду

$$\sum_{s=1}^n \left(\nabla_s A + |\mathbf{v}| \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n P^{qr} \tilde{\nabla}_q A \tilde{\nabla}_r \tilde{\nabla}_s A - \sum_{r=1}^n N^r A \tilde{\nabla}_r \tilde{\nabla}_s A - |\mathbf{v}| \sum_{r=1}^n N^r \nabla_r \tilde{\nabla}_s A \right) P_k^s = 0. \quad (5.2)$$

В случае $n = 2$ уравнениями (5.2) исчерпывается весь список редуцированных уравнений нормальности. Дело в том, что в двумерном случае, как уже отмечалось выше, дополнительные уравнения нормальности не возникают. А уравнения (5.2) в этом случае редуцируются к одному единственному нелинейному уравнению в частных производных на функцию $A(x^1, x^2, v^1, v^2)$. Подробное исследование этого уравнения содержится в диссертации А. Ю. Болдина [16].

В многомерном случае $n \geq 3$ процесс редуцирования уравнений нормальности идет значительно дальше. Подстановка (5.1) в первую часть дополнительных уравнений нормальности (3.2) приводит их к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_\sigma^r P_\varepsilon^s \left(\nabla_r \tilde{\nabla}_s A + \sum_{q=1}^n \tilde{\nabla}_r A N^q \tilde{\nabla}_q \tilde{\nabla}_s A \right) \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_\sigma^r P_\varepsilon^s \left(\nabla_s \tilde{\nabla}_r A + \sum_{q=1}^n \tilde{\nabla}_s A N^q \tilde{\nabla}_q \tilde{\nabla}_r A \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Та же подстановка во вторую часть уравнений нормальности (3.2) дает

$$\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n P_\sigma^r \tilde{\nabla}_r \tilde{\nabla}_s A P^{s\varepsilon} = \lambda P_\sigma^\varepsilon. \quad (5.4)$$

Здесь λ — скаляр, величина которого диктуется самими уравнениями (5.4):

$$\lambda = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{P^{rs} \tilde{\nabla}_r \tilde{\nabla}_s A}{n-1}.$$

Уравнения (5.4) особенно примечательны. Согласно формуле (4.6) они содержат только производные по переменным $v^1, \dots, v^n$, что соответствует изменению функции $A(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$ в TM в пределах слоя над фиксированной точкой базового многообразия M с координатами $x^1, \dots, x^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Расширенное тензорное поле $\mathbf{X}$ называется *послойно сферически симметричным*, если из $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2|$ вытекает $\mathbf{X}(p, \mathbf{v}_1) = \mathbf{X}(p, \mathbf{v}_2)$.

Иными словами, послойно сферически симметричное расширенное тензорное поле зависит только от модуля вектора скорости в слоях касательного расслоения TM . Такие поля естественным образом возникают при анализе уравнений (5.4). Имеет место следующая теорема, доказанная в [14].

ТЕОРЕМА 5.1. *Скалярное поле A из расширенной алгебры тензорных полей на римановом многообразии M удовлетворяет уравнениям (5.4) тогда и только тогда, когда оно задается формулой*

$$A = a + \sum_{i=1}^n b_i v^i, \quad (5.5)$$

где a – послойно сферически симметричное скалярное поле, а b_i – компоненты послойно сферически симметричного ковекторного поля $\mathbf{b}$.

В дальнейшем подстановка (5.5) в уравнения (5.2) и (5.3) приводит к следующим уравнениям относительно полей a и $\mathbf{b}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^s} + b_s \frac{\partial}{\partial v} \right) a = \left(a \frac{\partial}{\partial v} \right) b_s, \quad (5.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^s} + b_s \frac{\partial}{\partial v} \right) b_r = \left(\frac{\partial}{\partial x^r} + b_r \frac{\partial}{\partial v} \right) b_s. \quad (5.7)$$

Здесь $a = a(x^1, \dots, x^n, v)$ и $b_i = b_i(x^1, \dots, x^n, v)$. Переменная v имеет смысл модуля вектора скорости, что согласуется с определением 5.1.

С уравнениями (5.6) и (5.7) связан самый драматичный момент в построении теории динамических систем, допускающих нормальный сдвиг. При выводе этих уравнений в [14] была допущена ошибка, в результате которой нелинейные слагаемые в (5.7) были пропущены. То есть получилось $\partial b_r / \partial x^s = \partial b_s / \partial x^r$. Последующий анализ уравнений, содержащих ошибку, привел к обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$y'' = H_y(y' + 1) + H_x, \quad (5.8)$$

где $H = H(x, y)$, $H_y = \partial H / \partial y$, $H_x = \partial H / \partial x$. Стремление найти возможно большее количество функций $H(x, y)$, для которых уравнение (5.8) разрешимо в явной форме, диктовало необходимость выполнения замен переменных

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{x}(x, y), \\ \tilde{y} = \tilde{y}(x, y). \end{cases} \quad (5.9)$$

Уравнения, потенциально сводящиеся к уравнениям (5.8) в результате точечных замен переменных (5.9), принадлежат к следующему классу уравнений:

$$y'' = P(x, y) + 3Q(x, y)y' + 3R(x, y)y'^2 + S(x, y)y'^3. \quad (5.10)$$

Исследования точечных преобразований в классе уравнений (5.10) имеет давнюю историю (см. [23]–[44]). Однако прямого ответа на вопрос, как выделить уравнения (5.10), сводящиеся к виду (5.8), из этих работ извлечь не удалось. Это стимулировало собственные исследования (см. [45]–[48]), в результате которых удалось продвинуться в описании всех классов точечной эквивалентности для уравнений вида (5.10). Но в настоящий момент в связи с обнаружением ошибки в работе [14] эти исследования представляют самостоятельный интерес, никак не связанный динамическими системами, допускающими нормальный сдвиг. Мы же вынуждены вернуться к уравнениям (5.6) и (5.7).

§ 6. Вывод редуцированных уравнений нормальности

Начнем с того, что выведем уравнения (5.6) и (5.7) путем подстановки (5.5) в уравнения (5.2) и (5.3). Обозначим через a' и b'_i производные

$$a' = \frac{\partial a}{\partial v}, \quad b'_i = \frac{\partial b_i}{\partial v}.$$

Проведем необходимые для подстановки (5.5) в (5.2) и (5.3) вычисления:

$$\nabla_s A = \nabla_s a + \sum_{i=1}^n \nabla_s b_i v^i, \quad (6.1)$$

$$\nabla_r \tilde{\nabla}_s A = \left(\nabla_r a' + \sum_{i=1}^n \nabla_r b'_i v^i \right) N_s + \nabla_r b_s, \quad (6.2)$$

$$\tilde{\nabla}_s A = \left(a' + \sum_{i=1}^n b'_i v^i \right) N_s + b_s, \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_r \tilde{\nabla}_s A &= \left(a'' + \sum_{i=1}^n b''_i v^i \right) N_r N_s \\ &+ b'_s N_r + b'_r N_s + \left(\frac{a'}{v} + \sum_{i=1}^n b'_i N^i \right) P_{rs}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из формул (6.3) и (6.4) для производных выводим следующие соотношения:

$$\sum_{r=1}^n P_\sigma^r \tilde{\nabla}_r A = \sum_{r=1}^n P_\sigma^r b_r, \quad (6.5)$$

$$\sum_{s=1}^n \sum_{q=1}^n P_\varepsilon^s N^q \tilde{\nabla}_q \tilde{\nabla}_s A = \sum_{s=1}^n P_\varepsilon^s b'_s. \quad (6.6)$$

Соединим (6.5) и (6.6). В результате этого получаем соотношение

$$\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{q=1}^n P_\sigma^r P_\varepsilon^s \tilde{\nabla}_r A N^q \tilde{\nabla}_q \tilde{\nabla}_s A = \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_\sigma^r P_\varepsilon^s b_r b'_s.$$

Затем домножим обе части равенства (6.2) на $P_\sigma^r P_\varepsilon^s$ и свернем по индексам r и s . Это дает еще одно соотношение:

$$\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_\sigma^r P_\varepsilon^s \nabla_r \tilde{\nabla}_s A = \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_\sigma^r P_\varepsilon^s \nabla_r b_s.$$

Сложим два полученных соотношения. Этим мы определим результат подстановки (5.5) в левую часть уравнения (5.3):

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_\sigma^r P_\varepsilon^s \left(\nabla_r \tilde{\nabla}_s A + \sum_{q=1}^n \tilde{\nabla}_r A N^q \tilde{\nabla}_q \tilde{\nabla}_s A \right) \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_\sigma^r P_\varepsilon^s \nabla_r b_s + \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_\sigma^r P_\varepsilon^s b_r b'_s. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Аналогичным образом вычисляется правая часть уравнения (5.3):

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_{\sigma}^r P_{\varepsilon}^s \left(\nabla_s \tilde{\nabla}_r A + \sum_{q=1}^n \tilde{\nabla}_s A N^q \tilde{\nabla}_q \tilde{\nabla}_r A \right) \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_{\sigma}^r P_{\varepsilon}^s \nabla_s b_r + \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_{\sigma}^r P_{\varepsilon}^s b_s b'_r. \end{aligned} \quad (6.8)$$

На основании (6.7) и (6.8) заключаем, что уравнение (5.3) редуцируется к

$$\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n P_{\sigma}^r P_{\varepsilon}^s (\nabla_r b_s + b_r b'_s - \nabla_s b_r - b_s b'_r) = 0. \quad (6.9)$$

Для дальнейшего анализа полученных уравнений (6.9) необходимо использовать специфику ковекторного поля $\mathbf{b}$ из расширенной алгебры тензорных полей на многообразии M . Компоненты этого поля $b_1, \dots, b_n$ зависят лишь от модуля вектора скорости, но не зависят от его направления. При вычислении производных $\nabla_r b_s$ и $\nabla_s b_r$ в (6.9) воспользуемся следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^n, v)$ — компоненты послойно сферически симметричного тензорного поля $\mathbf{X}$ из расширенной алгебры тензорных полей на римановом многообразии M . Тогда компоненты пространственного градиента $\nabla \mathbf{X}$ для этого поля вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} \nabla_m X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^m} + \sum_{k=1}^r \sum_{a_k=1}^n \Gamma_{m a_k}^{i_k} X_{j_1 \dots a_k \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \\ &\quad - \sum_{k=1}^s \sum_{b_k=1}^n \Gamma_{m j_k}^{b_k} X_{j_1 \dots b_k \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (6.10) получается в результате редукции формулы (4.5). Для компонент послойно сферически симметричного тензорного поля $\mathbf{X}$ в формулировке теоремы естественными аргументами являются $x^1, \dots, x^n$ и v , где

