Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Беляев, А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 7, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm576>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:25:47

УДК 517.956.226

А. Г. Беляев, А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин

Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием

Рассматривается модельная задача усреднения для эллиптического уравнения второго порядка в периодически перфорированной области с третьим краевым условием (условием Фурье) на границе дырок. В предположении ограниченности коэффициентов граничного оператора и малости соответствующих средних построены ведущие члены асимптотического разложения решения и оценена погрешность.

Библиография: 30 названий.

Введение

Цель настоящей работы – рассмотреть модельную задачу для эллиптического уравнения второго порядка в перфорированной области с третьим краевым условием на границе полостей. В отличие от рассмотренных ранее случаев, в которых компактность семейства решений обеспечивалась малостью соответствующего коэффициента в третьем краевом условии, мы не требуем малости упомянутого коэффициента, а также малости правой части в краевом условии, заменяя их на более слабое условие малости соответствующих средних по поверхности включений.

В настоящее время имеется много математических работ, посвященных асимптотическому анализу задач в перфорированных областях. Различные результаты усреднения получены для периодических, почти-периодических и случайных структур. Подробную библиографию можно найти, например, в [1]–[6]. В частности, задачи с условием Неймана на границе полостей были исследованы в [7], [8], с третьим краевым условием (условием Фурье) на границе полостей были исследованы в [9]–[12], а также в [13]–[15]. Интересные случаи рассмотрены в [16]–[18], где исследуются асимптотики задачи с кривой производной на поверхности полостей и задачи типа Стеклова. Также один интересный случай был рассмотрен в [19]. Особый интерес вызывают задачи, в которых коэффициент третьего краевого условия не является малым. В частном случае, когда задача имеет диссипативный характер, что обеспечивается правильным выбором знака соответствующего коэффициента краевого условия, слабая сходимости решений периодической задачи была исследована в [13], [20], [21]. В работе [11] изучается асимптотическое поведение

Работа второго и третьего авторов частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 98-01-00062). Работа Г. А. Чечкина также частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № № 99-01-00056, 99-01-01143).

спектра краевой задачи с третьим краевым условием на границе полостей, в которых большая диссипация компенсируется за счет введения неограниченно возрастающего потенциала в уравнение.

Применяя метод компенсированной компактности [22], [23] или метод двухмасштабной сходимости [24], [25] (см. также работу [26], где метод двухмасштабной сходимости был адаптирован для перфорированных областей с третьим краевым условием на границе полостей), можно построить предельную задачу и доказать теорему усреднения; но указанные методы не обеспечивают оценок погрешности. В статье мы используем технику асимптотических разложений [27], [28] (см. также [29]), которая требует некоторой регулярности данных и коэффициентов, но позволяет оценить скорость сходимости. Предполагается для простоты, что перфорация имеет чисто периодическую структуру, хотя развитая в статье техника позволяет получить аналогичные результаты и в локально-периодическом случае. Мы также предполагаем, что перфорация не пересекается с внешней границей области.

Постановка третьего краевого условия (условия Фурье) на границе полостей влечет появление нетривиального потенциала в предельном уравнении; в периодическом случае этот потенциал является константой. Подчеркнем, что имеется большое различие между случаем вырождающегося коэффициента в третьем краевом условии (присутствия малого параметра в качестве множителя в коэффициенте) и случаем коэффициента порядка единицы. В первом случае в предельный оператор входит только среднее коэффициента по поверхности отверстия, в то время как осцилляция коэффициента относительно среднего не дает вклада в предельный оператор (см. [14]). Во втором случае (о котором пойдет речь в нашей работе) среднее обязано быть равным нулю (иначе решение быстро вырождается или “взрывается”, и для компенсации этого эффекта необходимо вводить большой параметр в коэффициенты исходного оператора) и нетривиальный потенциал возникает в предельном уравнении благодаря осцилляции. Поэтому задача, включающая коэффициент с нулевым средним, существенно отличается от задачи, содержащей положительный коэффициент в третьем краевом условии.

Вопрос о коэрцитивности рассматриваемого семейства операторов не является в данном случае элементарным. Как было показано в [16], вопрос о коэрцитивности исходной задачи сводится к проверке коэрцитивности формально усредненного оператора. В связи с этим актуальными являются оценки потенциала в усредненном операторе. В статье мы предлагаем метод получения таких оценок с использованием вспомогательной задачи типа Стеклова. Интересно также отметить, что этот потенциал всегда имеет “плохой” знак, т.е. ухудшает коэрцитивные свойства задачи.

Одной из моделей, приводящих к рассматриваемым в работе уравнениям, может служить задача о распределении стационарного теплового поля в пористой среде (см. рис. 1).

§ 1. Постановка задачи

Пусть Ω – гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Обозначим

$$J^\varepsilon = \{j \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(\varepsilon j, \partial\Omega) \geq \varepsilon\sqrt{d}\}, \quad \square \equiv \left\{\xi : -\frac{1}{2} < \xi_j < \frac{1}{2}, j = 1, \dots, d\right\}.$$

Рис. 1. Распределение температуры в перфорированном теле

Задавая 1-периодическую по ξ гладкую функцию $F(\xi)$ такую, что $F(\xi)|_{\xi \in \partial \square} \geq \text{const} > 0$, $F(0) = -1$, $\nabla_{\xi} F \neq 0$ при $\xi \in \square \setminus \{0\}$, определяем

$$Q_j^{\varepsilon} = \left\{ x \in \varepsilon(\square + j) : F\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 0 \right\}$$

и вводим перфорированную область следующим образом:

$$\Omega^{\varepsilon} = \Omega \setminus \bigcup_{j \in J^{\varepsilon}} Q_j^{\varepsilon}.$$

В соответствии с вышеприведенной конструкцией граница $\partial \Omega^{\varepsilon}$ состоит из $\partial \Omega$ и границы включений $S_{\varepsilon} \subset \Omega$, $S_{\varepsilon} = (\partial \Omega^{\varepsilon}) \cap \Omega$.

