Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Поляков, О мере с максимальной энтропией для специального потока над локальным возмущением счетной топологической схемы Бернулли, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 7, 73–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm580>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:33:26

УДК 517.938

А. Б. Поляков

**О мере с максимальной энтропией
для специального потока над локальным возмущением
счетной топологической схемы Бернулли**

В работе исследуются условия, при которых свойство потока иметь (единственную) меру с максимальной энтропией устойчиво относительно локальных возмущений базы.

Библиография: 9 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются специальные потоки, построенные по некоторому классу топологических цепей Маркова. А именно в качестве базы потока берутся локальные возмущения топологической схемы Бернулли со счетным числом состояний. Под локальным возмущением здесь понимается удаление конечного множества ребер в соответствующем графе. Основной вопрос, который нас будет интересовать, — это вопрос о существовании (единственной) меры с максимальной энтропией для таких потоков. Предполагается, что функция f , определяющая поток, зависит только от нулевой координаты последовательности $y = (y_i)$ в базе: $f = f(y_0)$. Будут приведены необходимые и достаточные условия (в терминах функции f) того, что мера с максимальной энтропией существует одновременно для специального потока T_f , построенного по f и топологической схеме Бернулли, и для специального потока T_f , определенного над произвольным локальным возмущением этой схемы Бернулли. Таким образом, речь пойдет об условиях, при которых свойство потока T_f иметь (единственную) меру с максимальной энтропией устойчиво относительно локальных возмущений базы.

Для исследования такой устойчивости будет применяться метод производящих функций. Мы изучим производящую функцию φ , связанную с “локальным” классом замкнутых орбит потока T_f , построенного над локальным возмущением схемы Бернулли по функции $f = f(y_0)$, и покажем, что φ рациональным образом выражается через аналогичную функцию, отвечающую невозмущенному потоку, и производящие функции конечного графа, порожденного возмущенными вершинами. Полученная для φ формула позволяет воспользоваться содержащимся в [1] критерием существования (единственной) меры с максимальной энтропией относительно специального потока, построенного по топологической цепи Маркова и функции $f = f(y_0)$. Кроме того, упомянутая выше формула может применяться для точного или приближенного вычисления топологической энтропии соответствующих потоков. В устойчивом случае также будет изучена структура мер с максимальной энтропией.

В качестве иллюстрации полученных результатов приводится пример специального потока, который возникает в некоторых вопросах дифференциальной геометрии, в частности при исследовании замкнутых геодезических на модулярных поверхностях (см. [2]).

Перейдем к точным определениям. Пусть G — связный ориентированный граф со счетным множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$. Путем в G , ведущим из $v \in V(G)$ в $v' \in V(G)$, будем называть такую последовательность вершин $\gamma = (v_0, \dots, v_n)$, $n \geq 1$, что $v_0 = v$, $v_n = v'$ и $(v_k, v_{k+1}) \in E(G)$ при $0 \leq k \leq n-1$. Связность графа G означает, что для любых двух его вершин v и v' существует путь, который ведет из v в v' . Положим

$$Y(G) = \{y = (\dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots) : y_i \in V(G), (y_i, y_{i+1}) \in E(G), i \in \mathbb{Z}\}.$$

Последовательности, входящие в $Y(G)$, называются *двусторонне-бесконечными путями* в графе G . Снабдим множество $V(G)$ дискретной топологией и зададим на $Y(G)$ (как на подмножестве $V(G)^{\mathbb{Z}}$) топологию, индуцированную топологией прямого произведения. Конечномерные цилиндры, т.е. множества вида $\{y \in Y(G) : y_{i_n} = v_n, n = 1, \dots, k\}$, образуют базу этой топологии, а множество $Y(G)$ замкнуто в ней. На $Y(G)$ также задается σ -алгебра, порожденная всеми конечномерными цилиндрами.

Введем преобразование сдвига $T: Y(G) \rightarrow Y(G)$ по формуле: $(Ty)_i = y_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$. Очевидно, $TY(G) = Y(G)$ и T является гомеоморфизмом. Динамическая система $(Y(G), T)$ называется *счетной топологической цепью Маркова* (ТЦМ). Если же $E(G) = V(G) \times V(G)$, т.е. $Y(G) = V(G)^{\mathbb{Z}}$, то такая ТЦМ носит название *счетной топологической схемы Бернулли* (ТСБ).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Динамическую систему $(Y(G), T)$ будем называть *локальным возмущением* счетной ТСБ $(Y(G_0), T)$, если найдется конечное множество $D \subset E(G_0)$ такое, что ориентированный граф G определяется равенствами $V(G) = V(G_0)$, $E(G) = E(G_0) \setminus D$.

Очевидно, граф G , фигурирующий в данном определении, всегда связан.

Пусть задана ТЦМ $(Y(G), T)$. Рассмотрим на $Y(G)$ непрерывную положительную функцию f , которая удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(T^k y) = \sum_{k=1}^{\infty} f(T^{-k} y) = \infty, \quad y \in Y(G). \quad (1.1)$$

Введем множество

$$Y_f(G) = \{(y, u) : y \in Y(G), 0 \leq u \leq f(y)\},$$

в котором отождествим точки $(y, f(y))$ и $(Ty, 0)$. При $0 \leq u, u+t \leq f(y)$ положим

$$T_f^t(y, u) = (y, u+t);$$

для остальных $t \in \mathbb{R}$ отображение $T_f^t: Y_f(G) \rightarrow Y_f(G)$ определим исходя из того, что $\{T_f^t\}$ — однопараметрическая группа преобразований, а также используя идентификацию указанных точек и условие (1.1). Семейство преобразований $T_f = \{T_f^t\}$, $t \in \mathbb{R}$, называется *специальным потоком*, построенным по

ТЦМ $(Y(G), T)$ и функции f . При этом говорят, что множество $Y(G)$ является *базой* потока T_f . Если на $Y_f(G)$ задать топологию прямого произведения (с учетом отождествления), порожденную топологией на $Y(G)$ и топологией действительной прямой, то при любом $t \in \mathbb{R}$ отображение T_f^t оказывается гомеоморфизмом пространства $Y_f(G)$.

Пусть $\mathcal{P}(Y_f(G))$ – множество всех инвариантных эргодических относительно T_f вероятностных борелевских мер на $Y_f(G)$. Обозначим через $h(T_f^t, \nu)$ энтропию преобразования T_f^t относительно меры $\nu \in \mathcal{P}(Y_f(G))$. По определению энтропия $h(T_f, \nu)$ потока T_f относительно меры ν равна $h(T_f^1, \nu)$. Положим

$$h(T_f) = \sup\{h(T_f, \nu) : \nu \in \mathcal{P}(Y_f(G))\}. \quad (1.2)$$

Величину $h(T_f)$ будем называть *топологической энтропией* потока T_f (в случае конечного G она действительно была бы топологической энтропией, см. [3], преобразования T_f^1). Если верхняя грань в правой части (1.2) достигается на мере $\nu_{\max}$, т.е. $h(T_f, \nu_{\max}) = h(T_f)$, то $\nu_{\max}$ называется *мерой с максимальной энтропией* потока T_f . Совокупность всех мер с максимальной энтропией для потока T_f обозначим через $\mathcal{P}_{\max}(Y_f(G))$.

Множество функций $f: Y(G) \rightarrow (0, \infty)$, которые зависят только от нулевой координаты y_0 последовательности y и удовлетворяют условию (1.1), обозначим через $\mathcal{F}^0(Y(G))$. Очевидно, всякая функция $f \in \mathcal{F}^0(Y(G))$ непрерывна.

Понятно, что каждую функцию f из $\mathcal{F}^0(Y(G))$ можно отождествить с функцией, определенной на множестве $V(G)$, для которой мы будем употреблять тот же символ f . Если G' – другой граф с $V(G') = V(G)$, то функции из $\mathcal{F}^0(Y(G))$ можно считать определенными и на $Y(G')$. Это замечание далее будет неоднократно использоваться без дополнительного оговаривания.

§ 2. Производящие функции специальных потоков, построенных по локальным возмущениям счетной ТСБ и функциям из класса $\mathcal{F}^0(Y(G))$

Введем необходимую нам в дальнейшем терминологию, касающуюся конечных путей в графе (подробности см. в [4]). Пусть G – ориентированный граф с конечным или счетным множеством вершин $V = V(G)$ и $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, $n \geq 1$, – путь длины $l(\gamma) = n$ в G . Тогда если $v_n = v_0 = v$, то γ называют *v-циклом*; *v-циклы*, для которых $v_i \neq v$ при $i \neq 0, n$, будем называть *простыми*. Обозначим через $C(G; v)$ множество всех простых *v-циклов* в графе G . Путь проходит через множество $W \subset V$, если он проходит через какую-либо вершину $w \in W$. Пусть $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, $\gamma' = (v'_0, v'_1, \dots, v'_k)$ – пути в G , причем $v'_0 = v_n$. Тогда последовательность $\gamma\gamma' = (v_0, v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_k)$ также является путем в G и называется *произведением* путей γ и γ' , при этом $l(\gamma\gamma') = l(\gamma) + l(\gamma')$. Обозначим через $\Pi(G; v', v'')$ множество всех путей в G , ведущих из вершины v' в вершину v'' .

Перейдем к определению основных производящих функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Производящей функцией специального потока T_f , построенного по ТСБ $(Y(G_0), T)$ и $f \in \mathcal{F}^0(Y(G_0))$, назовем ряд*

$$F_{f,V}(x) = \sum_{v \in V} x^{f(v)}.$$

Функциональный ряд $F_{f,V}(x)$ будем рассматривать только при $x \geq 0$. Если V – счетное множество и ряд $F_{f,V}(x)$ сходится не только в нуле, то существует число $R_{f,V} \in (0, 1]$ такое, что для любого $0 \leq x < R_{f,V}$ ряд $F_{f,V}(x)$ сходится, а для любого $x > R_{f,V}$ расходится. Величину $R_{f,V}$ естественно назвать *радиусом сходимости* ряда $F_{f,V}(x)$. В случае расходимости $F_{f,V}(x)$ при любом $x > 0$ положим $R_{f,V} = 0$. Если $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ – путь в G , то для $f \in \mathcal{F}^0(Y(G))$ положим

$$f^*(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(v_i).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Производящей функцией простых v -циклов* относительно специального потока T_f , построенного по ТПМ $(Y(G), T)$ и функции $f \in \mathcal{F}^0(Y(G))$, назовем ряд

$$\varphi_{G,f,v}(x) = \sum_{\gamma \in C(G;v)} x^{f^*(\gamma)}, \quad x \geq 0.$$