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}(x^1, \dots, x^n) v^i v^j}. \quad (6.11)$$

Производные же в формуле (4.5) вычисляются относительно набора переменных $x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n$. Пересчет к естественным переменным для послойно сферически симметричного поля состоит в замене производных

$$\frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial v^b} \quad \text{на} \quad \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial v^b}, \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^m} \quad \text{на} \quad \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^m} + \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x^m}. \quad (6.13)$$

Производные $\partial v / \partial v^b$ и $\partial v / \partial x^m$ вычисляются, исходя из (6.11). Вычислив указанные производные явно и выполнив замены (6.12) и (6.13) в исходной формуле (4.5) для компонент ∇X , мы получим два слагаемых:

$$\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \frac{X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial v} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^m} \frac{v^a v^b}{v} \quad \text{и} \quad - \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n v^a \Gamma_{ma}^b \frac{\partial X_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial v} N_b.$$

Если учесть явную формулу для компонент метрической связности

$$\Gamma_{ma}^b = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n g^{bq} \left(\frac{\partial g_{qa}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{ma}}{\partial x^q} \right) \quad (6.14)$$

(см., например, [17]–[20]), то легко увидеть, что эти два слагаемых сокращают друг друга. В результате формула (4.5) трансформируется к виду (6.10).

СЛЕДСТВИЕ. Компоненты $\omega_{rs} = \nabla_r b_s + b_r b'_s - \nabla_s b_r - b_s b'_r$ кососимметричного расширенного тензорного поля ω в уравнениях (6.9) зависят только от модуля вектора скорости $|\mathbf{v}|$, но не зависят от направления вектора $\mathbf{v}$.

Этот факт является непосредственным следствием формулы (6.10). Он позволяет произвести дальнейшее упрощение уравнений (6.9). Пусть $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ – два произвольных вектора из касательного пространства $T_p(M)$. В многомерном случае $n \geq 3$ мы можем, не изменяя модуля вектора скорости, направить его так, чтобы он стал перпендикулярен векторам $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$. Тогда

$$\sum_{\sigma=1}^n P_{\sigma}^r c^{\sigma} = c^r, \quad \sum_{\varepsilon=1}^n P_{\varepsilon}^s d^{\varepsilon} = d^s.$$

Это дает возможность трансформировать уравнения (6.9) к виду

$$\sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n c^r d^s (\nabla_r b_s + b_r b'_s - \nabla_s b_r - b_s b'_r) = 0. \quad (6.15)$$

Далее учет произвольности векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ позволяет еще более упростить полученные уравнения (6.15) и преобразовать их к виду

$$\nabla_r b_s + b_r b'_s = \nabla_s b_r + b_s b'_r. \quad (6.16)$$

Следующий шаг состоит в редуцировании уравнений (5.2). С этой целью выполним подстановку (5.5) в (5.2). Из (6.1) имеем

$$\sum_{s=1}^n \nabla_s A P_k^s = \sum_{s=1}^n \nabla_s a P_k^s + \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n \nabla_s b_r v^r P_k^s. \quad (6.17)$$

Далее из (6.3) и (6.4) получаем следующие два соотношения:

$$\sum_{r=1}^n P^{qr} \tilde{\nabla}_q A = \sum_{s=1}^n b_s P^{sr}, \quad (6.18)$$

$$|\mathbf{v}| \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n P^{qr} \tilde{\nabla}_r \tilde{\nabla}_s A P_k^s = \left(a' + \sum_{r=1}^n b'_r v^r \right) P_k^q. \quad (6.19)$$

В (6.18) имеется свободный индекс r , а в (6.19) – свободный индекс q . Перемножим равенства (6.18) и (6.19) и выполним свертку по индексам r и q , домножив дополнительно на g_{rq} . Это дает

$$|\mathbf{v}| \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n P^{qr} \tilde{\nabla}_q A \tilde{\nabla}_r \tilde{\nabla}_s A P_k^s = \left(a' + \sum_{r=1}^n b'_r v^r \right) \sum_{s=1}^n b_s P_k^s.$$

Еще одно соотношение получается из (6.4) после домножения на $N^r A P_q^s$ и свертывания по индексу r и по индексу s :

$$- \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n N^r A \tilde{\nabla}_r \tilde{\nabla}_s A P_k^s = - \left(a + \sum_{r=1}^n b_r v^r \right) \sum_{s=1}^n b'_s P_k^s.$$

Свернем равенство (6.2) с N^r и P_k^s по индексу r и по индексу s . Это дает

$$-|\mathbf{v}| \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n N^r \nabla_r \tilde{\nabla}_s A P_k^s = - \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n v^r \nabla_r b_s P_k^s.$$

Теперь, чтобы выписать результат подстановки (5.5) в уравнения (5.2), надо сложить (6.17) и три полученные выше равенства:

$$\sum_{s=1}^n \left(\nabla_s a + b_s a' - a b'_s + \sum_{r=1}^n v^r (\nabla_s b_r + b_s b'_r - \nabla_r b_s - b_r b'_s) \right) P_k^s = 0.$$

Учтем (6.16), что приводит к занулению всего выражения под знаком суммы по r . В итоге получается следующее уравнение:

$$\sum_{s=1}^n (\nabla_s a + b_s a' - a b'_s) P_k^s = 0. \quad (6.20)$$

Уравнения (6.20) аналогичны уравнениям (6.9) – операцию свертывания с компонентами оператора проектирования $\mathbf{P}$ в этих уравнениях можно опустить:

$$\nabla_s a + b_s a' = a b'_s. \quad (6.21)$$

Рассуждения, приводящие к (6.21), аналогичны тем, что использовались при выводе (6.16) из (6.9).

ТЕОРЕМА 6.2. *Силовое поле $\mathbf{F}$, задаваемое скалярной подстановкой (5.1), соответствует ньютоновской динамической системе, допускающей нормальный сдвиг на римановом многообразии M , в том и только том случае, когда скаляр A в (5.1) определяется по формуле (5.5), а поля a и $\mathbf{b}$ из расширенной алгебры тензорных полей на M являются послойно сферически симметричными и удовлетворяют уравнениям (6.16) и (6.21).*

Нетрудно видеть, что уравнения (6.16) и (6.21) совпадают с редуцированными уравнениями нормальности (5.7) и (5.6), которые требовалось вывести.

Сравним формулы (7.7) и (7.3) для векторных полей $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_n$. Это дает

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (7.8)$$

Из того же сравнения для функций b_k в переменных $y^1, \dots, y^n, w$ имеем

$$b_k = \frac{\partial v}{\partial y^k}. \quad (7.9)$$

Соотношения (7.8) показывают, что переход от новых локальных координат $y^1, \dots, y^n, w$ к прежним локальным координатам $x^1, \dots, x^n, v$ на многообразии $M \times \mathbb{R}^+$ определяется всего одной функцией $V(y^1, \dots, y^n, w)$:

$$\begin{cases} x^1 = y^1, \dots, x^n = y^n, \\ v = V(y^1, \dots, y^n, w). \end{cases} \quad (7.10)$$

Прямой переход от $x^1, \dots, x^n, v$ к новым координатам $y^1, \dots, y^n, w$ также определяется одной единственной функцией $W(x^1, \dots, x^n, v)$:

$$\begin{cases} y^1 = x^1, \dots, y^n = x^n, \\ w = W(x^1, \dots, x^n, v). \end{cases} \quad (7.11)$$

Функции $V(y^1, \dots, y^n, w)$ и $W(x^1, \dots, x^n, v)$ в (7.10) и (7.11) связаны очевидными соотношениями, выражающими то, что эти две замены переменных являются обратными друг для друга:

$$\begin{aligned} V(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v)) &= v, \\ W(x^1, \dots, x^n, V(x^1, \dots, x^n, w)) &= w. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Введем следующие естественные обозначения для частных производных:

$$\begin{aligned} V_i(x^1, \dots, x^n, w) &= \frac{\partial V(x^1, \dots, x^n, w)}{\partial x^i}, \\ V_w(x^1, \dots, x^n, w) &= \frac{\partial V(x^1, \dots, x^n, w)}{\partial w}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Аналогичные обозначения введем и для производных второго порядка:

$$\begin{aligned} V_{ij}(x^1, \dots, x^n, w) &= \frac{\partial^2 V(x^1, \dots, x^n, w)}{\partial x^i \partial x^j}, \\ V_{iw}(x^1, \dots, x^n, w) &= \frac{\partial^2 V(x^1, \dots, x^n, w)}{\partial x^i \partial w}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Теперь можно переписать формулу (7.9) в исходных переменных:

$$b_k = V_k(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v)). \quad (7.15)$$

ТЕОРЕМА 7.1. *Функции $b_1, \dots, b_n$ удовлетворяют нелинейной системе дифференциальных уравнений (7.2) тогда и только тогда, когда они определяются формулой (7.15) по некоторой функции $V(x^1, \dots, x^n, w)$, для которой частная производная $\partial V / \partial w$ отлична от нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение теоремы уже доказано: всякое решение системы уравнений (7.2) имеет вид (7.15). Пусть, наоборот, выбрана некоторая функция $V(x^1, \dots, x^n, w)$ с ненулевой производной $\partial V/\partial w$. Из условия $\partial V/\partial w \neq 0$ по теореме о неявной функции (см. [49], [50]) вытекает существование функции $W(x^1, \dots, x^n, v)$, которая связана с $V(x^1, \dots, x^n, w)$ соотношениями (7.12). Из этих соотношений в силу обозначений (7.13) имеем

$$\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{1}{V_w(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v))}, \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x^s} = -\frac{V_s(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v))}{V_w(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v))}. \quad (7.17)$$

Подставим функции V и W в (7.15) и вычислим $b_1, \dots, b_n$. После чего прямой подстановкой убедимся в том, что полученные функции $b_1, \dots, b_n$ удовлетворяют уравнениям (7.2). Действительно, здесь мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_r}{\partial x^s} &= V_{rs}(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v)) \\ &\quad + V_{rw}(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v)) \frac{\partial W}{\partial x^s}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} b_s \frac{\partial b_r}{\partial v} &= V_s(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v)) \\ &\quad \times V_{rw}(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v)) \frac{\partial W}{\partial v}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Сложим полученные равенства (7.18) и (7.19) и учтем при этом формулы (7.16) и (7.17) для производных. Это дает следующее равенство:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^s} + b_s \frac{\partial}{\partial v} \right) b_r = V_{rs}(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v)). \quad (7.20)$$

В силу (7.14) индексы r и s в правой части (7.20) можно переставлять, т.е. $V_{rs} = V_{sr}$. Это как раз и обеспечивает выполнение уравнений (7.2) для построенных функций (7.15).

