Общероссийский математический портал

В. М. Клишкин, М. Г. Свищула, Свойство Дарбу неаддитивной функции множества, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 7, 41–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm578>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:27:42

УДК 519.53

В. М. Климкин, М. Г. Свистула

Свойство Дарбу неаддитивной функции множества

Известно, что образом конечной положительной неатомической меры на σ -алгебре является отрезок. В настоящей работе доказано, что это утверждение остается справедливым для широкого класса неаддитивных функций множества на F -алгебре при замене неатомичности свойством Сакса.

Библиография: 20 названий.

К классическим результатам теории меры относится

ТЕОРЕМА 1. *Множество значений конечной положительной неатомической меры μ , заданной на σ -алгебре Σ подмножеств множества T , есть отрезок $[0, \mu(T)]$.*

П. Халмош [1; § 41, упражнение 2] отмечает, что эта теорема следует из результатов метрической геометрии, если на Σ задать с помощью меры μ соответствующую метрику. Доказательство теоремы 1 методами теории меры представлено Н. Динкуляну [2; § 2, предложение 7].

Теорема 1 многократно передоказывалась и обобщалась различными авторами. К наиболее значительным результатам можно отнести теорему А. А. Ляпунова о выпуклости и компактности образа $\mathbb{R}^n$ -значной неатомической меры [3], передоказанную позже методами теории меры П. Халмошем [4] и методами функционального анализа Й. Линденштрауссом [5].

Для конечноаддитивных функций множества со свойством Сакса (см. определение 2) на σ -алгебре аналог теоремы 1 доказал Р. Скоззафава [6], хотя вопрос о связи неатомичности, свойства Сакса и свойства Дарбу (см. определение 1) исследовался еще в [7]. Д. Магарам [8] приводит версию теоремы 1 на F -алгебре. В. Олейченко [9] получены результаты для разложимых мер. Интересный результат о выпуклости образа конечноаддитивной $\mathbb{R}^n$ -значной меры принадлежит Т. Ф. Армстронгу и К. Прикри [10].

Обобщение теоремы 1 для широкого класса неаддитивных функций множества было получено И. Добраковым [11].

Аналоги теоремы 1 для мер со значениями в группе приведены в работах К. Муסיала [12], Д. Ландерса [13], К. Константинеску [14], А. Мартеллотти [15] и других авторов.

В настоящей статье приводятся некоторые аналоги теоремы 1 для широких классов скалярных функций множества, не обязательно аддитивных. Эти результаты можно использовать, например, в теории неатомических игр, где наибольший интерес представляют функции множества, определенные с помощью неатомических мер (см. [16]). Среди них важнейшими являются, вообще говоря, неаддитивные функции множества вида $f \circ \mu$, где μ – неатомическая вероятностная мера на σ -алгебре Σ подмножеств множества T , f – функция ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$.

С другой стороны, в связи с потребностями теоретической физики все больший интерес вызывают функции множества с неклассическими областями определения. Так, нам удалось получить некоторые результаты для функции, определенной на F -алгебре множеств (см. теорему 2).

Приведем ряд используемых в статье обозначений и определений.

Пусть T – некоторое множество, Σ – некоторая алгебра подмножеств множества T .

Обозначим $E \cap \Sigma = \{A \in \Sigma : A \subset E\}$, где $E \in \Sigma$.

Последовательность попарно непересекающихся множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ будем называть *спектром*.

Убывающую последовательность множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ с пустым пересечением будем называть *локализатором*.

Следуя [17], алгебру множеств Σ будем называть F -алгеброй, если для любой пары последовательностей из Σ (возрастающей $\{A_n\}$ и убывающей $\{B_n\}$, где $A_n \subset B_n$) существует такое множество $C \in \Sigma$, что $A_n \subset C \subset B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, σ -алгебра множеств является F -алгеброй. Обратное же неверно [17].

В дальнейшем вместо слов “функция множества” будем писать ф.м.

Все рассматриваемые далее функции множества будем предполагать определенными на алгебре Σ , принимающими значения из $[0, +\infty)$, равными нулю на пустом множестве.

Ф.м. φ называется *исчерпывающей* (соответственно непрерывной сверху в нуле), если для любого спектра (соответственно для любого локализатора) $\{E_n\}$ из Σ выполняется условие: $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(E_n) = 0$.