Для ряда $\varphi_{G,f,v}(x)$ аналогично предыдущему определяется радиус сходимости $r_{G,f,v} \in [0, 1]$. В качестве простого упражнения найдем связь между производящими функциями $\varphi_{G,f,v}$ и $F_{f,V}$ в случае, когда поток T_f задан над ТСБ $(Y(G_0), T)$, $V = V(G_0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $v \in V$. Тогда при $F_{f,V}(x) - x^{f(v)} < 1$ имеем

$$\varphi_{G_0,f,v}(x) = \frac{x^{f(v)}}{1 + x^{f(v)} - F_{f,V}(x)}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граф G_0 является полным, т.е. допустимы все ребра (v', v'') , $v', v'' \in V$. Зафиксируем $v \in V$. Всякий простой v -цикл γ длины $l(\gamma) \geq 2$ имеет вид $\gamma = (v, v_1, \dots, v_{n-1}, v)$, $n \geq 2$, где v_i , $1 \leq i \leq n-1$, – произвольные вершины из множества $V \setminus \{v\}$. При этом $f^*(\gamma) = f(v) + \sum_{i=1}^{n-1} f(v_i)$. Не забудем также учесть петлю (v, v) , которая является простым v -циклом длины 1. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{G_0,f,v}(x) &= \sum_{\gamma \in C(G_0;v)} x^{f^*(\gamma)} = x^{f(v)} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{\gamma \in C(G_0;v) \\ l(\gamma)=n}} x^{f^*(\gamma)} \\ &= x^{f(v)} + x^{f(v)} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{(v_1, \dots, v_{n-1}) \\ v_i \in V \setminus \{v\}}} \prod_{j=1}^{n-1} x^{f(v_j)} \\ &= x^{f(v)} + x^{f(v)} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{v' \in V \setminus \{v\}} x^{f(v')} \right)^{n-1} = x^{f(v)} \sum_{n=0}^{\infty} (F_{f,V}(x) - x^{f(v)})^n. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд $\varphi_{G_0,f,v}(x)$ сходится при тех и только тех $x \geq 0$, для которых имеет место неравенство

$$F_{f,V}(x) - x^{f(v)} < 1. \quad (2.2)$$

Из чего получаем требуемую формулу

$$\varphi_{G_0, f, v}(x) = \frac{x^{f(v)}}{1 - (F_{f, V}(x) - x^{f(v)})},$$

которая корректна при условии (2.2).

Оказывается, что для потока T_f , построенного по локальному возмущению ТСБ и $f = f(y_0)$, тоже можно подсчитать (прибегая к необходимому усложнению рассуждений) производящую функцию $\varphi_{G, f, v}(x)$ и выписать формулу, подобную (2.1).

Пусть заданы ТСБ $(Y(G_0), T)$ со счетным множеством состояний $V = V(G_0)$ и ее локальное возмущение $(Y(G), T)$. Обозначим через

$$\tilde{V}_G = \{v \in V : \exists v' \in V \text{ такое, что } (v, v') \notin E(G)\}$$

совокупность “возмущенных” вершин графа G . Очевидно, $\tilde{V}_G$ – непустое конечное множество. Для $v \in \tilde{V}_G$ положим $A_{G, v} = \{v' \in V : (v, v') \notin E(G)\}$. По определению локального возмущения $A_{G, v} \neq \emptyset$ и $A_{G, v}$ конечно при всех $v \in \tilde{V}_G$.

Зафиксируем вершину $w \in \tilde{V}_G$. Пусть $\tilde{G}_w$ – подграф графа G , порожденный множеством вершин $\tilde{V}_G \setminus \{w\}$, т.е. $V(\tilde{G}_w) = \tilde{V}_G \setminus \{w\}$ и $E(\tilde{G}_w) = \{(v, v') \in E(G) : v, v' \in V(\tilde{G}_w)\}$. Граф $\tilde{G}_w$ конечен, быть может, несвязен (в случае $\tilde{V}_G = \{w\}$ даже пуст). Определим матрицу $B^{\tilde{G}_w}(x) = (b_{vv'}^{\tilde{G}_w}(x))$, $v, v' \in V(\tilde{G}_w)$, зависящую от параметра $x \geq 0$, равенством

$$b_{vv'}^{\tilde{G}_w}(x) = \begin{cases} x^{f(v)}, & \text{если } (v, v') \in E(\tilde{G}_w), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначив через $[B^{\tilde{G}_w}(x)]_{vv'}^{(n)}$ элемент n -й степени матрицы $B^{\tilde{G}_w}$, отвечающий паре (v, v') ($n = 0, 1, \dots$, причем $[B^{\tilde{G}_w}(x)]^{(0)} \equiv I$, где I – единичная матрица), введем функции

$$\beta_{vv'}^{\tilde{G}_w}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [B^{\tilde{G}_w}(x)]_{vv'}^{(n)}, \quad v, v' \in V(\tilde{G}_w).$$

Если $\tilde{V}_G = \{w\}$ и граф $\tilde{G}_w$ пуст, то положим $\beta_{vv'}^{\tilde{G}_w}(x) \equiv 0$ при всех v, v' . Зададим также конечный подграф $\tilde{G}$ графа G , порожденный множеством вершин $\tilde{V}_G$, и производящую функцию

$$\varphi_{\tilde{G}, f, w}(x) = \sum_{\gamma \in C(\tilde{G}; w)} x^{f^*(\gamma)}.$$

Наконец, введем обозначения:

$$F_{f, V, v}(x) = F_{f, V}(x) - \sum_{v' \in (\tilde{V}_G \cap \bar{A}_{G, v}) \cup A_{G, v}} x^{f(v')},$$

где $v \in \tilde{V}_G$, а черта над множеством понимается как взятие дополнения;

$$\alpha_{U,f,w}(x) = \sum_{v' \in U} \sum_{v'' \in V(\tilde{G}_w)} \beta_{v'v''}^{\tilde{G}_w}(x) \cdot x^{f(v'')} \cdot F_{f,V,v''}(x),$$

где $U \subset \tilde{V}_G$;

$$\sigma_{G,f,w}(x) = \sum_{v' \in V(\tilde{G}_w)} \sum_{\substack{v'' \in V(\tilde{G}_w) \\ (v'', w) \in E(G)}} \beta_{v'v''}^{\tilde{G}_w}(x) x^{f(v'')}.$$

Теперь можно сформулировать теорему, которая показывает, что $\varphi_{G,f,w}(x)$ выражается через $F_{f,V}(x)$ и производящие функции, связанные с конечными графами $\tilde{G}_w, \tilde{G}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(Y(G), T)$ – локальное возмущение топологической схемы Бернулли $(Y(G_0), T)$ со счетным множеством вершин V , и пусть задана положительная функция $f \in \mathcal{F}^0(Y(G))$. Тогда для $w \in \tilde{V}_G$

$$\begin{aligned} \varphi_{G,f,w}(x) \\ = \varphi_{\tilde{G},f,w}(x) + \frac{x^{f(w)}(F_{f,V,w}(x) + \alpha_{V(\tilde{G}_w) \cap \bar{A}_{G,w},f,w}(x))(1 + \sigma_{G,f,w}(x))}{1 + \sum_{v' \in \tilde{V}_G} x^{f(v')} - F_{f,V}(x) - \alpha_{V(\tilde{G}_w),f,w}(x)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

при тех $x \geq 0$, для которых знаменатель последней дроби положителен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с ряда полезных определений. Вершину $v \in V$ графа G назовем *полной*, если $(v, v') \in E(G)$ при всех $v' \in V$. Обозначим через V_G° множество всех полных вершин графа G . Очевидно, $V = V_G^\circ \cup \tilde{V}_G$. На G введем трансфер-матрицу $B(x) = (b_{vv'}(x))$, $v, v' \in V$, $x \geq 0$, по правилу:

$$b_{vv'}(x) = \begin{cases} x^{f(v)}, & \text{если } (v, v') \in E(G), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для всякого пути $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, $n \geq 1$, в графе G определяется его вес $\omega_f(\gamma; x)$ относительно матрицы $B(x)$, зависящий от параметра $x \geq 0$, по формуле: $\omega_f(\gamma; x) = \prod_{i=0}^{n-1} b_{v_i, v_{i+1}}(x)$. Заметим, что если $\gamma = \gamma' \gamma''$, то $\omega_f(\gamma; x) = \omega_f(\gamma'; x) \omega_f(\gamma''; x)$. Пусть $C(G; v', v'') = \{\gamma = (v', v_1, \dots, v_{n-1}, v'') : \gamma \in \Pi(G; v', v''), v_i \neq v'', 1 \leq i \leq n-1\}$ – множество всех путей в G , ведущих из v' и заканчивающихся в момент первого попадания в v'' . Если $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, $n \geq 1$, – путь в G , определим координатные функции $v_i(\gamma) := v_i$, $0 \leq i \leq n$, а также момент $\tau^\circ(\gamma)$ первого попадания пути γ в множество V_G° :

$$\tau^\circ(\gamma) = \begin{cases} \min\{i \geq 0 : v_i(\gamma) \in V_G^\circ\}, & \text{если } \gamma \text{ проходит через } V_G^\circ, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Основное соображение, которое используется для получения формулы (2.3), заключается в том, что после попадания пути $\gamma \in C(G; w)$ в полную вершину мы можем перейти в произвольную вершину $v \in V$, т.е. оставшаяся часть пути оказывается независимой от “прошлого”. Это позволит в будущем вывести “уравнение

восстановления", через решение которого можно выразить производящую функцию $\varphi_{G,f,w}(x)$. Очевидно,

$$\begin{aligned}\varphi_{G,f,w}(x) &= \sum_{\gamma \in C(G;w)} x^{f^*(\gamma)} = \sum_{\gamma \in C(G;w)} \omega_f(\gamma; x) \\ &= \sum_{\substack{\gamma \in C(G;w) \\ \tau^\circ(\gamma)=\infty}} \omega_f(\gamma; x) + \sum_{\substack{\gamma \in C(G;w) \\ \tau^\circ(\gamma)=1}} \omega_f(\gamma; x) + \sum_{\substack{\gamma \in C(G;w) \\ 2 \leq \tau^\circ(\gamma) < \infty}} \omega_f(\gamma; x).\end{aligned}\quad (2.4)$$

По определению

$$\sum_{\substack{\gamma \in C(G;w) \\ \tau^\circ(\gamma)=\infty}} \omega_f(\gamma; x) = \varphi_{\tilde{G},f,w}(x).$$

Рассмотрим вторую сумму в правой части (2.4). Если $\gamma \in C(G; w)$, $\tau^\circ(\gamma) = 1$, то либо $\gamma = (w, v', w)$, где $v' \notin (\tilde{V}_G \cap \bar{A}_{G,w}) \cup A_{G,w}$, либо

$$\gamma = (w, v', v_2, \dots, v_{n-1}, w), \quad n \geq 3,$$

где $v' \notin (\tilde{V}_G \cap \bar{A}_{G,w}) \cup A_{G,w}$, $v_2 \in V \setminus \{w\}$ и $\gamma' := (v_2, \dots, v_{n-1}, w) \in C(G; v_2, w)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\gamma \in C(G;w) \\ \tau^\circ(\gamma)=1}} \omega_f(\gamma; x) &= x^{f(w)} \left(F_{f,V}(x) - \sum_{v' \in (\tilde{V}_G \cap \bar{A}_{G,w}) \cup A_{G,w}} x^{f(v')} \right) \\ &\times \left(1 + \sum_{v \in V \setminus \{w\}} \sum_{\gamma' \in C(G;v,w)} \omega_f(\gamma'; x) \right) = x^{f(w)} F_{f,V,w}(x) J_{G,f,w}(x),\end{aligned}$$