Построив общее решение уравнений (7.2), перейдем теперь к изучению уравнений (7.1). Выполним в них замену переменных (7.10) и перейдем к переменным $y^1, \dots, y^n, w$. В левой части этих уравнений фигурирует тот же дифференциальный оператор $\mathbf{L}_s$, что и в уравнениях (7.2). В переменных $y^1, \dots, y^n, w$ он имеет вид $\mathbf{L}_s = \partial/\partial y^s$ (см. соотношения (7.7)). Пересчитаем к переменным $y^1, \dots, y^n, w$ оператор в правой части (7.1):

$$\frac{\partial}{\partial v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y^i} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial}{\partial w}.$$

С целью дальнейшего преобразования полученного выражения для оператора $\partial/\partial v$ применим формулу (7.16). Это приводит к следующему соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{V_w(y^1, \dots, y^n, w)} \frac{\partial}{\partial w}.$$

Теперь в переменных $y^1, \dots, y^n, w$ при использовании обозначений (7.13) и (7.14) уравнения (7.1) запишутся так:

$$\frac{\partial a}{\partial y^s} = \frac{V_{sw}}{V_w} a. \quad (7.21)$$

Уравнения (7.21) легко решаются, если их переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial y^s} \left(\frac{a}{V_w} \right) = 0. \quad (7.22)$$

Общее решение уравнений (7.22) содержит произвольную функцию одной переменной $h(w)$. Оно имеет вид

$$a = h(w) V_w (y^1, \dots, y^n, w). \quad (7.23)$$

После перехода к переменным $x^1, \dots, x^n, v$ из формулы (7.23) извлекаем

$$a = h(W(x^1, \dots, x^n, v)) V_w(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v)). \quad (7.24)$$

С целью дополнительной проверки подставим полученные выражения (7.24) и (7.15) в уравнения (7.1). Проведем соответствующие вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x^s} &= (h'(W) V_w + h(W) V_{wW}) \frac{\partial W}{\partial x^s} + h(W) V_{sw}, \\ b_s \frac{\partial a}{\partial v} &= V_s (h'(W) V_w + h(W) V_{wW}) \frac{\partial W}{\partial v}. \end{aligned}$$

Сложим полученные равенства и учтем при этом формулы (7.16) и (7.17) для частных производных $\partial W / \partial x^s$ и $\partial W / \partial v$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^s} + b_s \frac{\partial}{\partial v} \right) a = h(W) V_{sw}. \quad (7.25)$$

Аналогичные вычисления для правой части уравнений (7.1) дают

$$\left(a \frac{\partial}{\partial v} \right) b_s = h(W) V_w V_{sw} \frac{\partial W}{\partial v}. \quad (7.26)$$

Сравнение (7.25) с (7.26) и учет формулы (7.16) для производной $\partial W / \partial v$ дают доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7.2. *Функции $b_1, \dots, b_n$ и a удовлетворяют системе нелинейных дифференциальных уравнений (7.1) и (7.2) тогда и только тогда, когда они определяются формулами (7.15) и (7.24).*

§ 8. Общая формула для силового поля

Анализ редуцированных уравнений нормальности выше позволил построить общее решение этих уравнений. Теперь мы в состоянии выписать *формулу*, задающую силовое поле *произвольной ньютоновской динамической системы, допускающей нормальный сдвиг* на римановом многообразии *размерности* $n \geq 3$. Подставим (5.5) в формулу (5.1) для компонент силового поля $\mathbf{F}$. При этом учтем, что поля $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, определяющие параметр A скалярной подстановки, являются послойно сферически симметричными:

$$F_k = aN_k + |\mathbf{v}| \sum_{i=1}^n b_i (2N^i N_k - \delta_k^i). \quad (8.1)$$

Формула (8.1) полностью определяет зависимость силового поля $\mathbf{F}$ от вектора скорости $\mathbf{v} = v\mathbf{N}$. При учете формул (7.15) и (7.24) имеем

$$F_k = h(W)V_w(x^1, \dots, x^n, W)N_k + |\mathbf{v}| \sum_{i=1}^n V_i(x^1, \dots, x^n, W)(2N^i N_k - \delta_k^i). \quad (8.2)$$

Здесь $h(w)$ – произвольная функция одной переменной, через V_i и V_w обозначены производные (7.13), а функции $V(x^1, \dots, x^n, W)$ и $W(x^1, \dots, x^n, v)$ связаны соотношениями (7.12).

Формула (8.2) для силового поля ньютоновской динамической системы, допускающей нормальный сдвиг, содержит функциональный производ, определяемый одной функцией $n + 1$ переменной $V(x^1, \dots, x^n, w)$. Функциональный производ, задаваемый функцией h , можно исключить калибровочным преобразованием, которое не меняет поле $\mathbf{a}$ и не меняет компонент поля $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} V(x^1, \dots, x^n, w) &\rightarrow V(x^1, \dots, x^n, \rho^{-1}(w)), \\ W(x^1, \dots, x^n, v) &\rightarrow \rho(W(x^1, \dots, x^n, v)), \\ h(w) &\rightarrow h(\rho^{-1}(w))\rho'(\rho^{-1}(w)). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Следовательно, такое калибровочное преобразование не меняет компонент силового поля $\mathbf{F}$, изменяя при этом параметры V , W и h в (8.2). При $h(w) \neq 0$ мы можем подобрать функцию $\rho(w)$ так, что $h(w)\rho'(w) = 1$. Выполнив калибровочное преобразование (8.3) в этом случае, получим следующую формулу:

$$F_k = V_w(x^1, \dots, x^n, W)N_k + |\mathbf{v}| \sum_{i=1}^n V_i(x^1, \dots, x^n, W)(2N^i N_k - \delta_k^i). \quad (8.4)$$

Формула (8.4) практически столь же универсальна, как и формула (8.2). Единственное исключение составляет случай $h = 0$, который не может быть получен из формулы (8.4).

§ 9. Эффективизация общей формулы

Формулы (8.2) и (8.4) в явной форме определяют компоненты силового поля ньютоновской динамической системы, допускающей нормальный сдвиг на римановом многообразии M . Однако эти формулы имеют один общий недостаток – неэффективность, связанную с необходимостью вычисления неявно заданной функции $W(x^1, \dots, x^n, v)$ из уравнений (7.12). С целью получения более эффективной формулы воспользуемся соотношениями (7.16) и (7.17). Перепишем соотношения (7.16) и (7.17) следующим образом:

$$V_w(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v)) = \frac{1}{\partial W / \partial v}, \quad (9.1)$$

$$V_k(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, v)) = -\frac{\partial W / \partial x^k}{\partial W / \partial v}. \quad (9.2)$$

Подстановка (9.2) в формулу (7.15) для компонент ковекторного поля $\mathbf{b}$ дает

$$b_k = -\frac{\partial W(x^1, \dots, x^n, v) / \partial x^k}{\partial W(x^1, \dots, x^n, v) / \partial v}. \quad (9.3)$$

Здесь функцию $W(x^1, \dots, x^n, v)$ можно выбирать совершенно произвольной с одним лишь условием, чтобы производная в знаменателе дроби в (9.3) была ненулевой. Эта же функция после подстановки (9.1) в (7.24) определяет поле a :

$$a = \frac{h(W(x^1, \dots, x^n, v))}{\partial W(x^1, \dots, x^n, v) / \partial v}. \quad (9.4)$$

Подставим выражения (9.3) и (9.4) в формулу (8.1) для силового поля $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{h(W(x^1, \dots, x^n, v))}{\partial W(x^1, \dots, x^n, v) / \partial v} N_k \\ &\quad - |\mathbf{v}| \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(x^1, \dots, x^n, v) / \partial x^i}{\partial W(x^1, \dots, x^n, v) / \partial v} (2N^i N_k - \delta_k^i). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Формулу (9.5) перепишем в терминах ковариантных производных. Результат этого сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 9.1. *Ньютоновская динамическая система на римановом многообразии M размерности $n \geq 3$ допускает нормальный сдвиг тогда и только тогда, когда ее силовое поле $\mathbf{F}$ имеет вид*

$$F_k = \frac{h(W)N_k}{W_v} - |\mathbf{v}| \sum_{i=1}^n \frac{\nabla_i W}{W_v} (2N^i N_k - \delta_k^i), \quad (9.6)$$

где W – произвольное послойно сферически симметричное скалярное поле из расширенной алгебры тензорных полей на M с ненулевой производной

$$W_v = \frac{\partial W}{\partial v} = \sum_{i=1}^n N^i \tilde{\nabla}_i W \neq 0,$$

а функция $h = h(w)$ – произвольная гладкая функция одной переменной.

