Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Болсинов, Б. Йованович, Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 7, 21–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:08:14

УДК 513.944

А. В. Болсинов, Б. Йованович

Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах

В работе доказано, что геодезический поток биинвариантной метрики на любом однородном пространстве компактной группы Ли интегрируем по Лиувиллю в некоммутативном смысле.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

Одной из важных задач дифференциальной геометрии является описание римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками. К настоящему времени эта задача далека от своего полного решения. С одной стороны, обнаружены топологические препятствия к интегрируемости, которые запрещают существование таких потоков на многообразиях с достаточно сложной топологией (см. [1]–[4]). В том же, что касается позитивных результатов, известны лишь несколько серий многообразий, на которых удалось явным образом построить интегрируемые геодезические потоки [5]–[14]. Топологически почти все эти многообразия представляют собой однородные пространства (исключением являются примеры, построенные в работах Г. Патернайна, Р. Спатцера [14] и Я. В. Базайкина [5]). Вот список однородных пространств, допускающих интегрируемые геодезические потоки, которые нам удалось обнаружить в литературе:

- компактные группы Ли (А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко [7]);
- симметрические пространства (А. Тимм [6], А. С. Мищенко [8], [9], А. В. Браилов [10], [11]);
- многообразия Штифеля $SO(n)/SO(n-2)$ (А. Тимм [6]);
- $SU(3)/T^2$ (Г. Патернайн, Р. Спатцер [14]).

Кроме того, в работах [12], [13], [15], [16] был исследован более общий вопрос об интегрируемости $\mathcal{G}$ -инвариантных гамильтоновых систем на однородных пространствах.

Цель настоящей работы – показать, что геодезический поток биинвариантной метрики на *любом* однородном пространстве $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ компактной группы Ли $\mathcal{G}$ интегрируем по Лиувиллю в некоммутативном смысле. Некоммутативная интегрируемость (иногда ее называют суперинтегрируемостью) означает, что геодезический поток обладает избыточным запасом первых интегралов, в результате чего размерность инвариантных торов Лиувилля оказывается меньше половины размерности фазового пространства. Насколько нам известно, этот факт оставался до сих пор незамеченным. Кроме этого мы укажем способ построения других

серий интегрируемых геодезических потоков, для которых метрика не является $\mathcal{G}$ -инвариантной.

Во введении мы напомним основные определения и изложим вкратце основную идею нашей конструкции. Всюду ниже $\mathcal{G}$ – компактная связная группа Ли, $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ – замкнутая связная подгруппа, G и H – соответствующие алгебры Ли. Однородное пространство $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ отождествляется с множеством левых смежных классов вида $g\mathcal{H}$, через

$$\pi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$$

обозначается естественная проекция. Действие элемента $g \in \mathcal{G}$ на однородном пространстве M (и на касательном расслоении TM) обозначается просто через g :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow gx, & x &\in M, & gx &\in M, \\ \xi &\rightarrow g\xi, & \xi &\in T_x M, & g\xi &\in T_{gx} M. \end{aligned}$$

1.1. Метрики на однородном пространстве. Имеется два естественных способа построения метрики на однородном пространстве $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Первый тип метрик – это $\mathcal{G}$ -инвариантные метрики. Они строятся следующим образом. Рассмотрим касательное пространство $T_x M$ в точке $x = \pi(e)$, где e – единица группы. Поскольку $\mathcal{H}$ – стационарная подгруппа точки x , то $\mathcal{H}$ действует естественным образом на $T_x M$. В силу компактности $\mathcal{H}$ на $T_x M$ существует $\mathcal{H}$ -инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (оно может быть определено неоднозначно). Легко видеть, что это скалярное произведение корректно разносится по всему однородному пространству M при помощи действия группы $\mathcal{G}$ по формуле:

$$\langle \xi, \eta \rangle_{y=gx} = \langle g^{-1}\xi, g^{-1}\eta \rangle_x,$$

где $\xi, \eta \in T_y M$ – произвольные касательные векторы. Тем самым мы получаем $\mathcal{G}$ -инвариантную метрику на однородном пространстве.

Среди всех $\mathcal{G}$ -инвариантных метрик на M имеется одна выделенная метрика, которую мы будем называть *биинвариантной* и обозначать через ds_0^2 . Она строится стандартным способом. Рассмотрим на группе Ли G биинвариантную риманову метрику. Она задает скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ на алгебре Ли G . Касательное пространство $T_x M$ отождествляется с ортогональным дополнением V к подалгебре Ли H в G . Ограничивая $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ на $T_x M$, мы, очевидно, получаем $\mathcal{H}$ -инвариантное скалярное произведение, которое затем разносим по всему однородному пространству $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Другой способ построения метрики на M состоит в следующем. Рассмотрим произвольную правоинвариантную метрику на группе $\mathcal{G}$ (однозначно задаваемую некоторой квадратичной формой C на алгебре Ли G). Пусть $\xi, \eta \in T_y M$ – произвольные касательные векторы к однородному пространству. Пусть $y = \pi(g)$, $g \in \mathcal{G}$. Рассмотрим левый смежный класс $g\mathcal{H}$, проходящий через точку g . Касательное пространство $T_g \mathcal{G}$ разлагается в прямую сумму ортогональных (относительно правоинвариантной метрики) подпространств $T_g \mathcal{G} = L_1 + L_2$, где L_1 –

касательное пространство к слою (т.е. $L_1 = dL_g(H)$), а L_2 – его ортогональное дополнение. Рассмотрим дифференциал проекции

$$d\pi: T_g\mathcal{G} = L_1 + L_2 \rightarrow T_yM.$$

Поскольку L_1 – это ядро $d\pi$, то существуют и притом единственные касательные векторы $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in L_2$ такие, что $d\pi(\tilde{\xi}) = \xi$, $d\pi(\tilde{\eta}) = \eta$. Тогда по определению мы полагаем: $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle_C$. Эту метрику на однородном пространстве мы будем обозначать через ds_C^2 . Метрики такого сорта называют “метриками субмерсии” (в качестве субмерсии здесь рассматривается естественная проекция $\pi: \mathcal{G} \rightarrow M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$).

Ту же самую метрику ds_C^2 можно задать при помощи отображения момента:

$$\phi: TM \rightarrow G,$$

которое определяется следующим образом. Отождествим касательное пространство к M в точке $x = \pi(e)$ с ортогональным дополнением V к подалгебре H в G (в смысле билинейной метрики). Возьмем произвольный касательный вектор $\xi \in T_yM$ в точке $y = gx$. Этот вектор можно представить в виде $\xi = g\xi_0$, где $\xi_0 \in V = T_xM \subset G$. Тогда по определению:

$$\phi(\xi) = \phi(g\xi_0) = \text{Ad}_g \xi_0 \in G.$$

Корректность этого определения легко проверяется. Рассмотрим теперь на алгебре Ли G произвольную положительно определенную билинейную форму $\tilde{C}: G \times G \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда по определению для произвольных касательных векторов $\xi, \eta \in T_yM$

$$\langle \xi, \eta \rangle = \tilde{C}(\phi(\xi), \phi(\eta)).$$

Несложно проверить, что это определение совпадает с данным выше, если в качестве правоинвариантной метрики на группе взять метрику, полученную разнесением по группе формы $C = K\tilde{C}^{-1}K$, заданной на алгебре Ли G . Здесь K – фиксированная билинейная метрика на группе.

1.2. Некоммутативная интегрируемость. Рассмотрим симплектическое многообразие (X^{2n}, ω) и гамильтонову систему $\dot{x} = \text{sgrad } H(x)$ на нем с гамильтонианом $H: X \rightarrow \mathbb{R}$. Такая система называется *интегрируемой по Лиувиллю*, если она обладает попарно коммутирующими функционально независимыми почти всюду интегралами $f_1, \dots, f_n$. Согласно теореме Лиувилля в этом случае особые компактные совместные поверхности уровня первых интегралов являются n -мерными торами (турами Лиувилля), причем динамика на этих торах очень простая: траектории системы в подходящих координатах являются прямолинейными обмотками торов.

