Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Коляда, Вложения дробных пространств Соболева и оценки преобразований Фурье, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 7, 51–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 05:17:12

УДК 517.5

В. И. Коляда

Вложения дробных пространств Соболева и оценки преобразований Фурье

В статье изучаются дробные анизотропные пространства Соболева–Лиувилля $L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$, где $1 \leq p < \infty$ и r_k – положительные числа. Для функций из этих пространств устанавливаются оценки норм в модифицированных пространствах типа Лоренца и Бесова, определяемых в терминах повторных перестановок. С помощью этих оценок доказываются неравенства для преобразований Фурье функций из пространства $L_1^{r_1, \dots, r_n}$.

Статья является продолжением работ автора, в которых аналогичные вопросы изучались в случае целых r_k .

Применяемые в работе методы основаны на оценках повторных перестановок. Этот подход позволяет упростить доказательства и в то же время получить более сильные результаты. В частности, существенно упрощается исследование предельного случая $p = 1$.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Введение

В статье устанавливаются теоремы вложения и оценки преобразований Фурье для функций из дробных анизотропных пространств Соболева–Лиувилля.

Приведем основные определения (подробные пояснения и соответствующие ссылки можно найти в [1]).

Ядро Бесселя порядка $\alpha > 0$ в $\mathbb{R}^n$ определяется как функция, преобразование Фурье которой равно

$$\widehat{G}_\alpha(\xi) = (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{-\alpha/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $1 \leq p < \infty$ и $r_1, \dots, r_n$ – положительные числа. Через $L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство всех функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, обладающих следующими свойствами:

- (1) если $r_k \in \mathbb{N}$, то существует обобщенная частная производная порядка r_k по k -й переменной $D_k^{r_k} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;
- (2) если $r_k \notin \mathbb{N}$, то существует функция $f_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$ такая, что для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} G_{r_k}(x_k - y) f_k(y, \widehat{x}_k) dy.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Испании (Sabbatical grant SAB95-0654).

Заметим, что в случае (2) функция f_k определяется однозначно с точностью до значений на множестве n -мерной меры нуль и выполняется неравенство

$$\|f\|_p \leq \|f_k\|_p.$$

Будем называть f_k *бесселевой производной* порядка r_k функции f по переменной x_k и обозначать через $D_k^{r_k} f$ (подчеркнем, однако, что в случае целого r_k это обозначение сохраняется для обычной производной).

Норма в пространстве $L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\|f\|_{L_p^{r_1, \dots, r_n}} = \|f\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \|D_k^{r_k} f\|_p.$$

Если все r_k — целые числа, то $L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством Соболева $W_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$. Будем называть $L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$ *дробным пространством Соболева* или пространством Соболева–Лиувилля. Заметим, что данное определение отличается от приведенного в монографии [2] лишь в случае, когда $p = 1$ и хотя бы одно из r_k является целым нечетным числом.

Как обычно, через $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ обозначаем множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$.

Множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ является всюду плотным подмножеством в пространстве $L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$ для любых $1 \leq p < \infty$, $r_k > 0$.

Для доказательства этого утверждения достаточно использовать ε -усреднения и умножение на “срезающие” функции (см. [3; гл. 5], [4; § 27.3], [1]).

Напомним определение пространств Бесова. Если функция f задана на $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$ и $r \in \mathbb{N}$, то полагаем

$$\Delta_k^r(h)f(x) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x + jhe_k)$$

(где $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$ и e_k — единичный координатный вектор). Предположим, что $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$). Тогда функция

$$\omega_k^r(f; \delta)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_k^r(h)f\|_p \quad (\delta \geq 0)$$

называется *частным модулем непрерывности* функции f порядка r в L^p по переменной x_k . В приведенных обозначениях при $r = 1$ верхний индекс обычно не пишут.

Пусть $1 \leq p, \theta < \infty$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — положительные числа. *Пространством Бесова $B_{p, \theta}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\mathbb{R}^n)$ называется класс всех функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, для которых*

$$\|f\|_{B_{p, \theta}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}} \equiv \|f\|_p + \sum_{k=1}^n \left(\int_0^\infty (t^{-\alpha_k} \|\Delta_k^{r_k}(t)f\|_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} < \infty,$$

где $r_k \in \mathbb{N}$ и $r_k > \alpha_k$ ($k = 1, \dots, n$). При любом выборе целых r_k получаются эквивалентные нормы; кроме того, в определении можно заменить нормы конечных разностей соответствующими частными модулями непрерывности [2; гл. 4], [5; гл. 4].

Настоящая статья является продолжением работ автора [1], [6], [7]. В частности, мы распространяем результаты работ [6], [7] на произвольные значения r_k и доказываем некоторые теоремы, анонсированные в обзорной статье [1]. Детальное описание предшествовавших исследований содержится в [1], и мы не будем его воспроизводить.

В работах [1], [6], [7] использовались методы, основанные на оценках невозрастающих перестановок и геометрических неравенствах изопериметрического типа. Отметим, что применение этих методов в теории вложения классов функций восходит к работам П. Л. Ульянова конца 60-х годов (см. [8], [9]). В основе нашей статьи также лежат оценки перестановок, однако здесь мы применяем так называемые повторные перестановки. Функция f , заданная на $\mathbb{R}^n$, переставляется в невозрастающем порядке сначала по одной переменной, затем по другой и т. д. В итоге получается функция на $\mathbb{R}_+^n$, невозрастающая по каждой из переменных и равноизмеримая с $|f|$. По-видимому, впервые в теоремах вложения повторные перестановки применялись П. Освальдом [10].

Использование повторных перестановок имеет ряд преимуществ. В частности, оно позволяет существенно упростить некоторые доказательства и в то же время получить более сильные результаты.

Строгое определение повторной перестановки приведено в §2. Там же получены основные оценки перестановок, используемые в дальнейшем. Далее, в терминах повторных перестановок определяется пространство типа Лоренца $L_{\mathcal{R}}^{q,p}(\mathbb{R}^n)$. При $q > p$ норма этого пространства $\|\cdot\|_{q,p;\mathcal{R}}$ сильнее нормы обычного пространства Лоренца $L^{q,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_{q,p} \leq c \|f\|_{q,p;\mathcal{R}}. \quad (1.1)$$

Основные результаты работы содержатся в §§3–5. Формулируя эти результаты, будем предполагать, что $r_1, \dots, r_n$ – заданные положительные числа и

$$r = n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k} \right)^{-1}.$$

В §3 исследуется вложение пространств $L_p^{r_1, \dots, r_n}$ в пространства Лоренца. Здесь доказывается следующая теорема: если $n \geq 2$, $1 \leq p < n/r$ и $q^* = np/(n - rp)$, то для каждой функции $f \in L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{q^*,p;\mathcal{R}} \leq c \sum_{k=1}^{\infty} \|D_k^{r_k}\|_p. \quad (1.2)$$

В силу (1.1) отсюда следует вложение

$$L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q^*,p}(\mathbb{R}^n). \quad (1.3)$$

Другими методами это вложение было доказано в [1] (для целых r_k – в [6]). В свою очередь, из (1.3) выводим, что

$$L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n). \quad (1.4)$$

Для целых r_k – это теорема вложения Соболева; в случае произвольных $r_k > 0$ и $p > 1$ вложение (1.4) доказал П. И. Лизоркин (соответствующие ссылки содержатся в [1]). Для $p = n = 1$ (1.4) не имеет места.

В §4 устанавливается основной результат работы. Здесь мы ограничимся формулировкой его следствия – теоремы о вложении в пространство Бесова.

Предположим, что

$$1 \leq p < q < \infty \text{ и } \varkappa \equiv 1 - \frac{n}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) > 0.$$

Если $1 < p < \infty$ и $n \geq 1$, или $p = 1$ и $n \geq 2$, то

$$L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{q,p}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\mathbb{R}^n), \quad \alpha_k = \varkappa r_k. \quad (1.5)$$

В случае целых r_k это вложение было известно – для $p > 1$ оно было доказано В. П. Ильиным [5; теорема 18.12], а для $p = 1$ – автором [6].