Функции (10.6) описывают сдвиг $f_t: S \rightarrow S_t$. В достаточно малой окрестности $S' = O_S(p_0)$ точки p_0 и при достаточно близких к нулю значениях параметра t отображение f_t есть диффеоморфизм: $f_t: S' \rightarrow S'_t$. Этот диффеоморфизм позволяет перенести локальные координаты $u^1, \dots, u^{n-1}$ с S на S_t . Тогда при каждом фиксированном t функции (10.6) можно рассматривать как параметрические уравнения гиперповерхности S_t , аналогичные уравнениям (10.2). Вычислим производные (10.3) для функций (10.6). Этим мы определим векторы $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, касательные ко всем гиперповерхностям S_t :

$$\tau_k = \tau_k(u^1, \dots, u^{n-1}, t). \quad (10.7)$$

Обозначим через φ_k скалярное произведение вектора (10.7) и вектора скорости:

$$\varphi_k = (\tau_k \mid \mathbf{v}). \quad (10.8)$$

В диссертации [15] функции $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, определяемые формулой (10.8), были названы *функциями девиации*. Такие функции сыграли важную роль при выводе уравнений нормальности (3.1) и (3.2), поскольку условие нормальности сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$ состоит в тождественном занулении всех функций (10.8):

$$\varphi_k = \varphi_k(u^1, \dots, u^{n-1}, t) = 0. \quad (10.9)$$

Из условия тождественного зануления функций девиации (10.9) вытекает зануление их производных по t в момент времени $t = 0$:

$$\dot{\varphi}_k|_{t=0} = 0. \quad (10.10)$$

Кроме того, из (10.9) вытекает зануление самих функций девиации при $t = 0$:

$$\varphi_k|_{t=0} = 0. \quad (10.11)$$

В работах [6] и [7] было показано, что для ньютоновских динамических систем, допускающих нормальный сдвиг (в смысле определения 3.2 и теоремы 3.1), условия (10.10) и (10.11) являются не только необходимыми, но и *достаточными* условиями тождественного зануления всех функций девиации (10.8).

Условия (10.11) являются тривиальными следствиями из (10.4). Они не дают никакой информации о том, как следует выбирать функцию $\nu(p)$ на S . Поэтому рассмотрим условия (10.10). Вычислим $\dot{\varphi}$ дифференцированием (10.8):

$$\dot{\varphi}_k = \nabla_t \varphi_k = (\nabla_t \tau_k \mid \mathbf{v}) + (\tau_k \mid \mathbf{F}). \quad (10.12)$$

При выводе (10.12) мы учли уравнения динамики (1.2) в форме $\nabla_t \mathbf{v} = \mathbf{F}$. Далее, вычислим ковариантную производную $\nabla_t \tau_k$. Это вектор с компонентами

$$\nabla_t \tau_k^i = \frac{\partial \tau_k^i}{\partial t} + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \Gamma_{rs}^i v^r \tau_k^s. \quad (10.13)$$

Если учесть формулы (10.3), определяющие τ_k^i , то из (10.13) получим

$$\nabla_t \tau_k^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \Gamma_{rs}^i v^r \frac{\partial x^s}{\partial u^k} = \nabla_{u^k} v^i. \quad (10.14)$$

В векторной форме (10.14) записывается как $\nabla_t \boldsymbol{\tau}_k = \nabla_{u^k} \mathbf{v}$. То есть $\nabla_t \boldsymbol{\tau}_k$ совпадает с ковариантной производной вектор-функции $\mathbf{v}(u^1, \dots, u^{n-1}, t)$ по параметру u^k вдоль k -й координатной линии на гиперповерхности S_t . Подставим полученное выражение для $\nabla_t \boldsymbol{\tau}_k$ в формулу (10.12). Это дает

$$\dot{\varphi}_k = (\nabla_{u^k} \mathbf{v} \mid \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\tau}_k \mid \mathbf{F}). \quad (10.15)$$

Далее, учтем очевидное соотношение $\nabla_{u^k} (\mathbf{v} \mid \mathbf{v}) = 2(\nabla_{u^k} \mathbf{v} \mid \mathbf{v})$ и формулу (10.5), которая определяет модуль вектора скорости при $t = 0$. Это позволяет преобразовать формулу (10.15) для производной $\dot{\varphi}_k$ к следующему виду:

$$\dot{\varphi}_k|_{t=0} = \nu \frac{\partial \nu}{\partial u^k} + (\boldsymbol{\tau}_k \mid \mathbf{F}). \quad (10.16)$$

Теперь, в силу (10.16) соотношения (10.10) для производных $\dot{\varphi}_k$ записываются как дифференциальные уравнения относительно функции $\nu = \nu(u^1, \dots, u^{n-1})$:

$$\frac{\partial \nu}{\partial u^k} = -\nu^{-1}(\mathbf{F} \mid \boldsymbol{\tau}_k). \quad (10.17)$$

Подставим силовое поле (9.6) в уравнения (10.17) и учтем, что вектор $\mathbf{N}$ при $t = 0$ совпадает с единичным вектором нормали $\mathbf{n}(p)$ на S . Это дает

$$\frac{\partial \nu}{\partial u^k} = -\sum_{i=1}^n \frac{\nabla_i W}{W_v} \tau_k^i. \quad (10.18)$$

Домножим уравнения (10.18) на W_v и перенесем сумму из правой части в левую. Кроме того, выпишем в явной форме все производные:

$$\frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial \nu}{\partial u^k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} = 0. \quad (10.19)$$

Нетрудно видеть, что левая часть соотношения (10.19) — это производная функции $W(x^1, \dots, x^n, v)$ по u^k после подстановки в ее аргументы функций (10.2) вместо $x^1, \dots, x^n$ и функции $\nu(u^1, \dots, u^{n-1})$ вместо v . Поэтому уравнения (10.19) легко интегрируются в форме функционального уравнения

$$W(x^1(p), \dots, x^n(p), \nu(p)) = W_0 = \text{const}, \quad (10.20)$$

которое в неявной форме определяет функцию $\nu = \nu(p) = \nu(u^1, \dots, u^{n-1})$. Значение константы W_0 в (10.20) фиксируется условием нормировки (10.1):

$$W_0 = W(x^1(p_0), \dots, x^n(p_0), \nu_0).$$

ТЕОРЕМА 10.1. Для построения нормального сдвига гиперповерхности S , которая задана в параметрической форме функциями $x^1(p), \dots, x^n(p)$ из (10.2), вдоль траекторий ньютоновской динамической системы с силовым полем (9.6) функцию $\nu(p)$ в (10.4) следует определять из уравнения (10.20).

Построив нормальный сдвиг $f_t: S \rightarrow S_t$ вдоль траекторий динамической системы с силовым полем (9.6), мы получим семейство гиперповерхностей S_t . Поменяв начало отсчета времени $t \rightarrow t + t_0$, любую из них можно считать начальной гиперповерхностью. Поэтому на каждой из них имеет место равенство

$$W(p, |\mathbf{v}|) = W_0(t) = \text{const}, \quad (10.21)$$

аналогичное (10.20). Но значения констант $W_0(t)$ в (10.21) могут быть различны на разных гиперповерхностях S_t . Вычислим динамику $W_0(t)$ по t . Сначала найдем динамику модуля вектора скорости по t на траекториях сдвига:

$$\frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \nabla_t v = \frac{(\mathbf{v} | \nabla_t \mathbf{v})}{v} = (\mathbf{N} | \mathbf{F}) = \sum_{k=1}^n N^k F_k. \quad (10.22)$$

Подставим (9.6) в (10.22). В результате такой подстановки получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h(W)}{W_v} - \sum_{i=1}^n \frac{\nabla_i W}{W_v} \frac{dx^i}{dt}. \quad (10.23)$$

Домножим уравнения (10.23) на W_v и перенесем сумму из правой части в левую. Кроме того выпишем в явной форме все производные:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{dv}{dt} = h(W). \quad (10.24)$$

В левой части (10.24) стоит производная скалярного поля W по t вдоль траекторий нормального сдвига. Значит, равенство (10.24) и есть искомое уравнение, задающее динамику по t константы $W_0(t)$ в (10.21). Запишем его так:

$$\frac{dW_0}{dt} = h(W_0). \quad (10.25)$$

Если функция h в (9.6) равна нулю, то в силу (10.25) поле W в (10.21) не только постоянно на каждой гиперповерхности S_t , но и принимает одинаковые значения на всех таких гиперповерхностях. При $h \neq 0$ дифференциальное уравнение (10.25) легко интегрируется и, зная значение W на гиперповерхности S , можно найти значение W на любой из гиперповерхностей S_t .

Сопоставление (11.4) и (11.5) дает следующую формулу для диагональной компоненты g_{nn} метрического тензора в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$, ассоциированных с нормальным сдвигом $f_t: S \rightarrow S_t$:

$$g_{nn} = (V(x^1, \dots, x^n, W_0(x^n)))^2. \quad (11.6)$$

Недиагональные компоненты равны нулю в силу нормальности сдвига:

$$g_{nk} = 0 \quad \text{для всех } k = 1, \dots, n-1. \quad (11.7)$$

Функция одной переменной $W_0(t)$, фигурирующая в (11.5) и (11.6), определяется как решение обыкновенного дифференциального уравнения (10.25), которое фиксируется начальным условием при $t = 0$:

$$W_0(t)|_{t=0} = W(p_0, \nu_0). \quad (11.8)$$

Начальное условие (11.8) вытекает из (10.21), соотношения (10.5) и условия нормировки (10.1).