Ф.м. φ называется *неатомической*, если для любого множества $E \in \Sigma$, для которого $\varphi(E) > 0$, существует такое множество $F \in E \cap \Sigma$, что $\varphi(F) \neq 0$ и $\varphi(E \setminus F) \neq 0$.

Ф.м. φ называется *монотонной*, если из того, что $A, B \in \Sigma$, $A \subset B$, следует $\varphi(A) \leq \varphi(B)$.

Ф.м. φ будем называть *субмерой*, если для любого множества $A \in \Sigma$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что если множество $B \in \Sigma$ и $\varphi(B) < \delta$, то

- 1) $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varepsilon$,
- 2) $\varphi(A) \leq \varphi(A \setminus B) + \varepsilon$.

Монотонные непрерывные сверху в нуле субмеры рассматривались в [11]. Их будем называть *субмерами Добракова* (см. [11; §1, примеры 1–4]).

Ф.м. φ называем *полуаддитивной*, если для любого конечного набора $\{E_1, \dots, E_n\}$ попарно непересекающихся множеств из Σ выполняется

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \varphi(E_i).$$

Если же вместо неравенства справедливо равенство, то ф.м. φ называют *аддитивной*.

Говорят, что φ – *мера*, если она счетноаддитивна, т.е. для любого спектра $\{E_n\}$ из Σ такого, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$, выполняется

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n).$$

Очевидно, монотонная полуаддитивная ф.м., в частности аддитивная ф.м., является субмерой; а мера – субмерой Добракова.

§1. Свойство Дарбу неаддитивной функции множества на F -алгебре

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что ф.м. φ обладает *свойством Дарбу* (на Σ), если для любого множества $E \in \Sigma$ и для любого числа $0 < t < \varphi(E)$ существует такое множество $F \in E \cap \Sigma$, что $\varphi(F) = t$.

ПРИМЕР 1. Пусть Σ – σ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0, 1]$; пусть, далее, μ – мера Лебега. Через Σ_0 обозначим класс всех тех множеств из Σ , для которых $\mu(E) = 0$ или $\mu(E) = 1$.

Для множества $E \in \Sigma_0$ положим

$$\nu_0(E) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu(E) = 0, \\ 2, & \text{если } \mu(E) = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что Σ_0 – подалгебра алгебры Σ и ν_0 – аддитивная ф.м. на Σ_0 . Продолжим ν_0 до аддитивной ф.м. ν на Σ так, чтобы множество значений ф.м. ν содержалось в замыкании множества значений ф.м. ν_0 [18; §47]. Следовательно, аддитивная ф.м. ν принимает два значения: 0 и 2.

Положим $\varphi = \mu + \nu$. Ясно, что φ – неатомическая аддитивная ф.м. на σ -алгебре Σ и не принимает ни одного значения из отрезка $[1, 2]$, в то время как наибольшее значение ф.м. φ на Σ равно 3.

Таким образом, для аддитивной ф.м. на σ -алгебре классической неатомичности недостаточно для выполнения свойства Дарбу. Ранее на этот факт обратил внимание В. Олейчек [9].

Основная цель §1 – указать условие, на которое надо заменить условие неатомичности, чтобы ф.м. φ , вообще говоря не являющаяся непрерывной, обладала свойством Дарбу. В теореме 2 доказывается, что таким условием для широкого класса неаддитивных функций множества, а именно для субмер на F -алгебре, является свойство Сакса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что ф.м. φ обладает *свойством Сакса* (на Σ), если для любого множества $E \in \Sigma$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое конечное разложение $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ множества E , что

$$\bigcup_{k=1}^n E_k = E, \quad E_k \in \Sigma, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j, \quad \varphi(E_k) < \varepsilon \quad \text{для всех } k \in \overline{1, n}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из теоремы 1 сразу следует, что неатомическая мера на σ -алгебре обладает свойством Дарбу. Легко заметить, что для меры на σ -алгебре свойства неатомичности, Сакса и Дарбу равносильны.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Σ – некоторая F -алгебра подмножеств множества T ; пусть, далее, φ – субмера на Σ . Если φ обладает свойством Сакса, то φ обладает свойством Дарбу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E \in \Sigma$ и $0 < t < \varphi(E)$. Пусть, далее, $\varepsilon_n > 0, \varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

По свойству Сакса существует конечный набор попарно не пересекающихся множеств $\{E_1^1, E_2^1, \dots, E_{n_1}^1\} \subset \Sigma$, для которого

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} E_i^1 = E, \quad \varphi(E_i^1) < \varepsilon_1, \quad i = \overline{1, n_1}.$$

Будем считать, что $n_1 \geq 2$, так как в качестве E_1^1 всегда можем взять пустое множество, поскольку $\varphi(\emptyset) = 0$.