Заметим, что исследование пространств $L_p^{r_1, \dots, r_n}$ в случае $p = 1$ сопряжено с дополнительными трудностями (эта проблема подробно обсуждается в [1]). В частности, и для целых r_k доказательство вложения (1.5) в [6] при $p = 1$ значительно сложнее, нежели в случае $p > 1$. Как и в [1], [6], одной из главных задач настоящей статьи является разработка методов, позволяющих охватить все значения $p \geq 1$. Подход к этой задаче удастся значительно упростить благодаря применению повторных перестановок и связанных с ними специальных операторов (см. (2.13)).

Вложение (1.5) (при $p = 1$) применяется в §5 для получения оценок преобразований Фурье функций из пространства $L_1^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$. В частности, мы распространяем соответствующие результаты из работ [7], [11], [12] на произвольные значения $r_k > 0$. Приведем одно из следствий: для любой функции $f \in L_1^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} \right)^{1-n/r} d\xi \leq c \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j}\|_1.$$

§2. Невозрастающие перестановки

Через $S_0(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать класс всех измеримых почти везде конечных функций f на $\mathbb{R}^n$ таких, что для любого $y > 0$

$$\lambda_f(y) \equiv |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > y\}| < \infty.$$

Невозрастающей перестановкой функции $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ называется невозрастающая на $\mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ функция f^* , равноизмеримая с $|f|$. Перестановка f^* может быть задана равенством

$$f^*(t) = \sup_{|E|=t} \inf_{x \in E} |f(x)|, \quad 0 < t < \infty.$$

Справедливо соотношение [13; гл. 2, §2]

$$\sup_{|E|=t} \int_E |f(x)| dx = \int_0^t f^*(u) du, \quad (2.1)$$

что равносильно

$$\inf_{|E|=t} \int_{cE} |f(x)| dx = \int_t^\infty f^*(u) du. \quad (2.2)$$

Заметим, что

$$f^*(2t) \leq \frac{1}{t} \int_t^\infty f^*(u) du, \quad t > 0. \quad (2.3)$$

В дальнейшем обозначаем

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(u) du, \quad (2.4)$$

$$\bar{f}^*(t) = \frac{1}{t} \int_t^\infty f^*(u) du, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

В силу неравенства Харди [14; с. 124]

$$\|f^{**}\|_p \leq c_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty. \quad (2.6)$$

Основные свойства перестановок, которые мы будем использовать, изложены в [13], [14], [1]. Здесь отметим следующее свойство [13; гл. 2, § 2].

ЛЕММА 1. Если последовательность $\{f_k\} \subset S_0$ сходится по мере к функции $f \in S_0$, то $f_k^*(t) \rightarrow f^*(t)$ в каждой точке непрерывности f .

Рассмотрим теперь перестановки по отдельным переменным и повторные перестановки. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$. Удаляя из набора x координату x_k , мы получим $(n-1)$ -мерный вектор, который будем обозначать через $\hat{x}_k$. При этом будем писать $x = (x_k, \hat{x}_k)$. Далее, через $(\tau, \hat{x}_k)'$ ($\tau \in \mathbb{R}$) мы обозначаем вектор, у которого первая координата равна τ , а затем следуют координаты $(n-1)$ -мерного вектора $\hat{x}_k$.

Предположим, что $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ и $1 \leq k \leq n$. Фиксируем $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^{n-1}$ и рассмотрим функцию переменного x_k

$$f_{\hat{x}_k}(x_k) = f(x_k, \hat{x}_k), \quad x_k \in \mathbb{R}.$$

Для почти всех $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^{n-1}$ имеем $f_{\hat{x}_k} \in S_0(\mathbb{R})$. Обозначим

$$\mathcal{R}_k f((\tau, \hat{x}_k)') = f_{\hat{x}_k}^*(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Функция $\mathcal{R}_k f$ определена почти всюду на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$; будем называть ее *перестановкой* функции f по k -й переменной. Используя приближение ступенчатыми функциями, лемму 1 и теорему Фубини, нетрудно убедиться в том, что $\mathcal{R}_k f$ является измеримой функцией, равноизмеримой с $|f|$ (см. также [15], [16]). Для любого набора $\{k_1, \dots, k_\nu\}$ попарно различных индексов $1 \leq k_j \leq n$ полагаем $\mathcal{R}_{k_1, \dots, k_\nu} f = \mathcal{R}_{k_\nu} \cdots \mathcal{R}_{k_1} f$. Далее, обозначим через $\mathcal{P}_n$ совокупность всех перестановок $\sigma = \{k_1, \dots, k_n\}$ множества $\{1, \dots, n\}$. Для любой $\sigma \in \mathcal{P}_n$ будем называть функцию

$$\mathcal{R}_\sigma f(t) \equiv \mathcal{R}_{k_1, \dots, k_n} f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^n,$$

$\mathcal{R}_\sigma$ -перестановкой функции f . Таким образом, мы получаем $\mathcal{R}_\sigma f$, последовательно “переставляя” функцию f в невозрастающем порядке по переменным $x_{k_1}, \dots, x_{k_n}$.

Легко видеть, что $\mathcal{R}_\sigma f$ монотонно убывает по каждой из переменных. В силу сделанного выше замечания $\mathcal{R}_\sigma f$ равноизмерима с $|f|$.

Далее, нетрудно убедиться в справедливости неравенств

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\sigma f(t) &\leq f^*(t_1 \cdots t_n), \\ \mathcal{R}_\sigma(f+g)(t+s) &\leq \mathcal{R}_\sigma f(t) + \mathcal{R}_\sigma g(s) \quad (t, s \in \mathbb{R}_+^n).\end{aligned}$$

Используя эти неравенства, мы точно так же, как в случае обычных перестановок [13; гл. 2, § 2], получаем следующий аналог леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть $f_k \in S_0(\mathbb{R}^n)$ ($k = 1, 2, \dots$) и последовательность $\{f_k\}$ сходится по мере на $\mathbb{R}^n$ к функции $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любой перестановки $\sigma \in \mathcal{P}_n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{R}_\sigma f_k(t) = \mathcal{R}_\sigma f(t) \quad \text{для н.в. } t \in \mathbb{R}_+^n.$$

В дальнейшем мы будем использовать некоторые средние, определяемые в терминах повторных перестановок.

Пусть $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Обозначим (см. (2.4))

$$\mathcal{R}_k^* f((\tau, \hat{x}_k)') = f_{\hat{x}_k}^{**}(\tau) \quad (\tau \in \mathbb{R}_+, \hat{x}_k \in \mathbb{R}^{n-1}).$$

Далее, для любого $\sigma = \{k_1, \dots, k_n\} \in \mathcal{P}_n$ полагаем

$$\mathcal{R}_\sigma^* f(t) = \mathcal{R}_{k_n}^* \cdots \mathcal{R}_{k_1}^* f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^n. \quad (2.7)$$

В силу (2.6)

$$\|\mathcal{R}_\sigma^* f\|_p \leq c_p \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (2.8)$$

Определим также следующие средние (см. (2.5)):

$$\overline{\mathcal{R}}_k f((\tau, \hat{x}_k)') = \bar{f}_{\hat{x}_k}^*(\tau) \quad (\tau \in \mathbb{R}_+, \hat{x}_k \in \mathbb{R}^{n-1})$$

и

$$\overline{\mathcal{R}}_\sigma f(t) = \overline{\mathcal{R}}_{k_n} \cdots \overline{\mathcal{R}}_{k_1} f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^n. \quad (2.9)$$

В силу (2.3)

$$\mathcal{R}_\sigma f(2t) \leq \overline{\mathcal{R}}_\sigma f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^n. \quad (2.10)$$

Рассмотрим некоторые оценки перестановок. Прежде всего, мы будем использовать следующую лемму (см. [1], [6]).