Соотношения (11.6) и (11.7) означают, что матрица, составленная из компонент метрического тензора, в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$, ассоциированных с нормальным сдвигом, имеет блочно-диагональную структуру:

$$g = \left\| \begin{array}{c|c} \boxed{G} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \end{array} & g_{nn} \end{array} \right\|. \quad (11.9)$$

Траекториям нормального сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$ соответствует изменение параметра t в (11.1) при фиксированных значениях параметров $u^1, \dots, u^{n-1}$. Запишем уравнение ньютоновской динамики точек $\nabla_t \mathbf{v} = \mathbf{F}$ для таких траекторий. В ассоциированных локальных координатах это векторное уравнение сводится к серии скалярных уравнений. При учете (11.2) имеем

$$\Gamma_{nn}^k = F^k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (11.10)$$

Выполним опускание верхнего индекса k в (11.10). При этом учтем блочно-диагональную структуру компонент матрицы метрического тензора (11.9) и явную формулу (6.14) для компонент метрической связности. Это дает

$$\frac{\partial g_{nn}}{\partial x^k} = -2F_k \quad \text{при } k < n, \quad (11.11)$$

$$\frac{\partial g_{nn}}{\partial x^n} = 2F_n \quad \text{при } k = n. \quad (11.12)$$

Величина g_{nn} в левой части (11.11) и (11.12) определяется формулой (11.6). А ковариантные компоненты вектора силы определяются формулой (9.6) или эквивалентной ей формулой (8.2). При подстановке (11.6) и (8.2) в (11.11) и (11.12) учтем,

что компоненты вектора скорости на траекториях сдвига определяются формулами (11.2), а модуль вектора скорости определяется формулой (11.3). Поэтому для компонент единичного вектора $\mathbf{N}$ имеем

$$N^k = \frac{\delta_n^k}{|\mathbf{v}|}, \quad N_k = |\mathbf{v}| \delta_k^n.$$

Учет всех перечисленных обстоятельств при подстановке (11.6) и (8.2) в (11.11) и (11.12) обращает эти равенства в тождества. Никаких дополнительных ограничений на вид функций $h(w)$ и $V(x^1, \dots, x^n, w)$ не возникает. Это и не удивительно, ведь все ограничения, связанные с нормальностью сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$, учтены уравнениями нормальности (3.1) и (3.2) и вытекающей из них формулой (8.2) для силового поля $\mathbf{F}$. Условие же нормировки (3.3) на функцию ν обеспечивается соотношением (11.6), уравнением (10.25) на функцию $W_0(t)$ и начальным условием (11.8).

Полученный выше результат дает ответ на один из вопросов А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко. Он формулируется так: *в какой мере нормальный сдвиг конкретной гиперповерхности $f_t: S \rightarrow S_t$ характеризует строение силового поля $\mathbf{F}$ динамической системы, допускающей нормальный сдвиг?* Ответ таков: *характеризует, но лишь частично.*

Действительно, если нормальный сдвиг $f_t: S \rightarrow S_t$ уже построен, то построение ассоциированных координат $x^1, \dots, x^n$ в окрестности S сводится лишь к выбору локальных координат $u^1, \dots, u^{n-1}$ на начальной гиперповерхности S . Диагональная компонента g_{nn} матрицы метрического тензора в этих координатах определяет функцию n переменных

$$V(x^1, \dots, x^n, W_0(x^n)) = \sqrt{g_{nn}(x^1, \dots, x^n)} \quad (11.13)$$

(см. соотношение (11.6) выше). Но по функции (11.3) нельзя однозначно восстановить функцию $n + 1$ переменных $V(x^1, \dots, x^n, w)$, которая входит в формулу (8.2) для компонент силового поля $\mathbf{F}$.

Если предположить, что $h(w) = 0$ в (8.2), то из уравнения (10.25) вытекает $W_0(x^n) = W_0 = \text{const}$. В этом случае формула (11.13) упрощается

$$V(x^1, \dots, x^n, W_0) = \sqrt{g_{nn}(x^1, \dots, x^n)}. \quad (11.14)$$

Но для фиксированного нормального сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$ величина константы W_0 жестко фиксирована. Поэтому по (11.14) нельзя восстановить функцию $V(x^1, \dots, x^n, w)$ в полном объеме.

Теперь предположим, что $h(w) \neq 0$. Рассмотрим калибровочные преобразования (8.3), которые не меняют силового поля (8.2). Преобразования (8.3) дополняются правилом преобразования функции $W_0(t)$. Оно имеет вид

$$W_0(t) \rightarrow \rho(W_0(t)). \quad (11.15)$$

Калибровочные преобразования (8.3), дополненные правилом (11.15), сохраняют не только силовое поле $\mathbf{F}$ динамической системы, но и отображения нормального

сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$. Поэтому они не меняют уже сделанного выбора ассоциированных с этим сдвигом локальных координат $x^1, \dots, x^n$ и величины g_{nn} в правой части (11.13). Инвариантность левой части (11.13) относительно таких преобразований легко проверяется непосредственным вычислением. Случай $h(w) \neq 0$ за счет калибровочных преобразований (8.3) может быть сведен к случаю $h(w) = 1$ (см. комментарий, предшествующий формуле (8.4)). При $h(w) = 1$ интегрированием (10.25) получаем $W_0(t) = W_0 + t$, где $W_0 = \text{const.}$ Это сводит соотношение (11.13) к виду

$$V(x^1, \dots, x^n, W_0 + x^n) = \sqrt{g_{nn}(x^1, \dots, x^n)}. \quad (11.16)$$

Константа W_0 в (11.6) жестко фиксирована при фиксированном выборе отображения нормального сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$. Поэтому по (11.16) также нельзя восстановить функцию $V(x^1, \dots, x^n, w)$ в полном объеме.

Рассмотрим простой пример. Пусть $M = \mathbb{R}^n$ — евклидово пространство со стандартной метрикой, и пусть S — гиперплоскость, задаваемая уравнением $x^n = 0$. Тогда соотношения (11.1) определяют параметризацию S и задают нормальный сдвиг этой гиперплоскости $f_t: S \rightarrow S_t$, представляющий собой параллельный перенос S вдоль n -й координатной оси. При этом $g_{nn} = 1$.

1. Рассмотренный сдвиг $f_t: S \rightarrow S_t$ может осуществляться ньютоновской динамической системой с тождественно нулевым силовым полем $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0$. Это соответствует выбору $h(w) = 0$ и $V(x^1, \dots, x^n, w) = w$ в формуле (8.2) и выбору $W_0 = 1$ в формуле (11.14).

2. Выбор $V(x^1, \dots, x^n, w)$ можно изменить, сохранив $h(w) = 0$ и $W_0 = 1$. Положим $V(x^1, \dots, x^n, w) = w + (1 - w) \cdot \varphi(x^1, \dots, x^n)$. Тогда рассмотренный выше нормальный сдвиг гиперплоскости S будет задаваться ньютоновской динамической системой, силовое поле которой отлично от нуля:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1 - |\mathbf{v}|}{1 - \varphi} \cdot \frac{2(\mathbf{v} \mid \nabla \varphi) \cdot \mathbf{v} - |\mathbf{v}|^2 \cdot \nabla \varphi}{|\mathbf{v}|}.$$

Здесь $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ — произвольная функция координат $x^1, \dots, x^n$, от которой естественно требовать, чтобы ее значения были отличны от 1.

3. Положив $h(w) = 1$, мы можем выбрать $W(x^1, \dots, x^n) = w - x^n$ в формуле (8.2) и $W_0 = 1$ в формуле (11.16). Для силового поля $\mathbf{F}$ это дает

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} - \frac{2(\mathbf{v} \mid \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v} - |\mathbf{v}|^2 \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{v}|}.$$

Рассмотренный пример подтверждает сделанный ранее вывод о том, что по заданному нормальному сдвигу $f_t: S \rightarrow S_t$ конкретной гиперповерхности S нельзя однозначно определить силовое поле $\mathbf{F}$ осуществляющей этот сдвиг динамической системы, даже если известно, что оно принадлежит к классу силовых полей, задаваемых формулой (8.2).

§ 12. Раздутие точек. Обобщение теории в варианте А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко

До сих пор, изучая нормальный сдвиг $f_t: S \rightarrow S_t$, мы ограничивались гладкими гиперповерхностями и выбирали параметр t достаточно малым, чтобы гиперповерхности S_t также не имели особых точек. Однако один случай возникновения

особенности представляется интересным – это случай, когда гиперповерхность S_t одновременно схлопывается в точку при $t = t_0$. Обратив ход течения времени, мы можем говорить о раздутии точки. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что $t_0 = 0$. Тогда сингулярной будет начальная гиперповерхность S , состоящая из одной точки: $S = \{p_0 \in M\}$. Из точки p_0 веером расходятся траектории сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$ (см. рис. 3 ниже). Векторы скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(0)$ на этих траекториях, отнесенные к моменту времени $t = 0$, принадлежат касательному пространству $T_{p_0}(M)$. Они определяют некоторую гиперповерхность s в слое касательного расслоения TM над точкой $p_0 \in M$. Ее можно условно понимать как “предельное положение” семейства гиперповерхностей S_t в “бесконечно малом масштабе”:

$$s = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S_t}{t}. \quad (12.1)$$

Если начальные скорости на всех траекториях в точке p_0 отличны от нуля, то s имеет топологию $(n - 1)$ -мерной сферы. Эту же топологию наследуют и все гиперповерхности S_t при малых значениях параметра t . Пусть σ – единичная сфера в слое касательного расслоения над точкой p_0 , пусть q – точка этой сферы, и пусть $\mathbf{n}(q)$ – радиус вектор точки q в $T_{p_0}(M)$. Тогда радиус векторы точек на s можно задавать формулой $\mathbf{v}(q) = \nu(q) \cdot \mathbf{n}(q)$, где $\nu = \nu(q)$ – некоторая положительная функция на единичной сфере σ . А сами траектории, исходящие из точки p_0 , будут определяться начальными данными

$$x^k|_{t=0} = x^k(p_0), \quad \dot{x}^k|_{t=0} = \nu(q) \cdot n^k(q) \quad (12.2)$$

для уравнений ньютоновской динамики (1.2). Пусть компоненты вектора силы в (1.2) определяются формулами (8.2). Тогда, в силу нормальности сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$ для несингулярных гиперповерхностей S_t справедливы все результаты, полученные выше в §§ 10 и 11. Формула (11.5) запишется так:

$$|\mathbf{v}| = V(x^1(t, q), \dots, x^n(t, q), W_0(t)). \quad (12.3)$$

Мы вновь можем вернуться к исходной форме записи (11.5), если обозначим через $u^1, \dots, u^{n-1}$ локальные координаты точки q на единичной сфере σ .