Однако часто возникает такая ситуация, когда система обладает избыточным набором первых интегралов, которые уже не коммутируют между собой. При определенных условиях (см. ниже) это приводит к тому, что многообразие X оказывается расслоенным на инвариантные изотропные торы размерности $k < n$, а

динамика на этих торах остается такой же, как и выше [11], [17], [18]. Именно с такой ситуацией мы сталкиваемся при рассмотрении G -инвариантных гамильтоновых систем.

Более строго, условия некоммутативной интегрируемости состоят в следующем. Пусть $f_1, \dots, f_l$ – первые интегралы гамильтоновой системы $\dot{x} = \text{sgrad } H$. Хорошо известно, что линейные комбинации первых интегралов и их попарные скобки Пуассона снова являются первыми интегралами системы. Поэтому мы можем сразу считать, добавляя при необходимости новые функции, что пространство $\mathcal{F}$ первых интегралов системы является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона. Для каждой точки $x \in M$ определим два подпространства в T_x^*M . Пусть $F_x \subset T_x^*M$ – пространство, порожденное дифференциалами функций $f \in \mathcal{F}$, а $K_x \subset F_x$ – ядро ограничения пуассоновой структуры на F_x .

Предположим, что имеется открытое всюду плотное подмножество $U \subset M$ (точек общего положения) такое, что для всех $x \in U$

$$\dim F_x = l, \quad \dim K_x = d.$$

В этом случае l называется *дифференциальной размерностью* алгебры интегралов $\mathcal{F}$, а d – ее *дифференциальным индексом*. Они соответственно обозначаются через $\text{ddim } \mathcal{F}$ и $\text{dind } \mathcal{F}$. Условие некоммутативной интегрируемости может быть тогда записано в виде

$$\text{ddim } \mathcal{F} + \text{dind } \mathcal{F} = 2n = \dim X.$$

Отметим, что это условие в точности означает, что подпространство F_x является коизотропным относительно пуассоновой структуры.

ТЕОРЕМА 1 [11], [17], [18]. *Пусть выполнены условия некоммутативной интегрируемости. Выберем из алгебры интегралов $l = 2n - d$ функционально независимых функций $f_1, \dots, f_l$ и рассмотрим их совместную неособую поверхность уровня $T = \{f_1 = c_1, \dots, f_l = c_l\}$. Пусть поверхность T связна, компактна и проходит через точку общего положения $x \in U$. Тогда T диффеоморфна d -мерному тору. При этом траектории гамильтонова векторного поля $\text{sgrad } H$ в подходящей системе координат являются прямолинейными обмотками тора T .*

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле, имеет место большее: в окрестности этого тора можно ввести переменные действие-угол и, кроме того, при определенных условиях проинтегрировать систему в квадратурах [11], [18].

Мы не будем приводить подробного доказательства этого хорошо известного результата, но дадим несколько комментариев, проясняющих эффекты некоммутативной интегрируемости.

Рассмотрим отображение “момента” на некоторой малой трубчатой окрестности $V(T)$ поверхности уровня T

$$h: V(T) \rightarrow \mathbb{R}^l \{y_1, \dots, y_l\}, \quad h(x) = (f_1(x), \dots, f_l(x)).$$

Поскольку функции f_i функционально независимы в $V(T)$, то их попарные скобки Пуассона могут быть представлены в виде:

$$\{f_i, f_j\} = g_{ij}(f_1, \dots, f_l),$$

где g_{ij} — некоторые гладкие функции. Заметим, что эта формула может рассматриваться как определение некоторой пуассоновой структуры в образе отображения момента: $\{y_i, y_j\} = g_{ij}(y_1, \dots, y_l)$. При этом отображение момента становится пуассоновым.

Индекс алгебры интегралов $\mathcal{F}$ — это в точности коразмерность симплектического листа общего положения для скобки Пуассона в $\mathbb{R}^l$. Отсюда, в частности, следует, что если хотя бы одна точка $x \in T$ является точкой общего положения, то таковыми являются и все остальные точки из T и, следовательно, из некоторой ее окрестности.

Рассмотрим локальные независимые (в точке $c = (c_1, \dots, c_l)$) функции Казимира $g'_1, \dots, g'_d$ скобки Пуассона в $\mathbb{R}^l$. Здесь $d = \dim \mathcal{F}$. Они всегда существуют по теореме о локальной линеаризации пуассоновой структуры.

Пусть $g_i = g'_i \circ h: V(T) \rightarrow \mathbb{R}$. Поскольку $\{g_k, f_j\} = \{g'_k, y_j\} = 0$, то функции f_j являются первыми интегралами гамильтоновых потоков $\text{sgrad } g_k$ и, следовательно, векторные поля $\text{sgrad } g_k$ касаются поверхности T . Кроме того, $[\text{sgrad } g_k, \text{sgrad } g_m] = \text{sgrad } \{g_k, g_m\} = 0$. Таким образом, мы имеем d линейно независимых коммутирующих векторных полей на d -мерной поверхности уровня T . Отсюда следует, что T диффеоморфна d -мерному тору.

Поскольку исходный гамильтониан H коммутирует со всеми функциями f_i , то он (по крайней мере в окрестности тора T) обязан функционально выражаться через функции Казимира $g_1, \dots, g_d$. Поэтому на самом торе мы имеем:

$$\text{sgrad } H = \sum \lambda_k \text{sgrad } g_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Отсюда сразу же следует, что в подходящих координатах поле $\text{sgrad } H$ на торе T выпрямляется, что и утверждалось.

1.3. Основная конструкция. Рассмотрим компактную группу Ли $\mathcal{G}$, снабженную биинвариантной метрикой. Пусть ds_0^2 — соответствующая (биинвариантная) метрика на однородном пространстве. Наша цель — показать, что геодезический поток этой метрики на $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ интегрируем в некоммутативном смысле. Строгое доказательство этого факта будет дано в следующем параграфе, а здесь мы лишь опишем кратко основную идею.

Во-первых, в силу $\mathcal{G}$ -инвариантности потока мы получаем по классической теореме Нётер большой запас (линейных по импульсам) интегралов, отвечающих генераторам группы $\mathcal{G}$. Используя отображение момента $\phi: TM \rightarrow G$, мы можем представить эти интегралы в виде $f_h = h \circ \phi$, где $h: G \rightarrow \mathbb{R}$ — линейная функция на алгебре Ли. Заметим, впрочем, что функция h не обязана быть линейной. Обозначим через $\mathcal{F}_1$ множество функций вида $f_h = h \circ \phi$, где h — произвольная гладкая функция на алгебре G . Легко видеть, что $\mathcal{F}_1$ — это алгебра относительно скобки Пуассона. Заметим, что функции из семейства $\mathcal{F}_1$ являются первыми интегралами любой $\mathcal{G}$ -инвариантной гамильтоновой системы.

В некоторых случаях алгебра интегралов $\mathcal{F}_1$ уже удовлетворяет условиям некоммутативной интегрируемости. Например, это имеет место в случае симметрических пространств. Подробно вопрос о полноте семейства $\mathcal{F}_1$ был исследован в работах [12], [13], [15], [16].

Однако, как показывают уже простейшие примеры, в общем случае семейство нётеровых интегралов $\mathcal{F}_1$ не является полным, т.е. не гарантирует интегрируемости.

Оказывается, у геодезического потока биинвариантной метрики существуют очень естественные интегралы другого типа. Этот факт был замечен в работе Тимма [6] (см. также [14]). А именно любая $\mathcal{G}$ -инвариантная функция является первым интегралом. Обозначим множество всех таких (полиномиальных) функций через $\mathcal{F}_2$. Легко проверяется, что они также образуют некоторую алгебру относительно скобки Пуассона.