ЛЕММА 3. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ и $0 < \tau < \infty$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| \leq (2^k - 1)f^*(\tau) + \frac{1}{\tau} \int_0^{(k+1)\tau} |\Delta^k(h)f(x)| dh. \quad (2.11)$$

Если, кроме того, функция f имеет локально абсолютно непрерывную производную $f^{(k-1)}$, то

$$|f(x)| \leq (2^k - 1)f^*(\tau) + [(k+1)\tau]^{k-1} \int_x^{x+k(k+1)\tau} |f^{(k)}(\xi)| d\xi. \quad (2.12)$$

Для любого $\sigma \in \mathcal{P}_n$ и $1 \leq \nu < \infty$ положим

$$\overline{\mathcal{R}}_\sigma^{(\nu)} f(t) = (\overline{\mathcal{R}}_\sigma f^\nu(t))^{1/\nu}. \quad (2.13)$$

Если $1 \leq p < \nu$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, то

$$\|\overline{\mathcal{R}}_\sigma^{(\nu)} f\|_p \leq c \|f\|_p. \quad (2.14)$$

Для доказательства достаточно применить неравенство типа Харди (см., например, [17; неравенство (2.14)]).

ЛЕММА 4. Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 \leq \nu < p'$, $1 \leq k \leq n$ ($n \geq 2$) и $\sigma \in \mathcal{P}_n$, $\sigma = \{j_1, \dots, j_n\}$. Предположим, что $\varphi \in L^\nu(\mathbb{R})$ и $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Пусть $k = j_m$ и

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_k - y) g(y, \hat{x}_k) dy. \quad (2.15)$$

Тогда:

(1) если $p > 1$ и $\nu = 1$, то

$$\mathcal{R}_\sigma f(t) \leq \|\varphi\|_1 \mathcal{R}_\sigma^* g(t); \quad (2.16)$$

(2) если $p = 1$ и $\nu \geq 1$, то

$$\mathcal{R}_\sigma f(t) \leq \|\varphi\|_\nu \overline{\mathcal{R}}_{\hat{\sigma}_m}^{(\nu)} \psi_k \left(\frac{t_m}{2} \right) t_m^{-1/\nu}, \quad (2.17)$$

где

$$\psi_k(\hat{x}_k) = \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование свертки (2.15) для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ следует из теоремы Юнга.

Пусть для определенности $\sigma = \{1, \dots, n\}$ и $1 < k \leq n$. Предположим также, что функции g и φ неотрицательны.

Для любого множества $E \subset \mathbb{R}$ с $|E| = t_1$ имеем

$$\begin{aligned} \int_E f(x) dx_1 &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy \int_E g(x_k - y, \hat{x}_k) dx_1 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy \int_0^{t_1} \mathcal{R}_1 g(u_1, x_2, \dots, x_k - y, \dots, x_n) du_1. \end{aligned}$$

Следовательно (см. (2.1)),

$$\mathcal{R}_1 f(t_1, x_2, \dots, x_n) \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \mathcal{R}_1^* g(t_1, x_2, \dots, x_k - y, \dots, x_n) dy.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_{1, \dots, k-1} f(t_1, \dots, t_{k-1}, x_k, \dots, x_n) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \mathcal{R}_{k-1}^* \cdots \mathcal{R}_1^* g(t_1, \dots, t_{k-1}, x_k - y, \dots, x_n) dy. \end{aligned}$$

Интегрируя по переменной x_k по произвольному множеству $E \subset \mathbb{R}$ с $|E| = t_k$, получаем

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_{1, \dots, k} f(t_1, \dots, t_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\leq \|\varphi\|_1 \mathcal{R}_k^* \cdots \mathcal{R}_1^* g(t_1, \dots, t_k, x_{k+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Отсюда следует (2.16).

Пусть теперь $p = 1$, $\nu \geq 1$. Последовательно применяя (2.3) и (2.2) к перестановкам по переменным $x_1, \dots, x_{k-1}$, получаем

$$\begin{aligned} & [\mathcal{R}_{1, \dots, k-1} f(2t_1, \dots, 2t_{k-1}, x_k, \dots, x_n)]^\nu \\ & \leq \frac{1}{t_1 \cdots t_{k-1}} \inf_{|E_{k-1}|=t_{k-1}} \int_{cE_{k-1}} dx_{k-1} \cdots \inf_{|E_1|=t_1} \int_{cE_1} f^\nu(x) dx_1. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} & [\mathcal{R}_{1, \dots, k} f(2t_1, \dots, 2t_k, x_{k+1}, \dots, x_n)]^\nu \\ & \leq \frac{1}{2t_k} \sup_{|A|=2t_k} \int_A [\mathcal{R}_{1, \dots, k-1} f(2t_1, \dots, 2t_{k-1}, x_k, \dots, x_n)]^\nu dx_k \\ & \leq \frac{1}{2t_1 \cdots t_k} \sup_{|A|=2t_k} \inf_{|E_{k-1}|=t_{k-1}} \int_{cE_{k-1}} dx_{k-1} \cdots \inf_{|E_1|=t_1} \int_{cE_1} dx_1 \int_A f^\nu(x) dx_k. \end{aligned}$$

В силу неравенства Минковского

$$\left(\int_A f^\nu(x) dx_k \right)^{1/\nu} \leq \|\varphi\|_\nu \psi_k(\hat{x}_k).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & [\mathcal{R}_{1, \dots, k} f(2t_1, \dots, 2t_k, x_{k+1}, \dots, x_n)]^\nu \\ & \leq \frac{1}{2t_k} \|\varphi\|_\nu^\nu \overline{\mathcal{R}}_{k-1} \cdots \overline{\mathcal{R}}_1 \psi_k^\nu(t_1, \dots, t_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Отсюда следует (2.17). Лемма доказана.

Пусть $0 < q, p < \infty$. Функция $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству Лоренца $L^{q,p}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\|f\|_{q,p} \equiv \left(\int_0^\infty (t^{1/q} f^*(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty.$$

Справедливо неравенство [14; с. 217]

$$\|f\|_{q,s} \leq c \|f\|_{q,p} \quad (0 < p < s < \infty), \quad (2.18)$$

так что $L^{q,p} \subset L^{q,s}$ при $p < s$. В частности, при $0 < p \leq q$

$$L^{q,p} \subset L^{q,q} \equiv L^q.$$

В дальнейшем полагаем

$$\pi(t) = \prod_{k=1}^n t_k, \quad t \in \mathbb{R}_+^n. \quad (2.19)$$

Пусть $0 < q, p < \infty$ и $\sigma \in \mathcal{P}_n$ ($n \geq 2$). Через $L_{\mathcal{R}_\sigma}^{q,p}(\mathbb{R}^n)$ обозначим класс всех функций $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\|f\|_{q,p;\mathcal{R}_\sigma} \equiv \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} [\pi(t)^{1/q} \mathcal{R}_\sigma f(t)]^p \frac{dt}{\pi(t)} \right)^{1/p} < \infty$$

(см. [15]). Полагаем также

$$L_{\mathcal{R}}^{q,p}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{P}_n} L_{\mathcal{R}_\sigma}^{q,p}(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_{q,p;\mathcal{R}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \|f\|_{q,p;\mathcal{R}_\sigma}.$$

Если $q > p$, то для любого $\sigma \in \mathcal{P}_n$ и любой функции $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{q,p} \leq c \|f\|_{q,p;\mathcal{R}_\sigma} \quad (2.20)$$

(см. [16]). Таким образом,

$$L_{\mathcal{R}_\sigma}^{q,p} \subset L^{q,p} \quad (q > p).$$

Более того, это вложение является строгим [16].