Обозначим через $Q = \{\xi : -\frac{1}{2} < \xi_j < \frac{1}{2}, j = 1, \dots, d, F(\xi) \leq 0\}$ включение, через $S = \{\xi : F(\xi) = 0\}$ – границу включения Q и через ν – вектор единичной внешней нормали к S в “растянутых” координатах.

Здесь и далее будем предполагать суммирование по повторяющимся индексам. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\varepsilon} u_{\varepsilon} &:= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{kj} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) = f(x) \quad \text{в } \Omega^{\varepsilon}, \\ \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \gamma} + p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_{\varepsilon} + \varepsilon q \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_{\varepsilon} &= g \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad \text{на } S_{\varepsilon}, \\ u_{\varepsilon} &= 0 \quad \text{на } \partial \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \gamma} := a_{kj} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_j} \nu_k^{\varepsilon}$ и $\nu^{\varepsilon} = (\nu_1^{\varepsilon}, \dots, \nu_d^{\varepsilon})$ – вектор единичной внешней нормали к границе включений. Здесь предполагается, что матрица $(a_{kj}(\xi))$ симметрическая положительно определенная, т.е. $\varkappa_1 \eta^2 \leq a_{kj} \eta_k \eta_j \leq \varkappa_2 \eta^2$ для любого вектора η , где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ – положительные константы, и что все функции $a_{kj}(\xi)$, $p(\xi)$, $q(\xi)$ и $g(\xi)$ являются 1-периодическими по $\xi \in \mathbb{R}^d$. Потребуем также, чтобы

$$\langle p(\xi) \rangle_S = \langle g(\xi) \rangle_S = 0, \tag{2}$$

где $\langle \cdot \rangle_S := \int_S \cdot d\sigma$. Для удобства в дальнейшем обозначим оператор краевой задачи (1) символом A^ε .

§ 2. Формальный асимптотический анализ

Будем искать решение в виде формального асимптотического ряда

$$u_\varepsilon(x) \sim u_0(x) + \varepsilon u_1(x, \xi) + \varepsilon^2 u_2(x, \xi) + \dots, \quad \xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3)$$

где все функции $u_i(x, \xi)$ предполагаются периодическими по ξ . Введем обозначение (см. [29])

$$-\mathcal{L}_{\alpha\beta}\varphi(x, \xi) := \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left(a_{kj}(\xi) \frac{\partial \varphi(x, \xi)}{\partial \beta_j} \right), \quad \frac{\partial \varphi(x, \xi)}{\partial \gamma_\alpha} := a_{kj}(\xi) \frac{\partial \varphi(x, \xi)}{\partial \alpha_j} \nu_k;$$

здесь α и β принимают значения x или ξ . Подставляя ряд (3) в задачу (1) и собирая члены одинакового порядка по ε , как в уравнении, так и в граничном условии, получим рекуррентную последовательность задач, старшая из которых имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi\xi} u_1 + \mathcal{L}_{\xi x} u_0 &= 0 \quad \text{в } \square \setminus Q, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \gamma_\xi} + \frac{\partial u_0}{\partial \gamma_x} + p(\xi) u_0 &= g(\xi) \quad \text{на } S. \end{aligned} \quad (4)$$

Интегральное тождество задачи (4) выглядит следующим образом:

$$\int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi + \int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi + \int_S p(\xi) u_0 v d\sigma = \int_S g(\xi) v d\sigma, \quad (5)$$

где $v \in H_{\text{per}}^1(\square \setminus Q)$. Вид интегрального тождества подсказывает нам структуру функции $u_1(x, \xi)$:

$$u_1(x, \xi) = L(\xi) + M(\xi) u_0(x) + N_i(\xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}. \quad (6)$$

Подставляя это выражение в (5) и группируя соответствующие члены, приходим к следующим задачам для функций $N_i(\xi)$, $M(\xi)$ и $L(\xi)$:

$$\int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi + \int_{\square \setminus Q} a_{ki} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi = 0 \quad (7)$$

или, в классической форме,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi\xi}(N_i(\xi) + \xi_i) &= 0 \quad \text{в } \square \setminus Q, \\ \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \gamma_\xi} &= -a_{ki}(\xi) \nu_k \quad \text{на } S, \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, d$;

$$\int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial M}{\partial \xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi + \int_S p(\xi) v d\sigma = 0 \quad (8)$$

или

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi\xi} M(\xi) &= 0 \quad \text{в } \square \setminus Q, \\ \frac{\partial M(\xi)}{\partial \gamma_\xi} &= -p(\xi) \quad \text{на } S \end{aligned}$$

и

$$\int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial L}{\partial \xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi = \int_S g(\xi) v d\sigma \quad (9)$$

или

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi\xi} L(\xi) &= 0 \quad \text{в } \square \setminus Q, \\ \frac{\partial L(\xi)}{\partial \gamma_\xi} &= g(\xi) \quad \text{на } S. \end{aligned}$$

Условие согласования легко проверяется в задаче (7) с помощью интегрирования по частям и следует из (2) в задачах (8) и (9). Заметим, что функции $L(\xi)$, $M(\xi)$ и $N_i(\xi)$ определены с точностью до аддитивной константы, естественным условием нормировки является

$$\langle L \rangle_{\square \setminus Q} = \langle M \rangle_{\square \setminus Q} = \langle N_i \rangle_{\square \setminus Q} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, d.$$

В дальнейшем эти условия предполагаются выполненными.

