Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Сгибнев, Разложение Стоуна для матричной меры восстановления на полуоси, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 7, 97–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 03:34:15

УДК 517.962.28

М. С. Сгибнев

Разложение Стоуна для матричной меры восстановления на полуоси

Получено разложение Стоуна для матричной меры восстановления. С помощью данного разложения без труда устанавливается ряд свойств решения системы интегральных уравнений типа восстановления.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

Пусть F – распределение вероятностей на $\mathbb{R}$ такое, что $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} x F(dx) \in (0, +\infty]$ и m -кратная свертка F^{m*} при некотором $m \geq 1$ содержит ненулевую абсолютно непрерывную компоненту. Обозначим через F^{0*} атомическую меру массы 1, сосредоточенную в нуле. Стоун [1] показал, что мера восстановления $H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} F^{k*}$, порожденная распределением F , допускает разложение $H = H_1 + H_2$, где H_2 – конечная мера, а H_1 – абсолютно непрерывная мера с ограниченной непрерывной плотностью $h(x)$ такой, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1/\mu$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ (см. также [2; теорема 2.6.2]).

Рассмотрим уравнение восстановления

$$X(t) = g(t) + \int_{\mathbb{R}} X(t-y) F(dy) \stackrel{\text{def}}{=} g(t) + X * F(t),$$

где $g \in L_1(\mathbb{R})$. Асимптотические свойства решения $X(t)$ изучались в [1]–[8]. Очевидно, что $X(t) = g * H(t) + c$ – решение данного уравнения (c – произвольная постоянная). Как отмечено в [6] и показано в [2; теорема 2.6.4], разложение Стоуна $H = H_1 + H_2$ позволяет получить элегантное короткое доказательство следующей *ключевой теоремы восстановления*: если функция $g \in L_1(\mathbb{R})$ ограничена и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0$, то

$$g * H(t) \rightarrow \begin{cases} \mu^{-1} \int_{\mathbb{R}} g(x) dx, & t \rightarrow +\infty, \\ 0, & t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

В настоящей работе получен аналог разложения Стоуна для *матричной* меры восстановления на полуоси. Применение такого разложения позволяет получить

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00504).

короткое доказательство асимптотических свойств решения системы уравнений типа восстановления при более общих предположениях, чем в [9].

§ 2. Разложение Стоуна

Пусть $\mathbf{F} = (F_{ij})$ – матрица порядка $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры, сосредоточенные на $[0, \infty)$. Свертка $\mathbf{F} * \mathbf{G}$ двух таких матриц – это матрица с элементами $(\mathbf{F} * \mathbf{G})_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^n F_{il} * G_{lj}$, $i, j = 1, \dots, n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Матричной мерой восстановления* называется матрица мер

$$\mathbf{H} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{F}^{k*};$$

здесь $\mathbf{F}^{1*} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{(k+1)*} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^{k*} * \mathbf{F} = \mathbf{F} * \mathbf{F}^{k*}$, $\mathbf{F}^{0*} \stackrel{\text{def}}{=} \delta \mathbf{I}$, где δ – мера единичной массы, сосредоточенная в нуле, а $\mathbf{I}$ – единичная матрица порядка $n \times n$.

Спектральный радиус произвольной числовой матрицы $\mathbf{A}$ будем обозначать через $\rho(\mathbf{A})$. По теореме Перрона–Фробениуса [10; теорема 9.2.1] любая неотрицательная неприводимая матрица $\mathbf{A}$ имеет положительное собственное значение кратности 1, равное $\rho(\mathbf{A})$, и существуют положительные правый и левый собственные векторы, соответствующие этому собственному значению.

Нам потребуются утверждения (ii) и (iii) теоремы 2.1 из [11], которые для полноты изложения сформулируем в виде теоремы. С этой целью приведем несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [12; гл. XI, § 1]. Вещественнозначная функция $g(x)$, $x \geq 0$, называется *непосредственно интегрируемой по Риману*, если при любом $h > 0$ ряды

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(h) &\stackrel{\text{def}}{=} h \sum_{n=1}^{\infty} \min\{g(x) : x \in [(n-1)h, nh]\}, \\ \overline{\sigma}(h) &\stackrel{\text{def}}{=} h \sum_{n=1}^{\infty} \max\{g(x) : x \in [(n-1)h, nh]\} \end{aligned}$$

сходятся абсолютно и $\lim_{h \rightarrow 0} [\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)] = 0$.