где мы обозначили

$$J_{G,f,w}(x) = 1 + \sum_{v \in V \setminus \{w\}} \sum_{\gamma' \in C(G;v,w)} \omega_f(\gamma'; x).$$

Перейдем к последней сумме в (2.4), равной

$$\sum_{\substack{\gamma \in C(G;w) \\ 2 \leq \tau^\circ(\gamma) < \infty}} \omega_f(\gamma; x) = \sum_{\substack{\gamma \in C(G;w) \\ \tau^\circ(\gamma)=2}} \omega_f(\gamma; x) + \sum_{\substack{\gamma \in C(G;w) \\ 2 < \tau^\circ(\gamma) < \infty}} \omega_f(\gamma; x).$$

Если $\gamma \in C(G; w)$, $\tau^\circ(\gamma) = 2$, то либо $\gamma = (w, v', v_2, w)$, где $v' \in V(\tilde{G}_w) \cap \bar{A}_{G,w}$, $v_2 \notin (\tilde{V}_G \cap \bar{A}_{G,v'}) \cup A_{G,v'}$, либо $\gamma = (w, v', v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, w)$, $n \geq 4$, где $v' \in V(\tilde{G}_w) \cap \bar{A}_{G,w}$, $v_2 \notin (\tilde{V}_G \cap \bar{A}_{G,v'}) \cup A_{G,v'}$, $v_3 \in V \setminus \{w\}$ и $\gamma' := (v_3, \dots, v_{n-1}, w) \in C(G; v_3, w)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\gamma \in C(G;w) \\ \tau^\circ(\gamma)=2}} \omega_f(\gamma; x) &= x^{f(w)} \\ &\times \sum_{v' \in V(\tilde{G}_w) \cap \bar{A}_{G,w}} \left[x^{f(v')} \left(F_{f,V}(x) - \sum_{v \in (\tilde{V}_G \cap \bar{A}_{G,v'}) \cup A_{G,v'}} x^{f(v)} \right) J_{G,f,w}(x) \right].\end{aligned}$$

Применив аналогичные рассуждения к путям $\gamma \in C(G; w)$ с $\tau^\circ(\gamma) > 2$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\gamma \in C(G; w) \\ 2 < \tau^\circ(\gamma) < \infty}} \omega_f(\gamma; x) \\ &= \sum_{v' \in V(\tilde{G}_w) \cap \overline{A}_{G, w}} \sum_{v'' \in V(\tilde{G}_w)} \sum_{\substack{\gamma \in C(G; w), 2 < \tau^\circ(\gamma) < \infty \\ v_1(\gamma) = v' \\ v_{\tau^\circ(\gamma)-1}(\gamma) = v''}} \omega_f(\gamma; x), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\gamma \in C(G; w) \\ 2 < \tau^\circ(\gamma) < \infty \\ v_1(\gamma) = v' \\ v_{\tau^\circ(\gamma)-1}(\gamma) = v''}} \omega_f(\gamma; x) \\ &= x^{f(w)} \left[\sum_{\gamma' \in \Pi(\tilde{G}_w; v', v'')} \omega_f(\gamma'; x) \right] x^{f(v'')} F_{f, V, v''}(x) J_{G, f, w}(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Рассмотрим сумму $\sum_{\gamma' \in \Pi(\tilde{G}_w; v', v'')} \omega_f(\gamma'; x)$ в предположении, что множество $\Pi(\tilde{G}_w; v', v'')$ непусто. Заметим, что ограничение матрицы $B(x)$ на подграф $\tilde{G}_w$ (если он непуст) совпадает с матрицей $B^{\tilde{G}_w}(x)$. С другой стороны, непосредственно проверяется, что для $n \geq 1$

$$\sum_{\substack{\gamma' \in \Pi(\tilde{G}_w; v', v'') \\ l(\gamma') = n}} \omega_f(\gamma'; x) = [B^{\tilde{G}_w}(x)]_{v'v''}^{(n)}, \quad v', v'' \in V(\tilde{G}_w),$$

откуда имеем

$$\sum_{\gamma' \in \Pi(\tilde{G}_w; v', v'')} \omega_f(\gamma'; x) = \sum_{n=1}^{\infty} [B^{\tilde{G}_w}(x)]_{v'v''}^{(n)}. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.6), (2.6) в (2.5) и учитывая определение функций $\beta_{v'v''}^{\tilde{G}_w}(x)$, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\gamma \in C(G; w) \\ 2 < \tau^\circ(\gamma) < \infty}} \omega_f(\gamma; x) \\ &= \sum_{v' \in V(\tilde{G}_w) \cap \overline{A}_{G, w}} \sum_{v'' \in V(\tilde{G}_w)} [x^{f(w)} \beta_{v'v''}^{\tilde{G}_w}(x) x^{f(v'')} F_{f, V, v''}(x) J_{G, f, w}(x)]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Объединяя (2.8) с полученными ранее выражениями для первой и второй сумм в правой части (2.4), находим

$$\varphi_{G, f, w}(x) = \varphi_{\tilde{G}, f, w}(x) + x^{f(w)} [F_{f, V, w}(x) + \alpha_{V(\tilde{G}_w) \cap \overline{A}_{G, w}, f, w}(x)] J_{G, f, w}(x). \quad (2.9)$$

Если радиус сходимости ряда $F_{f, V}(x)$ равен нулю, то в силу (2.9) аналогичным свойством обладает и производящая функция $\varphi_{G, f, w}(x)$ (поскольку при $x \geq 0$ по

определению $\varphi_{\tilde{G},f,w}(x) \geq 0$, $\alpha_{V(\tilde{G}_w) \cap \overline{A}_{G,w},f,w}(x) \geq 0$, $J_{G,f,w}(x) \geq 0$ и множество $\tilde{V}_G$ конечно), а значит, в этом случае формула (2.3) сводится к тривиальному равенству при $x = 0$.

Предположим теперь, что радиус сходимости $F_{f,V}(x)$ больше нуля. Из этого сразу же вытекает, что, занумеровав произвольным образом элементы множества V , мы получаем $f(v_j) \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$. Заметим, что на протяжении данного доказательства мы систематически имеем дело с бесконечными суммами вида $\sum_{\xi} x^{\rho_{\xi}}$, где индекс ξ пробегает некоторое счетное множество, а каждое ρ_{ξ} есть либо конечная сумма типа $f(v_{\xi 1}) + f(v_{\xi 2}) + \dots + f(v_{\xi k_{\xi}})$, $v_{\xi i} \in V, 1 \leq i \leq k_{\xi}$, либо $\rho_{\xi} = 0$ (и мы считаем, что $x^0 \equiv 1$), причем в этой бесконечной сумме для всякого неупорядоченного мультимножества $v_1, v_2, \dots, v_k$ может встречаться только не более конечного числа слагаемых x^{ρ} с показателем $\rho = f(v_1) + f(v_2) + \dots + f(v_k)$, а также не более конечного числа единиц. Обозначим совокупность всех таких формальных функциональных рядов через $\mathcal{R}$. Каждый ряд из $\mathcal{R}$ задается набором своих показателей $\{\rho_{\xi}\}$ (с учетом кратности). Поскольку $f(v_j) \rightarrow \infty$, то для любого $\rho > 0$ в каждой сумме из $\mathcal{R}$ встречается не более чем конечное число слагаемых вида x^{ρ} . Легко видеть, что множество $\mathcal{R}$ замкнуто относительно естественно вводимых на нем операций сложения и умножения. Тем самым, равенство между двумя многочленами (с натуральными коэффициентами) от рядов из $\mathcal{R}$ может пониматься как равенство в множестве $\mathcal{R}$. Отметим также, что если в любой ряд из $\mathcal{R}$ подставить $x \geq 0$, то его сумма корректно определена как неотрицательное число или $+\infty$. Таким образом, соотношения между производящими функциями, которые мы получили или получим далее, можно рассматривать, с одной стороны, как равенства сумм соответствующих функциональных рядов при $x \geq 0$, а с другой стороны, как равенства формальных рядов в множестве $\mathcal{R}$. При этом в некоторых формулах появляется знак “минус”, но он означает лишь удаление конечного числа слагаемых из ряда $F_{f,V}(x)$, что не выводит из $\mathcal{R}$.

Наша ближайшая цель – получить “уравнение восстановления” для функции $J_{G,f,w}(x)$. Из определений $J_{G,f,w}(x)$, множеств $\tilde{V}_G, V_G^{\circ}$ и величины $\tau^{\circ}(\cdot)$ вытекает:

$$\begin{aligned}
 J_{G,f,w}(x) &= 1 + \sum_{v \in V \setminus \{w\}} \sum_{\gamma' \in C(G;v,w)} \omega_f(\gamma'; x) \\
 &= 1 + \sum_{v \in V_G^{\circ}} \sum_{\gamma' \in C(G;v,w)} \omega_f(\gamma'; x) \\
 &\quad + \sum_{v \in \tilde{V}_G \setminus \{w\}} \sum_{\substack{\gamma' \in C(G;v,w) \\ \tau^{\circ}(\gamma') = \infty}} \omega_f(\gamma'; x) \\
 &\quad + \sum_{v \in \tilde{V}_G \setminus \{w\}} \sum_{\substack{\gamma' \in C(G;v,w) \\ 1 \leq \tau^{\circ}(\gamma') < \infty}} \omega_f(\gamma'; x). \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Преобразуем теперь каждую из двойных сумм в правой части (2.10).

Если $\gamma' \in C(G;v,w)$ и $v \in V_G^{\circ}$, то либо $\gamma' = (v,w)$, либо $\gamma' = \gamma_1 \gamma_2$, где $\gamma_1 = (v, v')$, $v' \in V \setminus \{w\}$, а γ_2 – произвольный путь из множества $C(G;v',w)$.