Рис. 3

Модуль начальной скорости $|\mathbf{v}| = \nu(q)$, фигурирующий в (12.2), можно найти, выполнив предельный переход $t \rightarrow 0$ в формуле (12.3):

$$\nu(q) = V(x^1(p_0), \dots, x^n(p_0), W_0). \quad (12.4)$$

Здесь $x^1(p_0), \dots, x^n(p_0)$ – координаты точки p_0 , а W_0 – начальное значение функции $W_0(t)$ при $t = 0$. Сама же функция $W_0(t)$ определяется как решение обыкновенного дифференциального уравнения (10.25). Заметим, что правая часть равенства (12.4) не зависит от q . То есть

$$\nu(q) = V(p_0, W_0) = \nu_0 = \text{const.} \quad (12.5)$$

Константа W_0 может быть выражена через ν_0 , если учесть соотношения (7.12):

$$W_0 = W(p_0, \nu_0) = \text{const.} \quad (12.6)$$

Принимая во внимание соотношения (12.5) и (12.6), перепишем (12.2) в виде

$$x^k|_{t=0} = x^k(p_0), \quad \dot{x}^k|_{t=0} = \nu_0 \cdot n^k(q). \quad (12.7)$$

Имеет место следующая теорема, которая вытекает из результатов, полученных в §§ 10 и 11, при выполнении предельного перехода (12.1), который соответствует выбору сингулярной начальной гиперповерхности $S = \{p_0\}$.

ТЕОРЕМА 12.1. *Пусть на римановом многообразии M задана ньютоновская динамическая система, допускающая нормальный сдвиг, т.е. система, силовое поле $\mathbf{F}$ которой определяется формулой (8.2). Тогда для любой точки $p_0 \in M$ и любой положительной константы $\nu_0 > 0$ начальные данные (12.7) задают нормальное раздутие $f_t: p_0 \rightarrow S_t$ точки p_0 вдоль траекторий указанной динамической системы.*

Рассмотрение нормальных раздутий отдельных точек многообразия M открывает путь для дальнейшего расширения теории динамических систем, допускающих нормальный сдвиг. А именно, может быть сформулировано следующее определение, аналогичное определению 3.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Ньютоновская динамическая система (1.2) с силовым полем $\mathbf{F}$ на римановом многообразии M называется *допускающей нормальное раздутие точек*, если для любой точки $p_0 \in M$ и любой положительной константы $\nu_0 > 0$ начальные данные (12.7) задают нормальное раздутие точки p_0 вдоль траекторий этой динамической системы.

Идея построения новой теории на основе определения 12.1 была высказана А.В. Болсиновым и А.Т. Фоменко в феврале 2000 г. на научном семинаре в МГУ при обсуждении результатов диссертации [15]. Теорема 12.1 показывает, что динамические системы с силовым полем (8.2) включаются в рамки такой теории. Однако не исключается и возможность обнаружения каких-то новых динамических систем, не охватываемых формулой (8.2). Здесь уместно сравнение с теорией обобщенных функций, когда сужение класса основных функций приводит к расширению класса обобщенных функций. Сужая класс начальных гиперповерхностей в конструкции нормального сдвига $f_t: S \rightarrow S_t$ до одноточечных множеств, мы имеем шанс расширить класс динамических систем, обслуживающих сдвиг. Так ли это на самом деле? Ответ на этот вопрос возможен лишь в результате построения соответствующей теории, что выходит за рамки данной публикации.

§ 13. О проблемах метризуемости

Вопросы метризуемости возникли на самом начальном этапе построения теории динамических систем, допускающих нормальный сдвиг, в порядке проверки теории на нетривиальность. Было замечено (см. [5] и [7]), что если метрика $\tilde{\mathbf{g}}$ конформно эквивалентна основной метрике $\mathbf{g}$ многообразия M , т.е. если

$$\tilde{\mathbf{g}} = e^{-2f} \mathbf{g}, \quad (13.1)$$

то геодезический поток метрики $\tilde{\mathbf{g}}$ является динамической системой, допускающей нормальный сдвиг относительно метрики $\mathbf{g}$. Ее силовое поле имеет вид

$$F_k = -|\mathbf{v}|^2 \nabla_k f + 2 \sum_{s=1}^n \nabla_s f v^s v_k. \quad (13.2)$$

Здесь ∇f – градиент скалярного поля f , определяющего конформный множитель e^{-2f} в формуле (13.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1. Ньютоновская динамическая система на римановом многообразии M называется *метризуемой*, если она наследует траектории динамической системы с силовым полем (13.2).

Наследование траекторий и траекторная эквивалентность двух динамических систем понимаются в смысле следующих определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.2. Пусть на римановом многообразии M заданы две ньютоновские динамические системы с силовыми полями $\mathbf{F}$ и $\tilde{\mathbf{F}}$. Скажем, что вторая динамическая система *наследует траектории первой*, если всякая траектория второй системы как линия (с точностью до регулярной репараметризации) совпадает с траекторией первой динамической системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.3. Две ньютоновские динамические системы на римановом многообразии M , наследующие траектории друг друга, называются *траекторно эквивалентными*.

Отметим, что определения 13.2 и 13.3 несколько отличаются от соответствующих определений, использованных в работах [52]–[58]. Они более специализированы и приспособлены к случаю ньютоновских динамических систем, имеющих общее конфигурационное пространство.

Метризуемые динамические системы тривиальны с точки зрения теории нормального сдвига. Нормальный сдвиг вдоль траекторий таких систем по существу сводится к геодезическому нормальному сдвигу. Поэтому в работах [5] и [9] решалась проблема описания всех метризуемых ньютоновских динамических систем, допускающих нормальный сдвиг, а в работе [13] строились примеры неметризуемых систем. Основной результат работ [5] и [9] формулируется в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 13.1. *Ньютоновская динамическая система, допускающая нормальный сдвиг гиперповерхностей на римановом многообразии M с метрикой $\mathbf{g}$, метризуема конформно-эквивалентной метрикой $\tilde{\mathbf{g}} = e^{-2f}\mathbf{g}$ тогда и только тогда, когда силовое поле $\mathbf{F}$ этой динамической системы имеет вид*

$$F_k = -|\mathbf{v}|^2 \nabla_k f + 2 \sum_{s=1}^n \nabla_s f v^s v_k + \frac{H(v e^{-f}) e^f}{|\mathbf{v}|} v_k,$$

где $H = H(v)$ – некоторая произвольная функция одной переменной.

Теорема 13.1 решила проблему описания динамических систем, допускающих нормальный сдвиг и метризуемых посредством конформно-эквивалентной метрики. Однако требование конформной эквивалентности метрик $\tilde{\mathbf{g}}$ и $\mathbf{g}$ в этой теореме является *априорным*. От этого априорного требования можно отказаться. Тогда геодезическому потоку метрики $\tilde{\mathbf{g}}$ в метрике $\mathbf{g}$ будет соответствовать менее специальное силовое поле вида

$$F^k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\Gamma_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ij}^k) v^i v^j. \quad (13.3)$$

Можно пойти еще дальше – можно вообще отказаться от метрики $\tilde{\mathbf{g}}$, считая $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ в формуле (13.3) компонентами некоторой произвольной симметричной аффинной связности в M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.4. Ньютоновская динамическая система на римановом многообразии M называется *метризуемой геодезическим потоком* аффинной связности $\tilde{\Gamma}$ в M , если она наследует траектории этого геодезического потока.

ТЕОРЕМА 13.2. *Ньютоновская динамическая система на римановом многообразии M размерности $n \geq 3$, допускающая нормальный сдвиг, метризуется геодезическим потоком некоторой аффинной связности $\tilde{\Gamma}$ в том и только том случае, когда эта связность локально является метрической связностью для некоторой метрики $\tilde{\mathbf{g}} = e^{-2f}\mathbf{g}$, которая конформно эквивалентна исходной метрике $\mathbf{g}$ многообразия M .*

Другими словами, если нашлась ньютоновская динамическая система, которая наследует траектории геодезического потока аффинной связности $\tilde{\Gamma}$ и одновременно является допускающей нормальный сдвиг, то связность $\tilde{\Gamma}$ с необходимостью является метрической связностью для некоторой метрики $\tilde{\mathbf{g}} = e^{-2f}\mathbf{g}$. И наоборот, если $\tilde{\Gamma}$ определяется метрикой $\tilde{\mathbf{g}} = e^{-2f}\mathbf{g}$, то существуют динамические системы, допускающие нормальный сдвиг и наследующие траектории геодезического потока для $\tilde{\Gamma}$. Впрочем, обратное утверждение теоремы очевидно, поскольку геодезический поток для метрики $\tilde{\mathbf{g}} = e^{-2f}\mathbf{g}$ допускает нормальный сдвиг в метрике $\mathbf{g}$.

Теорема 13.2 показывает, что априорное предположение о конформной эквивалентности метрик $\tilde{\mathbf{g}}$ и $\mathbf{g}$, сделанное в работах [5] и [9] при первоначальном рассмотрении проблемы метризуемости, не является существенным ограничением. Доказательство теоремы 13.2 основано на следующем факте, который доказан в работе [5].