§ 3. Вложения в пространства $L_{\mathcal{R}}^{q,p}$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r_1, \dots, r_n$ — положительные числа ($n \geq 2$),

$$r \equiv n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k} \right)^{-1} < n, \quad 1 \leq p < \frac{n}{r} \quad \text{и} \quad q^* = \frac{np}{n - rp}.$$

Тогда для каждой функции $f \in L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{q^*,p;\mathcal{R}} \leq c \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_p. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_p^{r_1, \dots, r_n}$. Обозначим через $\bar{r}_k$ наименьшее целое такое, что $r_k \leq \bar{r}_k$ ($k = 1, \dots, n$). Фиксируем $t \in \mathbb{R}_+^n$. В силу леммы 3 для любых $K > 1$, $1 \leq j \leq n$ и $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x)| \leq 2^{\bar{r}_j} \mathcal{R}_j f((Kt_j, \hat{x}_j)') + \Phi_j(x), \quad (3.2)$$

где

$$\Phi_j(x) = \frac{1}{t_j} \int_0^{t_j'} |\Delta_j^{\bar{r}_j}(h) f(x)| dh, \quad t_j' = (\bar{r}_j + 1)Kt_j$$

(напомним, что через $(x_j, \hat{x}_j)'$ мы обозначаем вектор, полученный из вектора x переносом j -й координаты на первое место). Пусть $\sigma \in \mathcal{P}_n$; для простоты будем считать, что $\sigma = \{1, \dots, n\}$. В силу (3.2)

$$\mathcal{R}_\sigma f(t) \leq 2^{\bar{r}_j} \mathcal{R}_{\sigma'_j} f\left(\left(Kt_j, \frac{\hat{t}_j}{2}\right)'\right) + \mathcal{R}_\sigma \Phi_j\left(\frac{t}{2}\right), \quad (3.3)$$

где σ'_j получается из σ перестановкой j -го индекса на первое место.

Обозначим $g_j = |D_j^{r_j} f|$. Если r_j целое, то

$$\begin{aligned} |\Delta_j^{r_j}(h) f(x)| &\leq \int_0^h \cdots \int_0^h g_j(x + (u_1 + \cdots + u_{r_j})e_j) du_1 \cdots du_{r_j} \\ &\leq h^{r_j-1} \int_0^{r_j h} g_j(x + ye_j) dy; \end{aligned}$$

таким образом,

$$\Phi_j(x) \leq c(K) t_j^{r_j-1} \int_0^{r_j t_j'} g_j(x_j + y, \widehat{x}_j) dy. \quad (3.4)$$

В случае дробного r_j имеем

$$|\Delta_j^{\bar{r}_j}(h) f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} g_j(x_j - y, \widehat{x}_j) |\Delta_j^{\bar{r}_j}(h) G_{r_j}(y)| dy$$

(G_{r_j} — ядро Бесселя). Следовательно,

$$\Phi_j(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(y) g_j(x_j - y, \widehat{x}_j) dy, \quad (3.5)$$

где

$$\varphi_j(y) = \frac{1}{t_j} \int_0^{t_j'} |\Delta_j^{\bar{r}_j}(h) G_{r_j}(y)| dh.$$

Используя оценки производных ядер G_α , мы легко получаем (как в [1; с. 160]), что для $1 \leq \nu < 1/(\bar{r}_j - r_j)$

$$\|\Delta_j^{\bar{r}_j}(h) G_{r_j}\|_\nu \leq c h^{r_j+1/\nu-1}, \quad h > 0. \quad (3.6)$$

Предположим сначала, что $p > 1$. В силу неравенств (3.4), (3.5), (2.16) и (3.6) имеем для любого $1 \leq j \leq n$

$$\mathcal{R}_\sigma \Phi_j(t) \leq c(K) t_j^{r_j} \mathcal{R}_\sigma^* g_j(t). \quad (3.7)$$

Пусть $S = \|f\|_{q^*, p; \mathcal{R}}$. Учитывая, что C_0^∞ всюду плотно в $L_p^{r_1, \dots, r_n}$, и используя лемму 2, можем предполагать, что $S < \infty$. Далее, обозначим:

$$A_j = \{t \in \mathbb{R}_+^n : t_j \leq \pi(t)^{r/(nr_j)}\}. \quad (3.8)$$

Тогда

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \mathbb{R}_+^n.$$

Пользуясь неравенствами (3.3) и (3.7), имеем:

$$\begin{aligned} Q_j(\sigma) &\equiv \left(\int_{A_j} \pi(t)^{p/q^*-1} \mathcal{R}_\sigma f(t)^p dt \right)^{1/p} \\ &\leq 2^{\bar{r}_j+n} K^{-1/q^*} S + c(K) \left(\int_{A_j} \pi(t)^{p/q^*-1} t_j^{pr_j} \mathcal{R}_\sigma^* g_j(t)^p dt \right)^{1/p} \\ &\leq 2^{\bar{r}_j+n} K^{-1/q^*} S + c(K) \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \mathcal{R}_\sigma^* g_j(t)^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

В силу (2.8)

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \mathcal{R}_\sigma^* g_j(t)^p dt \right)^{1/p} \leq c_p \|g_j\|_p \quad (p > 1).$$

Поэтому

$$\|f\|_{q,p;\mathcal{R}_\sigma} \leq \sum_{j=1}^n Q_j(\sigma) \leq c_0 K^{-1/q^*} S + c(K) \sum_{j=1}^n \|g_j\|_p,$$

где $c_0 = \sum_{j=1}^n 2^{\bar{r}_j+n}$. Аналогичные неравенства справедливы для любого $\sigma \in \mathcal{P}_n$. Следовательно,

$$S = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \|f\|_{q,p;\mathcal{R}_\sigma} \leq n! c_0 K^{-1/q^*} S + c'(K) \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_p. \quad (3.9)$$

Полагая $K = (2n! c_0)^{q^*}$, получаем (3.1).

Пусть теперь $p = 1$. Выберем $1 < \nu < \min_j (\bar{r}_j - r_j)^{-1}$. В силу (3.4), (3.5), (2.17) и (3.6) имеем ($\sigma = \{1, \dots, n\}$)

$$\mathcal{R}_\sigma \Phi_j(t) \leq c(K) t_j^{r_j-1} F_j(\hat{t}_j) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (3.10)$$

где

$$F_j(\hat{t}_j) = \overline{\mathcal{R}}_{\hat{\sigma}_j}^{(\nu)} \psi_j(\hat{t}_j), \quad \psi_j(\hat{x}_j) = \int_{\mathbb{R}} g_j(x) dx_j.$$

Пользуясь неравенствами (3.3) и (3.10), получаем

$$\begin{aligned} Q_j(\sigma) &\equiv \int_{A_j} \pi(t)^{1/q^*-1} \mathcal{R}_\sigma f(t) dt \\ &\leq 2^{\bar{r}_j+n} K^{-1/q^*} S + c(K) \int_{A_j} \pi(t)^{1/q^*-1} t_j^{r_j-1} F_j\left(\frac{\hat{t}_j}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен ($\gamma_j \equiv r/(nr_j - r) > 0$)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \pi(\hat{t}_j)^{1/q^*-1} F_j\left(\frac{\hat{t}_j}{2}\right) d\hat{t}_j \int_0^{\pi(\hat{t}_j)^{\gamma_j}} t_j^{1/q^*+r_j-2} dt_j \\ &= c \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} F_j(\hat{t}_j) d\hat{t}_j \leq c' \|\psi_j\|_{L(\mathbb{R}^{n-1})} = c' \|D_j^{r_j} f\|_1 \end{aligned}$$

(заметим, что $1/q^* + r_j > 1$; мы использовали также неравенство (2.14)). Таким образом, мы вновь получаем (3.9) (с $p = 1$), откуда следует (3.1). Теорема доказана.