Таким образом, первая сумма принимает вид

$$\begin{aligned}
& \sum_{v \in V_G^\circ} \sum_{\gamma' \in C(G; v, w)} \omega_f(\gamma'; x) \\
&= \sum_{v \in V_G^\circ} x^{f(v)} + \left(\sum_{v \in V_G^\circ} x^{f(v)} \right) \sum_{v' \in V \setminus \{w\}} \sum_{\gamma_2 \in C(G; v', w)} \omega_f(\gamma_2; x) \\
&= \left(F_{f, V}(x) - \sum_{v \in \tilde{V}_G} x^{f(v)} \right) J_{G, f, w}(x). \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Повторяя часть рассуждений, использовавшихся при выводе формул (2.7) и (2.8), для второй суммы получаем

$$\sum_{v \in \tilde{V}_G \setminus \{w\}} \sum_{\substack{\gamma' \in C(G; v, w) \\ \tau^\circ(\gamma') = \infty}} \omega_f(\gamma'; x) = \sum_{v \in V(\tilde{G}_w)} \sum_{\substack{v' \in V(\tilde{G}_w) \\ (v', w) \in E(G)}} \beta_{vv'}^{\tilde{G}_w}(x) x^{f(v')}. \tag{2.12}$$

Переходя к третьей сумме, заметим, что если $\gamma' \in C(G; v, w)$, $v \in V(\tilde{G}_w)$ и $\tau^\circ(\gamma') = 1$, то γ' допускает одно из двух представлений: либо $\gamma' = (v, v', w)$, где $v' \notin (\tilde{V}_G \cap \bar{A}_{G, v}) \cup A_{G, v}$, либо $\gamma' = \gamma_1 \gamma_2$, где $\gamma_1 = (v, v', v'')$, $v' \notin (\tilde{V}_G \cap \bar{A}_{G, v}) \cup A_{G, v}$, $v'' \in V \setminus \{w\}$, и $\gamma_2 \in C(G; v'', w)$. Наконец, если $\gamma' \in C(G; v, w)$, $v \in V(\tilde{G}_w)$ и $2 \leq \tau^\circ(\gamma') < \infty$, то γ' имеет вид $\gamma' = \gamma_1 \gamma_2$, где $\gamma_1 \in \Pi(\tilde{G}_w; v, v')$, $v' \in V(\tilde{G}_w)$, и $\gamma_2 = (v', v'', w)$, $v'' \notin (\tilde{V}_G \cap \bar{A}_{G, v'}) \cup A_{G, v'}$, или $\gamma' = \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3$, где $\hat{\gamma}_1 \in \Pi(\tilde{G}_w; v, v')$, $v' \in V(\tilde{G}_w)$, $\hat{\gamma}_2 = (v', v'', \hat{v}'')$, $v'' \notin (\tilde{V}_G \cap \bar{A}_{G, v'}) \cup A_{G, v'}$, $\hat{v}'' \in V \setminus \{w\}$, и $\hat{\gamma}_3 \in C(G; \hat{v}'', w)$. Тем самым,

$$\sum_{v \in \tilde{V}_G \setminus \{w\}} \sum_{\substack{\gamma' \in C(G; v, w) \\ 1 \leq \tau^\circ(\gamma') < \infty}} \omega_f(\gamma'; x) = \sum_{v, v' \in V(\tilde{G}_w)} \beta_{vv'}^{\tilde{G}_w}(x) x^{f(v')} F_{f, V, v'}(x) J_{G, f, w}(x).$$

Учитывая (2.11), (2.12) и последнее равенство, получаем искомое уравнение на $J_{G, f, w}(x)$:

$$\begin{aligned}
J_{G, f, w}(x) &= 1 + \sigma_{G, f, w}(x) \\
&+ \left[F_{f, V}(x) - \sum_{v \in \tilde{V}_G} x^{f(v)} + \alpha_{V(\tilde{G}_w), f, w}(x) \right] J_{G, f, w}(x). \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Напомним, что по предположению $R_{f, V} > 0$. Покажем, что ряд $J_{G, f, w}(x)$ сходится при тех и только тех $x \geq 0$, для которых

$$\left(F_{f, V}(x) - \sum_{v \in \tilde{V}_G} x^{f(v)} \right) + \alpha_{V(\tilde{G}_w), f, w}(x) < 1. \tag{2.14}$$

Обозначим:

$$Z(x) = F_{f, V}(x) - \sum_{v \in \tilde{V}_G} x^{f(v)} + \alpha_{V(\tilde{G}_w), f, w}(x).$$

Рассмотрим подробнее соотношение (2.13). В его правую часть мы можем вместо $J_{G,f,w}(x)$ подставить целиком правую часть того же равенства (2.13), что дает

$$J_{G,f,w}(x) = (1 + \sigma_{G,f,w}(x))(1 + Z(x)) + Z^2(x)J_{G,f,w}(x).$$

Проведя аналогичную процедуру k раз, по индукции получаем

$$J_{G,f,w}(x) = (1 + \sigma_{G,f,w}(x))(1 + Z(x) + Z^2(x) + \cdots + Z^k(x)) + Z^{k+1}(x)J_{G,f,w}(x). \quad (2.15)$$

Следовательно, при $k \geq 1$

$$J_{G,f,w}(x) \geq (1 + \sigma_{G,f,w}(x)) \left[1 + \sum_{l=1}^k Z^l(x) \right], \quad x \geq 0.$$

Устремляя в этом неравенстве k к бесконечности, убеждаемся, что если $Z(x) \geq 1$, то ряд $J_{G,f,w}(x)$ расходится.

Предположим теперь, что $Z(x) < 1$. Поскольку $f(v_j) \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, то для любого $t > 0$ сумма

$$J_{G,f,w}^{(t)}(x) = 1 + \sum_{v \in V \setminus \{w\}} \sum_{\substack{\gamma' \in C(G;v,w) \\ f^*(\gamma') \leq t}} x^{f^*(\gamma')}$$

состоит лишь из конечного числа слагаемых. Мы утверждаем, что для каждого $t > 0$ найдется натуральное $k_t \geq 1$ такое, что

$$J_{G,f,w}^{(t)}(x) \leq (1 + \sigma_{G,f,w}(x)) \left[1 + \sum_{l=1}^{k_t} Z^l(x) \right], \quad x \geq 0. \quad (2.16)$$

Действительно, соотношение (2.15) справедливо как равенство в $\mathcal{R}$. Кроме того, каждое слагаемое суммы $J_{G,f,w}^{(t)}(x)$ является членом ряда $J_{G,f,w}(x)$, а потому входит в правую часть (2.15), рассматриваемую в качестве элемента множества $\mathcal{R}$. Поскольку $f(v) \geq \delta > 0$, в $Z^{k+1}(x)J_{G,f,w}(x) \in \mathcal{R}$ входят только слагаемые вида x^ρ с $\rho \geq (k+1)\delta$. Поэтому, выбрав число k_t , для которого $(k_t + 1)\delta > t$, можно заключить, что всякое слагаемое из $J_{G,f,w}^{(t)}(x)$ обязано входить в ряд $(1 + \sigma_{G,f,w}(x)) [1 + \sum_{l=1}^{k_t} Z^l(x)] \in \mathcal{R}$, откуда следует (2.16).

Остается заметить, что $J_{G,f,w}^{(t)}(x) \rightarrow J_{G,f,w}(x)$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда, учитывая (2.16), получаем

$$J_{G,f,w}(x) \leq (1 + \sigma_{G,f,w}(x)) \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} Z^l(x) \right].$$

Значит, в случае, когда $Z(x) < 1$, ряд $J_{G,f,w}(x)$ сходится, что и требовалось показать.

Теперь можно решить уравнение (2.13) относительно $J_{G,f,w}(x)$ при $x \geq 0$, удовлетворяющих условию (2.14). Это дает

$$J_{G,f,w}(x) = \frac{1 + \sigma_{G,f,w}(x)}{1 - (F_{f,V}(x) - \sum_{v \in \tilde{V}_G} x^{f(v)}) - \alpha_{V(\tilde{G}_w),f,w}(x)}. \quad (2.17)$$

Отметим также, что если где-либо в предыдущей части доказательства встречается суммирование по пустому множеству, то соответствующая производящая функция полагается тождественно равной нулю.

Подставляя (2.17) в (2.9), приходим к требуемой формуле (2.3). Поскольку множества $\tilde{V}_G$, $V(\tilde{G}_w)$ конечны, условие (2.14) обеспечивает сходимость всех рядов, фигурирующих в правой части равенства (2.3). Отсюда следует, что производящая функция $\varphi_{G,f,w}(x)$ сходится и справедливо равенство (2.3) при тех и только тех $x \geq 0$, для которых выполнено условие (2.14). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если вершина w является полной, то, внося необходимые изменения, можно получить для $\varphi_{G,f,w}(x)$ формулу, аналогичную (2.3). Для этого вместо графа $\tilde{G}$ нужно рассмотреть подграф графа G , порожденный множеством вершин $\tilde{V}_G \cup \{w\}$, а вместо $\tilde{G}_w$ — граф $\tilde{G}$, определить функции $\beta_{v,v'}^{\tilde{G}_w}(x)$, $v, v' \in \tilde{V}_G$, и т.д.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 $\varphi_{G,f,w}(x)$ является рациональной функцией с целыми коэффициентами от переменных $F_{f,V}(x)$ и $\{x^{f(v)}\}$, $v \in \tilde{V}_G \cup \bigcup_{v' \in \tilde{V}_G} A_{G,v'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w \in \tilde{V}_G$. Во-первых, легко видеть, что

$$\varphi_{\tilde{G},f,w}(x) = x^{f(w)} \sum_{v' \in V(\tilde{G}_w) \cap \bar{A}_{G,w}} \sum_{\substack{v'' \in V(\tilde{G}_w) \\ (v'',w) \in E(G)}} \beta_{v',v''}^{\tilde{G}_w}(x) x^{f(v'')} + x^{f(w)} I_{E(G)}(w, w),$$

где $I_{E(G)}(w, w) = 1$, если пара (w, w) является ребром графа G , и $I_{E(G)}(w, w) = 0$ в противном случае.

Далее, поскольку множества $\tilde{V}_G$, $A_{G,v'}$, где $v' \in \tilde{V}_G$, конечны, то, вспоминая определения производящих функций, входящих в правую часть формулы (2.3), нетрудно убедиться, что для доказательства требуемого утверждения нам достаточно установить рациональность производящих функций $\beta_{v',v''}^{\tilde{G}_w}(x)$ от переменных $\{x^{f(v')}\}$, $v' \in V(\tilde{G}_w)$.

Если граф $\tilde{G}_w$ пуст, то все доказано. Предположим, что $\tilde{G}_w$ — непустой конечный граф. Воспользуемся следующим общим фактом (см., например, [5]). Пусть $A = (a_{i,j})$ — конечная матрица над $\mathbb{C}$ размера $p \times p$, $a_{i,j}^{(n)}$ — элемент матрицы A^n , стоящий на (i, j) -м месте. Будем считать, что $A^0 \equiv I$. Тогда производящая функция $\sum_{n \geq 0} a_{i,j}^{(n)} z^n$ является рациональной, а именно

$$\sum_{n \geq 0} a_{i,j}^{(n)} z^n = \frac{(-1)^{i+j} \det((I - zA)_{ji})}{\det(I - zA)}, \quad 1 \leq i, j \leq p,$$

где символом B_{ji} обозначается матрица, полученная из матрицы B удалением j -й строки и i -го столбца. Отсюда, занумеровав произвольным образом вершины $v \in V(\tilde{G}_w)$, имеем

$$\beta_{v',v''}^{\tilde{G}_w}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [B^{\tilde{G}_w}(x)]_{v',v''}^{(n)} = \frac{(-1)^{i(v')+i(v'')} \det((I - B^{\tilde{G}_w}(x))_{i(v'')i(v')})}{\det(I - B^{\tilde{G}_w}(x))}, \quad (2.18)$$

где через $i(v')$ и $i(v'')$ обозначены номера соответственно вершин v' и v'' . Очевидно, правая часть этого равенства не зависит от выбора нумерации вершин $v \in V(\tilde{G}_w)$. Учитывая, что ненулевые элементы матрицы $B^{\tilde{G}_w}(x)$ имеют вид $x^{f(v')}$, $v' \in V(\tilde{G}_w)$, приходим к выводу, что $\beta_{v',v''}^{\tilde{G}_w}(x)$ – рациональная функция с целыми коэффициентами относительно переменных $\{x^{f(v')}\}$, $v' \in V(\tilde{G}_w)$. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если вершина w является полной, то для $\varphi_{G,f,w}(x)$ справедливо утверждение, аналогичное следствию 1 (с учетом сказанного в замечании 1).