Следующая степень ε дает нам задачу на $u_2(x, \xi)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi\xi} u_2 + \mathcal{L}_{x\xi} u_1 + \mathcal{L}_{\xi x} u_1 + \mathcal{L}_{xx} u_0 &= -f \quad \text{в } \square \setminus Q, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \gamma_\xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \gamma_x} + p(\xi) u_1 + q(\xi) u_0 &= 0 \quad \text{на } S. \end{aligned} \quad (10)$$

Нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Функции $M(\xi)$ и $N_k(\xi)$ связаны следующим интегральным равенством:*

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_k} \left(\int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial M}{\partial \xi_j} d\xi - \int_S p N_k d\sigma \right) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя $N_i(\xi)$ в качестве пробной функции в тождество (8), получаем

$$\int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial M}{\partial \xi_j} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_k} d\xi + \int_S p(\xi) N_i d\sigma = 0.$$

Аналогично, используя $M(\xi)$ как пробную функцию в тождестве (7), имеем

$$\int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial M}{\partial \xi_k} d\xi + \int_{\square \setminus Q} a_{ki} \frac{\partial M}{\partial \xi_k} d\xi = 0.$$

Из симметричности матрицы $\{a_{kj}\}$ следует, что

$$\int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial M}{\partial \xi_j} d\xi = \int_S p N_k d\sigma.$$

Лемма доказана.

Нам потребуется интегральное тождество задачи (10)

$$\begin{aligned} & \int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi + \int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi + \int_S p(\xi) u_1 v d\sigma + u_0(x) \int_S q(\xi) v d\sigma \\ & - \int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial M}{\partial \xi_j} v d\xi \frac{\partial u_0}{\partial x_k} - \int_{\square \setminus Q} \left(a_{ij} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_j} + a_{ik} \right) v d\xi \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_k} + |\square \setminus Q| f = 0. \end{aligned}$$

Условие разрешимости задачи (10) приводит к уравнению для функции $u_0(x)$, являющемуся искомым формальным усредненным (предельным) уравнением. Применяя лемму 1, перепишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \hat{a}_{kj} \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_k \partial x_j} - u_0(x) \left(\int_S q(\xi) d\sigma + \int_S p(\xi) M(\xi) d\sigma \right) \\ & = |\square \setminus Q| f(x) + \int_S g(\xi) M(\xi) d\sigma, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\hat{a}_{ik} := \int_{\square \setminus Q} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial N_k(\xi)}{\partial \xi_j} + a_{ik}(\xi) \right) d\xi.$$

Таким образом, усредненная задача имеет вид

$$\begin{aligned} & \hat{a}_{kj} \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_k \partial x_j} - \langle q \rangle_S u_0(x) + m u_0(x) = |\square \setminus Q| f(x) + l \quad \text{в } \Omega, \\ & u_0(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (12)$$

где $m := -\langle pM \rangle_S$, $l := \langle pL \rangle_S = -\langle gM \rangle_S$. Символом $\hat{A}$ обозначим оператор краевой задачи (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следует отметить, что коэрцитивность предельного оператора (12) является деликатной проблемой, поскольку константа m , как будет показано ниже, всегда положительна. В частности, корректность задачи (12), связанная с коэрцитивностью оператора, обеспечивается неравенством $m - \langle q \rangle_S < \lambda_0$, где λ_0 – первое собственное значение оператора $\hat{a}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$.

§3. Основные утверждения и оценки

В этом параграфе получены оценки усредненного потенциала в (12), затем сформулирован основной результат работы.

Рассмотрим следующую вспомогательную спектральную задачу типа Стеклова

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(a_{kj}(\xi) \frac{\partial \theta}{\partial \xi_j} \right) &= 0 \quad \text{в } \square \setminus Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} &= \Upsilon \theta \quad \text{на } S, \\ \langle \theta \rangle_S &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

заданную в пространстве 1-периодических по ξ функций. И пусть Υ_1 – первое собственное значение этой задачи, которое может быть найдено по формуле

$$\Upsilon_1 = \inf_{\substack{\psi \in H_{\text{per}}^1(\square) \setminus \{0\} \\ \langle \psi \rangle_S = 0}} \frac{a(\psi, \psi)}{\langle \psi^2 \rangle_S},$$

где $a(u, v) := \int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi$.

Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 2. *Константа m положительна. Более того, имеет место следующая оценка*

$$\langle p^2 \rangle_S \frac{\langle p^2 \rangle_S}{a(p, p)} \leq m \leq \frac{\langle p^2 \rangle_S}{\Upsilon_1}. \tag{14}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что равенство в выражении (14) достигается на функциях $p(\xi)$, принадлежащих собственному подпространству задачи (13), соответствующему первому собственному значению Υ_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая $M(\xi)$ в качестве пробной функции в задаче (8), имеем

$$\int_{\square \setminus Q} a_{kj} \frac{\partial M}{\partial \xi_j} \frac{\partial M}{\partial \xi_k} d\xi + \int_S p(\xi) M d\sigma = 0.$$

Таким образом,

$$m = -\langle pM \rangle_S = \left\langle a_{kj} \frac{\partial M}{\partial \xi_j} \frac{\partial M}{\partial \xi_k} \right\rangle_{\square \setminus Q} > 0,$$

если $M \neq 0$. Следует отметить, что M равна нулю тождественно, если только p тождественно равна нулю.