В силу (2.20) в условиях теоремы 1 справедливо неравенство

$$\|f\|_{q^*,p} \leq c \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_p. \quad (3.11)$$

Другое доказательство неравенства (3.11) содержится в [1].

Заметим, что в случае, когда все r_j целые, доказательство теоремы 1 может быть упрощено. Действительно, в силу (2.12) имеем для любых $K > 1$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq p < \infty$ и $x \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x)| \leq 2^{r_j} \mathcal{R}_j f((K t_j, \hat{x}_j)') + c(K) t_j^{r_j-1/p} \psi_j(\hat{x}_j),$$

где

$$\psi_j(\widehat{x}_j) = \left(\int_{\mathbb{R}} |D_j^{r_j} f(x)|^p dx_j \right)^{1/p}.$$

Следовательно $(\sigma = \{1, \dots, n\})$,

$$\mathcal{R}_\sigma f(t) \leq 2^{r_j} \mathcal{R}_{\sigma'_j} f \left(\left(K t_j, \frac{\widehat{t}_j}{2} \right)' \right) + c(K) t_j^{r_j-1/p} \mathcal{R}_{\widehat{\sigma}_j} \psi_j \left(\frac{\widehat{t}_j}{2} \right).$$

Отсюда, как и выше,

$$Q_j(\sigma) \leq 2^{r_j+n} K^{-1/q^*} S + c(K) \left(\int_{A_j} \pi(t)^{p/q^*-1} t_j^{pr_j-1} \mathcal{R}_{\widehat{\sigma}_j} \psi_j \left(\frac{\widehat{t}_j}{2} \right)^p dt \right)^{1/p}.$$

Применяя к последнему интегралу теорему Фубини, получаем, что этот интеграл равен

$$c \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \mathcal{R}_{\widehat{\sigma}_j} \psi_j(\widehat{t}_j)^p d\widehat{t}_j = c \int_{\mathbb{R}^n} |D_j^{r_j} f(x)|^p dx.$$

Таким образом, мы вновь приходим к неравенству (3.9), откуда следует (3.1).

§ 4. Оценки разностных норм

Если $r > 0$, то через $\overline{r}$ обозначаем наименьшее натуральное число такое, что $r \leq \overline{r}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r_1, \dots, r_n$ — положительные числа,

$$r = n \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j} \right)^{-1}, \quad 1 \leq p < q < \infty, \quad \varkappa = 1 - \frac{n}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) > 0$$

и

$$\alpha_j = \varkappa r_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Если $1 < p < \infty$ и $n \geq 1$, или $p = 1$ и $n \geq 2$, то для каждой функции $f \in L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$ выполняются неравенства

$$\|f\|_{q,p;\mathcal{R}} \leq c \|f\|_{L_p^{r_1, \dots, r_n}}, \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^\infty [h^{-\alpha_j} \|\Delta_j^{\overline{r}_j}(h)f\|_{q,p;\mathcal{R}}]^p \frac{dh}{h} \right)^{1/p} \leq c \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_p. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (4.2); неравенство (4.1) может быть доказано аналогично (и даже значительно проще).

Можем считать, что левая часть (4.2) конечна. Оценим, например, ее первое слагаемое. Обозначим

$$f_h(x) = \Delta_1^{\bar{r}_1}(h)f(x).$$

Как и выше, полагаем $g_j(x) = |D_j^{r_j} f(x)|$. Фиксируем $\sigma \in \mathcal{P}_n$.

Пусть сначала $p > 1$. Если r_1 целое, то

$$|f_h(x)| \leq h^{r_1-1} \int_0^{r_1 h} g_1(x_1 + y, \hat{x}_1) dy. \quad (4.3)$$

Если же r_1 нецелое, то

$$|f_h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} g_1(x_1 - y, \hat{x}_1) |\Delta_1^{\bar{r}_1}(h) G_{r_1}(y)| dy. \quad (4.4)$$

В обоих случаях, пользуясь неравенствами (2.16) и (3.6), получаем

$$\mathcal{R}_\sigma f_h(t) \leq ch^{r_1} \mathcal{R}_\sigma^* g_1(t). \quad (4.5)$$

С другой стороны, пусть $1 \leq j \leq n$ и $m_j = \sigma^{-1}(j)$ (в перестановке σ число j находится на месте с номером m_j). Как и в теореме 1, для любого $K > 1$ имеем

$$\mathcal{R}_\sigma f_h(t) \leq 2^{\bar{r}_j} \mathcal{R}_{\sigma'_j} f_h \left(\left(K t_{m_j}, \frac{\hat{t}_{m_j}}{2} \right)' \right) + c(K) t_{m_j}^{r_j} \mathcal{R}_\sigma^* g_j(t) \quad (4.6)$$

(σ'_j получается из σ перестановкой числа j на первое место).

Пусть

$$J = \left(\int_0^\infty [h^{-\alpha_1} \|f_h\|_{q,p;\mathcal{R}}]^p \frac{dh}{h} \right)^{1/p}.$$

Рассмотрим интеграл

$$J(\sigma) \equiv \left(\int_0^\infty h^{-\alpha_1 p - 1} dh \int_{\mathbb{R}_+^n} \pi(t)^{p/q-1} \mathcal{R}_\sigma f_h(t)^p dt \right)^{1/p}.$$

Обозначим $s_j = nr_j/r$; тогда

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{s_j} = 1. \quad (4.7)$$

Прежде всего, в силу (4.5) и (2.8) имеем

$$\begin{aligned} J_1(\sigma)^p &\equiv \int_0^\infty h^{-\alpha_1 p - 1} dh \int_{\pi(t) \geq h^{s_1}} \pi(t)^{p/q-1} \mathcal{R}_\sigma f_h(t)^p dt \\ &\leq c \int_0^\infty h^{s_1(1-p/q)-1} dh \int_{\pi(t) \geq h^{s_1}} \pi(t)^{p/q-1} \mathcal{R}_\sigma^* g_1(t)^p dt \\ &= c \int_{\mathbb{R}_+^n} \pi(t)^{p/q-1} \mathcal{R}_\sigma^* g_1(t)^p dt \int_0^{\pi(t)^{1/s_1}} h^{s_1(1-p/q)-1} dh \\ &= c' \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathcal{R}_\sigma^* g_1(t)^p dt \leq c'' \|g_1\|_p^p. \end{aligned}$$

Далее, обозначим через $D(h, \sigma)$ множество таких $t \in \mathbb{R}_+^n$, для которых

$$\mathcal{R}_\sigma f_h(t) \leq \sum_{j=1}^n 2^{\overline{r}_j+1} \mathcal{R}_{\sigma'_j} f_h \left(\left(K t_{m_j}, \frac{\widehat{t}_{m_j}}{2} \right)' \right) \quad (4.8)$$

(постоянная K будет выбрана ниже).

Пусть $t \notin D(h, \sigma)$. Тогда в силу (4.6) и (4.7)

$$\mathcal{R}_\sigma f_h(t) \leq c(K) \pi(t)^{r/n} \prod_{j=1}^n (\mathcal{R}_\sigma^* g_j(t))^{1/s_j}.$$

Пользуясь этим неравенством и полагая

$$E(h, \sigma) = \{t \in \mathbb{R}_+^n : \pi(t) \leq h^{s_1}, t \notin D(h, \sigma)\},$$

имеем:

$$\begin{aligned} J_2(\sigma)^p &\equiv \int_0^\infty h^{-\alpha_1 p - 1} dh \int_{E(h, \sigma)} \pi(t)^{p/q-1} \mathcal{R}_\sigma f_h(t)^p dt \\ &\leq c(K) \int_{\mathbb{R}_+^n} \pi(t)^{p/q-1+pr/n} \prod_{j=1}^n (\mathcal{R}_\sigma^* g_j(t))^{p/s_j} dt \int_{\pi(t)^{1/s_1}}^\infty h^{-\alpha_1 p - 1} dh \\ &= c'(K) \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n (\mathcal{R}_\sigma^* g_j(t))^{p/s_j} dt \\ &\leq c'(K) \prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \mathcal{R}_\sigma^* g_j(t)^p dt \right)^{1/s_j} \leq c''(K) \prod_{j=1}^n \|g_j\|_p^{p/s_j}. \end{aligned}$$

Наконец, в силу (4.8)

$$J_3(\sigma) \equiv \left(\int_0^\infty h^{-\alpha_1 p - 1} dh \int_{D(h, \sigma)} \pi(t)^{p/q-1} \mathcal{R}_\sigma f_h(t)^p dt \right)^{1/p} \leq c_0 K^{-1/q} J,$$

где $c_0 = \sum_{j=1}^n 2^{\overline{r}_j+n}$.