Тогда найдется такой номер k_1 , что

$$1 \leq k_1 \leq n_1 - 1, \quad \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{k_1} E_i^1\right) < t, \quad \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{k_1+1} E_i^1\right) \geq t.$$

Положим

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{k_1} E_i^1, \quad B_1 = \bigcup_{i=1}^{k_1+1} E_i^1.$$

Итак,

$$A_1 \subset B_1, \quad \varphi(A_1) < t, \quad \varphi(B_1) \geq t, \quad \varphi(B_1 \setminus A_1) < \varepsilon_1.$$

Пусть теперь построены множества $A_1, \dots, A_{m-1}, B_1, \dots, B_{m-1}$ из Σ такие, что $A_1 \subset \dots \subset A_{m-1} \subset B_{m-1} \subset \dots \subset B_1$,

$$\varphi(A_i) < t, \quad \varphi(B_i) \geq t, \quad \varphi(B_i \setminus A_i) < \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Рассмотрим множество $B_{m-1} \setminus A_{m-1}$. По свойству Сакса существует конечный набор попарно не пересекающихся множеств $\{E_1^m, \dots, E_{n_m}^m\} \subset \Sigma$, для которого

$$\bigcup_{i=1}^{n_m} E_i^m = B_{m-1} \setminus A_{m-1}, \quad \varphi(E_i^m) < \varepsilon_m, \quad i = \overline{1, n_m}.$$

Найдется такой номер k_m , что $1 \leq k_m \leq n_m - 1$,

$$\varphi\left(A_{m-1} \cup \bigcup_{i=1}^{k_m} E_i^m\right) < t, \quad \varphi\left(A_{m-1} \cup \bigcup_{i=1}^{k_m+1} E_i^m\right) \geq t.$$

Положим

$$A_m = A_{m-1} \cup \bigcup_{i=1}^{k_m} E_i^m, \quad B_m = A_m \cup E_{k_m+1}^m.$$

Продолжив процесс до бесконечности, получим последовательности множеств $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ из Σ , для которых

$$A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots \subset B_n \subset \dots \subset B_1, \\ \varphi(A_n) < t, \quad \varphi(B_n) \geq t, \quad \varphi(B_n \setminus A_n) < \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По определению F -алгебры существует множество $C \in \Sigma$ такое, что $A_n \subset C \subset B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $\varphi(C) = t$. Предположим, что $\varphi(C) < t$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}[t - \varphi(C)]$. Для множества C и числа ε найдем $\delta > 0$ такое, что если $B \in \Sigma$ и $\varphi(B) < \delta$, то $\varphi(C \cup B) \leq \varphi(C) + \varepsilon$.

Очевидно, существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\varepsilon_{n_0} < \delta$. Тогда

$$\varphi(B_{n_0}) = \varphi(C \cup (B_{n_0} \setminus A_{n_0})) \leq \varphi(C) + \varepsilon < t.$$

Это противоречит тому, что $\varphi(B_n) \geq t$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Значит, $\varphi(C) \geq t$.

Аналогично показывается, что $\varphi(C) \leq t$.

Итак, $\varphi(C) = t$. Искомое множество построено.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для конечноаддитивной функции множества на F -алгебре свойства Сакса и Дарбу равносильны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как показывает пример 2, теорема 2, вообще говоря, необратима.

ПРИМЕР 2. Пусть Σ — σ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств вещественной прямой, λ — мера Лебега. Для любого $E \in \Sigma$ положим $\varphi(E) = \lambda(E)$, если $\lambda(E) \leq 1$; $\varphi(E) = 1$, если $\lambda(E) > 1$. Как легко заметить, ф.м. φ монотонна, полуаддитивна (следовательно, является субмерой), обладает свойством Дарбу и не обладает свойством Сакса.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как показывает пример 3, в теореме 2 предположение о том, что класс множеств Σ является F -алгеброй, существенно.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим полуалгебру промежутков $\langle a, b \rangle$ с рациональными концами, содержащихся в отрезке $[0, 1]$. Пусть Σ — алгебра, порожденная этой полуалгеброй, т.е. алгебра подмножеств отрезка $[0, 1]$, которые можно представить как объединение конечного числа попарно не пересекающихся промежутков с рациональными концами. Легко показать, что алгебра Σ не является F -алгеброй.