Рассмотрим вариационную задачу

$$\inf_{\psi \in H_{\text{per}}^1(\square)} H(\psi) \equiv \inf_{\psi \in H_{\text{per}}^1(\square)} \{a(\psi, \psi) + 2\langle p\psi \rangle_S\}. \tag{15}$$

Из интегрального тождества (8) следует, что инфимум в (15) достигается на функции M . Отсюда следует

$$- \inf_{\psi \in H_{\text{per}}^1(\square)} \{a(\psi, \psi) + 2\langle p\psi \rangle_S\} = -a(M, M) - 2\langle pM \rangle_S = -\langle pM \rangle_S = m.$$

Подставляя $\psi = -tp$ в функционал $H(\psi)$, получаем

$$H(-tp) = t^2 a(p, p) - 2t\langle p^2 \rangle_S.$$

Чтобы найти минимум по t функции $H(-tp)$, мы решаем уравнение $0 = H'_t(-tp) = 2t_0 a(p, p) - 2\langle p^2 \rangle_S$. Получаем

$$t_0 = \frac{\langle p^2 \rangle_S}{a(p, p)}$$

и, следовательно,

$$H(-t_0 p) = \frac{(\langle p^2 \rangle_S)^2}{a(p, p)} - 2\frac{(\langle p^2 \rangle_S)^2}{a(p, p)} = -\frac{(\langle p^2 \rangle_S)^2}{a(p, p)}.$$

Таким образом, доказано первое из неравенств (14).

Подставляя $\psi = -t\varphi$ и используя аналогичную процедуру, получаем

$$H(-t_0 \varphi) = -\frac{(\langle p\varphi \rangle_S)^2}{a(\varphi, \varphi)}.$$

Поскольку

$$m = \sup_{\varphi \in H_{\text{per}}^1(\square)} \frac{(\langle p\varphi \rangle_S)^2}{a(\varphi, \varphi)} \quad (16)$$

и супремум достигается при $\varphi = M$, то для произвольного φ мы получаем $m \geq \frac{(\langle p\varphi \rangle_S)^2}{a(\varphi, \varphi)}$. Из (16) следует, что

$$\frac{1}{m} = \inf_{\varphi \in H_{\text{per}}^1(\square) \setminus \{0\}} \frac{a(\varphi, \varphi)}{(\langle p\varphi \rangle_S)^2} \geq \inf_{\substack{\varphi \in H_{\text{per}}^1(\square) \setminus \{0\} \\ \langle \varphi \rangle_S = 0}} \frac{a(\varphi, \varphi)}{\langle p^2 \rangle_S \langle \varphi^2 \rangle_S} = \frac{\Upsilon_1}{\langle p^2 \rangle_S}.$$

Окончательно

$$m \leq \frac{\langle p^2 \rangle_S}{\Upsilon_1},$$

где Υ_1 – первое собственное значение задачи (13). Тем самым доказано второе из неравенств (14). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для того чтобы дать простое объяснение положительности коэффициента m в уравнении (12), модифицируем задачу (1), поставив краевое условие Неймана на внешней границе области, и положим для простоты $q \equiv 0$. Тогда $-m$ является первым собственным значением предельной задачи, которое в силу вариационного принципа совпадает с энергией основного состояния.

Таким образом, принимая во внимание сходимость спектров и энергий допредельной задачи к спектру и энергии усредненной задачи, достаточно проверить отрицательность энергии основного состояния в допредельной задаче. Подстановка константы в вариационную формулу дает нуль, следовательно, соответствующий инфимум отрицателен, что и влечет отрицательность $-m$.

Следующая теорема обосновывает построенную асимптотику решения задачи (1) и дает оценку остаточного члена.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x) \in H^1(\Omega)$, а $p(\xi)$, $q(\xi)$ и $g(\xi)$ являются 1-периодическими C^1 -функциями. Предположим также, что

$$m < \lambda_0 + \langle q \rangle_S, \quad (17)$$

где λ_0 определено в замечании 1.

Тогда при всех достаточно малых ε задача (1) имеет единственное решение и справедлива следующая оценка

$$\|u_0 + \varepsilon u_1 - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq K_1 \sqrt{\varepsilon} \quad (18)$$

с не зависящей от ε константой $K_1 > 0$. Здесь u_0 – решение задачи (12), u_1 имеет вид (6) с функциями $L(\xi)$, $M(\xi)$ и $N_i(\xi)$, построенными в (7), (8) и (9) соответственно.

§ 4. Предварительные леммы

Этот параграф посвящен различным техническим утверждениям, которые будут использованы при дальнейшем анализе. Доказательства первых двух лемм можно найти в [14], [30], поэтому здесь будут даны только их формулировки.

ЛЕММА 3. Пусть $\zeta(x, \xi)$ – достаточно гладкая 1-периодическая по ξ функция, и пусть

$$Z(x) \equiv \int_S \zeta(x, \xi) d\sigma, \quad (19)$$

тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega^\varepsilon} Z(x) u(x) v(x) dx - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \zeta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) u(x) v(x) ds \right| \\ & \leq C_2 \varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \end{aligned} \quad (20)$$

для любых $u(x), v(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$; константа C_2 не зависит от ε .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Подобные оценки были получены также в работах [11], [12], [16].