ТЕОРЕМА 13.3. Пусть силовое поле $\mathbf{F}$ первой ньютоновской динамической системы на римановом многообразии M является однородной функцией степени 2 относительно компонент вектора $\mathbf{v}$ в слоях касательного расслоения TM . Вторая ньютоновская динамическая система наследует траектории первой тогда и только тогда, когда ее силовое поле $\tilde{\mathbf{F}}$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{F}}(p, \mathbf{v}) = \mathbf{F}(p, \mathbf{v}) + \frac{H(p, \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{v}.$$

Компоненты силового поля (13.3) являются квадратичными функциями компонент вектора скорости. Поэтому для силового поля ньютоновской динамической системы, наследующей траектории геодезического потока аффинной связности $\tilde{\Gamma}$, из теоремы 13.3 вытекает формула

$$F^k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\Gamma_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ij}^k) v^i v^j + H N^k. \quad (13.4)$$

Дальнейший ход доказательства теоремы 13.2 мог бы состоять в подстановке (13.4) в уравнения нормальности (3.1) и (3.2). Но это ведет к крайне громоздким вычислениям. Здесь мы дадим более простое доказательство этой теоремы, основанное на сравнении формул (13.4) и (8.2). Положим $M_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$. Величины M_{ij}^k являются компонентами некоторого (не расширенного) тензорного поля $\mathbf{M}$ на многообразии M . Его называют полем *деформации* (или полем *вариации*) связности Γ . Теперь формула (13.4) запишется так:

$$F^k = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^k v^i v^j + H N^k. \quad (13.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 13.2. Свернем обе части формулы (13.5) с компонентами ортогонального проектора $\mathbf{P}$ из (4.3). Это сразу же исключает слагаемое, содержащее скалярную функцию $H = H(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$:

$$\sum_{k=1}^n P_k^q F^k = - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_k^q M_{ij}^k v^i v^j. \quad (13.6)$$

Аналогичная свертка в формуле (8.2) исключает вхождение функции $h(W)$:

$$\sum_{k=1}^n P_k^q F^k = -|\mathbf{v}|^2 \sum_{k=1}^n P_k^q U^k(x^1, \dots, x^n, W). \quad (13.7)$$

Через $U^k = U^k(x^1, \dots, x^n, |\mathbf{v}|)$ в (13.7) обозначены следующие величины:

$$U^k = \sum_{i=1}^n \frac{g^{ki} V_i(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, |\mathbf{v}|))}{|\mathbf{v}|}. \quad (13.8)$$

Из (3.10) видим, что U^k – компоненты расширенного векторного поля $\mathbf{U}$, которое является послойно сферически симметричным (см. определение 5.1 выше). Сравним соотношения (13.7) и (13.6). Их левые части совпадают. Поэтому мы можем приравнять правые части этих соотношений:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_k^q M_{ij}^k v^i v^j = |\mathbf{v}|^2 \sum_{k=1}^n P_k^q U^k. \quad (13.9)$$

Полученное соотношение замечательно тем, что зависимость от компонент вектора $\mathbf{v}$ в нем почти явная. Действительно, величины M_{ij}^k от $\mathbf{v}$ не зависят, а величины U^k зависят лишь от модуля вектора скорости. Фиксируем точку $p \in M$, что эквивалентно фиксации локальных координат $x^1, \dots, x^n$, и перепишем соотношение (13.9) в векторной форме:

$$\mathbf{P}(\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - |\mathbf{v}|^2 \cdot \mathbf{U}) = 0. \quad (13.10)$$

Здесь $\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ – векторнозначная квадратичная форма, определяемая тензором $\mathbf{M}$ при его двукратном свертывании с вектором $\mathbf{v}$. Заметим, что оператор проектирования $\mathbf{P}$ в (13.10), примененный к выражению $\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - |\mathbf{v}|^2 \cdot \mathbf{U}$, дает нуль. Следовательно, (13.10) можно записать так:

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - |\mathbf{v}|^2 \cdot \mathbf{U}(|\mathbf{v}|) = \lambda(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}. \quad (13.11)$$

Вектор $\mathbf{U} = \mathbf{U}(|\mathbf{v}|)$ в (13.11) зависит лишь от модуля вектора скорости, а скаляр $\lambda = \lambda(\mathbf{v})$ может содержать полномасштабную зависимость от $\mathbf{v}$. Исследуем эту зависимость. Рассмотрим векторы $\mathbf{U}(|\mathbf{v}|)$ и $\mathbf{U}(|\alpha \cdot \mathbf{v}|)$, где α – число. Напомним, что в теореме 13.2 рассматривается многомерный случай $n \geq 3$. В пространстве размерности $n \geq 3$ вектор $\mathbf{v}$ можно повернуть так, чтобы он не принадлежал линейной оболочке векторов $\mathbf{U}(|\mathbf{v}|)$ и $\mathbf{U}(|\alpha \cdot \mathbf{v}|)$, при этом сохранив $|\mathbf{v}|$ неизменным. Подставим $\alpha \cdot \mathbf{v}$ вместо $\mathbf{v}$ в равенство (13.11):

$$\alpha^2 \cdot \mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \alpha^2 |\mathbf{v}|^2 \cdot \mathbf{U}(|\alpha \cdot \mathbf{v}|) = \alpha \lambda(\alpha \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}. \quad (13.12)$$

Умножим обе части (13.11) на α^2 и вычтем полученное равенство из (13.12). Это приводит к следующему соотношению:

$$\alpha |\mathbf{v}|^2 \cdot (\mathbf{U}(|\alpha \cdot \mathbf{v}|) - \mathbf{U}(|\mathbf{v}|)) + (\lambda(\alpha \cdot \mathbf{v}) - \alpha \lambda(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (13.13)$$

Для случая, когда вектор скорости $\mathbf{v}$ не принадлежит линейной оболочке векторов $\mathbf{U}(|\mathbf{v}|)$ и $\mathbf{U}(|\alpha \cdot \mathbf{v}|)$, из равенства (13.13) получаем

$$\mathbf{U}(|\alpha \cdot \mathbf{v}|) = \mathbf{U}(|\mathbf{v}|), \quad (13.14)$$

$$\lambda(\alpha \cdot \mathbf{v}) = \alpha \lambda(\mathbf{v}). \quad (13.15)$$

Впрочем, равенство (13.14) справедливо и в том случае, когда $\mathbf{v}$ принадлежит линейной оболочке векторов $\mathbf{U}(|\mathbf{v}|)$ и $\mathbf{U}(|\alpha \cdot \mathbf{v}|)$, поскольку $\mathbf{U}$ зависит от $|\mathbf{v}|$, но не

зависит от направления этого вектора. Подстановка (13.14) обратно в (13.13) доказывает выполнение (13.15) для всех $\mathbf{v} \neq 0$. При $\mathbf{v} = 0$ значение $\lambda(\mathbf{v})$ формулой (13.11) не определяется. Поэтому можно доопределить функцию $\lambda(\mathbf{v})$, полагая $\lambda(0) = 0$. Это снимает ограничение $\mathbf{v} \neq 0$ в формуле (13.15).

В силу (13.14) вектор $\mathbf{U}$ вообще не зависит от $\mathbf{v}$. Поэтому левая часть (13.11) есть квадратичная функция по $\mathbf{v}$. Равенство (13.11) можно переписать так:

$$\mathbf{K}(\mathbf{v}) = \mathbf{K}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}. \quad (13.16)$$

Любая квадратичная по $\mathbf{v}$ функция удовлетворяет легко проверяемому тождеству: $\mathbf{K}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{K}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 2 \cdot \mathbf{K}(\mathbf{v}_1) + 2 \cdot \mathbf{K}(\mathbf{v}_2)$. Подставив в него (13.16), получаем следующее равенство для функции λ :

$$\lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \lambda(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 2\lambda(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 + 2\lambda(\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2.$$

Если векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ линейно независимы, то полученное векторное равенство приводит к двум скалярным равенствам

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \lambda(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) &= 2\lambda(\mathbf{v}_1), \\ \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \lambda(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) &= 2\lambda(\mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

Сложим их и разделим результат на два. В итоге получится соотношение

$$\lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda(\mathbf{v}_1) + \lambda(\mathbf{v}_2). \quad (13.17)$$

Если векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ линейно зависимы, то выполнение соотношения (13.17) вытекает из (13.15). Соотношения (13.15) и (13.17) означают, что $\lambda(\mathbf{v})$ есть линейная функция по $\mathbf{v}$.

Итак, $\lambda(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \mid \mathbf{\Lambda})$, где $\mathbf{\Lambda}$ – некоторое (не расширенное) векторное поле на M . Применительно к функции $\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ в (13.11) это дает

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^2 \cdot \mathbf{U} + (\mathbf{v} \mid \mathbf{\Lambda}) \cdot \mathbf{v}. \quad (13.18)$$

Выше мы доказали, что $\mathbf{U}$ не зависит от $\mathbf{v}$. Поэтому $\mathbf{U}$ есть также некоторое (не расширенное) векторное поле на M . Вернемся к (13.8) и запишем это равенство в ковариантных компонентах вектора $\mathbf{U}$:

$$U_i(x^1, \dots, x^n) |\mathbf{v}| = V_i(x^1, \dots, x^n, W(x^1, \dots, x^n, |\mathbf{v}|)).$$

Величина $|\mathbf{v}|$ играет роль независимой переменной в этом равенстве. Сделаем подстановку $|\mathbf{v}| = V(x^1, \dots, x^n, w)$ и учтем соотношения (7.12). Это дает

$$U_i(x^1, \dots, x^n) V(x^1, \dots, x^n, w) = V_i(x^1, \dots, x^n, w).$$

Теперь учтем соотношения (7.13). Их учет показывает, что $U_i(x^1, \dots, x^n)$ есть логарифмическая производная функции $V(x^1, \dots, x^n, w)$, причем такая логарифмическая производная не зависит от переменной w :

$$U_i(x^1, \dots, x^n) = \frac{\partial \ln(V(x^1, \dots, x^n, w))}{\partial x^i}. \quad (13.19)$$

Из соотношения (13.19) вытекает существование (по крайней мере, локально) функции $f = f(x^1, \dots, x^n)$ и функции $\rho = \rho(w)$ таких, что

$$\begin{aligned} U_i &= \nabla_i f = \frac{\partial f(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i}, \\ V &= \exp(f(x^1, \dots, x^n))\rho(w). \end{aligned} \quad (13.20)$$

За счет калибровочного преобразования (8.3) функцию $V = V(x^1, \dots, x^n, w)$ в (13.20) можно привести к следующему виду:

$$V = \exp(f(x^1, \dots, x^n))w. \quad (13.21)$$

Подставим функцию (13.21) в формулу (8.2) для компонент силового поля $\mathbf{F}$:

$$F_k = h(|\mathbf{v}|e^{-f})e^f N_k + \sum_{i=1}^n |\mathbf{v}|^2 U_i (2N^i N_k - \delta_k^i). \quad (13.22)$$

Сравним формулу (13.22) с формулой (13.5) и учтем полученное выше соотношение (13.18) для тензорного поля $\mathbf{M}$. Это дает

$$\frac{H - h(|\mathbf{v}|e^{-f})e^f}{|\mathbf{v}|^2} = (2\mathbf{U} + \mathbf{\Lambda} \mid \mathbf{N}). \quad (13.23)$$

Здесь $\mathbf{N}$ – единичный вектор, направленный вдоль вектора скорости. Заметим, что левая часть (13.23) зависит только от модуля вектора $\mathbf{v}$, а правая часть – только от направления этого вектора. Поэтому из (13.23) вытекает

$$H = h(|\mathbf{v}|e^{-f})e^f, \quad \mathbf{\Lambda} = -2\mathbf{U}. \quad (13.24)$$

Соотношения (13.20) и (13.24) полностью определяют компоненты тензорного поля $\mathbf{M}$. Для компонент связности $\tilde{\Gamma}$ это дает

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \nabla_i f \delta_j^k - \nabla_j f \delta_i^k + \sum_{q=1}^n g^{kq} \nabla_q f g_{ij}. \quad (13.25)$$

Подстановка (13.25) в (13.3) приводит к силовому полю (13.2). Силовое поле (13.2) соответствует геодезическому потоку метрической связности для метрики $\tilde{\mathbf{g}} = e^{-2f} \mathbf{g}$. Тем самым, теорема 13.2 полностью доказана.