Пусть λ — мера Лебега на Σ . Очевидно, λ обладает свойством Сакса и образом λ является множество рациональных чисел отрезка $[0, 1]$.

§ 2. Свойство Сакса непрерывной функции множества

ТЕОРЕМА 3. Пусть Σ — некоторая σ -алгебра подмножеств множества T ; пусть, далее, φ — некоторая функция множества на Σ . Если

- 1) ф.м. φ — исчерпывающая,
- 2) ф.м. φ — непрерывная свертка в нуле,

то для любого множества $E \in \Sigma$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое конечное разложение $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ множества E , что

$$E = \bigcup_{i=1}^m E_i, \quad E_i \in \Sigma, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j$$

и каждое множество E_i есть либо атом ф.м. φ , для которого $\varphi(E_i) > 0$, либо $\varphi(E_i) \leq \varepsilon$, $i = \overline{1, m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$, $E \in \Sigma$. Так как ф.м. φ исчерпывающая, то существует разве лишь конечное число попарно непересекающихся атомов $\{E_1, \dots, E_p\} \subset E \cap \Sigma$, для которых $\varphi(E_k) > \varepsilon$, $k = \overline{1, p}$.

Положим $C = E \setminus \bigcup_{k=1}^p E_k$. Если $\varphi(C) \leq \varepsilon$, то теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда $\varphi(C) > \varepsilon$.

Положим

$$a_1 = \sup\{\varphi(B), B \in C \cap \Sigma, \varphi(B) \leq \varepsilon\}.$$

Заметим, что фигурирующее в последней формуле семейство множеств содержит пустое множество, так как $\varphi(\emptyset) = 0$.

Ясно, что существует такое множество $F_1 \in C \cap \Sigma$, для которого

$$\frac{1}{2}a_1 \leq \varphi(F_1) \leq \varepsilon.$$

Если $\varphi(C \setminus F_1) \leq \varepsilon$, то теорема доказана.

Иначе положим

$$a_2 = \sup\{\varphi(B), B \in (C \setminus F_1) \cap \Sigma, \varphi(B) \leq \varepsilon\}.$$

Тогда существует такое множество $F_2 \in (C \setminus F_1) \cap \Sigma$, для которого

$$\frac{1}{2}a_2 \leq \varphi(F_2) \leq \varepsilon.$$

Если $\varphi(C \setminus (F_1 \cup F_2)) \leq \varepsilon$, то теорема доказана; иначе сделаем следующий шаг.

Если процесс продолжается бесконечно, то будут построены невозрастающая последовательность чисел $\{a_k\}$ и спектр $\{F_k\} \subset C \cap \Sigma$ такие, что

$$0 \leq \frac{1}{2}a_k \leq \varphi(F_k) \leq \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как $\varphi(F_k) \rightarrow 0$, то $a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Положим $F = C \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Покажем, что $\varphi(F) = 0$.

Предположим, что $\varphi(F) > 0$. Если F содержит атомы, то обозначим через L один из атомов; получим, что $L \in F \cap \Sigma$ и $0 < \varphi(L) \leq \varepsilon$. Если же F не содержит атомов, то в силу исчерпываемости ф.м. φ легко доказать существование такого множества $L \in F \cap \Sigma$, для которого $0 < \varphi(L) \leq \varepsilon$.

Тогда по построению $\varphi(L) \leq a_k$ для любого номера k . Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем, что $\varphi(L) = 0$; это противоречит неравенству $\varphi(L) > 0$. Значит, $\varphi(F) = 0$.