Утверждение, приводимое ниже, является, по сути, модификацией предыдущей леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $\zeta(x, \xi)$ – достаточно гладкая 1-периодическая функция и

$$\int_{\square \setminus Q} \zeta(x, \xi) d\xi \equiv 0, \quad (21)$$

тогда справедлива оценка

$$\left| \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega^\varepsilon} \zeta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) u(x) v(x) dx \right| \leq C_3 \varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$$

для любых $u(x), v(x) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$; константа C_3 не зависит от ε .

Пусть λ_0 определено так же, как в замечании 1. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 5. Если $m < \lambda_0 + \langle q \rangle_S$, то задача (12) коэрцитивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя вариационные свойства оператора $\widehat{A}$, приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{v \in \mathring{H}^1(\Omega) \\ \|v\|_{L_2(\Omega)}=1}} (-\widehat{A}v, v)_{L_2(\Omega)} &= \inf_{\substack{v \in \mathring{H}^1(\Omega) \\ \|v\|_{L_2(\Omega)}=1}} \int_{\Omega} \left(\widehat{a}_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + (\langle q \rangle_S - m) v^2 \right) dx \\ &= \inf_{\substack{v \in \mathring{H}^1(\Omega) \\ \|v\|_{L_2(\Omega)}=1}} \int_{\Omega} \widehat{a}_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + (\langle q \rangle_S - m) \\ &= \lambda_0 + \langle q \rangle_S - m. \end{aligned}$$

Тем самым в условиях леммы

$$(-\widehat{A}v, v)_{L_2(\Omega)} \geq C_4 \|v\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad C_4 > 0,$$

что завершает доказательство.

Следующее утверждение, фактически, является модифицированной версией леммы 3. Мы здесь не требуем периодичности функций u и v и предполагаем, что $\square$ – это любая из ячеек периодичности функции $p(\xi)$.

ЛЕММА 6. Если $\langle p \rangle_S = 0$, то справедливо следующее неравенство

$$\left| \int_S p(\xi) u(\xi) v(\xi) d\sigma \right| \leq C_5 (\|\nabla u\|_{L_2(\square)} \|v\|_{L_2(\square)} + \|u\|_{L_2(\square)} \|\nabla v\|_{L_2(\square)}) \quad (22)$$

для любых $u(\xi), v(\xi) \in H^1(\square)$; константа C_5 не зависит от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что задача

$$\begin{aligned}\Delta_\xi \Psi(\xi) &= 0 \quad \text{в } \square \setminus Q, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} &= p(\xi) \quad \text{на } S, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \partial \square\end{aligned}\tag{23}$$

разрешима. Более того, это решение единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Умножим уравнение задачи (23) на функцию uv , где $u(\xi), v(\xi) \in H^1(\square)$, и проинтегрируем по области $\square \setminus Q$. Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned}\left| \int_S p(\xi) u(\xi) v(\xi) d\sigma \right| &= \left| \int_{\square \setminus Q} \Delta_\xi \Psi(\xi) u(\xi) v(\xi) d\xi - \int_S p(\xi) u(\xi) v(\xi) d\sigma \right| \\ &\leq \left| \int_{\square \setminus Q} ((\nabla_\xi \Psi(\xi)), \nabla_\xi (u(\xi) v(\xi))) d\xi \right| \\ &\leq C_5 (\|\nabla u\|_{L_2(\square)} \|v\|_{L_2(\square)} + \|u\|_{L_2(\square)} \|\nabla v\|_{L_2(\square)}).\end{aligned}\tag{24}$$

Лемма доказана.

Равномерная по ε коэрцитивность билинейной формы в интегральном тождестве задачи (1) является предметом леммы 7, из которой, в частности, следует, что задача (1) корректно поставлена.

ЛЕММА 7. *Коэрцитивность усредненной задачи (12) влечет коэрцитивность исходной задачи (1) при всех достаточно малых ε .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что

$$\int_{S_\varepsilon} p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^2(x) ds \leq C_6 \left(\alpha \int_{\Omega^\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega^\varepsilon} u^2 dx \right)\tag{25}$$

для любого $\alpha > 0$. Действительно, используя лемму 6, имеем

$$\left| \int_S p(\xi) u^2(\xi) d\sigma \right| \leq 2C_5 \|\nabla u\|_{L_2(\square)} \|u\|_{L_2(\square)} \leq C_7 \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} \int_\square |\nabla u|^2 d\xi + \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_\square u^2 d\xi \right).$$

Теперь, переходя к координатам $x = \varepsilon \xi$ и суммируя по всем ячейкам, получаем искомое неравенство (см. также [11], [12]).

Докажем, что найдется достаточно большое Λ , не зависящее от ε , такое, что оператор краевой задачи

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon + \Lambda u_\varepsilon &= -f(x) \quad \text{в } \Omega^\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \gamma} + p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon + \varepsilon q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon &= g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{на } S_\varepsilon, \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \partial \Omega\end{aligned}\tag{26}$$

будет коэрцитивным для любого ε .