Мера F называется *решетчатой* с шагом решетки λ , если она сосредоточена на множестве вида $\{b, b \pm \lambda, b \pm 2\lambda, \dots\}$ и λ – наибольшее из таких чисел. Если мера F сосредоточена на множестве вида $\{0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots\}$ и λ – наибольшее из таких чисел, то она называется *арифметической*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [13; определение 3.1]. Матрица мер $\mathbf{F}$ называется *решетчатой*, если выполнены следующие условия:

- 1) каждая мера F_{ij} решетчатая с шагом решетки λ_{ij} , каждая мера F_{ii} арифметическая с шагом решетки λ_{ii} ;
- 2) все λ_{ij} кратны некоторому числу, наибольшее из таких чисел обозначим через λ ;
- 3) если a_{ij} , a_{jk} и a_{ik} – точки роста функций распределения $F_{ij}(t) \stackrel{\text{def}}{=} F_{ij}([0, t])$, $F_{jk}(t)$ и $F_{ik}(t)$ соответственно, то $a_{ij} + a_{jk} = a_{ik} + m\lambda$.

Для произвольной вещественнозначной меры ν определим ее *преобразование Лапласа* по формуле $\hat{\nu}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{sx} \nu(dx)$ для тех значений $s \in \mathbb{C}$, при которых данный интеграл сходится абсолютно относительно полной вариации $|\nu|$ меры ν . Условимся: все операции над матрицами мер и вектор-функциями осуществляются поэлементно; например, $\int_0^\infty x \mathbf{F}(dx) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^\infty x F_{ij}(dx) \right)$, а если $\mathbf{A} = (A_{ij})$ – матрица, элементами которой являются меры, то через $\hat{\mathbf{A}}(s)$ будем обозначать матрицу, состоящую из преобразований Лапласа $\hat{A}_{ij}(s)$ элементов матрицы $\mathbf{A}$. Аналогичное соглашение относится и к неравенствам, в которых участвуют матрицы и вектор-функции. Обозначим через $\mathbf{M}(s)$ присоединенную матрицу к $\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)$. Положим $\Delta(s) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s))$.

ТЕОРЕМА 1 [11; теорема 2.1 (ii), (iii)]. Пусть $\mathbf{F}$ – нерешетчатая матрица мер такая, что для некоторых i, j мера F_{ij} не сосредоточена в нуле и $\rho[\mathbf{F}(\{0\})] < 1$.

(а) Если матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неприводима и $\rho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$, то

$$\mathbf{H}((x, x+h]) \rightarrow -\frac{h\mathbf{M}(0)}{\Delta'(0)}, \quad x \rightarrow \infty,$$

для любого $h > 0$.

(б) Если матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неприводима, существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $\rho[\hat{\mathbf{F}}(\alpha)] = 1$, и функции $e^{\alpha x} g_i(x)$ непосредственно интегрируемы по Риману, $i = 1, \dots, n$, то при $x \rightarrow \infty$

$$e^{\alpha x} \mathbf{H} * \mathbf{g}(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha x} \left(\sum_{j=1}^n \int_0^x g_j(x-y) H_{ij}(dy) \right) \rightarrow -\frac{\mathbf{M}(\alpha)}{\Delta'(\alpha)} \int_0^\infty e^{\alpha y} \mathbf{g}(y) dy;$$

здесь $\mathbf{g}(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))^T$.