Итак, мы имеем два естественных семейства первых интегралов $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Каждое из них образует подалгебру, а функции из разных семейств коммутируют. Отметим также, что подалгебры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ имеют непустое пересечение. В частности, в нем содержится гамильтониан H_0 геодезического потока биинвариантной метрики ds_0^2 .

Доказательство полной (некоммутативной) интегрируемости сводится теперь к проверке условия $\text{ddim}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) + \text{dind}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) = 2 \dim M$. Именно это и будет сделано ниже.

Можно ли, используя описанную конструкцию, построить другие примеры интегрируемых геодезических потоков? Ответ положительный. Причем такая возможность заключается как раз в некоммутативной интегрируемости. Дело в том, что фазовое пространство расслоено на маломерные торы. Эти торы можно различными способами организовать в лагранжевы торы большей размерности (вплоть до половины размерности фазового пространства). Каждый такой способ фактически дает нам новую интегрируемую систему. При этом в ряде случаев можно провести процедуру таким образом, чтобы гамильтонианы получающихся систем были квадратичными по импульсам, т.е. отвечали некоторым новым геодезическим потокам.

Более формально эта конструкция может быть описана следующим образом. Предположим, что нам удалось выделить в алгебрах $\mathcal{F}_i$ максимальные коммутативные подалгебры $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_i \subset \mathcal{F}_i$, т.е. подалгебры, удовлетворяющие условию полноты

$$2 \text{ddim} \overset{\circ}{\mathcal{F}}_i = \text{ddim} \mathcal{F}_i + \text{dind} \mathcal{F}_i.$$

Пусть $f_i \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}_i$ — функции, квадратичные по импульсам (мы ниже укажем явно подалгебры $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_i$, в которых такие функции существуют), тогда гамильтонова система с гамильтонианом вида $\lambda_0 H_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$) задает вполне интегрируемый геодезический поток (его первыми интегралами являются функции из семейства $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 + \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$).

Подчеркнем, что поиск максимальных коммутативных подалгебр в $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ является самостоятельной интересной задачей, для решения которой можно использовать различные методы. Два из них — метод сдвига аргумента и метод цепочек

подалгебр – мы обсуждаем ниже. Обзор других известных методов содержится в [19].

§ 2. Некоммутативная интегрируемость геодезического потока биинвариантной метрики

Пусть $\mathcal{G}$ – компактная группа Ли, $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ – замкнутая связная подгруппа, $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ – однородное пространство. Пусть G, H – соответствующие алгебры Ли, $G = H \oplus V$ – ортогональное разложение относительно формы Киллинга $\langle \cdot, \cdot \rangle$ алгебры G . Тогда:

$$[H, H] \subset H, \quad [H, V] \subset V. \quad (1)$$

Всюду ниже мы отождествляем все пространства с двойственными при помощи формы Киллинга.

Пусть $\text{pr}_V: G \rightarrow V$ – ортогональная проекция параллельно подалгебре H и

$$\begin{aligned} \text{Ann}_G(\xi) &= \{v \in G, [v, \xi] = 0\}, \\ \text{Ann}_H(\xi) &= \{h \in H, [h, \xi] = 0\} = \text{Ann}_G(\xi) \cap H \end{aligned} \quad (2)$$

– аннуляторы элемента ξ , соответствующие G и H . Для $\xi \in G$ обозначим $\xi_V = \text{pr}_V \xi$ и $\xi_H = \xi - \xi_V$.

Скобку Ли–Пуассона в G мы будем обозначать через $\{ \cdot, \cdot \}_G$:

$$\{h_1, h_2\}_G(\xi) = \langle \xi, [\nabla h_1(\xi), \nabla h_2(\xi)] \rangle, \quad \xi \in G, \quad h_1, h_2: G \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3)$$

Пусть $\mathcal{I}(G)$ – алгебра полиномиальных функций $p(\xi)$, инвариантных относительно присоединенного представления Ad группы Ли $\mathcal{G}$ в G :

$$[\nabla p(\xi), \xi] = 0, \quad \xi \in G, \quad (4)$$

т.е. $\{p, \cdot\}_G = 0$. Известно, что $\mathcal{I}(G)$ порождается $r = \text{rank } G$ однородными инвариантами. Пусть, кроме того,

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(V, H) = \{\theta: V \rightarrow \mathbb{R}, [\nabla \theta(\xi), \xi]_H = 0, \xi \in V\} \quad (5)$$

– алгебра инвариантов представления Ad подгруппы $\mathcal{H}$ на пространстве V .

ТЕОРЕМА 2. *Геодезический поток на однородном пространстве $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$, отвечающий биинвариантной метрике ds_0^2 , вполне интегрируем по Лиувиллю в некоммутативном смысле. Движение системы в TM происходит по торами $\mathcal{T}^d$, размерность которых равна*

$$d = \dim(\text{pr}_V \text{Ann}_G(\xi)), \quad (6)$$

где $\xi \in V$ – элемент общего положения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}_1$ – множество функций вида $f_h = h \circ \phi$, $h: G \rightarrow \mathbb{R}$ и $\phi: TM \rightarrow G$ – отображение момента. Известно, что отображение $h \mapsto f_h = h \circ \phi$ эквивариантно [7], [20]:

$$\{f_{h_1}, f_{h_2}\} = f_{\{h_1, h_2\}_G}. \quad (7)$$

Пусть $\mathcal{F}_2$ – множество $\mathcal{G}$ -инвариантных функций $\tilde{f}$ на TM .

Между $\mathcal{G}$ -инвариантными функциями $\tilde{f} \in \mathcal{F}_2$ и $\text{Ad}_{\mathcal{H}}$ -инвариантными функциями $\theta \in \mathcal{J}(V, H)$ существует биекция

$$\tilde{f}_\theta(g\xi) = \theta(\xi), \quad \xi \in V = T_{\pi(e)}M, \quad g\xi \in T_{\pi(g)}M. \quad (8)$$

Кроме того, имеется следующее важное утверждение [6]:

$$\{\tilde{f}_{\theta_1}, \tilde{f}_{\theta_2}\}|_{g\xi} = -\langle \xi, [\nabla\theta_1(\xi), \nabla\theta_2(\xi)] \rangle = -\{\theta_1, \theta_2\}_G|_V(\xi), \quad \xi \in V. \quad (9)$$

Так как ds_0^2 – биинвариантная метрика, функции из $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ являются первыми интегралами геодезического потока.

По теореме Нётер для любой системы $\dot{x} = \text{sgrad } \tilde{f}(x)$ на TM , где $\tilde{f} \in \mathcal{F}_2$, функции f_h являются первыми интегралами. Поэтому:

$$\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\} = 0. \quad (10)$$

Из (7), (9) и (10) вытекает замкнутость множества функций $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ относительно скобки Пуассона: $\{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2\} \subset \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Мы будем доказывать, что интегралы $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ удовлетворяют условию некоммутативной интегрируемости:

$$\text{ddim}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) + \text{dind}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \dim TM. \quad (11)$$

Рассмотрим линейные пространства, порожденные дифференциалами функций из семейств $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1|_\xi = \{\nabla f_h(\xi), f_h \in \mathcal{F}_1\}, \\ F_2 &= F_2|_\xi = \{\nabla \tilde{f}_\theta(\xi), \tilde{f}_\theta \in \mathcal{F}_2\}. \end{aligned} \quad (12)$$

ЛЕММА 1. Для элемента общего положения $\xi \in V = T_{\pi(e)}M$ имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \text{ddim}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) &= \dim(F_1 + F_2) = 2 \dim V - \dim(\text{pr}_V \text{Ann}_G(\xi)), \\ \text{ddim}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) &= \dim(F_1 \cap F_2) = \dim(\text{pr}_V \text{Ann}_G(\xi)). \end{aligned} \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как отображение $I: T_\xi TM \rightarrow T_\xi TM$, $\nabla f(\xi) \mapsto \text{sgrad } f(\xi)$, является изоморфизмом, мы будем доказывать (13) для IF_i . Для этого нам понадобится явный вид гамильтоновых векторных полей.