Используя леммы 3 и 6, выводим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} a_{ik} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{S_\varepsilon} p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v^2 ds + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v^2 ds + \int_{\Omega^\varepsilon} \Lambda v^2 dx \\ & \geq \kappa_1 \|\nabla v\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}^2 - (C_6 \alpha + O(\varepsilon)) \|\nabla u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}^2 + \left(\langle q \rangle_S - \frac{C_6}{\alpha} + \Lambda \right) \|v\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Выбирая достаточно малое α , а затем достаточно большое Λ , добиваемся положительной определенности квадратичной формы в правой части неравенства (27) и тем самым коэрцитивности.

Рассмотрим следующие спектральные задачи:

$$(-A^\varepsilon + \Lambda)^{-1} u_\varepsilon^k = \lambda_\varepsilon^k u_\varepsilon^k, \quad (28)$$

$$(-\hat{A} + \Lambda)^{-1} u^k = \lambda^k u^k, \quad (29)$$

где A^ε – оператор краевой задачи (1), $\hat{A}$ – оператор усредненной задачи (12).

Принимая во внимание коэрцитивность, доказанную выше, нетрудно проверить, что операторы $(-A^\varepsilon + \Lambda)^{-1}$ и $(-\hat{A} + \Lambda)^{-1}$ удовлетворяют условиям $C1$ – $C4$ теоремы о сходимости спектров семейства операторов, заданных в различных пространствах (см. [4; гл. III, теорема 1.9]). Из этой теоремы, в частности, следует, что $\lambda_\varepsilon^0 \rightarrow \lambda^0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим через μ_ε^0 и μ^0 первые собственные значения операторов $-A^\varepsilon$ и $-\hat{A}$ соответственно. Тогда $\mu_\varepsilon^0 \equiv -\Lambda + 1/\lambda_\varepsilon^0 \rightarrow \mu^0 \equiv -\Lambda + 1/\lambda^0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Отсюда с помощью вариационного принципа следует, что положительная определенность оператора $-\hat{A}$ влечет положительную определенность оператора $-A^\varepsilon$ при всех достаточно малых ε . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Прием, связанный с переходом к вспомогательной задаче смещением по спектру, присутствует в аналогичной ситуации в [16; лемма 3], и, по сути, коэрцитивность задачи (26) следует из результатов этой работы.

§ 5. Обоснование асимптотики

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Нам необходимо оценить H^1 -норму остатка:

$$\|u_0 + \varepsilon u_1 - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Для этого подставим выражение

$$z_\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = u_0(x) + \varepsilon u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - u_\varepsilon(x)$$

в уравнение (1). Это дает равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon \left(z_\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) &= \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_{\xi x} u_0(x) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} + \mathcal{L}_\varepsilon u_0(x) + \varepsilon \mathcal{L}_{xx} u_1(x, \xi) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} \\ &+ \mathcal{L}_{\xi x} u_1(x, \xi) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} + \mathcal{L}_{x\xi} u_1(x, \xi) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_{\xi\xi} u_1(x, \xi) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} - \mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon(x). \end{aligned} \quad (30)$$

Принимая во внимание соотношения

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi\xi}u_1(x, \xi) &= -\mathcal{L}_{\xi x}u_0(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon(x) = -f(x), \\ -\mathcal{L}_{\xi x}u_1(x, \xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} M(\xi) \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_j \partial x_k} N_k(\xi) \right), \\ -\mathcal{L}_{x\xi}u_1(x, \xi) &= a_{ij}(\xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial M(\xi)}{\partial \xi_j} + a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial N_k(\xi)}{\partial \xi_j}\end{aligned}\quad (31)$$

и

$$\widehat{a}_{kj} \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_k \partial x_j} - \langle q \rangle_S u_0(x) + m u_0(x) = |\square \setminus Q| f(x) - l \quad \text{в } \Omega, \quad (32)$$

мы можем переписать (30) в области Ω^ε следующим образом:

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_\varepsilon \left(z_\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) &= -\varepsilon \mathcal{L}_{xx}u_1(x, \xi) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} M(\xi) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_j \partial x_k} N_k(\xi) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} \\ &+ a_{ij}(\xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial M(\xi)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} + a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial N_k(\xi)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} - \mathcal{L}_\varepsilon u_0(x) \\ &- \frac{1}{|\square \setminus Q|} \widehat{a}_{kj} \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\langle q \rangle_S - m}{|\square \setminus Q|} u_0(x) + \frac{l}{|\square \setminus Q|}.\end{aligned}\quad (33)$$

Аналогично, на S_ε имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_\varepsilon(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\partial \gamma} &= -\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial \gamma_x} + \frac{\partial u_0(x)}{\partial \gamma_x} + \varepsilon \frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial \gamma_x} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial \gamma_\xi} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} \\ &= p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon(x) + \varepsilon q \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon(x) - g \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial u_0(x)}{\partial \gamma_x} + \varepsilon \frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial \gamma_x} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} \\ &+ \frac{\partial L(\xi)}{\partial \gamma_\xi} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} + u_0(x) \frac{\partial M(\xi)}{\partial \gamma_\xi} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \gamma_\xi} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Теперь, умножая уравнение (33) на $v(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и интегрируя по Ω^ε , мы получаем

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{L}_\varepsilon \left(z_\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) v(x) dx &= -\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{L}_{xx}u_1(x, \xi) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx \\ &+ \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} M(\xi) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx \\ &+ \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_j \partial x_k} N_k(\xi) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx \\ &+ \int_{\Omega^\varepsilon} a_{ij}(\xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial M(\xi)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega^\varepsilon} a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial N_k(\xi)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx - \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{L}_\varepsilon u_0(x) v(x) dx \\
& - \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega^\varepsilon} \widehat{a}_{kj} \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_k \partial x_j} v(x) dx + \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega^\varepsilon} (\langle q \rangle_S - m) u_0(x) v(x) dx \\
& + \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega^\varepsilon} l v(x) dx. \tag{34}
\end{aligned}$$