Абсолютно непрерывную компоненту произвольной неотрицательной меры ν обозначим через ν_c , а ее сингулярную компоненту – через ν_s : $\nu_s = \nu - \nu_c$; таким образом, под сингулярной компонентой меры здесь понимается сумма ее *обычной сингулярной* и дискретной компонент. Если $\mathbf{G} = (G_{ij})$ – матрица, элементы которой суть неотрицательные меры, то через $\mathbf{G}_s$ будем обозначать матрицу $((G_{ij})_s)$, элементы которой – сингулярные компоненты соответствующих элементов $\mathbf{G}$.

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 2 (разложение Стоуна). Пусть $\mathbf{F}$ – матрица порядка $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры, сосредоточенные на $[0, \infty)$. Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неприводима и $\rho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\mathbf{F}(\infty)$. Наконец, допустим, что $\rho[(\mathbf{F}^{m*})_s(\infty)] < 1$ при некотором целом $m \geq 1$. Тогда матричная мера восстановления $\mathbf{H}$ допускает разложение $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$, где $\mathbf{H}_2$ – матрица конечных мер, а $\mathbf{H}_1$ – матрица

абсолютно непрерывных мер с ограниченными непрерывными плотностями $\mathbf{h}(x) = (h_{ij}(x))$ такими, что существует предел

$$\mathbf{h}(+\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbf{h}(x) = \frac{\mathbf{r} \mathbf{l}}{\mathbf{l} \int_0^\infty x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В том, что касается общего хода рассуждений, доказательство сформулированной теоремы в известной степени повторяет доказательство для одномерного случая. В то же время при рассмотрении матричного случая возникают специфические трудности, для преодоления которых потребуются дополнительные усилия. Здесь будет использована схема доказательства разложения Стоуна в одномерном случае, предложенная в [2; теорема 2.6.2].

Предположим сначала, что матрицу $\mathbf{F}$ можно представить в виде $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, где $\mathbf{F}_1 \neq \mathbf{0}$ – матрица абсолютно непрерывных мер с матрицей плотностей $\mathbf{f}(x) = (f_{ij}(x))$, где все $f_{ij}(x)$ – непрерывные функции с компактными носителями: $\text{supp } f_{ij}(x) \subset [c, d]$, $0 \leq c < d < \infty$. Спектральный радиус $\mathbf{F}_2(\infty)$ меньше единицы [14; гл. XIII, §2, лемма 2], поэтому матричная мера $\mathbf{H}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^\infty \mathbf{F}_2^{k*}$ конечна: $\mathbf{H}_2(\infty) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_2(\infty)]^{-1} < \infty$. По индукции устанавливаем

$$\mathbf{F}^{k*} = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{F}^{(k-1-j)*} * \mathbf{F}_1 * \mathbf{F}_2^{j*} + \mathbf{F}_2^{k*}, \quad k \geq 1. \quad (2)$$

Суммируя по k обе части равенства (2), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{F}^{(k-1-j)*} * \mathbf{F}_1 * \mathbf{F}_2^{j*} + \mathbf{H}_2 \\ &= \sum_{j=0}^\infty \sum_{k=j+1}^\infty \mathbf{F}^{(k-1-j)*} * \mathbf{F}_1 * \mathbf{F}_2^{j*} + \mathbf{H}_2 = \mathbf{H} * \mathbf{F}_1 * \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_2. \end{aligned}$$

Покажем, что плотности элементов матрицы $\mathbf{H}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H} * \mathbf{F}_1 * \mathbf{H}_2$ удовлетворяют (1). Поскольку элементы матрицы $\mathbf{f}(x)$ – непосредственно интегрируемые по Риману функции (см. определение 2), имеем согласно утверждению (б) теоремы 1, в котором полагаем $\alpha = 0$,

$$\mathbf{H} * \mathbf{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{l=1}^n \int_0^x f_{lj}(x-y) H_{il}(dy) \right) \rightarrow -\frac{\mathbf{M}(0)}{\Delta'(0)} \mathbf{F}_1(\infty), \quad x \rightarrow \infty,$$

причем $\mathbf{M}(0)/\Delta'(0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0}$ (нулевая матрица), если хотя бы одно из чисел

$$\int_0^\infty x F_{ij}(dx), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