Пространство $T_\xi TM$, $\xi \in V = T_{\pi(e)}M$, можно отождествить с

$$\left\{ \left(v, -\frac{1}{2}[v, \xi] + w \right), v, w \in V \right\} \subset T_\xi(T\mathcal{G}) = T_\xi(\mathcal{G} \times G). \quad (14)$$

Для функций f_h и $\tilde{f}_\theta$ гамильтоново векторное поле в точке $\xi \in V$ имеет вид [6], [16]:

$$\begin{aligned} \text{sgrad } f_h(\xi) &= \left(\nabla h(\xi)_V, -\frac{1}{2}[\nabla h(\xi)_V, \xi] + [\nabla h(\xi), \xi]_V - \frac{1}{2}[\nabla h(\xi)_V, \xi]_V \right), \\ \text{sgrad } \tilde{f}_\theta(\xi) &= \left(\nabla \theta(\xi), -\frac{1}{2}[\nabla \theta(\xi)_V, \xi] - \frac{1}{2}[\nabla \theta(\xi), \xi]_V \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим алгебру инвариантов $\mathcal{J}(V, H)$. Известно, что при линейном действии компактной алгебры Ли всегда существует набор инвариантов, разделяющий орбиты общего положения. В нашем случае число функционально независимых функций в $\mathcal{J}(V, H)$ равно коразмерности орбиты группы $\mathcal{H}$ при действии на V :

$$l = \text{ddim } \mathcal{J}(V, H) = \dim V - (\dim H - \dim \text{Ann}_H(\xi)) \quad (16)$$

для элемента общего положения $\xi \in V$.

Пусть $\theta_1, \dots, \theta_l$ — функционально независимые $\text{Ad}_{\mathcal{H}}$ -инвариантные функции на V . Пусть $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi)$ — орбита представления $\text{Ad}_{\mathcal{G}}$, проходящая через ξ ,

$$s = \dim \mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi) = \dim G - \dim \text{Ann}_G(\xi). \quad (17)$$

Пусть $h_1, \dots, h_s: G \rightarrow \mathbb{R}$ функционально независимы на орбите в точке ξ , т.е. $\{[\nabla h_i(\xi), \xi]\}$ порождают касательное пространство $T_\xi \mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi)$. В частности, $\nabla h_i(\xi) \notin \text{Ann}_G(\xi)$.

Возьмем в качестве требуемых независимых функций на TM в точке ξ следующие функции:

$$f_{h_1}, \dots, f_{h_s}, \tilde{f}_{\theta_1}, \dots, \tilde{f}_{\theta_l}. \quad (18)$$

Для элемента общего положения $\xi \in V$ $\tilde{f}_{\theta_1}, \dots, \tilde{f}_{\theta_l}$ функционально независимы в точке ξ .

Предположим:

$$\sum_i a_i \text{sgrad } f_{h_i}(\xi) + \sum_j b_j \text{sgrad } \tilde{f}_{\theta_j}(\xi) = 0. \quad (19)$$

Тогда из (15) получаем:

$$\sum_i a_i \nabla h_i(\xi)_V + \sum_j b_j \nabla \theta_j(\xi) = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sum_i a_i \left\{ -\frac{1}{2} [\nabla h_i(\xi)_V, \xi] + [\nabla h_i(\xi), \xi]_V - \frac{1}{2} [\nabla h_i(\xi)_V, \xi]_V \right\} \\ + \sum_j b_j \left\{ -\frac{1}{2} [\nabla \theta_j(\xi)_V, \xi] - \frac{1}{2} [\nabla \theta_j(\xi), \xi]_V \right\} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (20) и (21) следует:

$$\sum a_i [\nabla h_i(\xi), \xi]_V = 0. \quad (22)$$

Тогда

$$\sum_i a_i [\nabla h_i(\xi), \xi] = \sum_i a_i [\nabla h_i(\xi), \xi]_H = \sum_i a_i [\nabla h_i(\xi)_V, \xi]_H + \sum_i a_i [\nabla h_i(\xi)_H, \xi]_H. \quad (23)$$

Из (20) и из того, что $\theta_i - \text{Ad } \mathcal{H}$ -инвариантные функции ($[\nabla \theta_j(\xi), \xi]_H = 0$), получаем, что первая сумма в (23) равна нулю. Также из $[H, V] \subset V$ получаем, что и вторая сумма равна нулю, т.е. $\sum_i a_i [\nabla h_i(\xi), \xi] = 0$. Поскольку функции h_i независимы на орбите $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi)$ в точке ξ , то $a_i = 0$. В силу независимости функций $\tilde{f}_{\theta_j}$ следует $b_j = 0$.

Таким образом, функции (18) независимы в ξ .

Наоборот, пусть h — произвольная функция, градиент в ξ которой принадлежит аннулятору ξ . Тогда:

$$[\nabla h(\xi), \xi] = [\nabla h(\xi)_V, \xi] + [\nabla h(\xi)_H, \xi] = 0. \quad (24)$$

Поэтому из $[H, V] \subset V$ и (24) вытекает:

$$[\nabla h(\xi)_V, \xi]_H = 0. \quad (25)$$

Следовательно, для элемента общего положения ξ :

$$\nabla h(\xi)_V = \sum_j c_j \nabla \theta_j(\xi) \quad (26)$$

для некоторых $c_j \in \mathbb{R}$. Из (15), (24), (26) следует:

$$\text{sgrad } f_h(\xi) = \sum_j c_j \text{sgrad } \tilde{f}_{\theta_j}(\xi). \quad (27)$$

Наконец, из предшествующих утверждений имеем:

$$\begin{aligned} \dim(F_1 + F_2) &= \dim V - \dim H + \dim \text{Ann}_H(\xi) + \dim G - \dim \text{Ann}_G(\xi) \\ &= 2 \dim V + \dim \text{Ann}_H(\xi) - \dim \text{Ann}_G(\xi). \end{aligned} \quad (28)$$

Утверждение леммы следует из алгебраического соотношения

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ann}_G(\xi) &= \dim(\operatorname{pr}_V \operatorname{Ann}_G(\xi)) + \dim(\operatorname{Ann}_G(\xi) \cap H) \\ &= \dim(\operatorname{pr}_V \operatorname{Ann}_G(\xi)) + \dim \operatorname{Ann}_H(\xi). \end{aligned} \quad (29)$$

Подсчитаем теперь индекс множества $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, т.е. размерность ядра ограничения пуассоновой структуры на линейном подпространстве $F_1 + F_2$, порожденном дифференциалами функций из данного семейства.

Разложим пространство $F_1 + F_2$ в сумму:

$$F_1 + F_2 = A \oplus B \oplus C, \quad (30)$$

где $B = F_1 \cap F_2$, $F_1 = A \oplus B$, $F_2 = B \oplus C$.

Из (10) следует, что матрица пуассоновой структуры $\{\cdot, \cdot\}$ на TM , ограниченная на $F_1 + F_2 = A \oplus B \oplus C$, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \{\cdot, \cdot\}|_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\cdot, \cdot\}|_C \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Заметим теперь, что матрица $(\{\cdot, \cdot\}|_A)$ невырождена, поскольку из доказательства леммы 1 ясно, что она фактически является матрицей ограничения скобки Ли–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_G$ на касательное пространство к орбите коприсоединенного представления $T_\xi \mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi)$.