С другой стороны, с помощью формулы Грина можно преобразовать левую часть равенства (34) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{L}_\varepsilon \left(z_\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) v(x) dx = \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \gamma} v(x) ds - \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla z_\varepsilon \nabla v(x) dx \\
& = \int_{S_\varepsilon} p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon(x) v(x) ds + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon(x) v(x) ds - \int_{S_\varepsilon} g \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v(x) ds \\
& + \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u_0(x)}{\partial \gamma_x} v(x) ds + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial \gamma_x} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) ds \\
& + \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial L(\xi)}{\partial \gamma_\xi} + u_0(x) \frac{\partial M(\xi)}{\partial \gamma_\xi} + \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \gamma_\xi} \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) ds \\
& - \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla z_\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla v(x) dx. \tag{35}
\end{aligned}$$

Из (34) и (35) мы выводим

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla z_\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla v(x) dx = \int_{S_\varepsilon} p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon(x) v(x) ds + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon(x) v(x) ds \\
& - \int_{S_\varepsilon} g \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v(x) ds + \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u_0(x)}{\partial \gamma_x} v(x) ds + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial \gamma_x} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) ds \\
& + \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial L(\xi)}{\partial \gamma_\xi} + u_0(x) \frac{\partial M(\xi)}{\partial \gamma_\xi} + \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \gamma_\xi} \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) ds \\
& - \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} M(\xi) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx \\
& - \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_j \partial x_k} N_k(\xi) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx \\
& - \int_{\Omega^\varepsilon} a_{ij}(\xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial M(\xi)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx + \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{L}_{xx} u_1(x, \xi) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx \\
& - \int_{\Omega^\varepsilon} a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial N_k(\xi)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx + \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{L}_\varepsilon u_0(x) v(x) dx \\
& + \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega^\varepsilon} \widehat{a}_{kj} \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_k \partial x_j} v(x) dx \\
& - \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega^\varepsilon} (\langle q \rangle_S - m) u_0(x) v(x) dx - \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega^\varepsilon} l v(x) dx. \tag{36}
\end{aligned}$$

Ввиду очевидного соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_j \partial x_k} N_k(\xi) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_j \partial x_k} N_k(\xi) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_j \partial x_k} N_k(\xi) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

по формуле Стокса получим

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_j \partial x_k} N_k(\xi) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ij}(\xi) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} M(\xi) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx \\ &= \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u_1(x, \xi)}{\partial \gamma_x} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) ds + O(\varepsilon) \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Используя (36) и граничное условие в (16), оценим выражение

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla z_\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla v(x) dx + \int_{S_\varepsilon} \left(p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon q \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) z_\varepsilon \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) v(x) ds \right| \\ &\leq \varepsilon \left| \int_{S_\varepsilon} q \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) v(x) ds \right| + \left| \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial \gamma_\xi} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v ds - \int_{S_\varepsilon} g v ds \right| \\ &\quad + \left| \int_{S_\varepsilon} u_0 \frac{\partial M}{\partial \gamma_\xi} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v ds + \int_{S_\varepsilon} p u_0 v ds \right| \\ &\quad + \left| \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_0(x) v(x) ds - \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega^\varepsilon} \langle q \rangle_S u_0(x) v(x) dx \right| \\ &\quad + \left| \varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{L}_{xx} u_1(x, \xi) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx + O(\varepsilon) \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \right| \\ &\quad + \left| \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial u_0(x)}{\partial \gamma_x} + \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial N_i(x, \xi)}{\partial \gamma_\xi} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} \right) v(x) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_{S_\varepsilon} \varepsilon M \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u_0(x) v(x) ds + \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega^\varepsilon} m u_0(x) v(x) dx \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega^\varepsilon} l v(x) dx + \int_{S_\varepsilon} \varepsilon p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) L \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v(x) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_{S_\varepsilon} \varepsilon p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x_k} N_k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) v(x) ds - \int_{\Omega^\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial M(\xi)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{\widehat{a}_{kj}}{|\square \setminus Q|} \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_k \partial x_j} v(x) - a_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial N_k(\xi)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} v(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathcal{L}_\varepsilon u_0(x) v(x) \right) dx \right| \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9 + I_{10}. \end{aligned} \quad (38)$$

Оценим член I_4 . Согласно лемме 3

$$\begin{aligned} I_4 &= \left| \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_0(x) v(x) ds - \frac{1}{|\square \setminus Q|} \int_{\Omega_\varepsilon} \langle q \rangle_S u_0(x) v(x) dx \right| \\ &\leq C_2 \varepsilon \|u_0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Аналогично с помощью леммы 3 оцениваются I_7 и I_8 :

$$I_7 \leq C_8 \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}, \quad I_8 \leq C_9 \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)},$$

а с помощью леммы 4 – выражение I_{10} :

$$I_{10} \leq C_{10} \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Ясно, что члены I_1 и I_5 допускают следующую оценку:

$$|I_1| + |I_5| \leq C_{11} \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}.$$

Тождества $I_2 \equiv 0$, $I_3 \equiv 0$ и $I_6 \equiv 0$ вытекают из соотношений (7)–(9). Из леммы 1 следует, что $I_9 \equiv 0$.