бесконечно. Элементы матрицы $\mathbf{H} * \mathbf{f}(x)$ – ограниченные функции, так как значения меры $\mathbf{H}$ ограничены на конечных интервалах постоянной длины; это вытекает

из утверждения (а) теоремы 1. Кроме того, элементы $\mathbf{H} * \mathbf{f}(x)$ — непрерывные функции, ибо $\mathbf{f}(x - y)$ непрерывна по x и применима теорема о переходе к пределу под знаком интеграла: мера $\mathbf{H}$ конечна на интервале $[x - d, x - c]$, а вне его $\mathbf{f}(x - y)$ обращается в нуль. Далее, поскольку матричная мера $\mathbf{H}_2$ конечна, при $x \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \mathbf{H} * \mathbf{f}(x - y) \mathbf{H}_2(dy) \rightarrow -\frac{\mathbf{M}(0)}{\Delta'(0)} \mathbf{F}_1(\infty) \mathbf{H}_2(\infty) \\ &= -\frac{\mathbf{M}(0)}{\Delta'(0)} \mathbf{F}_1(\infty) [\mathbf{I} - \mathbf{F}_2(\infty)]^{-1} \\ &= -\frac{\mathbf{M}(0)}{\Delta'(0)} \{[\mathbf{I} - \mathbf{F}_2(\infty)] - [\mathbf{I} - \mathbf{F}(\infty)]\} [\mathbf{I} - \mathbf{F}_2(\infty)]^{-1} = -\frac{\mathbf{M}(0)}{\Delta'(0)}, \end{aligned}$$

так как $\mathbf{M}(0)[\mathbf{I} - \mathbf{F}(\infty)] = \Delta(0)\mathbf{I} = \mathbf{0}$. Это завершает доказательство теоремы на первом этапе, если воспользоваться следующей леммой.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbf{F}$ — матрица мер такая, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неприводима и ее спектральный радиус равен 1. Предположим, что все элементы матрицы $\int_0^\infty x \mathbf{F}(dx)$ конечны. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\hat{\mathbf{F}}(0)$, так, чтобы $\mathbf{l}\mathbf{r} = 1$. Тогда

$$-\frac{\mathbf{M}(0)}{\Delta'(0)} = \frac{\mathbf{r}\mathbf{l}}{\mathbf{l} \int_0^\infty x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}}. \quad (3)$$

Лемма 1 доказывается модификацией рассуждения из доказательств лемм 8 и 6 в [15], где равенство (3) установлено в частном случае примитивных стохастических матриц $\mathbf{F}$. А именно: надо воспользоваться тем, что в нашем случае $\sum_{j=0}^k \hat{\mathbf{F}}(q)^j / k \rightarrow \mathbf{r}\mathbf{l}$ при $k \rightarrow \infty$ [16; теорема 8.6.1], и заменить вектор-столбец $\mathbf{e}$ с единичными координатами на вектор $\mathbf{r}$.

Очевидно, что справедливость (3) сохранится и в том случае, если хотя бы одно из чисел $\int_0^\infty x F_{ij}(dx)$, $i, j = 1, \dots, n$, бесконечно (напомним, что в этом случае $-\mathbf{M}(0)/\Delta'(0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0}$).

Для завершения доказательства теоремы 1 в общем случае нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда найдется целое число $p \geq 1$ такое, что $\mathbf{F}^{p*} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, где $\mathbf{F}_1 \neq \mathbf{0}$ — матрица абсолютно непрерывных неотрицательных мер с непрерывными плотностями, имеющими компактные носители, а мера восстановления $\mathbf{H}_2 = \sum_{k=0}^\infty \mathbf{F}_2^{k*}$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Допустим сначала, что $\mathbf{F}(\infty)$ — примитивная матрица. Тогда $\mathbf{F}(\infty)^k \rightarrow \mathbf{r}\mathbf{l} > \mathbf{0}$ при $k \rightarrow \infty$ [16; теорема 8.5.1]. Далее, $[(\mathbf{F}^{m*})_s]^{k*}(\infty) \rightarrow \mathbf{0}$ при $k \rightarrow \infty$ [16; следствие 8.1.33]. Поэтому $(\mathbf{F}^{km*})_c(\infty) \geq \mathbf{F}(\infty)^{km} - [(\mathbf{F}^{m*})_s]^{k*}(\infty) > \mathbf{0}$ при достаточно большом k . Следовательно, $(\mathbf{F}^{km*})_c$ можно представить в виде $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$, где $\mathbf{G}_1$ — матрица абсолютно непрерывных