Поэтому коранг матрицы (31) равен корангу матрицы $(\{\cdot, \cdot\}|_{F_2})$. Но эта матрица в силу (9) попросту является матрицей ограничения скобки Ли–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_G$ на пространство

$$J = J|_\xi = \{\nabla \theta(\xi), \theta \in \mathcal{J}(V, H)\}. \quad (32)$$

Основным наблюдением является следующая лемма, которая доказывает невырожденность матрицы $(\{\cdot, \cdot\}|_C)$.

ЛЕММА 2. *Для элемента общего положения $\xi \in V = T_{\pi(e)}M$*

$$\ker \{\cdot, \cdot\}_G|_J = \operatorname{pr}_V \operatorname{Ann}_G(\xi). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ξ – точка общего положения, то подпространство $J \subset V$ совпадает с ортогональным дополнением к касательному пространству к $\operatorname{Ad}_{\mathcal{H}}$ -орбите точки ξ :

$$T_\xi \mathcal{O}_{\mathcal{H}}(\xi) = [\xi, H] = \{[\xi, h], h \in H\} \subset V. \quad (34)$$

Итак, $J = [\xi, H]^\perp = \{v \in V, \langle v, [\xi, H] \rangle = 0\}$. Покажем сначала, что пространство $\operatorname{pr}_V \operatorname{Ann}_G(\xi)$ содержится в J . Действительно, пусть $v \in \operatorname{pr}_V \operatorname{Ann}_G(\xi)$, т.е. $v = w_V$, $[w, \xi] = 0$. Тогда:

$$\langle v, [H, \xi] \rangle = \langle w - w_H, [H, \xi] \rangle = \langle w, [H, \xi] \rangle = \langle [\xi, w], H \rangle = 0. \quad (35)$$

Таким образом, $v \in [\xi, H]^\perp = J$.

Далее, пусть некоторый элемент $v \in J$ лежит в ядре скобки Ли–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_G$, ограниченной на пространстве J . Это означает, что

$$0 = \langle \xi, [v, J] \rangle = \langle \xi, [v, [H, \xi]^\perp] \rangle = \langle [\xi, v], [H, \xi]^\perp \rangle. \quad (36)$$

Таким образом, $[\xi, v] \in [H, \xi]$, т.е. существует $h \in H$ такой, что $[\xi, v] = [h, v]$. Но тогда $v = \text{pr}_V(w)$, где $w = v + h$, $[w, \xi] = 0$, что и утверждалось.

Доказательство обратного включения проводится аналогично.

Лемма доказана.

Таким образом,

$$\text{dind}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \text{dind } \mathcal{F}_1 = \text{dind } \mathcal{F}_2 = \text{ddim}(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) = \dim(\text{pr}_V \text{Ann}_G(\xi)). \quad (37)$$

Наконец, условие некоммутативной интегрируемости (11) следует из (13) и (37). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для симметрических пространств имеет место включение $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ и, кроме того, $d = \text{rank } M$. Отсюда сразу вытекает теорема Мищенко о некоммутативной интегрируемости геодезического потока биинвариантной метрики на симметрическом пространстве [8], [9].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $f_1, \dots, f_d$ — функционально независимые функции из множества $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Тогда $X_1 = \text{sgrad } f_1, \dots, X_d = \text{sgrad } f_d$ образуют базис коммутирующих векторных полей на инвариантных торах $\mathcal{T}^d$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Известно, что геодезические биинвариантной метрики ds^2 на $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ являются проекциями геодезических биинвариантной метрики группы $\mathcal{G}$ [21]. Теорема 2, в частности, утверждает, что эти геодезические всюду плотно заполняют множества $\tau(\mathcal{T}^d)$, где $\tau: T\mathcal{G}/\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ — натуральная проекция (для тора $\mathcal{T}^d$ общего положения).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Мы можем найти $\text{dind}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ следующим образом. Пусть F' обозначает косоортогональное дополнение к F . Тогда:

$$\text{ddim}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \dim(F_1 + F_2)' \cap (F_1 + F_2)$$

для элемента общего положения $\xi \in V$, где F_i дано в формуле (12). Из (13) мы имеем: $\dim(F_1 + F_2)' = \dim(F_1 \cap F_2)$. Также из $\{\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2\} = 0$ следует, что $F_1 \cap F_2 \subset (F_1 + F_2)'$. Поэтому $(F_1 + F_2)' = F_1 \cap F_2$ и $\text{dind}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \dim(\text{pr}_V \text{Ann}_G(\xi))$.

§3. Некоторые обобщения

Сохраним обозначения из предыдущего параграфа.

Вопрос: можно ли возмутить рассматриваемую биинвариантную метрику так, чтобы ее геодезический поток оставался интегрируемым?

Мы будем рассматривать метрики, отвечающие гамильтонианам вида $H_1 + H_2$, где H_i принадлежит $\mathcal{F}_i$. Функция H_2 соответствует $\mathcal{G}$ -инвариантным метрикам, и функция H_1 соответствует метрикам субмерсии, описанным в §1.

Пусть $\overset{\circ}{\mathcal{J}}$ – некоторое подмножество функций в $\mathcal{J}(V, H)$. Рассмотрим множество функций $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 = \{\tilde{f}_\theta, \theta \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}\} \subset \mathcal{F}_2$. Мы будем называть $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$ *полным*, если оно является замкнутым относительно скобки Пуассона: $\{\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2, \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2\} \subset \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$, и удовлетворяет условию:

$$\text{ddim } \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 + \text{dind } \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 = \text{ddim } \mathcal{F}_2 + \text{dind } \mathcal{F}_2. \quad (38)$$

Если $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$ полное, то в силу невырожденности матрицы $\{\cdot, \cdot\}|_C$ имеет место включение:

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subset \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2. \quad (39)$$

Пусть $\mathcal{A}$ – некоторое множество функций на G . Множество функций $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 = \{f_h = h \circ \phi, h \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{F}_1$ мы будем называть *полным*, если оно является замкнутым относительно скобки Пуассона: $\{\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1, \overset{\circ}{\mathcal{F}}_1\} \subset \overset{\circ}{\mathcal{F}}_1$, т.е. $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}\}_G \subset \mathcal{A}$, и удовлетворяет условию:

$$\text{ddim } \mathcal{A}_{\mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi)} + \text{dind } \mathcal{A}_{\mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi)} = \dim \mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi), \quad (40)$$

$\mathcal{A}_{\mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi)} = \{h|_{\mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi)}, h \in \mathcal{A}\}$, для элемента общего положения $\xi \in V$.

ЛЕММА 3. Пусть $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1$ и $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$ – полные множества в $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно. Тогда каждая гамильтонова система на ТМ с набором интегралов $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 \cup \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$ вполне интегрируема по Лиувиллю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (39) и теоремы 2 получаем:

$$\begin{aligned} \text{ddim}(\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 \cup \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2) &= \text{ddim } \mathcal{A}_{\mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi)} + \text{ddim } \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2, \\ \text{dind}(\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 \cup \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2) &= \text{dind } \mathcal{A}_{\mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi)} + \text{dind } \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2. \end{aligned} \quad (41)$$

Условие некоммутативной интегрируемости следует из (38), (40), (41) и соотношений $\text{ddim}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \dim \mathcal{O}_G(\xi) + \text{ddim } \mathcal{F}_2$, $\text{dind}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \text{dind } \mathcal{F}_2$.

3.1. Метрики субмерсии. Полное коммутативное множество $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 \subset \mathcal{F}$ можно построить методом сдвига аргумента.

Пусть a – регулярный элемент в G . Пусть для $p \in \mathcal{J}(G)$:

$$\begin{aligned} p(\xi + \lambda a) &= p_a^0(\xi) \lambda^m + p_a^1(\xi) \lambda^{m-1} + \dots + p_a^{m-1}(\xi) \lambda + p_a^m(\xi), \\ \xi \in G, \quad \deg p &= m, \quad p = p_a^m, \quad \deg p_a^i = i. \end{aligned} \quad (42)$$

Известно, что функции из множества $\mathcal{A}_a = \{p_a^i, p \in \mathcal{I}(G)\}$ находятся в инволюции относительно скобок Ли–Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_G$ [7].