Важность исследования производящей функции $\varphi_{G,f,w}(x)$ для потока T_f подтверждается результатами, содержащимися в [1]. Первый из них касается нахождения топологической энтропии потока. Пусть G – ориентированный связный граф со счетным множеством вершин, $(Y(G), T)$ – отвечающая ему топологическая цепь Маркова и f – положительная функция класса $\mathcal{F}^0(Y(G))$, удовлетворяющая условию (1.1). Тогда для топологической энтропии $h(T_f)$ специального потока T_f , построенного по $(Y(G), T)$ и f , справедлива формула (см. [1; теорема 2])

$$h(T_f) = \inf \left\{ h \geq 0 : \sum_{\gamma \in C(G;w)} e^{-hf^*(\gamma)} \leq 1 \right\}, \quad (2.19)$$

причем равенство (2.19) имеет место для произвольной вершины $w \in V(G)$. Очевидно, $\sum_{\gamma \in C(G;w)} e^{-hf^*(\gamma)} = \varphi_{G,f,w}(e^{-h})$. Поэтому

$$h(T_f) = -\ln \hat{x}_f, \quad \text{где} \quad \hat{x}_f = \sup \{x \geq 0 : \varphi_{G,f,w}(x) \leq 1\}. \quad (2.20)$$

В “хороших” случаях вычисление топологической энтропии потока сводится к решению уравнения

$$\varphi_{G,f,w}(x) = 1. \quad (2.21)$$

Для ТСБ в силу (2.1) уравнение (2.21) эквивалентно уравнению $F_{f,V}(x) = 1$. Если же $(Y(G), T)$ – локальное возмущение ТСБ, то согласно теореме 1 и следствию 1 (см. также замечание 1) уравнение (2.21) преобразуется к виду

$$F_{f,V}(x) = 1 + Q_{G,f,w}(x), \quad (2.22)$$

где $Q_{G,f,w}(x)$ есть рациональная функция с целыми коэффициентами от конечного числа переменных вида $x^{f(v)}$, $v \in \tilde{V}_G \cup \{w\} \cup \bigcup_{v' \in \tilde{V}_G} A_{G,v'}$ (так как степень переменной $F_{f,V}$ в числителе и знаменателе дроби, фигурирующей в (2.3), равна единице). Несмотря на внешнюю громоздкость формулы (2.3), при достаточно простой структуре графа $\tilde{G}$, порожденного возмущенными вершинами, функцию $Q_{G,f,w}(x)$ можно выписать в явном виде, а уравнение (2.22) использовать для точного или приближенного вычисления топологической энтропии специального потока T_f (см. пример 1). При этом счетность графа G влияет лишь на свойства производящей функции $F_{f,V}(x)$, что удобно для численного анализа.

В другом утверждении работы [1], которое понадобится нам здесь, приводятся необходимые и достаточные условия существования (единственной) меры с максимальной энтропией для потока T_f , построенного по топологической цепи Маркова и функции $f \in \mathcal{F}^0(Y(G))$ (см. [1; теорема 3]). А именно пусть выполнены условия, при которых справедлива формула (2.19), и к тому же $h(T_f) < \infty$. Тогда или

$\mathcal{P}_{\max}(Y_f(G)) = \emptyset$, или $\text{card } \mathcal{P}_{\max}(Y_f(G)) = 1$, причем для существования меры с максимальной энтропией относительно потока T_f необходимо и достаточно, чтобы при некотором (а следовательно, и при любом) $w \in V(G)$ выполнялись следующие условия:

- (1) $\sum_{\gamma \in C(G;w)} e^{-h(T_f)f^*(\gamma)} = 1$;
- (2) $\sum_{\gamma \in C(G;w)} f^*(\gamma) e^{-h(T_f)f^*(\gamma)} < \infty$.

§3. Критерий устойчивости

Сформулированные выше условия (1), (2) и теорема 1 позволяют выделить класс положительных функций $f = f(y_0)$, для которых соотношение

$$\text{card } \mathcal{P}_{\max}(Y_f(G)) = 1$$

устойчиво относительно произвольных локальных возмущений базы потока T_f .

ТЕОРЕМА 2. Пусть задана топологическая схема Бернулли $(Y(G_0), T)$ со счетным множеством состояний $V = V(G_0)$ и положительная функция $f \in \mathcal{F}^0(Y(G_0))$. Пусть T_f — специальный поток, построенный по $(Y(G_0), T)$ и f . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- i) $h(T_f) < \infty$ и для любого локального возмущения $(Y(G), T)$ топологической схемы Бернулли $(Y(G_0), T)$ (и, в частности, для самой $(Y(G_0), T)$) специальный поток, построенный по $(Y(G), T)$ и f , обладает (единственной) мерой с максимальной энтропией;
- ii) радиус сходимости $R_{f,V}$ ряда $F_{f,V}(x)$ больше нуля и $F_{f,V}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow R_{f,V} - 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задав произвольным образом нумерацию на множестве вершин $v \in V$, в целях удобства изложения можно считать, что $V \subseteq \mathbb{N}$.

Заметим, прежде всего, что если имеется положительная функция $f(y) = f(y_0)$ и $R_{f,V} > 0$, то $f \in \mathcal{F}^0(Y(G_0))$ и соответствующие специальные потоки определены. В самом деле, поскольку $R_{f,V} > 0$, то $f(v) \rightarrow +\infty$ при $v \rightarrow \infty$, так как иначе общий член $x^{f(v)}$ ряда $F_{f,V}(x)$ не стремился бы к нулю ни при каком $x > 0$. Отсюда следует, что функция f удовлетворяет условию (1.1) и, значит, $f \in \mathcal{F}^0(Y(G_0))$.

1. Предположим теперь, что $R_{f,V} > 0$ и $F_{f,V}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow R_{f,V} - 0$. Покажем вначале, что функция $F_{f,V}(x)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0, R_{f,V})$. Рассмотрим ряд, составленный из производных:

$$D_{f,V}(x) = \sum_{v \in V} f(v) x^{f(v)-1}, \quad x > 0.$$

Очевидно,

$$D_{f,V}(x) = \sum_{\substack{v \in V \\ f(v) < 2}} f(v) x^{f(v)-1} + \sum_{\substack{v \in V \\ f(v) \geq 2}} f(v) x^{f(v)-1}. \quad (3.1)$$

Первая сумма в (3.1) состоит лишь из конечного числа слагаемых (так как $f(v) \rightarrow +\infty$, $v \rightarrow \infty$) и поэтому на сходимость ряда $D_{f,V}(x)$ не влияет. Обозначим через $R(D_{f,V})$ радиус сходимости ряда $D_{f,V}(x)$ (величина $R(D_{f,V})$ совпадает с радиусом сходимости второй суммы в (3.1), который определяется

аналогично радиусу сходимости ряда $F_{f,V}(x)$). Убедимся, что $R(D_{f,V}) = R_{f,V}$. Действительно, если $f(v) \geq 2$, то $f(v)x^{f(v)-1} \geq x^{f(v)-1} \geq x^{f(v)}$ при $0 \leq x \leq 1$ и, значит, $R(D_{f,V}) \leq R_{f,V}$. Докажем обратное неравенство. Для всякого x , $0 < x \leq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{v \in V \\ f(v) \geq 2}} f(v)x^{f(v)-1} &\leq \sum_{\substack{v \in V \\ f(v) \geq 2}} ([f(v)] + 1)x^{[f(v)]-1} \\ &= \sum_{\substack{v \in V \\ f(v) \geq 2}} [f(v)]x^{[f(v)]-1} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{v \in V \\ f(v) \geq 2}} x^{[f(v)]}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $[\cdot]$ обозначает выделение целой части действительного числа. Ряд

$$\sum_{f(v) \geq 2} [f(v)]x^{[f(v)]-1}$$

является степенным рядом, и его радиус сходимости совпадает с радиусом сходимости ряда $\sum_{f(v) \geq 2} x^{[f(v)]}$, так как

$$\sum_{f(v) \geq 2} [f(v)]x^{[f(v)]-1} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{f(v) \geq 2} x^{[f(v)]} \right).$$

Но $f(v) - 1 \leq [f(v)] \leq f(v)$, поэтому радиус сходимости ряда $\sum_{f(v) \geq 2} x^{[f(v)]}$, а значит, и правой части неравенства (3.2) есть $R_{f,V}$. В силу (3.2) имеем $R(D_{f,V}) \geq R_{f,V}$. Следовательно, $R(D_{f,V}) = R_{f,V}$.

Так как $f(v) \rightarrow \infty$, найдется $v_0 \in V$ такое, что члены ряда $D_{f,V}(x)$, отвечающие номерам $v > v_0$, являются монотонно возрастающими функциями от x . Это позволяет утверждать, что для любого $x_0 \in (0, R_{f,V})$ ряд $\sum_{v \in V} f(v)x^{f(v)-1}$ сходится равномерно на полуинтервале $(0, x_0]$. Учитывая непрерывную дифференцируемость членов ряда $F_{f,V}(x)$ при $x > 0$ и применяя теорему о дифференцировании функционального ряда, получаем, что $F_{f,V}(x) \in C^1(0, x_0]$. Произвольность выбора $x_0 \in (0, R_{f,V})$ обеспечивает непрерывную дифференцируемость ряда $F_{f,V}(x)$ на всем интервале $(0, R_{f,V})$.

Пусть $(Y(G_0), T)$ – заданная ТСБ и T_f – поток, фигурирующий в условии теоремы. Из формулы (2.20) следует, что $h(T_f) < \infty$ тогда и только тогда, когда $r_{G_0, f, w} > 0$. Согласно предложению 1 ряд $\varphi_{G_0, f, w}(x)$, $w \in V$, сходится при тех и только тех $x \geq 0$, для которых имеет место неравенство $F_{f,V}(x) - x^{f(w)} < 1$. Так как $R_{f,V} > 0$ и $F_{f,V} \in C[0, R_{f,V})$, причем $F_{f,V}(0) = 0$, то найдется такое $\rho > 0$, что $F_{f,V}(\rho) - \rho^{f(w)} < 1$. Тем самым, $\varphi_{G_0, f, w}(x)$ сходится в точке ρ и $r_{G_0, f, w} > 0$. Откуда $h(T_f) < \infty$.