мер с ограниченными плотностями, обращающимися в нуль вне некоторого конечного интервала, причем $\mathbf{G}_1(\infty) > \mathbf{0}$. В результате имеем $\mathbf{F}^{p*} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, где $p = 2km$ и $\mathbf{F}_1 = \mathbf{G}_1 * \mathbf{G}_1$. Матричная мера $\mathbf{F}_1$ обладает требуемыми свойствами [17; гл. III, §16, лемма]. Далее, матрица $\mathbf{F}^{p*}(\infty)$ также примитивна [16; теорема 8.5.2], $\rho[\mathbf{F}^{p*}(\infty)] = 1$ и, следовательно, по лемме 2 из [14; гл. XIII, §2] $\rho[\mathbf{F}_2(\infty)] < 1$, откуда вытекает, что мера $\mathbf{H}_2$ конечна.

Если $\mathbf{F}(\infty)$ – импримитивная матрица с индексом импримитивности $d > 1$, то, переставляя в случае необходимости одинаково строки и столбцы матрицы $\mathbf{F}(\infty)^d$, ее можно разложить на d примитивных матриц, имеющих спектральный радиус 1. Не ограничивая общности, можно считать, что такая перестановка уже произведена ($\mathbf{F}^{(i)}(\infty)$ – примитивные матрицы):

$$\mathbf{F}(\infty)^d = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{(1)}(\infty) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{F}^{(2)}(\infty) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{F}^{(d)}(\infty) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что все блочные матрицы $\mathbf{F}^{(i)}$ суть матрицы того же типа, что и $\mathbf{F}$, а именно: найдется целое $q \geq 1$ такое, что $\rho[(\mathbf{F}^{(i)q*})_s(\infty)] < 1 \quad \forall i$. Действительно, из легко проверяемого неравенства $(\mathbf{F}^{km*})_s(\infty) \leq [(\mathbf{F}^{m*})_s]^{k*}(\infty)$ и [16; теорема 8.1.18] вытекает

$$\rho[(\mathbf{F}^{km*})_s(\infty)] \leq \rho\{[(\mathbf{F}^{m*})_s]^{k*}(\infty)\} = \{\rho[(\mathbf{F}^{m*})_s(\infty)]\}^k.$$

В силу сделанных предположений выражение, стоящее в правой части, стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Выбирая $k = ld$ достаточно большим и полагая $q = lm$, имеем

$$\rho[(\mathbf{F}^{(i)q*})_s(\infty)] \leq \rho[(\mathbf{F}^{km*})_s(\infty)] < 1, \quad i = 1, \dots, d.$$

Производя с $\mathbf{F}^{(i)}(\infty)$ уже известные действия, получаем $[\mathbf{F}^{(i)}]^{p(i)*} = \mathbf{G}_1^{(i)} + \mathbf{G}_2^{(i)}$, где $\mathbf{G}_1^{(i)}$ – матрица положительных абсолютно непрерывных мер с непрерывными плотностями, обращающимися в нуль вне некоторого конечного интервала, причем $\mathbf{G}_1^{(i)}(\infty) > \mathbf{0}$. Положим

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^d p(i), \quad q(i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p}{p(i)}, \quad \mathbf{F}_1^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{G}_1^{(i)}]^{q(i)*}.$$

Тогда $\mathbf{F}_1^{(i)}$ – матрица положительных абсолютно непрерывных мер с непрерывными плотностями, обращающимися в нуль вне некоторого конечного интервала, поскольку свертка конечного числа плотностей с такими свойствами – снова функция того же типа. Кроме того, $\mathbf{F}_1^{(i)}(\infty) > \mathbf{0}$ и матричная мера восстановления $\mathbf{H}_2^{(i)}$, порожденная матрицей мер $\mathbf{F}_2^{(i)}$, конечна. Положим $\mathbf{F}^{p*} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, где

$$\mathbf{F}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_1^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{F}_1^{(d)} \end{pmatrix}.$$