Имеется следующее важное утверждение [10], [12], [22]: для любой орбиты при соединенного представления компактной группы Ли найдется элемент $a \in \mathcal{G}$ такой, что $\mathcal{A}_a$ является полным инволютивным семейством на данной орбите.

Поэтому семейство функций

$$\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 = \{f_h = h \circ \phi, h \in \mathcal{A}_a\} \quad (43)$$

является полным инволютивным семейством в $\mathcal{F}_1$.

Пусть $b \in \text{Ann}(a) = \{\xi \in G, [a, \xi] = 0\}$, $D: \text{Ann}(a) \rightarrow \text{Ann}(a)$ – симметричный оператор. Следуя [7], определим оператор $\varphi_{a,b,D}$ относительно ортогонального разложения $G = [a, G] \oplus \text{Ann}(a)$: $\varphi_{a,b,D}|_{[a,G]} = (\text{ad } a)^{-1}(\text{ad } b)$, $\varphi_{a,b,D}|_{\text{Ann}(a)} = D$. Пусть $h_{a,b,D}(\xi) = \frac{1}{2} \langle \xi, \varphi_{a,b,D}(\xi) \rangle$.

Известно, что для любой компактной алгебры G среди операторов $\varphi_{a,b,D}$ имеются положительно определенные операторы, поэтому для таких операторов $H_{a,b,D} = h_{a,b,D} \circ \phi$ являются гамильтонианами геодезических потоков подходящих римановых метрик $ds_{a,b,D}^2$ однородных пространств $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Поскольку функции $\mathcal{A}_a$ являются первыми интегралами гамильтоновых систем $\dot{\xi} = \text{sgrad } h_{a,b,D}(\xi) = [\xi, \varphi_{a,b,D}(\xi)]$ на G , т.е. $\{h_{a,b,D}, \mathcal{A}_a\}_G = 0$ [7], то $\{\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 \cup \mathcal{F}_2, H_{a,b,D}\} = 0$ и функции $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 \cup \mathcal{F}_2$ являются первыми интегралами геодезического потока метрики $ds_{a,b,D}^2$.

Из леммы 3 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ – однородное пространство, $\mathcal{G}$ – компактная полупростая группа Ли, $\mathcal{H}$ – замкнутая связная подгруппа. Геодезический поток на M метрики $ds_{a,b,D}^2$ вполне интегрируем по Лиувиллю в некоммутативном смысле.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Метрики $ds_{a,b,D}^2$, вообще говоря, не являются $\mathcal{G}$ -инвариантными. Их рассматривал А.В. Браилов в случае симметрических пространств $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Он доказал, что для компактных полупростых групп Ли из функций $f_{p_a^i}$ можно выбрать независимые функции в количестве $\dim M$ и что геодезические потоки метрик $ds_{a,b,D}^2$ вполне интегрируемы по Лиувиллю в коммутативном смысле [10]. Так получается, поскольку для симметрических пространств $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.

Обзор других способов построения полных коммутативных подмножеств $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 \subset \mathcal{F}_1$ можно найти в [19]. Два из них будут модифицированы ниже для построения полного коммутативного подмножества $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 \subset \mathcal{F}_2$ в случае многообразий Штифеля и однородных пространств $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – максимальный тор в $\mathcal{G}$.

3.2. $\mathcal{G}$ -инвариантные метрики. Нам понадобится следующее простое утверждение, вытекающее из определения (38) и теоремы 2. Коммутативное мно-

жество $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 \subset \mathcal{F}_2$ является полным, если выполняется равенство:

$$\begin{aligned} \operatorname{ddim} \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 &= \operatorname{ddim} \overset{\circ}{\mathcal{J}} = \frac{1}{2}(\operatorname{ddim} \mathcal{J} + \dim(\operatorname{pr}_V \operatorname{Ann}_G(\xi))) \\ &= \frac{1}{2}(\dim V - \dim H + \dim \operatorname{Ann}_H(\xi) + \dim \operatorname{Ann}_G(\xi) - \dim \operatorname{Ann}_H(\xi)) \\ &= \dim V - \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\xi) \end{aligned} \quad (44)$$

для элемента общего положения $\xi \in V$.

Рассмотрим подробно однородные пространства следующих типов:

- (а) многообразие Штифеля $\operatorname{SO}(n)/\operatorname{SO}(k)$;
- (б) $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – максимальный тор в компактной полупростой группе Ли $\mathcal{G}$;
- (в) $\operatorname{SU}(n)/\mathcal{T}^{n-1}$, где $\mathcal{T}^{n-1}$ – максимальный тор в $\operatorname{SU}(n)$.

(а) В работе [6] (см. также [23]) Тимм дал конструкцию коммутативного множества функций на компактной алгебре Ли G с помощью цепочек подалгебр:

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n = G.$$

Пусть $\pi_i: G \rightarrow G_i$ – ортогональная проекция. Тогда скобки Ли–Пуассона функций $h_i \circ \pi_i$ и $h_j \circ \pi_j$, где h_i – инвариант G_i , обращаются в нуль на G .

Пусть $\operatorname{so}(n) = \operatorname{so}(k) \oplus V$. Рассмотрим цепочку подалгебр:

$$\operatorname{so}(k) \subset \operatorname{so}(k+1) \subset \dots \subset \operatorname{so}(n). \quad (45)$$

Пусть $\Phi_i, i \geq 1$, – множество $\operatorname{Ad}_{\operatorname{SO}(k+i)}$ -инвариантных функций на $\operatorname{so}(k+i)$. Функции из Φ_i естественно продолжаются до функций на $\operatorname{so}(n)$,

$$\begin{array}{|c|} \hline \operatorname{so}(k+i) \\ \hline \vdots \\ \hline \dots \quad \operatorname{so}(k) \\ \hline \end{array} .$$

Пусть $\Phi = \mathcal{L}(\bigcup \Phi_i)$, здесь $\mathcal{L}$ означает линейную оболочку. По построению $h \in \Phi$ являются $\operatorname{Ad}_{\operatorname{SO}(k)}$ -инвариантами на $\operatorname{so}(n)$. Пусть

$$\mathcal{J}_i = \{\theta, \theta = h|_V, h \in \Phi_i\}, \quad \overset{\circ}{\mathcal{J}} = \mathcal{L}\left(\bigcup \mathcal{J}_i\right). \quad (46)$$

ЛЕММА 4. Пусть $h_1, h_2: G \rightarrow \mathbb{R}$ – $\operatorname{Ad}_{\mathcal{H}}$ -инвариантные функции и $\theta_i = h_i|_V: V \rightarrow \mathbb{R}$ – их сужения на V . Тогда θ_i суть $\operatorname{Ad}_{\mathcal{H}}$ -инвариантные функции, и если $\{h_1, h_2\} = 0$, то $\{\tilde{f}_{\theta_1}, \tilde{f}_{\theta_2}\} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что h_i — $\text{Ad}_{\mathcal{H}}$ -инвариантные функции, следует $[\nabla h_i(\xi), \xi]_H = [\nabla h_i(\xi)_H, \xi]_H + [\nabla h_i(\xi)_V, \xi]_H = 0$, $\xi \in G$. Поэтому из $[H, V] \subset V$ вытекает:

$$[\nabla \theta_i(\xi), \xi]_H = 0, \quad \xi \in V. \quad (47)$$

Следовательно, θ_i — $\text{Ad}_{\mathcal{H}}$ -инвариантные функции. Если $\{h_1, h_2\}_G = 0$, то

$$\begin{aligned} & \langle \xi, [\nabla \theta_1(\xi), \nabla \theta_2(\xi)] \rangle + \langle \xi, [\nabla \theta_1(\xi), \nabla h_2(\xi)_H] \rangle \\ & + \langle \xi, [\nabla h_1(\xi)_H, \nabla \theta_2(\xi)] \rangle + \langle \xi, [\nabla h_1(\xi)_H, \nabla h_2(\xi)_H] \rangle = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

$\xi \in V$. Из (9), (47), (48) и $[H, H] \subset H$ вытекает, что $\{\tilde{f}_{\theta_1}, \tilde{f}_{\theta_2}\} = 0$.