Так как ф.м. φ непрерывна сверху в нуле, то существует такой номер k_0 , что

$$\varphi\left(\bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} F_k\right) \leq \varepsilon.$$

Положим

$$A = \bigcup_{k=k_0+1}^{\infty} F_k.$$

Тогда множества $\{E_1, E_2, \dots, E_p, F_1, \dots, F_{k_0}, A, F\}$ дают искомое разбиение множества E .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, когда ф.м. φ — мера, заданная на σ -алгебре Σ , из теоремы 3 вытекает известная теорема Сакса о разложении [19].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Σ — σ -алгебра подмножеств множества T ; пусть, далее, φ — неатомическая функция множества на Σ . Если

- 1) ф.м. φ — исчерпывающая,
- 2) ф.м. φ непрерывна сверху в нуле,

то ф.м. φ обладает свойством Сакса.

СЛЕДСТВИЕ 3. На σ -алгебре для субмеры Добракова свойства неатомичности, Сакса и Дарбу равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ — субмера Добракова на σ -алгебре Σ . Так как она монотонна и непрерывна сверху в нуле, то для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ имеем $0 \leq \varphi(E_n) \leq \varphi(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i)$, где $\varphi(\bigcup_{i=n}^{\infty} E_i) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Значит, $\varphi(E_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. ф.м. φ — исчерпывающая.

Тогда в силу следствия 2 неатомичность влечет свойство Сакса.

Свойство Сакса влечет свойство Дарбу по теореме 2.

Очевидно, из свойства Дарбу следует неатомичность.

§ 3. Свойство Дарбу и разложение функции множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что ф.м. φ имеет $\mathcal{D}$ -разложение, если существуют такие монотонные ф.м. λ и μ , что выполняются условия:

- 1) $\varphi(E) = \lambda(E) + \mu(E)$, $E \in \Sigma$;
- 2) для любого множества $E \in \Sigma$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое множество $B \in E \cap \Sigma$, что $\lambda(B) = \lambda(E)$ и $\mu(B) < \varepsilon$.

ПРИМЕР 4. Пусть φ – аддитивная ф.м., заданная на σ -алгебре Σ ; пусть, далее, λ и μ есть разложение ф.м. φ в смысле Хьюитта–Иосиды [20], где μ – счетноаддитивная и λ – чисто аддитивная составляющие ф.м. φ . Тогда λ и μ дают $\mathcal{D}$ -разложение ф.м. φ на Σ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть φ – аддитивная ф.м. на F -алгебре Σ . Если выполняются условия

- 1) ф.м. φ имеет $\mathcal{D}$ -разложение λ и μ ,
- 2) ф.м. λ обладает свойством Дарбу,
- 3) ф.м. λ полуаддитивна,

то для любого множества $E \in \Sigma$ и для любого числа $0 \leq t \leq \lambda(E)$ существует такое множество $A \in E \cap \Sigma$, что $\varphi(A) = t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $E \in \Sigma$. Пусть $0 < t \leq \lambda(E)$. Положим

$$\varepsilon_1 = \min(1; t).$$

Так как ф.м. φ имеет $\mathcal{D}$ -разложение λ и μ , то для множества E и числа ε_1 существует такое множество $C_1 \in E \cap \Sigma$, что

$$\lambda(E) = \lambda(C_1) \quad \text{и} \quad \mu(C_1) < \varepsilon_1.$$

Так как ф.м. λ обладает свойством Дарбу, то существует такое множество $A_1 \in C_1 \cap \Sigma$, что

$$\lambda(A_1) = t. \tag{1}$$

Очевидно, в силу монотонности ф.м. μ

$$t = \lambda(A_1) \leq \lambda(A_1) + \mu(A_1) \leq \lambda(A_1) + \mu(C_1) < t + \varepsilon_1.$$

Таким образом,

$$t \leq \varphi(A_1) < t + \varepsilon_1. \tag{2}$$

Из (1) имеем, что $0 \leq t - \varepsilon_1 < \lambda(A_1)$.

Так как ф.м. λ обладает свойством Дарбу, то существует такое множество $B_1 \in A_1 \cap \Sigma$, что

$$\lambda(B_1) = t - \varepsilon_1. \tag{3}$$

Отсюда в силу монотонности ф.м. μ следует

$$t - \varepsilon_1 = \lambda(B_1) \leq \lambda(B_1) + \mu(B_1) \leq \lambda(B_1) + \mu(C_1) < t.$$

Таким образом,

$$t - \varepsilon_1 \leq \varphi(B_1) < t. \tag{4}$$

Отсюда в силу (3), (4) и полуаддитивности ф.м. λ получаем

$$0 < t - \varphi(B_1) \leq \varepsilon_1 = t - \lambda(B_1) = \lambda(A_1) - \lambda(B_1) \leq \lambda(A_1 \setminus B_1). \quad (5)$$