Поскольку у блочно-диагональной матрицы $\mathbf{H}_2 = \text{diag}\{\mathbf{H}_2^{(1)}, \dots, \mathbf{H}_2^{(d)}\}$ все блоки $\mathbf{H}_2^{(i)}$ – конечные меры, отсюда вытекает $\mathbf{H}_2(\infty) < \infty$. Лемма 2 доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. Положим $\mathbf{H}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{F}^{kp*}$ и $\mathbf{H}^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^{j*} * \mathbf{H}^{(0)}$, $j = 1, \dots, p-1$. Обозначим через $\mathbf{M}_p(s)$ присоединенную матрицу к $\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)^p$. Положим $\Delta_p(s) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)^p)$. Согласно уже доказанному на первом этапе $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{H}_1^{(0)} + \mathbf{H}_2^{(0)}$, где $\mathbf{H}_2^{(0)}(\infty) < \infty$, а $\mathbf{H}_1^{(0)}$ – матрица неотрицательных абсолютно непрерывных мер с ограниченными непрерывными плотностями $\mathbf{h}^{(0)}(x) = (h_{ij}^{(0)}(x))$ такими, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h_{ij}^{(0)}(x) = - \lim_{s \rightarrow 0-} \frac{\mathbf{M}_p(s)}{\Delta_p(s)/s}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Положим $\mathbf{H}_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{F}^{j*} * \mathbf{H}_i^{(0)}$, $i = 1, 2$. Тогда $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_2(\infty) < \infty$ и матричная мера $\mathbf{H}_1$ обладает требуемыми свойствами. Действительно, при $x \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{F}^{j*} * \mathbf{h}^{(0)}(x) \rightarrow - \sum_{j=0}^{p-1} \widehat{\mathbf{F}}(0)^j \lim_{s \rightarrow 0-} \frac{\mathbf{M}_p(s)}{\Delta_p(s)/s} \\ &= - \lim_{s \rightarrow 0-} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\widehat{\mathbf{F}}(s)^j \mathbf{M}_p(s)}{\Delta_p(s)/s} = - \lim_{s \rightarrow 0-} \frac{[\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)^p] \mathbf{M}_p(s)}{\Delta_p(s)/s} \\ &= - \lim_{s \rightarrow 0-} [\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} s = - \lim_{s \rightarrow 0-} \frac{\mathbf{M}(s)}{\Delta(s)/s} = - \frac{\mathbf{M}(0)}{\Delta'(0)} = \frac{\mathbf{r}\mathbf{l}}{\mathbf{l} \int_0^\infty x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

§3. Система интегральных уравнений

Рассмотрим систему интегральных уравнений типа восстановления

$$Z_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^n \int_0^x Z_j(x-u) F_{ij}(du), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где $g_i \in L_1(0, \infty)$, $i = 1, \dots, n$, а $\mathbf{F} = (F_{ij})$ – матрица неотрицательных конечных мер, сосредоточенных на $[0, \infty)$. В матричной форме система (4) принимает вид $\mathbf{Z}(x) = \mathbf{g}(x) + \mathbf{F} * \mathbf{Z}(x)$, где элемент $(\mathbf{F} * \mathbf{Z}(x))_i$ по определению равен сумме в правой части (4). Пусть матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неприводима и $\rho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Обозначим $M_l \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L_\infty(0, \infty) : \exists f(+\infty)\}$, $M_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in M_l : f(+\infty) = 0\}$, $C_l \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in C(0, \infty) : \exists f(+\infty)\}$, $C_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in C_l : f(+\infty) = 0\}$. Предел $f(+\infty)$ в M_l понимается в следующем смысле: в классе эквивалентных функций найдется представитель $\tilde{f}$ такой, что существует обычный предел $\tilde{f}(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x)$ и $f(+\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(+\infty)$.