Известно, что $\{h_1, h_2\}_G = 0$, $h_1, h_2 \in \Phi$ [6], [23].

В силу леммы 4 получаем, что $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}$ являются $\text{Ad}_{\text{SO}(k)}$ -инвариантами, т.е. $\overset{\circ}{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}(V, \text{so}(k))$, и

$$\{\tilde{f}_{\theta_1}, \tilde{f}_{\theta_2}\} = 0, \quad \theta_1, \theta_2 \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}. \quad (49)$$

Пусть $\tilde{H} = \tilde{f}_{\theta}$, где $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}$ — положительно определенная квадратичная функция. Ясно, что $\tilde{H}$ является гамильтонианом геодезического потока некоторой $\text{SO}(n)$ -инвариантной римановой метрики $d\tilde{s}^2$.

ТЕОРЕМА 4. *Геодезический поток метрики $d\tilde{s}^2 + ds_{a,b,D}^2$ на многообразии Штифеля $M = \text{SO}(n)/\text{SO}(k)$ вполне интегрируем по Лиувиллю. Движение системы в ТМ происходит по торам, размерность которых в общем случае равна $\dim M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 = \{f_{p_a^i} = p_a^i \circ \phi, p \in \mathcal{J}(\text{so}(n))\}, \quad \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 = \{\tilde{f}_{\theta}, \theta \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}\}. \quad (50)$$

Функции $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1 \cup \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$ являются коммутирующими первыми интегралами геодезического потока метрики $d\tilde{s}^2 + ds_{a,b,D}^2$. Множество $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_1$ полное. В силу леммы 3 нам нужно доказать, что множество функций $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$ является полным набором коммутирующих функций в $\mathcal{F}_2$.

Если $n \geq 2k - 1$, то элемент общего положения $\xi \in V$ является регулярным элементом в алгебре Ли $\text{so}(n)$ и

$$\dim \mathcal{O}_{\text{SO}(n)}(\xi) = \dim \text{SO}(n) - \text{rank } \text{so}(n) = \frac{1}{2}n(n-1) - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Пусть $n < 2k - 1$. Рассмотрим симметрическое пространство $M' = \text{SO}(n)/\text{SO}(n-k) \times \text{SO}(k)$ ($\text{rank } M' = n - k$, $\text{so}(n) = V' \oplus \text{so}(n-k) \oplus \text{so}(k)$). Известно, что для симметрического пространства выполняется [10], [12]:

$$\frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_{\text{SO}(n)}(\eta) + \text{rank } M' = \dim M' \quad (51)$$

для элемента общего положения $\eta \in V' \subset V = V' \oplus \mathfrak{so}(n-k)$. Тогда для элемента общего положения $\xi \in V$: $\frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_{\mathrm{SO}(n)}(\xi) \geq \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_{\mathrm{SO}(n)}(\eta) = k(n-k) - (n-k)$. Можно доказать, что $\frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_{\mathrm{SO}(n)}(\xi) = k(n-k) - (n-k)$,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathfrak{so}(n+k) & V' \\ \hline {}^t V' & \mathfrak{so}(k) \\ \hline \end{array}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $l = \mathrm{ddim} \overset{\circ}{\mathcal{J}} = \dim \{\nabla \theta(\xi), \theta \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}\}$ для элемента общего положения $\xi \in V$.

Тогда для $n < 2k-1$: $l = 1 + 2 + \dots + n-k = \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k)$, а для $n \geq 2k-1$: $l = \frac{1}{2}(k-1)(k-2) + \mathrm{rank} \mathfrak{so}(2k-1) + \dots + \mathrm{rank} \mathfrak{so}(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i < k$. Как в симметрическом пространстве $\mathrm{SO}(i+k)/\mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(i)$, мы имеем $\mathrm{ddim} \mathcal{J}_i = i$.

Если $i \geq k$, то орбита $\mathcal{O}_{\mathrm{SO}(i+k)}(\xi)$ имеет максимальную размерность в $\mathrm{SO}(k+i)$ для элемента общего положения $\xi \in V \cap \mathfrak{so}(k+i)$. Поэтому $\mathrm{ddim} \mathcal{J}_i = \mathrm{rank} \mathfrak{so}(i+k)$.

Функциональную независимость функций из множества $\overset{\circ}{\mathcal{J}} = \bigcup \mathcal{J}_i$, т.е. $\mathrm{ddim} \overset{\circ}{\mathcal{J}} = \sum_i \mathrm{ddim} \mathcal{J}_i$, можно доказать, используя метод работы [6].

Таким образом, из леммы 5 вытекает условие (44), что гарантирует интегрируемость исходной системы.

(б) Пусть $\mathcal{G}$ – компактная полупростая группа Ли. Пусть $c \in G$ – регулярный элемент в G и

$$\begin{aligned} p(\xi + \lambda c) &= p_c^0(\xi)\lambda^m + p_c^1(\xi)\lambda^{m-1} + \dots + p_c^{m-1}(\xi)\lambda + p_c^m(\xi), \\ \xi \in G, \quad \deg p &= m, \quad p_c^m = p, \quad \deg p_c^i = i. \end{aligned} \quad (52)$$

Тогда

$$H = H_c = \mathcal{L}(\nabla p_c^1, p \in \mathcal{J}(G)) \quad (53)$$

– подалгебра Картана в G .

Пусть $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ – отвечающий ей максимальный тор, $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ – однородное пространство $V = H^\perp = T_{\pi(e)}M$,

$$\Phi_c = \{q_c^i, i > 1, q \in \mathcal{J}(G)\}. \quad (54)$$

Известно, что $\{p_c^i, q_c^j\}_G = 0$ для $p, q \in \mathcal{J}(G)$. В частности,

$$\langle \xi, [\nabla p_c^1, \nabla q_c^i(\xi)] \rangle = \langle \nabla p_c^1, [\nabla q_c^i(\xi), \xi] \rangle = 0, \quad \xi \in G, \quad p, q \in \mathcal{J}(G). \quad (55)$$

Поэтому $h \in \Phi_c$ суть коммутирующие $\mathrm{Ad}_{\mathcal{H}}$ -инвариантные функции на G . Пусть

$$\overset{\circ}{\mathcal{J}} = \{\theta = h|_V, h \in \Phi_c\}. \quad (56)$$

В силу леммы 4 функции $\overset{\circ}{\mathcal{J}}$ являются $\mathrm{Ad}_{\mathcal{H}}$ -инвариантами, т.е. $\overset{\circ}{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}(V, H)$, и $\{\tilde{f}_{\theta_1}, \tilde{f}_{\theta_2}\} = 0, \theta_1, \theta_2 \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}_c$.

Пусть $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 = \{\tilde{f}_\theta, \theta \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}\}$.

Элемент общего положения $\xi \in V$ является регулярным элементом в G и

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{O}_G(\xi) &= \dim G - \text{rank } G = \dim G - \dim H = \dim V, \\ \text{ddim } \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 &= \text{ddim } \overset{\circ}{\mathcal{J}} = \text{ddim } \Phi_c = \frac{1}{2}(\dim G - \text{rank } G). \end{aligned} \quad (57)$$

В силу (44) и (57) $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$ является полным набором коммутирующих функций в $\mathcal{F}_2$.

Пусть $\tilde{H} = \tilde{f}_\theta$, где $\theta \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}$ — положительно определенная квадратичная функция. Тогда $\tilde{H}$ является гамильтонианом геодезического потока $\mathcal{G}$ -инвариантной римановой метрики $d\tilde{s}^2$.