Из полученных оценок следует, что для любого $\sigma \in \mathcal{P}_n$

$$J(\sigma) \leq c_0 K^{-1/q} J + c(K) \sum_{j=1}^n \|g_j\|_p. \quad (4.9)$$

Суммируя по всем $\sigma \in \mathcal{P}_n$ и полагая $K = (2c_0 n!)^q$, получаем неравенство (4.2) для $p > 1$.

Пусть теперь $p = 1$. Выберем число $\nu > 1$ так, чтобы выполнялись условия

$$\nu < q, \quad \frac{1}{\nu} > \max_j (\overline{r}_j - r_j).$$

Снова фиксируем $\sigma \in \mathcal{P}_n$. В дальнейшем обозначаем $m_j = \sigma^{-1}(j)$, $\eta_j = \widehat{\sigma}_{m_j}$ и

$$\psi_j(\widehat{x}_j) = \int_{\mathbb{R}} g_j(x) dx_j, \quad F_j = \overline{\mathcal{R}}_{\eta_j}^{(\nu)} \psi_j.$$

В силу (2.14)

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} F_j(y) dy \leq c \|g_j\|_1. \quad (4.10)$$

Пользуясь неравенствами (4.3), (4.4), (2.17) и (3.6), имеем

$$\mathcal{R}_\sigma f_h(t) \leq ch^{r_1-1/\nu'} t_{m_1}^{-1/\nu} F_1(\widehat{t}_{m_1}). \quad (4.11)$$

Кроме того, как и в теореме 1, для любых $1 \leq j \leq n$ и $K > 1$

$$\mathcal{R}_\sigma f_h(t) \leq 2^{\bar{r}_j} \mathcal{R}_{\sigma'_j} f_h \left(\left(K t_{m_j}, \frac{\widehat{t}_{m_j}}{2} \right)' \right) + c(K) t_{m_j}^{r_j-1} F_j \left(\frac{\widehat{t}_{m_j}}{2} \right). \quad (4.12)$$

Пусть $\gamma(t) = \min(t_{m_1}, \pi(\widehat{t}_{m_1})^{1/(s_1-1)})$ ($t \in \mathbb{R}_+^n$) и

$$A(h) = \{t \in \mathbb{R}_+^n : \gamma(t) \geq h\}, \quad h > 0.$$

Пользуясь неравенствами (4.11), (4.10) и условием $\nu < q$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty h^{-\alpha_1-1} dh \int_{A(h)} \pi(t)^{1/q-1} \mathcal{R}_\sigma f_h(t) dt \\ & \leq c \int_0^\infty h^{s_1(1-1/q)-1/\nu'-1} dh \int_{A(h)} \pi(t)^{1/q-1} t_{m_1}^{-1/\nu} F_1(\widehat{t}_{m_1}) dt \\ & = c \int_{\mathbb{R}_+^n} \pi(t)^{1/q-1} t_{m_1}^{-1/\nu} F_1(\widehat{t}_{m_1}) dt \int_0^{\gamma(t)} h^{s_1(1-1/q)-1/\nu'-1} dh \\ & = c_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} \pi(t)^{1/q-1} t_{m_1}^{-1/\nu} F_1(\widehat{t}_{m_1}) \gamma(t)^{s_1(1-1/q)-1/\nu'} dt \\ & = c_1 \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \pi(y)^{1/q-1} F_1(y) dy \int_0^{\pi(y)^{1/(s_1-1)}} \xi^{(s_1-1)(1-1/q)-1} d\xi \right. \\ & \quad \left. + \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \pi(y)^{(1/\nu-1/q)/(s_1-1)} F_1(y) dy \int_{\pi(y)^{1/(s_1-1)}}^\infty \xi^{1/q-1/\nu-1} d\xi \right) \\ & = c_2 \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} F_1(y) dy \leq c_3 \|g_1\|_1. \end{aligned}$$

Далее, положим $B(h) = \mathbb{R}_+^n \setminus A(h)$. Пусть $t \in B(h)$ и индекс $j = j(t)$ определяется из условия $t_{m_j}^{r_j} = \min_k t_{m_k}^{r_k}$. Тогда $t_{m_j}^{s_j-1} \leq \pi(\widehat{t}_{m_j})$. Если $j = 1$, то $t_{m_1} \leq h$ по определению $B(h)$. Пусть $j \geq 2$. Имеем $t_{m_j}^{r_j/r_k} \leq t_{m_k}^{r_k}$ ($k = 2, \dots, n$); отсюда

$$t_{m_j}^{r_j/r_1} \leq \pi(\widehat{t}_{m_1})^{1/(s_1-1)}.$$

Кроме того, $t_{m_j}^{r_j/r_1} \leq t_{m_1}$. Следовательно,

$$t_{m_j}^{r_j/r_1} \leq \gamma(t) \leq h.$$

Таким образом, полагая

$$B_k(h) = \{t \in \mathbb{R}_+^n : t_{m_k} \leq \min(h^{r_1/r_k}, \pi(\widehat{t}_{m_k})^{1/(s_k-1)})\},$$

имеем

$$B(h) \subset \bigcup_{k=1}^n B_k(h).$$

Теперь, пользуясь оценкой (4.12), получаем для любого $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty h^{-\alpha_1-1} dh \int_{B_k(h)} \pi(t)^{1/q-1} \mathcal{R}_\sigma f_h(t) dt \\ & \leq 2^{\bar{r}_k+n} K^{-1/q} J + c(K) \int_0^\infty h^{-\alpha_1-1} dh \int_{B_k(h)} \pi(t)^{1/q-1} t_{m_k}^{r_k-1} F_k\left(\frac{\widehat{t}_{m_k}}{2}\right) dt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Пусть $E_k(\xi) = \{y \in \mathbb{R}_+^{n-1} : \pi(y) \geq \xi^{s_k-1}\}$, $\xi \in \mathbb{R}_+$. Интеграл в правой части (4.13) равен

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty h^{-\alpha_1-1} dh \int_0^{h^{r_1/r_k}} \xi^{r_k+1/q-2} d\xi \int_{E_k(\xi)} \pi(y)^{1/q-1} F_k\left(\frac{y}{2}\right) dy \\ & = c \int_0^\infty \xi^{(s_k-1)(1-1/q)-1} d\xi \int_{E_k(\xi)} \pi(y)^{1/q-1} F_k\left(\frac{y}{2}\right) dy \\ & = c' \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} F_k(y) dy \leq c'' \|g_k\|_1. \end{aligned}$$

Полученные оценки вновь дают неравенство (4.9) (с $p = 1$), из которого, в свою очередь, следует (4.2). Теорема доказана.

Пользуясь неравенством (2.20), получаем, что в условиях теоремы 2

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_0^\infty [h^{-\alpha_j} \omega_j^{\bar{r}_j}(f; h)_q]^p \frac{dh}{h} \right)^{1/p} \leq c \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_p. \quad (4.14)$$

Иными словами, справедливо вложение

$$L_p^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{q,p}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\mathbb{R}^n). \quad (4.15)$$

Здесь $1 < p < \infty$, $n \geq 1$ или $p = 1$, $n \geq 2$. Подчеркнем, что при $p = n = 1$ вложение (4.15) не имеет места (см. [1], [17]).