Автор выражает благодарность А. Т. Фоменко и В. С. Владимирову за возможность изложить результаты диссертации [15] на научных семинарах в МГУ и в Математическом институте им. В. А. Стеклова. Автор признателен участникам этих семинаров за внимание к работе и полезную дискуссию. Автор особо признателен А. Т. Фоменко и А. В. Болсинову, задавшим несколько вопросов, которые оказались весьма стимулирующими. Ответ на один из этих вопросов получен в данной статье (см. выше). Автор также выражает признательность А. В. Болсинову за помощь в установлении контактов с геометрами из Москвы и Санкт-Петербурга.

Список литературы

1. *Boldin A. Yu., Sharipov R. A.* Dynamical systems accepting the normal shift // Preprint № 0001-M. Ufa: Bashkir State Univ., 1993.
2. *Болдин А. Ю., Шарипов Р. А.* Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг // ТМФ. 1993. Т. 97. № 3. С. 386–395; <http://xxx.lanl.gov/abs/chaos-dyn/9403003>.
3. *Болдин А. Ю., Шарипов Р. А.* Многомерные динамические системы, допускающие нормальный сдвиг // ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 264–269; <http://xxx.lanl.gov/abs/patt-sol/9404001>.
4. *Болдин А. Ю., Шарипов Р. А.* Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 2. С. 165–167.
5. *Шарипов Р. А.* Проблема метризуемости динамических систем, допускающих нормальный сдвиг // ТМФ. 1994. Т. 101. № 1. С. 85–93; <http://xxx.lanl.gov/abs/solv-int/9404003>.
6. *Болдин А. Ю., Дмитриева В. В., Сафин С. С., Шарипов Р. А.* Динамические системы на римановых многообразиях, допускающие нормальный сдвиг // ТМФ. 1995. Т. 105. № 2. С. 256–266; <http://xxx.lanl.gov/abs/hep-th/9405021>.
7. *Болдин А. Ю., Бронников А. А., Дмитриева В. В., Шарипов Р. А.* Условия полной нормальности для динамических систем на римановых многообразиях // ТМФ. 1995. Т. 103. № 2. С. 267–275; <http://xxx.lanl.gov/abs/astro-ph/9405049>.
8. *Boldin A. Yu.* On the self-similar solutions of normality equation in two-dimensional case // Dynamical systems accepting the normal shift. Ufa: Bashkir State Univ., 1994. P. 31–39; <http://xxx.lanl.gov/abs/patt-sol/9407002>.
9. *Шарипов Р. А.* Метризуемость динамических систем конформно-эквивалентной метрикой // ТМФ. 1995. Т. 105. № 2. С. 276–282.
10. *Шарипов Р. А.* Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 105.
11. *Sharipov R. A.* Higher dynamical systems accepting the normal shift // Dynamical systems accepting the normal shift. Ufa: Bashkir State Univ., 1994. P. 41–65.
12. *Дмитриева В. В.* Об эквивалентности двух форм записи уравнений нормальности для динамических систем $\mathbb{R}^n$ // Интегрируемость в динамических системах. Уфа: Ин-т матем. БНЦ УрО РАН, 1994. С. 5–16.
13. *Bronnikov A. A., Sharipov R. A.* Axially symmetric dynamical systems accepting the normal shift in $\mathbb{R}^n$ // Интегрируемость в динамических системах. Уфа: Ин-т матем. БНЦ УрО РАН, 1994. С. 62–69.
14. *Болдин А. Ю., Шарипов Р. А.* О решении уравнений нормальности в размерности $n \geq 3$ // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 4. С. 37–62; <http://xxx.lanl.gov/abs/solv-int/9610006>.
15. *Шарипов Р. А.* Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг // Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук, 1999; пер. <http://xxx.lanl.gov/abs/math.DG/0002202>.
16. *Болдин А. Ю.* Двумерные динамические системы, допускающие нормальный сдвиг // Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, 2000; пер. <http://xxx.lanl.gov/abs/math.DG/0011134>.
17. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
18. *Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1985.
19. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Т. 1. М.: Наука, 1986.
20. *Шарипов Р. А.* Курс дифференциальной геометрии. Уфа: Изд-во БашГУ, 1996.
21. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984.
22. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
23. *Liouville R.* Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications // J. École Polytechnique. 1889. V. 59. P. 7–88.
24. *Tresse M. A.* Determination des invariants ponctuels de l'équation différentielle du second ordre $y'' = w(x, y, y')$. Leiptzig: Hirzel, 1896.

25. *Cartan E.* Sur les varietes a connection projective // Bull. Soc. Math. France. 1924. V. 52. P. 205–241.
26. *Cartan E.* Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativite generalisee // Ann. Sci. École Norm. 1923. V. 40. P. 325–412; 1924. V. 41. P. 1–25; 1925. V. 42. P. 17–88.
27. *Cartan E.* Sur les espaces a connexion conforme // Ann. Soc. Math. Pologne. 1923. V. 2. P. 171–221.
28. *Карпан Э.* Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд-во КГУ, 1962.
29. *Bol G.* Über topologische Invarianten von zwei Kurvenscharen in Raum // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1932. V. 9. №1. P. 15–47.
30. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
31. *Kamran N., Lamb K. G., Shadwick W. F.* The local equivalence problem for $d^2y/dx^2 = F(x, y, dy/dx)$ and the Painleve transcendents // J. Differential Geometry. 1985. V. 22. P. 139–150.
32. *Дрюма В. С.* Геометрическая теория нелинейных динамических систем // Препринт. Кишинев: Матем. ин-т Республики Молдова, 1986.
33. *Дрюма В. С.* О теории подмногообразий проективных пространств, заданных дифференциальными уравнениями // Матем. исследования. № 106. Дифференциальные уравнения и математическая физика. Кишинев: Матем. ин-т Республики Молдова, 1989. С. 79–87.
34. *Романовский Ю. Р.* Вычисление локальных симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом эквивалентности Картана // Матем. заметки. 1996. Т. 60. №1. С. 75–91.
35. *Hsu L., Kamran N.* Classification of ordinary differential equations // Proc. London Math. Soc. 1989. V. 58. P. 387–416.
36. *Grissom C., Thompson G., Wilkens G.* Linearization of second order ordinary differential equations via Cartan's equivalence method // J. Differential Equations. 1989. V. 77. №1. P. 1–15.
37. *Kamran N., Olver P.* Equivalence problems for first order Lagrangians on the line // J. Differential Equations. 1989. V. 80. P. 32–78.
38. *Kamran N., Olver P.* Equivalence of differential operators // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 1172–1185.
39. *Mahomed F. M.* Lie algebras associated with scalar second order ordinary differential equations // J. Math. Phys. 1989. V. 12. P. 2770–2777.
40. *Kamran N., Olver P.* Lie algebras of differential operators and Lie-algebraic potentials // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 145. P. 342–356.
41. *Kamran N., Olver P.* Equivalence of higher order Lagrangians. I. Formulation and reduction // J. Math. Pures Appl. 1991. V. 70. P. 369–391.
42. *Kamran N., Olver P.* Equivalence of higher order Lagrangians. III. New invariant differential equations // Nonlinearity. 1992. V. 5. P. 601–621.
43. *Bocharov A. V., Sokolov V. V., Svinolupov S. I.* On some equivalence problems for differential equations // Preprint ESI-54. Wien, Austria: International Erwin Schrödinger Inst. for Math. Physics, 1993.
44. *Дрюма В. С.* Геометрические свойства многомерных нелинейных дифференциальных уравнений и фазовое пространство динамических систем с финслеровой метрикой // ТМФ. 1994. Т. 99. №2. С. 241–249.
45. *Dmitrieva V. V., Sharipov R. A.* On the point transformations for the second order differential equations // <http://xxx.lanl.gov/abs/solv-int/9703003>.
46. *Sharipov R. A.* On the point transformations for the equation $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$ // <http://xxx.lanl.gov/abs/solv-int/9706003>.
47. *Mikhailov O. N., Sharipov R. A.* On the point expansion for the certain class of differential equations of second order // <http://xxx.lanl.gov/abs/solv-int/9712001>.
48. *Sharipov R. A.* Effective procedure of point classification for the equation $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$ // <http://xxx.lanl.gov/abs/math.DG/9802027>.

49. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1985.
50. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. М.: Наука, 1979.
51. *Норден А. П.* Теория поверхностей. М.: Гостехиздат, 1956.
52. *Болсинов А. В.* О классификации двумерных гамильтоновых систем на двумерных поверхностях // УМН. 1994. Т. 49. № 6. С. 195–196.
53. *Болсинов А. В.* Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, случай систем с плоскими атомами // УМН. 1994. Т. 49. № 3. С. 173–174.
54. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Траекторная классификация интегрируемых систем типа Эйлера в динамике твердого тела // УМН. 1993. Т. 48. № 5. С. 163–164.
55. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. I // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 4. С. 27–80.
56. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. II // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 5. С. 27–78.
57. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем на трехмерных поверхностях постоянной энергии // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 5. С. 553–555.
58. *Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 49–77.

Башкирский государственный университет, г. Уфа
E-mail: R_Sharipov@ic.bashedu.ru, ruslan-sharipov@usa.net

Поступила в редакцию
29.05.2000