Система уравнений (4) рассматривалась в [9], где предполагалось, что все меры F_{ij} абсолютно непрерывны, т.е. $\mathbf{F}(dx) = \mathbf{f}(x) dx$, где $\mathbf{f} \in L_1(0, \infty)$. В теореме 5.1 из [9] утверждается, что при сделанных выше предположениях решение системы (4) имеет вид

$$\mathbf{Z}(x) = \frac{\mathbf{rl} \int_0^\infty \mathbf{g}(y) dy}{\mathbf{l} \int_0^\infty y \mathbf{f}(y) dy \mathbf{r}} + \rho_0(x) + \psi(x),$$

где $\rho_0 \in C_0(0, \infty)$, $\psi \in L_1(0, \infty)$; если предположить дополнительно, что $\mathbf{g} \in M_0$, то тогда и $\psi \in M_0$.

Теперь применим теорему 2 к исследованию асимптотических свойств решения системы (4), не предполагая абсолютной непрерывности элементов матрицы $\mathbf{F}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathbf{F}$ – матрица порядка $n \times n$, элементы которой суть конечные неотрицательные меры, сосредоточенные на $[0, \infty)$. Предположим, что матрица $\mathbf{F}(\infty)$ неприводима и $\rho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$. Выберем левый и правый собственные векторы $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы $\mathbf{F}(\infty)$. Допустим, что $\rho[(\mathbf{F}^{m*})_s(\infty)] < 1$ при некотором целом $m \geq 1$. Пусть $\mathbf{g} \in L_1(0, \infty)$ – вектор-функция. Тогда существует решение $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$ системы (4) такое, что $\mathbf{Z}_1 \in C_l$, $\mathbf{Z}_2 \in L_1(0, \infty)$ и

$$\mathbf{Z}_1(+\infty) = \frac{\mathbf{rl} \int_0^\infty \mathbf{g}(x) dx}{\mathbf{l} \int_0^\infty x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}}.$$

Если дополнительно предположить $\mathbf{g} \in M_0(C_0)$, то $\mathbf{Z}_2 \in M_0(C_0)$, так что $\mathbf{Z} \in M_l(C_l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать $\mathbf{g}(x) \geq 0$ п.в. Очевидно, что $\mathbf{Z}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H} * \mathbf{g}(x)$ – решение системы (4); здесь $\mathbf{H}$ – матричная мера восстановления, порожденная матрицей $\mathbf{F}$. Далее, $\mathbf{Z}(x) < \infty$ п.в. Действительно, рассмотрим конечную вектор-меру $\mathbf{G}$ с плотностью $\mathbf{g}(x)$. Тогда вектор-мера $\mathbf{H} * \mathbf{G}$ σ -конечна, поскольку (как уже отмечалось выше) $\sup_{x \geq 0} \mathbf{H}([x, x+h]) < \infty \forall h > 0$. Так как $\mathbf{Z}(x)$ – плотность вектор-меры $\mathbf{H} * \mathbf{G}$, $\mathbf{Z}(x) < \infty$ п.в.

Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ – разложение Стоуна, доставляемое теоремой 1. Положим $\mathbf{Z}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}_i * \mathbf{g}$, $i = 1, 2$. По теореме Фубини $\mathbf{Z}_2 \in L_1(0, \infty)$. Равенство для $\mathbf{Z}_1(+\infty)$ устанавливается по аналогии с одномерным случаем [2; теорема 2.6.4 (а)]. Очевидно, что $\mathbf{Z}_1 \in C(0, \infty)$. Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(x) &= \frac{\mathbf{rl}}{\mathbf{l} \int_0^\infty x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}} \int_0^x \mathbf{g}(y) dy \\ &+ \int_0^x \left[\mathbf{h}(x-y) - \frac{\mathbf{rl}}{\mathbf{l} \int_0^\infty x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x-y) \right] \mathbf{g}(y) dy \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Z}_3(x) + \mathbf{Z}_4(x); \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ — индикатор множества $(0, \infty)$. Имеем

$$\mathbf{Z}_3(x) \rightarrow \frac{\mathbf{r} \int_0^\infty \mathbf{g}(x) dx}{\mathbf{1} \int_0^\infty x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}}, \quad x \rightarrow \infty,$$