Если $(Y(G), T)$ – локальное возмущение ТСБ $(Y(G_0), T)$, то во избежание путаницы обозначим через $T_{f,G}$ специальный поток, построенный по $(Y(G), T)$ и f . Очевидно, $Y_f(G) \subset Y_f(G_0)$. Поэтому $h(T_{f,G}) \leq h(T_f) < \infty$.

Докажем существование меры с максимальной энтропией для T_f . Так как $F_{f,V}(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow R_{f,V} - 0$, то из (2.1) видно, что радиус сходимости $r_{G_0, f, w}$ ряда $\varphi_{G_0, f, w}(x)$ удовлетворяет равенству

$$F_{f,V}(r_{G_0, f, w}) - (r_{G_0, f, w})^{f(w)} = 1,$$

а значит, $\varphi_{G_0,f,w}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow r_{G_0,f,w} - 0$. На интервале $(0, r_{G_0,f,w})$ функция $\varphi_{G_0,f,w}(x)$ монотонно возрастает и непрерывно дифференцируема (в силу (2.1) и того, что $F_{f,V}(x) \in C^1(0, R_{f,V})$). Тогда существует единственное решение $\hat{x} \in (0, r_{G_0,f,w})$ уравнения

$$\varphi_{G_0,f,w}(x) = 1.$$

Из (2.20) находим, что $h(T_f) = -\ln \hat{x}$. По той же причине $\varphi_{G_0,f,w}(e^{-h(T_f)}) = 1$ и $\frac{d}{dx}\varphi_{G_0,f,w}|_{x=\hat{x}} < \infty$. Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\sum_{\gamma \in C(G;w)} f^*(\gamma) e^{-h(T_f) f^*(\gamma)} < \infty.$$

Таким образом, выполнены условия (1), (2) и для потока T_f существует (единственная) мера с максимальной энтропией.

Пусть теперь $(Y(G), T)$ – произвольное локальное возмущение ТСБ и $T_{f,G}$ – соответствующий поток. Как следует из теоремы 1, ряд $\varphi_{G,f,w}(x)$, $w \in \tilde{V}_G$, сходится при тех и только тех $x \geq 0$, для которых имеет место неравенство

$$F_{f,V}(x) + \alpha_{V(\tilde{G}_w),f,w}(x) < 1 + \sum_{v \in \tilde{V}_G} x^{f(v)}.$$

Обозначим через $R_{\alpha,w}$ радиус сходимости ряда $\alpha_{V(\tilde{G}_w),f,w}$. Если граф $\tilde{G}_w$ пуст, то все $\beta_{v'v''}^{\tilde{G}_w}(x) \equiv 0$. В случае, когда $\tilde{G}_w$ непуст и связан, из формулы (2.18) нетрудно увидеть, что у производящих функций $\beta_{v'v''}^{\tilde{G}_w}(x)$, $v', v'' \in V(\tilde{G}_w)$, общий радиус сходимости $R(B^{\tilde{G}_w}) > 0$, он равняется тому значению $x' > 0$, при котором максимальное собственное значение матрицы $B^{\tilde{G}_w}(x')$ есть в точности 1 (здесь мы воспользовались тем известным фактом, что если неотрицательная матрица неразложима, то ее максимальное собственное значение строго больше максимального собственного значения всякой ее собственной подматрицы). Тогда для всех $v', v'' \in V(\tilde{G}_w)$

$$\beta_{v'v''}^{\tilde{G}_w}(x) \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow R(B^{\tilde{G}_w}) - 0.$$

Отсюда, учитывая определение функции $\alpha_{V(\tilde{G}_w),f,w}(x)$ (см. §2) и принимая во внимание, что по предположению $F_{f,V}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow R_{f,V} - 0$, заключаем, что $F_{f,V}(x) + \alpha_{V(\tilde{G}_w),f,w}(x) \rightarrow \infty$, когда x стремится слева к величине $\min\{R_{f,V}, R_{\alpha,w}\}$, и, значит, радиус сходимости $r_{G,f,w} > 0$ есть единственное решение уравнения

$$F_{f,V}(x) + \alpha_{V(\tilde{G}_w),f,w}(x) = 1 + \sum_{v \in \tilde{V}_G} x^{f(v)}.$$

Последнее утверждение остается верным и в случае, когда граф $\tilde{G}_w$ не является связным. Действительно, множество тех вершин графа $\tilde{G}_w$, через которые проходит хотя бы один цикл, можно разбить на попарно непересекающиеся связные (относительно $\tilde{G}_w$) компоненты $\tilde{V}_{w,j}$. Подграфы графа $\tilde{G}_w$, порожденные этими компонентами, обозначим через $\tilde{\Lambda}_{w,j}$. Теперь достаточно заметить, что для всех

$v', v'' \in V(\tilde{G}_w)$ функцию $\beta_{v'v''}^{\tilde{G}_w}(x)$ можно представить в виде полинома (с натуральными коэффициентами) от переменных $\beta_{u'u''}^{\tilde{\Lambda}_{w,j}}(x)$, где $u', u'' \in \tilde{V}_{w,j}$ (здесь j пробегает номера связанных компонент), и переменных типа $x^{f(v)}$, $v \in V(\tilde{G}_w)$. Тем самым, с учетом показанного выше каждый ряд $\beta_{v'v''}^{\tilde{G}_w}(x)$ расходится в точке своего радиуса сходимости.

Таким образом, поскольку $F_{f,V}(x) \in C^1(0, R_{f,V})$, $\beta_{v'v''}^{\tilde{G}_w}(x) \in C^1(0, R_{\alpha,w})$, используя формулу (2.3), заключаем, что $\varphi_{G,f,w}(x)$ обладает следующими свойствами: она монотонно возрастает на $(0, r_{G,f,w})$, принадлежит классу $C^1(0, r_{G,f,w})$, $\varphi_{G,f,w}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow r_{G,f,w} - 0$ и существует единственное решение $\hat{x} > 0$ уравнения $\varphi_{G,f,w}(x) = 1$. Тогда $h(T_{f,G}) = -\ln \hat{x}$, выполнено условие (1) и $\frac{d}{dx}\varphi_{G,f,w}(x)|_{x=\hat{x}} < \infty$, что гарантирует (2). Поэтому для потока $T_{f,G}$ существует (единственная) мера с максимальной энтропией. Следовательно, ii) влечет i).

2. Докажем обратную импликацию. Пусть $h(T_f) < \infty$ и для любого локального возмущения $(Y(G), T)$ ТСБ $(Y(G_0), T)$ существует мера с максимальной энтропией относительно потока $T_{f,G}$. Поскольку $h(T_f) < \infty$, то в силу (2.20) радиус сходимости ряда $\varphi_{G,f,w}(x)$, $w \in V$, больше нуля. Отсюда согласно теореме 1 получаем, что $F_{f,V}(x)$ также имеет ненулевой радиус сходимости, т.е. $R_{f,V} > 0$.

Покажем теперь, что $F_{f,V}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow R_{f,V} - 0$. Предположим противное. Пусть ряд $F_{f,V}(x)$ сходится в точке $x = R_{f,V}$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow R_{f,V} - 0} F_{f,V}(x) = \rho < \infty.$$

Без ограничения общности можно считать, что $V = \mathbb{N}$. Для любых $N \geq 1$, $M \geq 1$ определим ориентированный граф $G_{N,M}$ с множеством вершин V , отвечающий локальному возмущению $(Y(G_{N,M}), T)$ ТСБ $(Y(G_0), T)$, взяв в качестве множества возмущенных вершин $\tilde{V}_{G_{N,M}} = \{1, 2, \dots, N\}$ и для каждого $v \in \tilde{V}_{G_{N,M}}$ положив

$$A_{G_{N,M},v} = \{1, 2, \dots, M\}.$$

Зафиксируем вершину $w = 1$ и подсчитаем производящую функцию $\varphi_{G_{N,M},f,1}(x)$. Непосредственно применяя формулу (2.3) к графу $G_{N,M}$, находим

$$\begin{aligned} & \varphi_{G_{N,M},f,1}(x) \\ &= \frac{x^{f(1)}(F_{f,V}(x) - \sum_{v=1}^M x^{f(v)})}{1 - (F_{f,V}(x) - \sum_{v'=1}^N x^{f(v')}) - (\sum_{v'=2}^N x^{f(v')})(F_{f,V}(x) - \sum_{v=1}^M x^{f(v)})}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Поскольку $F_{f,V}(R_{f,V}) = \rho < \infty$, то

$$\begin{aligned} F_{f,V}(R_{f,V}) - \sum_{v=1}^l (R_{f,V})^{f(v)} &\rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty, \\ \sum_{v'=2}^N (R_{f,V})^{f(v')} &\rightarrow \rho - (R_{f,V})^{f(1)} < \infty, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.3) следует, что при всех достаточно больших N и M радиус сходимости производящей функции $\varphi_{G_{N,M},f,1}(x)$ совпадает с радиусом сходимости $R_{f,V}$ ряда $F_{f,V}(x)$ и

$$\varphi_{G_{N,M},f,1}(R_{f,V}) \rightarrow 0 \quad \text{при } N, M \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

В силу (3.4) найдутся такие $\widehat{N}, \widehat{M}$, что

$$\varphi_{G_{\widehat{N},\widehat{M}},f,1}(R_{f,V}) < 1.$$

Поэтому для локального возмущения $(Y(G_{\widehat{N},\widehat{M}}), T)$ ТСБ $(Y(G_0), T)$ и функции f имеем

$$\sum_{\gamma \in C(G_{\widehat{N},\widehat{M}}; 1)} e^{-h(T_{f,G_{\widehat{N},\widehat{M}}})f^*(\gamma)} < 1,$$

т.е. соотношение (1) не выполнено и, значит, для специального потока $T_{f,G_{\widehat{N},\widehat{M}}}$, построенного по $(Y(G_{\widehat{N},\widehat{M}}), T)$ и f , не существует меры с максимальной энтропией, что противоречит условию i) теоремы. Таким образом, из i) вытекает, что $F_{f,V}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow R_{f,V} - 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Нетрудно показать, что если помимо локальных возмущений базы потока допускать также локальное изменение функции $f = f(v)$, т.е. на произвольном конечном множестве вершин $V' \subset V$ в качестве значений функции $f(v')$, $v' \in V'$, брать произвольные положительные числа, то теорема 2 останется верной.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Возвращаясь к доказательству теоремы 2, отметим, что если $R_{f,V} > 0$ и $F_{f,V}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow R_{f,V} - 0$, то для специального потока $T_{f,G}$, построенного по произвольному локальному возмущению $(Y(G), T)$ ТСБ $(Y(G_0), T)$ и функции f , топологическая энтропия $h(T_{f,G}) = -\ln \widehat{x}$, где $\widehat{x}$ – единственное решение уравнения

$$\varphi_{G,f,w}(x) = 1, \quad w \in V.$$

§ 4. Меры с максимальной энтропией

В этом разделе рассмотрим вопрос о структуре мер с максимальной энтропией относительно специальных потоков, построенных по локальным возмущениям ТСБ и положительным функциям $f = f(y_0)$.