Как уже отмечалось, в случае целых r_j и $p > 1$ вложение (4.15) доказал В. П. Ильин [5; теорема 18.12]; для целых r_j и $p = 1$ ($n \geq 2$) оно было доказано в работе [6] (см. также [17]).

Для пространств $L_p^{r_1, \dots, r_n}$ при $p > 1$ П. И. Лизоркиным [18] была установлена следующая теорема вложения разных метрик.

ТЕОРЕМА. Пусть $r_1, \dots, r_n$ — положительные числа,

$$r = n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k} \right)^{-1}, \quad 1 < p < q < \infty \quad \text{и} \quad \varkappa \equiv 1 - \frac{n}{r} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) > 0.$$

Тогда

$$L_p^{r_1, \dots, r_n} \hookrightarrow L_q^{\varkappa r_1, \dots, \varkappa r_n}. \quad (4.16)$$

При $p = n = 1$ эта теорема теряет силу. Однако из (4.15) следует справедливость вложения (4.16) при $p = 1, n \geq 2$. Действительно, для $q > 1$ (см. [18], [19])

$$B_{q,1}^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q^{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(\mathbb{R}^n) \quad (\alpha_i > 0).$$

Учитывая (4.15), получаем вложение (4.16) для $p = 1, n \geq 2$.

§ 5. Оценки преобразований Фурье

Преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Будем рассматривать оценки преобразований Фурье функций из пространств $L_1^{r_1, \dots, r_n}$. Для случая целых r_k аналогичные вопросы изучались в статье автора [7] (эта статья, в свою очередь, является продолжением работ Ж. Бургейна и А. Пелчинского, М. Войсеховского [12]). Основные результаты работы [7] устанавливаются с помощью неравенства (4.14), которое для целых r_k было доказано в [6]. Эти результаты (теоремы 1 и 2 из [7]) без изменения переносятся на случай произвольных $r_k > 0$. Однако мы докажем более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $r_1, \dots, r_n$ — положительные числа ($n \geq 2$),

$$\lambda(\xi) = \sum_{j=1}^n (1 + 4\pi^2 \xi_j^2)^{r_j/2},$$

$r = n \left(\sum_{j=1}^n r_j^{-1} \right)^{-1}$ и $0 < \varepsilon \leq \min(1, r/n)$. Тогда существует постоянная c , зависящая только от ε и $r_1, \dots, r_n$, такая, что для любой функции $f \in L_1^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \int_{\mathbb{R}_+^n} \pi(t)^{\varepsilon-1} \mathcal{R}_\sigma \psi_\varepsilon(t) dt \leq c \sum_{k=1}^n \|D_k^{r_k} f\|_1, \quad (5.1)$$

где $\psi_\varepsilon(\xi) = \widehat{f}(\xi) \lambda(\xi)^{1-\varepsilon n/r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что неравенство (5.1) тем сильнее, чем меньше ε . Действительно, пусть $s_k = nr_k/r$. В силу (4.7)

$$\lambda(\xi) \geq \sum_{j=1}^n (2\pi|\xi_j|)^{r_j} \geq (2\pi)^r \min_k s_k \left(\prod_{j=1}^n |\xi_j| \right)^{r/n}. \quad (5.2)$$

Стало быть, для $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$|\psi_{\varepsilon_2}(\xi)| \leq c |\psi_{\varepsilon_1}(\xi)| \left(\prod_{j=1}^n |\xi_j| \right)^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

и

$$\mathcal{R}_\sigma \psi_{\varepsilon_2}(t) \leq c \mathcal{R}_\sigma \psi_{\varepsilon_1} \left(\frac{t}{2} \right) \pi(t)^{\varepsilon_1 - \varepsilon_2},$$

откуда и следует наше замечание.

Далее, не уменьшая общности, можем считать, что $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\rho_\nu = r_\nu(1 - \varepsilon n/r)$. Зададим функции φ_ν в терминах преобразований Фурье:

$$\widehat{\varphi}_\nu(\xi) = (1 + 4\pi^2 \xi_\nu^2)^{\rho_\nu/2} \widehat{f}(\xi) \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Таким образом,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} G_{\rho_\nu}(x_\nu - y) \varphi_\nu(y, \widehat{x}_\nu) dy \quad (\nu = 1, \dots, n). \quad (5.3)$$

Пусть, например, $\sigma = \{1, \dots, n\}$. Используя индукцию, нетрудно показать, что для любых $1 \leq k \leq n$, $t \in \mathbb{R}_+^n$ существует измеримое множество $E(t, k) \subset \mathbb{R}^n$, обладающее следующими свойствами:

$$|E(t, k)| \geq \frac{\pi(t)}{2}, \quad (5.4)$$

$$|\xi_k| \geq t_k/4 \quad \text{для любого } \xi \in E(t, k) \quad (5.5)$$

и

$$|\psi_\varepsilon(\xi)| \geq \mathcal{R}_\sigma \psi_\varepsilon(t) \quad \text{для любого } \xi \in E(t, k). \quad (5.6)$$

Обозначим теперь

$$A_k = \left\{ t \in \mathbb{R}_+^n : t_k^{r_k} = \max_{1 \leq j \leq n} t_j^{r_j} \right\}. \quad (5.7)$$

Фиксируем $1 \leq k \leq n$ и $t \in A_k$. Положим $E \equiv E(t, k)$. Далее, пусть

$$E^{(m)} = \left\{ \xi \in E : |\xi_m|^{r_m} = \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j|^{r_j} \right\}, \quad m = 1, \dots, n.$$

В силу (5.4) существует такое $\nu \equiv \nu(t, k)$, что

$$|E^{(\nu)}| \geq \frac{\pi(t)}{2n}. \quad (5.8)$$

Учитывая (5.5), получаем, что

$$|\xi_\nu| \geq |\xi_k|^{r_k/r_\nu} \geq \left(\frac{t_k}{4}\right)^{r_k/r_\nu} \quad \text{для любого } \xi \in E^{(\nu)}. \quad (5.9)$$

Наконец, в силу (5.6) и (5.8)

$$\mathcal{R}_\sigma \psi_\varepsilon(t) \leq \frac{2n}{\pi(t)} \int_{E^{(\nu)}} |\psi_\varepsilon(\xi)| d\xi \leq \frac{c}{\pi(t)} \int_{E^{(\nu)}} |\widehat{\varphi}_\nu(\xi)| d\xi. \quad (5.10)$$

Обозначим $\delta_h(x) = \varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(x + he_\nu)$ ($h > 0$). Тогда

$$\widehat{\delta}_h(\xi) = \widehat{\varphi}_\nu(\xi)(1 - e^{2\pi i h \xi_\nu}).$$

Пусть $\tau = (4/t_k)^{r_k/r_\nu}$. В силу (5.9) имеем для любого $\xi \in E^{(\nu)}$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau |e^{2\pi i h \xi_\nu} - 1| dh \geq 1 - \frac{1}{2\pi}.$$

Поэтому, учитывая (5.10), имеем:

$$\mathcal{R}_\sigma \psi_\varepsilon(t) \leq \frac{c}{\pi(t)\tau} \int_0^\tau dh \int_{E^{(\nu)}} |\widehat{\delta}_h(\xi)| d\xi. \quad (5.11)$$

Можем считать, что $0 < \varepsilon < 1/2$. Тогда существует такое $1 < p < 2$, что

$$0 < \varepsilon - \frac{1}{p} < \min_\nu \frac{1}{s_\nu}. \quad (5.12)$$

В силу (5.8) и неравенства Хаусдорфа–Юнга

$$\int_{E^{(\nu)}} |\widehat{\delta}_h(\xi)| d\xi \leq \pi(t)^{1/p} \|\widehat{\delta}_h\|_{p'} \leq \pi(t)^{1/p} \|\delta_h\|_p.$$