Таким образом, существуют число $0 < \varepsilon_1 \leq 1$, множества $A_1, B_1 \in E \cap \Sigma$ такие, что в силу (5), (4) и (2) выполняется

$$\begin{aligned} B_1 &\subset A_1, \\ 0 &< t - \varphi(B_1) \leq \lambda(A_1 \setminus B_1), \\ 0 &\leq t - \varepsilon_1 \leq \varphi(B_1) < t \leq \varphi(A_1) < t + \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Пусть теперь построены число $0 < \varepsilon_n \leq 1/n$, множества A_n и B_n из $E \cap \Sigma$ такие, что

$$\begin{aligned} B_n &\subset A_n, \\ 0 &< t - \varphi(B_n) \leq \lambda(A_n \setminus B_n), \\ 0 &\leq t - \varepsilon_n \leq \varphi(B_n) < t \leq \varphi(A_n) < t + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Положим $\varepsilon_{n+1} = \min(1/(n+1); t - \varphi(B_n))$ и найдем в силу $\mathcal{D}$ -разложения такое множество

$$C_{n+1} \in (A_n \setminus B_n) \cap \Sigma,$$

что

$$\lambda(C_{n+1}) = \lambda(A_n \setminus B_n) \quad \text{и} \quad \mu(C_{n+1}) < \varepsilon_{n+1}. \quad (6)$$

Так как ф.м. λ обладает свойством Дарбу, то существует такое множество $A'_{n+1} \in C_{n+1} \cap \Sigma$, что

$$\lambda(A'_{n+1}) = t - \varphi(B_n). \quad (7)$$

Положим $A_{n+1} = B_n \cup A'_{n+1}$.

В силу (7), (6) и монотонности ф.м. μ получим

$$\begin{aligned} t &= \varphi(B_n) + \lambda(A'_{n+1}) \leq \varphi(B_n) + \varphi(A'_{n+1}) \\ &\leq \varphi(B_n) + \lambda(A'_{n+1}) + \mu(A'_{n+1}) < t + \varepsilon_{n+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как ф.м. φ аддитивна, то $\varphi(A_{n+1}) = \varphi(B_n) + \varphi(A'_{n+1})$. Отсюда в силу (8) следует, что $t \leq \varphi(A_{n+1}) < t + \varepsilon_{n+1}$.

Аналогично найдем такое множество $B'_{n+1} \in A'_{n+1} \cap \Sigma$, что $\lambda(B'_{n+1}) = t - \varphi(B_n) - \varepsilon_{n+1}$.

Отсюда в силу монотонности ф.м. μ получаем

$$0 \leq t - \varepsilon_{n+1} \leq \lambda(B'_{n+1}) + \varphi(B_n) + \mu(B'_{n+1}) < t. \quad (9)$$

Положим $B_{n+1} = B_n \cup B'_{n+1}$.

Тогда из (9), учитывая аддитивность ф.м. φ , получим $t - \varepsilon_{n+1} \leq \varphi(B_{n+1}) < t$. Отсюда в силу (7), (8) и полуаддитивности ф.м. λ получаем

$$\begin{aligned} 0 &< t - \varphi(B_{n+1}) \leq \varepsilon_{n+1} = \lambda(A'_{n+1}) - \lambda(B'_{n+1}) \\ &\leq \lambda(A'_{n+1} \setminus B'_{n+1}) = \lambda(A_{n+1} \setminus B_{n+1}). \end{aligned}$$

Следовательно, существуют число $0 < \varepsilon_{n+1} \leq 1/(n+1)$, множества A_{n+1} и B_{n+1} из $E \cap \Sigma$ такие, что

$$\begin{aligned} B_n &\subset B_{n+1} \subset A_{n+1} \subset A_n, \\ t - \varphi(B_{n+1}) &\leq \lambda(A_{n+1} \setminus B_{n+1}), \\ 0 &\leq t - \varepsilon_{n+1} \leq \varphi(B_{n+1}) < t \leq \varphi(A_{n+1}) < t + \varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Продолжив процесс до бесконечности, построим две последовательности множеств $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ из $E \cap \Sigma$ такие, что

$$\begin{aligned} B_n &\subset \dots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \dots \subset A_{n+1} \subset A_n \subset \dots \subset A_1, \\ t - \frac{1}{n} &\leq \varphi(B_n) < t \leq \varphi(A_n) < t + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Так как Σ — F -алгебра, то существует множество $A \in E \cap \Sigma$ такое, что

$$B_n \subset A \subset A_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу монотонности φ следует

$$t - \frac{1}{n} \leq \varphi(A) \leq t + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $\varphi(A) = t$. Искомое множество построено.