Начнем с некоторых общих понятий. Пусть G – ориентированный связный граф, $(Y(G), T)$ – топологическая цепь Маркова и f – положительная непрерывная функция на $Y(G)$, удовлетворяющая условию (1.1). Зададим специальный поток T_f , построенный по $(Y(G), T)$ и f . Напомним, что в определении топологической энтропии $h(T_f)$ потока T_f (см. (1.2)) берется верхняя грань $h(T_f, \nu)$ по множеству $\mathcal{P}(Y_f(G))$ всех инвариантных эргодических относительно T_f вероятностных мер ν на $Y_f(G)$. Обозначим через $\mathcal{M}_f(Y(G))$ множество всех инвариантных эргодических относительно T мер μ на $Y(G)$ (не обязательно конечных) с $\int f d\mu < \infty$. Для $\mu \in \mathcal{M}_f(Y(G))$ положим

$$\mu_f = \frac{(\mu \times m)|_{Y_f(G)}}{\int f d\mu},$$

где m – мера Лебега на действительной прямой $\mathbb{R}$, а $(\mu \times m)|_{Y_f(G)}$ означает ограничение меры $\mu \times m$ на множество $Y_f(G)$. Несложно проверить, что $\mu_f \in \mathcal{P}(Y_f(G))$. С другой стороны, всякой мере $\nu \in \mathcal{P}(Y_f(G))$ соответствует единственная (с точностью до постоянного множителя) мера $\mu \in \mathcal{M}_f(Y(G))$ такая, что $\nu = \mu_f$. Поэтому $\mathcal{P}(Y_f(G)) = \{\mu_f : \mu \in \mathcal{M}_f(Y(G))\}$. Пусть $\mathcal{P}_f(Y(G))$ – множество тех мер $\mu \in \mathcal{M}_f(Y(G))$, которые являются вероятностными. Заметим, что в случае, когда функция f отделена от нуля, т.е. $\inf\{f(y) : y \in Y(G)\} > 0$, любая мера $\nu \in \mathcal{P}(Y_f(G))$ имеет вид μ_f , где $\mu \in \mathcal{P}_f(Y(G))$.

Топологическая энтропия и меры с максимальной энтропией для потока T_f тесно связаны с вариационной задачей для функционала давления, отвечающего функции f и множеству $Y(G)$, и возникающими в этой задаче равновесными мерами. Напомним соответствующие определения.

По заданной функции f определим функционал давления по формуле

$$P(Y(G); f, \mu) = h(T, \mu) - \int_{Y(G)} f d\mu, \quad \mu \in \mathcal{P}_f(Y(G)).$$

Положим

$$\begin{aligned} P(Y(G); f) &= \sup\{P(Y(G); f, \mu) : \mu \in \mathcal{P}_f(Y(G))\}, \\ \mathcal{P}_{\max}(Y(G); f) &= \{\mu \in \mathcal{P}_f(Y(G)) : P(Y(G); f, \mu) = P(Y(G); f)\}. \end{aligned}$$

Величина $P(Y(G); f)$ называется *топологическим давлением*, а множество $\mathcal{P}_{\max}(Y(G); f)$ – *множеством равновесных мер*. Если топологическая энтропия преобразования T на множестве $Y(G)$ конечна, т.е. $\sup_{\mu} h(T, \mu) < \infty$ (см. [6]), где верхняя грань берется по множеству всех T -инвариантных вероятностных борелевских мер μ на $Y(G)$, а функция f отделена от нуля, то $h = h(T_f)$ является единственным решением уравнения $P(Y(G); hf) = 0$. При этом $\mathcal{P}_{\max}(Y_f(G)) = \{\mu_f : \mu \in \mathcal{P}_{\max}(Y(G); h(T_f)f)\}$ (см. [7; предложение 6.1]). В общем случае приведенные выше утверждения могут не выполняться.

Пусть теперь G – ориентированный связный граф со счетным множеством вершин $V = V(G)$ и f – положительная функция класса $\mathcal{F}^0(Y(G))$. Введем некоторые обозначения. Для неотрицательной бесконечной матрицы $A = (a_{vv'})$, $v, v' \in V$, и пути $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, $n \geq 1$, в графе G естественным образом определяется вес $\omega_A(\gamma)$ этого пути:

$$\omega_A(\gamma) = \prod_{i=0}^{n-1} a_{v_i v_{i+1}}.$$

Пусть

$$Q_{A,w}^0(z) = \sum_{\gamma \in C(G;w)} \omega_A(\gamma) z^{l(\gamma)}, \quad w \in V.$$

Определим матрицу $A_f^G = (a_{vv'}^f)_{v,v' \in V}$ по правилу

$$a_{vv'}^f = \begin{cases} e^{-f(v)}, & \text{если } (v, v') \in E(G), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предположим, что $h(T_f) < \infty$ и существует (единственная) мера с максимальной энтропией для потока T_f . Тогда из условия (1) (см. конец §2) находим, что

$Q_{A_{h(T_f)f},w}^0(1) = 1$. Но известно, что если $Q_{A_f,w}^0(\hat{z}) = 1$ (в случае, когда такое $\hat{z}$ существует, оно единственно), то $P(Y(G); f) = -\ln \hat{z}$ (см. [4]). Поэтому условие (1) гарантирует справедливость равенства $P(Y(G); h(T_f)f) = 0$. Используя вычисления из работ [1] и [8], нетрудно проверить, что мера μ , для которой $\mu_f \in \mathcal{P}_{\max}(Y_f(G))$, является стационарной марковской мерой (ее переходные вероятности см. в [8; формулы (3.30) и (3.35)]). Если производная ряда $Q_{A_{h(T_f)f},w}^0(z)$ в той точке, где этот ряд обращается в 1 (т.е. в $z = 1$), конечна:

$$\frac{d}{dz} Q_{A_{h(T_f)f},w}^0(z) \Big|_{z=1-0} = \sum_{\gamma \in C(G;w)} l(\gamma) e^{-h(T_f)f^*(\gamma)} < \infty, \quad (4.1)$$

то матрица $A_{h(T_f)f}^G$ является положительно-возвратной и мера μ с точностью до множителя представляет собой единственный элемент множества $\mathcal{P}_{\max}(Y(G); h(T_f)f)$, т.е. мера с максимальной энтропией для потока T_f порождается равновесной мерой для функции $h(T_f)f$. В противном случае матрица $A_{h(T_f)f}^G$ является нуль-возвратной и $\mathcal{P}_{\max}(Y(G); h(T_f)f) = \emptyset$ (подробно о классификации бесконечных неотрицательных матриц см. в [4]).

Вернемся к топологической схеме Бернулли и ее локальным возмущениям. Для выяснения структуры мер с максимальной энтропией нам понадобится следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(Y(G_0), T)$ – ТСБ со счетным множеством вершин V и $(Y(G), T)$ – какое-либо ее локальное возмущение. Предположим, что задана функция $f \in \mathcal{F}^0(Y(G_0))$ и $\sum_{v \in V} e^{-f(v)} < \infty$. Тогда производящие функции $Q_{A_f^{G_0},w}^0(z)$ и $Q_{A_f^G,w}^0(z)$, $w \in V$, являются рациональными функциями от z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать производящие функции только при $z \geq 0$. Сначала подсчитаем $Q_{A_f^{G_0},w}^0(z)$. Заметим, что $\omega_{A_f^{G_0}}(\gamma) = e^{-f^*(\gamma)}$ для всякого пути γ в графе G_0 . Поэтому

$$Q_{A_f^{G_0},w}^0(z) = \sum_{\gamma \in C(G_0;w)} e^{-f^*(\gamma)} z^{l(\gamma)}.$$

При $h \in \mathbb{R}$ рассмотрим функцию $f + h \in \mathcal{F}^0(Y(G_0))$, определяемую по правилу: $(f + h)(v) = f(v) + h$, $v \in V$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_{A_f^{G_0},w}^0(z) \Big|_{z=e^{-h}} &= \sum_{\gamma \in C(G_0;w)} e^{-f^*(\gamma)-hl(\gamma)} = \sum_{\gamma \in C(G_0;w)} \left(\frac{1}{e}\right)^{(f+h)^*(\gamma)} \\ &= \varphi_{G_0,f+h,w}(e^{-1}) = \frac{(e^{-1})^{f(w)+h}}{1 + (e^{-1})^{f(w)+h} - F_{f+h,V}(e^{-1})} \\ &= \frac{e^{-f(w)}e^{-h}}{1 + e^{-f(w)}e^{-h} - e^{-h} \sum_{v \in V} e^{-f(v)}} \Big|_{e^{-h}=z} \\ &= \frac{e^{-f(w)}z}{1 + e^{-f(w)}z - z \sum_{v \in V} e^{-f(v)}}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались формулой (2.1). Тем самым функция $Q_{A_f^{G_0}, w}^0(z)$ рациональна.

Аналогично для всякого пути γ в графе G имеем $\omega_{A_f^G}(\gamma) = e^{-f^*(\gamma)}$ и

$$Q_{A_f^G, w}^0(z) \Big|_{z=e^{-h}} = \varphi_{G, f+h, w}(e^{-1}). \quad (4.2)$$

Согласно следствию 1 $\varphi_{G, f, w}(x)$ является рациональной функцией от переменных $F_{f, V}(x)$ и $\{x^{f(v)}\}$, $v \in \tilde{V}_G \cup \{w\} \cup \bigcup_{v' \in \tilde{V}_G} A_{G, v'}$, причем коэффициенты этой функции не зависят от f и определяются только структурой графа $\tilde{G}$, порожденного возмущенными вершинами. Поскольку

$$\begin{aligned} F_{f+h, V}(e^{-1}) &= \sum_{v \in V} e^{-f(v)-h} = e^{-h} \sum_{v \in V} e^{-f(v)} \Big|_{e^{-h}=z} = z \sum_{v \in V} e^{-f(v)}, \\ x^{f(v)+h} \Big|_{x=e^{-1}} &= e^{-f(v)} e^{-h} \Big|_{e^{-h}=z} = e^{-f(v)} z, \end{aligned}$$

производящая функция $Q_{A_f^G, w}^0(z)$ является рациональной функцией от z . Предложение доказано.