Отсюда и из (5.11) следует, что

$$\mathcal{R}_\sigma \psi_\varepsilon(t) \leq c\pi(t)^{-1/p'} \sum_{j=1}^n \omega_j(\varphi_j; t_k^{-r_k/r_j})_p, \quad t \in A_k.$$

Пользуясь этой оценкой, получаем (см. (5.7)):

$$\begin{aligned} I_k(\sigma) &\equiv \int_{A_k} \pi(t)^{\varepsilon-1} \mathcal{R}_\sigma \psi_\varepsilon(t) dt \\ &\leq c \sum_{j=1}^n \int_0^\infty t_k^{nr_k(\varepsilon-1/p')/r-1} \omega_j(\varphi_j; t_k^{-r_k/r_j})_p dt_k \\ &= c' \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty z^{-nr_j(\varepsilon-1/p')/r} \omega_j(\varphi_j; z)_p \frac{dz}{z} \\ &= c' \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty z^{\rho_j-\alpha_j} \omega_j(\varphi_j; z)_p \frac{dz}{z}, \end{aligned}$$

где $\alpha_j = r_j(1 - n/(rp'))$. В силу (5.12)

$$0 < \alpha_j - \rho_j < 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Учитывая (5.3) и применяя теорему об изоморфизме пространств Бесова [3; гл. 5, теорема 4'], имеем

$$\int_0^\infty z^{\rho_j - \alpha_j} \omega_j(\varphi_j; z)_p \frac{dz}{z} \leq c \int_0^\infty z^{-\alpha_j} \omega_j^{\bar{r}_j}(f; z)_p \frac{dz}{z}. \quad (5.13)$$

Пользуясь неравенством (4.14), получаем

$$I_k(\sigma) \leq c \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Отсюда следует (5.1). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема об изоморфизме, на которую мы сослались в связи с неравенством (5.13), доказана в [3] (см. также [2; теорема 8.9.1]) для n -мерных изотропных бесселевых потенциалов. Однако те же рассуждения применимы и в нашем случае, когда бесселев потенциал берется только по одной переменной. Кроме того, используя теорему об изоморфизме для одномерного случая, нетрудно получить оценку модуля непрерывности функции φ_ν через модуль непрерывности (порядка $\bar{r}_\nu$) функции f , из которой, в свою очередь, следует неравенство (5.13).

Рассмотрим некоторые следствия теоремы 3. Прежде всего, в силу (2.20) из (5.1) следует неравенство

$$\int_0^\infty t^{\varepsilon-1} \psi_\varepsilon^*(t) dt \leq c \sum_{k=1}^n \|D_k^{r_k} f\|_1.$$

В частности, если $r \equiv n(\sum_{k=1}^n r_k^{-1})^{-1} \leq n$, то, полагая $\varepsilon = r/n$, получаем неравенство

$$\|\widehat{f}\|_{n/r,1} \leq c \sum_{k=1}^n \|D_k^{r_k} f\|_1. \quad (5.14)$$

Далее, в силу неравенства Харди–Литтлвуда [14; с. 43] и (5.2) из (5.1) следует, что в условиях теоремы 3

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j} \right)^{1-n/r} d\xi \leq c \sum_{k=1}^n \|D_k^{r_k} f\|_1. \quad (5.15)$$

Для целых r_j неравенства (5.14) и (5.15) были доказаны в [7].

Предположим теперь, что $r_k \geq 1$ ($k = 1, \dots, n$). Пусть $\varepsilon = 1/n$ и $\psi(\xi) = \lambda(\xi)^{1-1/r} \widehat{f}(\xi)$. Из неравенств (5.1) и (2.20) следует, что

$$\|\psi\|_n \leq c \|\psi\|_{n,1} \leq c' \sum_{k=1}^n \|D_k^{r_k} \psi\|_1.$$

Далее, справедливо неравенство

$$\lambda(\xi)^{(1-1/r)n} \geq \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j-1}.$$

Действительно, полагая $\alpha_j = 1 - 1/r_j$, имеем

$$\alpha \equiv \sum_{j=1}^n \alpha_j = \left(1 - \frac{1}{r}\right)n;$$

остается воспользоваться неравенством

$$\left(\sum_{j=1}^n \eta_j\right)^\alpha \geq \prod_{j=1}^n \eta_j^{\alpha_j}, \quad \eta_j = |\xi_j|^{r_j}.$$

Таким образом, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $r_k \geq 1$ ($k = 1, \dots, n$; $n \geq 2$). Тогда для любой функции $f \in L_1^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^n \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j-1} d\xi\right)^{1/n} \leq c \sum_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_1. \quad (5.16)$$

Для $n = 2$ и целых r_1, r_2 неравенство (5.16) было доказано другими методами в работе [11]. Заметим, что можно доказать (5.16) и прямым путем (по схеме доказательства теоремы 2 из [7]).

В следующем замечании ограничимся случаем целых r_k .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$). Сумму в правой части (5.16) можно заменить средним геометрическим. А именно для любой функции $f \in W_1^{r_1, \dots, r_n}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^n \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{r_j-1} d\xi \leq c \prod_{j=1}^n \|D_j^{r_j} f\|_1. \quad (5.17)$$

В самом деле, пусть $A_k = \|D_k^{r_k} f\|_1$. Если $A_k = 0$ для некоторого k , то f эквивалентна нулю. Пусть $A_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$). Положим

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n), \quad \varepsilon_k = A_k^{-1/r_k}.$$

Применяя к функции g неравенство (5.16), получаем (5.17).

Отметим, что подобные преобразования “аддитивных” оценок в “мультипликативные” хорошо известны (см. [2; гл. 7]).

Список литературы

1. *Kolyada V. I.* Rearrangement of functions and embedding of anisotropic spaces of Sobolev type // East J. Approx. 1998. V. 4. №2. P. 111–199.
2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
3. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
6. *Коляда В. И.* О вложении пространств Соболева // Матем. заметки. 1993. Т. 54. №3. С. 48–71.
7. *Kolyada V. I.* Estimates of Fourier transforms in Sobolev spaces // Studia Math. 1997. V. 125. №1. P. 67–74.
8. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 3. №4. С. 649–686.
9. *Ульянов П. Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. 1970. Т. 81. №1. С. 104–131.
10. *Освальд П.* Модули непрерывности равноизмеримых функций и приближение функций алгебраическими полиномами в L^p // Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. Одесса: Одесский гос. ун-т, 1978.
11. *Pelczyński A., Senator K.* On isomorphisms of anisotropic Sobolev spaces with “classical Banach spaces” and a Sobolev type embedding theorem // Studia Math. 1986. V. 84. P. 169–215.
12. *Pelczyński A., Wojciechowski M.* Molecular decompositions and embedding theorems for vector-valued Sobolev spaces with gradient norm // Studia Math. 1993. V. 107. P. 61–100.
13. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
14. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. Boston: Academic Press, 1988. (Pure Appl. Math. V. 129.)
15. *Błociński A. P.* Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 263. №1. P. 149–167.
16. *Яценко А. А.* Итеративные перестановки функций и пространства Лоренца // Изв. вузов. Сер. матем. 1998. Т. 432. №5. С. 73–77.
17. *Коляда В. И.* О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Труды МИАН. 1988. Т. 181. С. 117–136.
18. *Лизоркин П. И.* Неизотропные бесселевы потенциалы. Теоремы вложения для пространств $L_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ с дробными производными // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. №3. С. 508–511.
19. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений // Труды МИАН. 1969. Т. 105. С. 89–167.

Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова,
Институт математики, экономики и механики, Одесса, Украина
E-mail: kolyada@paco.net

Поступила в редакцию
02.11.2000