ТЕОРЕМА 5. Пусть φ — аддитивная ф.м. на F -алгебре Σ подмножеств множества T . Если выполняются условия

- 1) ф.м. φ имеет $\mathcal{D}$ -разложение λ и μ ,
- 2) ф.м. λ обладает свойством Дарбу,
- 3) ф.м. λ полуаддитивна,
- 4) $\mu(T) \leq \lambda(T)$,

то множеством значений ф.м. φ является отрезок $[0, \varphi(T)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу аддитивности ф.м. φ достаточно ограничиться случаем $0 < t < \frac{1}{2}\varphi(T)$.

Тогда в силу условия 4) из формулировки теоремы имеем $0 < t < \lambda(T)$.

Осталось применить теорему 4.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если в теореме 5 вместо условия 4) потребовать, чтобы выполнялось $\mu(E) \leq \lambda(E)$ для любого $E \in \Sigma$, то ф.м. φ будет обладать свойством Дарбу.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть φ — аддитивная ф.м. на σ -алгебре Σ подмножеств множества T ; пусть, далее, λ и μ есть разложение Хьюитта–Иосиды, где λ — чисто аддитивная и μ — счетноаддитивная ф.м. Если выполнены условия

- 1) λ обладает свойством Дарбу,
- 2) $\mu(T) \leq \lambda(T)$,

то множеством значений ф.м. φ является отрезок $[0, \varphi(T)]$.

Список литературы

1. Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
2. *Dinculeanu N.* Vector measures. Berlin: VEB, 1966.
3. *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. № 6. С. 465–478.
4. *Halmos P. R.* The range of a vector measure // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. № 54. P. 416–421.
5. *Lindenstrauss J.* A short proof of Liapounoff's convexity theorem // J. Math. Mech. 1966. № 15. P. 971–972.
6. *Scozzafava R.* Completa additivita su opportune successioni di insiemi di una misura di probabilita semplicemente additiva e fortemente non atomica // Boll. Un. Mat. Ital. B(7). 1979. V. 16. № 5. P. 639–648.
7. *Rao M. Braskara, Rao K. P. S. Braskara.* Charges on Boolean algebras and almost discrete spaces // Mathematika. 1973. № 20. P. 214–223.
8. *Maharam D.* Finitely additive measures on the integers // Sankhyā Ser. A. 1976. № 38. P. 44–49.
9. *Olejček V.* Darboux property of finitely additive measure on δ -ring // Math. Slovaca. 1977. V. 27. № 2. P. 195–201.
10. *Armstrong T. E., Prikry K.* Liapounoff's theorem for nonatomic, finitely-additive, bounded, finite-dimensional, vector-valued measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 266. № 2. P. 499–514.
11. *Dobrákov I.* On submeasures. I // Dissertationes Math. 1974. V. 112.
12. *Musiał K.* Absolute continuity and the range of group valued measure // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys. 1973. V. 21. № 2. P. 105–113.
13. *Landers D.* Connectedness properties of the range of vector and semimeasures // Manuscripta Math. 1973. № 9. P. 105–112.
14. *Constantinescu C.* The range of atomless group valued measures // Comment. Math. Helv. 1976. № 51. P. 207–213.
15. *Martellotti A.* Topological properties of the range of a group-valued finitely additive measure // J. Math. Anal. Appl. 1985. № 110. P. 411–424.
16. *Ауман Р., Шепли Л.* Значения для неатомических игр. М.: Мир, 1977.
17. *Seeever G. L.* Measures on F -spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. № 133. P. 267–280.
18. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
19. *Saks S.* Addition to the note on some functionals // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. № 35. P. 967–974.
20. *Yosida K., Hewitt E.* Finitely additive measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. № 72. P. 46–66.

Самарский государственный университет

Поступила в редакцию
11.01.2000