Сделанные ранее замечания и предложение 2 позволяют получить

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $(Y(G_0), T)$ – топологическая схема Бернулли со счетным множеством вершин V . Предположим, что f – положительная функция класса $\mathcal{F}^0(Y(G_0))$, причем $R_{f, V} > 0$ и $F_{f, V}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow R_{f, V} - 0$. Пусть специальный поток T_f построен по $(Y(G_0), T)$ или произвольному локальному возмущению $(Y(G), T)$ этой ТСБ и по функции f . Тогда

1) топологическая энтропия $h(T_f)$ является единственным решением уравнения $P(Y(G); hf) = 0$ относительно переменной $h \in \mathbb{R}$;

2) мера с максимальной энтропией $\nu_{\max}$ для потока T_f имеет вид $\nu_{\max} = (\mu_{\max})_f$, где $\mu_{\max}$ – единственная равновесная мера на множестве $Y(G)$, отвечающая функции $h(T_f)f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(Y(G), T)$ – локальное возмущение $(Y(G_0), T)$, T_f – соответствующий поток. По теореме 2 существует (единственная) мера $\nu_{\max}$ с максимальной энтропией относительно T_f . Условие $R_{f, V} > 0$ гарантирует, что $f(v) \rightarrow +\infty$ при $v \rightarrow \infty$, а значит, f отделена от нуля. В силу формулы Абрамова [9] для каждой меры $\mu \in \mathcal{P}_f(Y(G))$

$$h(T_f, \mu_f) = \frac{h(T, \mu)}{\int f d\mu}.$$

Отсюда, учитывая отделенность f от нуля ($f \geq \text{const} = c > 0$) и (1.2), получаем

$$h(T_f) = \sup \left\{ \frac{h(T, \mu)}{\int f d\mu} : \mu \in \mathcal{P}_f(Y(G)) \right\}. \quad (4.3)$$

Положим $P(h) = P(Y(G); hf)$, $h \geq 0$. Как уже отмечалось ранее, из (1) следует, что $P(h(T_f)) = 0$. Покажем, что $h = h(T_f)$ – единственная точка, в которой $P(h)$

обращается в нуль. Действительно, пусть найдется точка $h' > h(T_f)$ такая, что $P(h') = 0$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует мера $\mu^\varepsilon \in \mathcal{P}_f(Y(G))$ такая, что

$$\frac{h(T, \mu^\varepsilon)}{\int f d\mu^\varepsilon} > h' - \frac{\varepsilon}{\int f d\mu^\varepsilon} > h' - \frac{\varepsilon}{c}.$$

Поэтому при достаточно малом ε имеем $h(T, \mu^\varepsilon) / \int f d\mu^\varepsilon > h(T_f)$, что противоречит равенству (4.3). С другой стороны, пусть $P(h'') = 0$, где $h'' < h(T_f)$. Тогда для любой меры $\mu \in \mathcal{P}_f(Y(G))$

$$\frac{h(T, \mu)}{\int f d\mu} \leq h'' < h(T_f),$$

что снова противоречит соотношению (4.3) для $h(T_f)$. Тем самым п. 1) доказан.

Для доказательства п. 2) покажем, что матрица $A_{h(T_f)f}^G$ положительно-возвратна. Пусть r – радиус сходимости ряда $Q_{A_{h(T_f)f}, w}^0(z)$. Поскольку $Q_{A_{h(T_f)f}, w}^0(1) = 1 < \infty$, то, во-первых, $r \geq 1$, во-вторых, положив в формуле (4.2) $h = 0$ и подставив туда вместо f функцию $h(T_f)f$, в силу теоремы 1 получим, что $\sum_{v \in V} e^{-h(T_f)f(v)} < \infty$. Согласно предложению 2 сумма ряда с неотрицательными коэффициентами $Q_{A_{h(T_f)f}, w}^0(z)$ является рациональной функцией и, следовательно, $Q_{A_{h(T_f)f}, w}^0(z) \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow r - 0$. Таким образом, $r > 1$, а потому $\frac{d}{dz} Q_{A_{h(T_f)f}, w}^0(z)|_{z=1} < \infty$. Тем самым, матрица $A_{h(T_f)f}^G$ положительно-возвратна, а значит, существует (единственная) равновесная мера $\mu_{\max} \in \mathcal{P}_{\max}(Y(G); h(T_f)f)$ и $\nu_{\max} = (\mu_{\max})_f$.

Случай ТСБ разбирается аналогично. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из последнего доказательства легко видеть, что в условиях предложения 3 $Q_{A_{h(T_f)f}, w}^0(r) = \infty > 1$, а поэтому матрица $A_{h(T_f)f}^G$ является не только положительно-возвратной, но и устойчиво-возвратной [4].

В заключение рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 1. Пусть $V = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$. В качестве множества удаленных ребер возьмем

$$D = \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}.$$

Рассмотрим граф G с множеством вершин $V(G) = V$ и множеством ребер $E(G) = V \times V \setminus D$. Тогда $(Y(G), T)$ – локальное возмущение ТСБ со счетным множеством состояний.

Объясним вкратце происхождение такого графа G . В работе [2] рассматриваются два способа кодирования замкнутых геодезических на модулярных поверхностях, ассоциированных с классами сопряженности гиперболических матриц в $SL(2, \mathbb{Z})$: геометрическое кодирование относительно заданной фундаментальной

области, что является общей конструкцией для конечно-порожденных фуксовых групп, и арифметическое кодирование, связанное с группой $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ и задаваемое “—” непрерывными дробями. Каждый из этих кодов можно отождествить с периодической последовательностью натуральных чисел $(n_i)_{i \geq 0}$, $n_i \geq 2$, рассматриваемой с точностью до сдвига. В [2] дается полное описание всех замкнутых геодезических, для которых оба кода совпадают. А именно арифметический и геометрический коды геодезической задаются одной и той же последовательностью $(n_i)_{i \geq 0}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i+1}} \leq \frac{1}{2} \quad \forall i \geq 0. \quad (4.4)$$

Но нетрудно проверить, что условие (4.4) равносильно тому, что $n_i \geq 3$ и $(n_i, n_{i+1}) \notin D$, т.е. соответствующие коды являются односторонне-бесконечными путями в определенном выше графе G .

Пусть $f(y) = 2 \ln y$, $y \in Y(G)$, и T_f — специальный поток, построенный по $(Y(G), T)$ и f . Выпишем функцию $F_{f,V}(x)$. Имеем

$$F_{f,V}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} x^{2 \ln n} = \sum_{n=3}^{\infty} n^{2 \ln x},$$

откуда видно, что $F_{f,V}(x)$ связана с дзета-функцией Римана $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ по формуле

$$F_{f,V}(x) = \zeta(-2 \ln x) - 1 - 4^{\ln x}.$$

Таким образом, радиус сходимости $R_{f,V} = 1/\sqrt{e} > 0$, и поскольку дзета-функция в точке $s = 1$ имеет простой полюс, то $F_{f,V}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow R_{f,V} - 0$. Поэтому согласно теореме 2 для потока T_f существует (единственная) мера с максимальной энтропией.

Приведем уравнение для вычисления значения топологической энтропии $h(T_f)$ потока T_f . Из замечания 4 к теореме 2 имеем $h(T_f) = -\ln \hat{x}$, где $\hat{x}$ есть единственное решение на $[0, \infty)$ уравнения

$$\varphi_{G,f,w}(x) = 1.$$

Пусть, например, $w = 3$. Используя формулу (2.3), подсчитаем производящую функцию $\varphi_{G,f,3}(x)$. В нашем примере $\tilde{V}_G = \{3, 4, 5\}$, $A_{G,3} = \{3, 4, 5\}$, $A_{G,4} = A_{G,5} = \{3\}$. Граф $\tilde{G}$, порожденный возмущенными вершинами, не является связным (вершина 3 вообще изолирована в $\tilde{G}$), однако граф $\tilde{G}_3$ есть полный граф с множеством вершин $V(\tilde{G}_3) = \{4, 5\}$. Далее,

$$B^{\tilde{G}_3}(x) = \begin{pmatrix} x^{f(4)} & x^{f(4)} \\ x^{f(5)} & x^{f(5)} \end{pmatrix};$$

$$\Delta(x) = \det(I - B^{\tilde{G}_3}(x)) = 1 - x^{f(4)} - x^{f(5)};$$

$$\begin{aligned} \beta_{44}^{\tilde{G}_3}(x) &= \frac{1 - x^{f(5)}}{\Delta(x)}, & \beta_{45}^{\tilde{G}_3}(x) &= \frac{x^{f(4)}}{\Delta(x)}, \\ \beta_{54}^{\tilde{G}_3}(x) &= \frac{x^{f(5)}}{\Delta(x)}, & \beta_{55}^{\tilde{G}_3}(x) &= \frac{1 - x^{f(4)}}{\Delta(x)}. \end{aligned}$$

Так как $C(\tilde{G}, 3) = \emptyset$, то

$$\varphi_{\tilde{G},f,3}(x) \equiv 0.$$

Наконец, находим

$$\begin{aligned} F_{f,V,v}(x) &= F_{f,V}(x) - x^{f(3)} - x^{f(4)} - x^{f(5)}, \quad v = 3, 4, 5; \\ \alpha_{V(\tilde{G}_3) \cap \overline{A}_{G,3},f,3}(x) &= \sigma_{G,f,3}(x) \equiv 0 \end{aligned}$$

(в силу пустоты соответствующих множеств);

$$\alpha_{V(\tilde{G}_3),f,3}(x) = \frac{(F_{f,V}(x) - x^{f(3)} - x^{f(4)} - x^{f(5)})(x^{f(4)} + x^{f(5)})}{\Delta(x)}.$$

Подставляя полученные выше равенства в формулу (2.3), имеем

$$\varphi_{G,f,3}(x) = \frac{x^{f(3)}(F_{f,V}(x) - x^{f(3)} - x^{f(4)} - x^{f(5)})(1 - x^{f(4)} - x^{f(5)})}{1 + x^{f(3)} - F_{f,V}(x)}.$$

Откуда, учитывая, что $f(v) = 2 \ln v$, уравнение $\varphi_{G,f,3}(x) = 1$ можно преобразовать к виду

$$F_{f,V}(x) = 1 + \frac{x^{2 \ln 3}(x^{2 \ln 3} + (x^{2 \ln 4} + x^{2 \ln 5})(2 - x^{2 \ln 3} - x^{2 \ln 4} - x^{2 \ln 5}))}{1 + x^{2 \ln 3}(1 - x^{2 \ln 4} - x^{2 \ln 5})}. \quad (4.5)$$

Приблизленно решая уравнение (4.5), с точностью до двух знаков получаем $h(T_f) \approx 0.77$.

Автор выражает благодарность Б. М. Гуревичу за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

1. Савченко С. В. Специальные потоки, построенные по счетным топологическим цепям Маркова // Функц. анализ и его прилож. 1998. Т. 32. № 1. С. 40–53.
2. Katok S. Coding of closed geodesics after Gauss and Morse // Geom. Dedicata. 1996. V. 63. P. 123–145.
3. Bowen R. Topological entropy for noncompact sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 184. P. 125–136.
4. Гуревич Б. М., Савченко С. В. Термодинамический формализм для символических цепей Маркова со счетным числом состояний // УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 3–106.
5. Cvetković D. M., Doob M., Sachs H. Spectra of graphs. New York: Academic Press, 1980.
6. Гуревич Б. М. Топологическая энтропия счетной цепи Маркова // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. № 4. С. 715–718.
7. Parry W., Pollicott M. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics // Astérisque. 1990. P. 187–188.
8. Gurevich B. M. A variational characterization of one-dimensional countable state Gibbs random fields // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 1984. V. 68. P. 205–242.
9. Абрамов Л. М. Об энтропии потока // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 5. С. 873–875.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
31.10.2000