ТЕОРЕМА 5. *Геодезический поток метрики $d\tilde{s}^2 + ds_{a,b,D}^2$ на однородном пространстве $M = \mathcal{G}/\mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — максимальный тор в компактной полупростой группе Ли $\mathcal{G}$, вполне интегрируем по Лиувиллю. Движение системы в TM происходит по торах, размерность которых в общем случае равна $\dim M$.*

(в) Полный набор коммутирующих функций $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 \subset \mathcal{F}_2$ для $SU(n)/\mathcal{T}^{n-1}$, где $\mathcal{T}^{n-1}$ — максимальный тор в $SU(n)$, можно построить так же, как на многообразиях Штифеля.

Пусть $\mathfrak{su}(n) = T \oplus V$, $T = T_e T^{n-1} = \{\eta, \eta = \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_n), \eta_k \in i\mathbb{R}\}$. Рассмотрим цепочку подалгебр:

$$\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{su}(3) \subset \dots \subset \mathfrak{su}(n). \quad (58)$$

Пусть Φ_i , $i \geq 2$, — множество $\text{Ad}_{SU(i)}$ -инвариантных функций на $\mathfrak{su}(i)$. Функции из Φ_i естественно продолжаются до функций на $\mathfrak{su}(n)$. Пусть $\Phi = \mathcal{L}(\bigcup \Phi_i)$.

ЛЕММА 6. *Функции из множества Φ являются $\text{Ad}_{\mathcal{T}^{n-1}}$ -инвариантами на $\mathfrak{su}(n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi: \mathfrak{su}(n) \rightarrow \mathfrak{su}(i)$ — ортогональная проекция, $p_i \in \Phi_i$ — инвариант в $\mathfrak{su}(i)$ и $p = p_i \circ \pi \in \Phi$. Для $\xi \in \mathfrak{su}(n)$ положим $\xi_1 = \pi(\xi)$, $\xi_2 = \xi - \xi_1$. Так как p_i — инвариант, то $[\nabla p(\xi), \xi] = [\nabla p_i(\xi_1), \xi_1 + \xi_2] = [\nabla p_i(\xi_1), \xi_2]$,

$$\begin{array}{|c|} \hline \mathfrak{su}(n) \\ \hline \vdots \\ \hline \dots \quad \mathfrak{su}(i) \\ \hline \end{array}.$$

Пусть $\eta \in T$. Тогда $[\nabla p(\xi_1), \eta] \in \mathfrak{su}(i)$. Из предыдущих соотношений получаем: $\langle \eta, [\nabla p(\xi), \xi] \rangle = \langle \eta, [\nabla p(\xi_1), \xi_2] \rangle = \langle \xi_2, [\nabla p(\xi_1), \eta] \rangle = 0$. Поэтому $[\nabla p(\xi), \xi]_T = 0$, $\xi \in \mathfrak{su}(n)$, что и утверждалось.

Пусть $\overset{\circ}{\mathcal{J}} = \{\theta, \theta = h|_V, h \in \Phi\}$. Из $\{\Phi, \Phi\}_{SU(n)} = 0$, лемм 4 и 6 следует, что $\overset{\circ}{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}(V, T)$, $\{\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2, \overset{\circ}{\mathcal{F}}_2\} = 0$, $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2 = \{\tilde{f}_\theta, \theta \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}\}$.

В множестве Φ , а следовательно, и в $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ содержится

$$\begin{aligned} \text{rank su}(2) + \text{rank su}(3) + \dots + \text{rank su}(n) &= 1 + 2 + \dots + (n-1) \\ &= \frac{1}{2}(\dim \text{su}(n) - \text{rank su}(n)) \end{aligned} \quad (59)$$

независимых функций. Поэтому $\overset{\circ}{\mathcal{F}}_2$ — полный набор коммутирующих функций в $\mathcal{F}_2$.

3.3. Неинвариантные метрики компактных групп Ли. Имеется несколько способов построения левоинвариантных (правоинвариантных) метрик на компактных группах Ли с интегрируемыми геодезическими потоками [7], [19]. Применяя изложенные выше идеи, мы можем построить из них новые метрики, которые не являются ни лево-, ни правоинвариантными, но имеют интегрируемые геодезические потоки.

Пусть $\mathcal{G}$ — компактная группа Ли. Предположим, что на пространстве G имеются гамильтоновы системы $\dot{\xi} = [\xi, \nabla h^i(\xi)]$, $i = 1, 2$, с квадратичными положительно определенными гамильтонианами h^i и полными наборами коммутирующих интегралов $h_1^i, \dots, h_s^i$ на орбитах общего положения ($s = \frac{1}{2}(\dim G - \text{rank } G)$).

Пусть $d\tilde{s}_1^2$ — левоинвариантная метрика на $\mathcal{G}$, соответствующая h^1 , а ds_2^2 — правоинвариантная метрика на $\mathcal{G}$, соответствующая h^2 . Тогда геодезический поток на $\mathcal{G}$ метрики $d\tilde{s}_1^2 + ds_2^2$ вполне интегрируем по Лиувиллю. Движение системы в $T\mathcal{G}$ происходит по торах, размерность которых равна $\dim \mathcal{G}$. Интегралами системы будут функции $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s, f_1, \dots, f_s$, где $\tilde{f}_k$ — левые сдвиги h_k^1 , а f_k — правые сдвиги функций h_k^2 .

Список литературы

1. Козлов В. В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 6. С. 1299–1302.
2. Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 994–1010.
3. Тайманов И. А. Топология римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками // Труды МИРАН. 1994. Т. 205. С. 150–163.
4. Paternain G. P. On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1992. V. 12. P. 109–121.
5. Базайкин Я. В. Двойные частные групп Ли с интегрируемым геодезическим потоком // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 43. № 3. С. 513–530.
6. Thimm A. Integrable geodesic flows on homogeneous spaces // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1981. V. 1. P. 495–517.
7. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнение Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 396–415.
8. Мищенко А. С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах // Матем. заметки. 1982. Т. 31. № 2. С. 257–262.
9. Мищенко А. С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах // Труды сем. по вект. и тенз. анализу. № 21. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 13–22.
10. Браилов А. В. Построение вполне интегрируемых геодезических потоков на компактных симметрических пространствах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 4. С. 661–674.

11. Браилов А. В. Полная интегрируемость некоторых геодезических потоков и интегрируемые системы с некоммутирующими интегралами // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 2. С. 273–276.
12. Микитюк И. В. Однородные пространства с интегрируемыми G -инвариантными гамильтоновыми потоками // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 6. С. 1248–1262.
13. Guillemin V., Sternberg S. On collective complete integrability according to the method of Thimm // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1983. V. 3. P. 219–230.
14. Paternain G. P., Spatzier R. J. New examples of manifolds with completely integrable geodesic flows // Adv. Math. 1994. V. 108. P. 346–366.
15. Guillemin V., Sternberg S. Multiplicity-free spaces // J. Differential Geom. 1984. V. 19. № 1. P. 31–56.
16. Микитюк И. В. Одномерные пространства с интегрируемыми G -инвариантными гамильтоновыми потоками // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 5. С. 1074–1078.
17. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 2. С. 46–56.
18. Нехорошев Н. Н. Переменные действие-угол и их обобщения // Труды ММО. 1972. Т. 26. № 1. С. 181–198.
19. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых систем дифференциальных уравнений. М.: Факториал; Горки: Просперус, 1995.
20. Marsden J., Weinstein A. Reduction of manifolds with symmetry // Rep. Math. Phys. 1974. V. 5. № 1. P. 121–130.
21. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry. New York: Wiley, 1969.
22. Болсинов А. В. Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 1. С. 69–89.
23. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 3. С. 714–732.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
10.05.2000