Функция z_ε не обращается в нуль на границе $\partial\Omega$, благодаря наличию корректора u_1 . Вводя стандартную срезку $\chi_\varepsilon(x)$ в ε -окрестности внешней границы, рассмотрим тестовую функцию

$$v = u_0 + \varepsilon \chi_\varepsilon(x) u_1 - u_\varepsilon.$$

При этом

$$\|\varepsilon u_1 (1 - \chi_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C_{12} \sqrt{\varepsilon}.$$

Подставляя указанную функцию v в (38) и принимая во внимание все предыдущие оценки, приходим к искомому неравенству (18). Теорема доказана.

Замысел написать эту работу возник как результат интересных бесед с коллегами из Университета города Айзу, префектура Фукусима (Япония), где Г. А. Чечкин находился в феврале 1999 года. Окончательный вариант статьи был написан в Технологическом институте города Нарвика (Норвегия) осенью 1999 года. Авторы очень признательны поддержке этих организаций.

Список литературы

1. *Horning U. (ed.) Homogenization and porous media.* Berlin: Springer-Verlag, 1997.
2. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
3. *Марченко В. А., Хруслев Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
4. *Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
5. *Sanchez-Palencia E.* Homogenization techniques for composite media. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
6. *Saint Jean Paulin J., Cioranescu D.* Homogenization of reticulated structures. Berlin: Springer-Verlag, 1999. (Appl. Math. Sci. V. 136.)
7. *Cioranescu D., Murat F.* Un terme étrange venu d'ailleurs // Nonlinear partial differential equations and their applications. London: Pitman, 1982. P. 98–138. (Res. Notes in Math. V. 60.)
8. *Сукретный В. И.* Усреднение краевых задач для эллиптических уравнений в перфорированных областях // УМН. 1983. Т. 38. № 6. С. 125–126.
9. *Сукретный В. И.* Асимптотическое разложение решений третьей краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях // УМН. 1984. Т. 39. № 4. С. 120–121.
10. *Сукретный В. И.* О задаче стационарной теплопроводности в перфорированных областях // Препринт 84.48. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984.
11. *Пастухова С. Е.* Усреднение смешанной задачи с косой производной для эллиптического оператора в перфорированной области // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 8. С. 1445–1456.
12. *Пастухова С. Е.* О погрешности усреднения для задачи Стеклова в перфорированной области // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 6. С. 1042–1054.
13. *Cioranescu D., Donato P.* Homogénéisation du problème de Neumann non homogène dans des ouverts perforés // Asymptotic Anal. 1988. V. 1. P. 115–138.
14. *Беляев А. Г., Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А.* Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 4. С. 730–754.
15. *Chechkin G. A., Piatnitski A. L.* Homogenization of boundary-value problem in a locally periodic perforated domain // Appl. Anal. 1999. V. 71. № 1–4. P. 215–235.
16. *Пастухова С. Е.* Метод компенсированной компактности Тартара в усреднении спектра смешанной задачи для эллиптического уравнения в перфорированной области с третьим краевым условием // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 5. С. 127–144.
17. *Пастухова С. Е.* О характере распределения поля температур в перфорированном теле с заданным его значением на внешней границе в условиях теплообмена на границе полостей по закону Ньютона // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 6. С. 85–96.
18. *Пастухова С. Е.* Обоснование асимптотики решения смешанной задачи для стационарной теплопроводности в перфорированной области // Труды ММО. 1997. Т. 58. С. 88–101.
19. *Волков Д. Б.* Об осреднении некоторых краевых задач в областях с периодической структурой // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22. № 1. С. 112–122.
20. *Cioranescu D., Saint Jean Paulin J.* Truss structures: Fourier conditions and eigenvalue problems // Boundary control and boundary variation / ed. J. P. Zolezio. Berlin: Springer-Verlag, 1992. P. 125–141. (Lecture Notes Control Inf. Sci. V. 178.)
21. *Cioranescu D., Donato P.* On a Robin problem in perforated domains // Homogenization and applications to material sciences / ed. D. Cioranescu, A. Damlamian, P. Donato. Tokyo: Gakkōtoshō, 1997. P. 123–135. (GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications. V. 9.)

22. *Murat F., Tartar L.* Calcul des variations et homogénéisation // R 84012. Paris: Université Pierre et Marie Curie, Centre National de la Recherche Scientifique, Laboratoire d'analyse numérique, 1984.
23. *Cherkaev A., Kohn R. (eds.)* Topics in mathematical modelling of composite materials. Boston: Birkhäuser, 1997.
24. *Ngutseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. №3. P. 608–623.
25. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518.
26. *Neuss-Radu M.* Some extensions of two-scale convergence // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1996. V. 322. №9. P. 899–904.
27. *Бахвалов Н. С.* Усредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. №5. С. 1046–1048.
28. *Бахвалов Н. С.* Усреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. №3. С. 516–519.
29. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
30. *Chechkin G. A., Friedman A., Piatnitski A. L.* The boundary-value problem in domains with very rapidly oscillating boundary // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 231. №1. P. 213–234.

The University of Aizu, Aizu-Wakamatsu City, Japan;

Sivilingeniørutdanningen i Narvik, Narvik, Norway;

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: belyaev@u-aizu.ac.jp, andrey@sci.lebedev.ru,

chechkin@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

22.11.1999 и 25.09.2000