и по теореме о мажорируемой сходимости $\mathbf{Z}_4(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Допустим, что $\mathbf{g} \in M_0$. Тогда $\exists \tilde{\mathbf{g}} = (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n)^T \in M_0$ такое, что $\tilde{\mathbf{g}}(x) = \mathbf{g}(x)$ п.в., $|\tilde{g}_i(x)| \leq \|g_i\|_\infty \forall i, x$ и $\exists \tilde{\mathbf{g}}(+\infty) = 0$ в обычном смысле. Имеем

$$\mathbf{Z}_2(x) = \mathbf{H}_2 * \tilde{\mathbf{g}}(x) + \mathbf{H}_2 * [\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}}](x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Y}(x) + [\mathbf{Z}_2(x) - \mathbf{Y}(x)].$$

По теореме о мажорируемости сходимости $\exists \mathbf{Y}(+\infty) = \mathbf{H}_2(+\infty)\tilde{\mathbf{g}}(+\infty) = 0$. Таким образом, $\mathbf{Y} \in M_0$. По теореме Фубини $\int_0^\infty |(\mathbf{Z}_2(x))_i - (\mathbf{Y}(x))_i| dx = 0 \forall i$. Следовательно, $\mathbf{Z}_2(x) = \mathbf{Y}(x)$ п.в. Это означает $\mathbf{Z}_2 \in M_0$. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В множестве вектор-функций $\mathbf{f}(x)$, $x \geq 0$, для которых определено преобразование Лапласа $\hat{\mathbf{f}}(s) = \int_0^\infty e^{sx} \mathbf{f}(x) dx$ при $\operatorname{Re} s < \alpha \leq 0$, решение $\mathbf{H} * \mathbf{g}(x)$ системы (4) единственно с точностью до эквивалентности п.в. Это вытекает из очевидных равенств $\hat{\mathbf{Z}}(s) = [\mathbf{I} - \hat{\mathbf{F}}(s)]^{-1} \hat{\mathbf{g}}(s) = \hat{\mathbf{H}}(s) \hat{\mathbf{g}}(s)$.

Автор благодарит рецензента за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Список литературы

1. Stone C. On absolutely continuous components and renewal theory // Ann. Math. Stat. 1966. V. 37. P. 271–275.
2. Alsmeyer G. Erneuerungstheorie. Stuttgart: Teubner, 1991.
3. Smith W. L. Regenerative stochastic processes // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1955. V. 232. P. 6–31.
4. Smith W. L. Remarks on the paper “Regenerative stochastic processes” // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1960. V. 256. P. 296–301.
5. Schöl M. Über Lösungen einer Erneuerungsgleichung // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1971. V. 36. P. 89–98.
6. Arjas E., Nummelin E., Tweedie R. L. Uniform limit theorems for non-singular renewal and Markov renewal processes // J. Appl. Probab. 1978. V. 15. P. 112–125.
7. Енгибарян Н. Б. Уравнения восстановления на полуоси // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 1. С. 61–76.
8. Yengibarjan N. B. Renewal equation on the whole line // Stochastic Process. Appl. 2000. V. 85. P. 237–247.
9. Енгибарян Н. Б. Теоремы восстановления для системы интегральных уравнений // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 12. С. 59–72.
10. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982.
11. Crump K. S. On systems of renewal equations: the reducible case // J. Math. Anal. Appl. 1970. V. 31. P. 517–528.
12. Фаллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Наука, 1967.
13. Crump K. S. On systems of renewal equations // J. Math. Anal. Appl. 1970. V. 30. P. 425–434.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

15. *Jelenković P. R., Lazar A. A.* Subexponential asymptotics of a Markov-modulated random walk with queueing applications // J. Appl. Probab. 1998. V. 35. P. 325–347.
16. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
17. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск

Поступила в редакцию
04.10.2000