Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Сидоров, В. Р. Абдуллин, Сплетаемые уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 7, 107–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:43:58

УДК 517.988.67

Н. А. Сидоров, В. Р. Абдуллин

Сплетаемые уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений

Получены достаточные условия наследования системой разветвления свойства сплетения нелинейного уравнения. Рассмотрен случай, когда пара линейных операторов, сплетающая уравнение, состоит из проекторов или параметрических семейств линейных операторов. Приведены новые условия, позволяющие сократить число уравнений в системе разветвления и расширить область приложений метода последовательных приближений в теории ветвления решений нелинейных уравнений. Рассмотрены решения, зависящие от свободных параметров, принадлежащих определенным гиперповерхностям в евклидовых пространствах. Полученные результаты дополняют и развивают результаты о применении группового анализа в теории ветвления.

Библиография: 29 названий.

Введение

В настоящей статье изучаются зависящие от свободных параметров разветвляющиеся решения [1] нелинейных уравнений. Предполагается, что ядро линеаризованного оператора нетривиально. Если при этом уравнение инвариантно относительно непрерывной группы преобразований, то все или часть свободных параметров имеют групповой смысл [2]–[5]. Например, в случае сферической симметрии уравнения свободные параметры оказываются точками сфер в конечномерных евклидовых пространствах.

Первые результаты по применению групповой симметрии в теории ветвления [1] были получены В. И. Юдовичем [2]. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат Б. В. Логинову и В. А. Треногину [3]–[7]. Теорема Логинова–Треногина о наследовании групповой симметрии уравнением разветвления (УР) открыла эффективный путь использования классических методов группового анализа дифференциальных уравнений [8], [9] в теории бифуркации. Эти результаты, работы D. H. Sattinger [10], A. Vanderbauwhede [11], M. Golubitsky, V. L. Keyfitz, D. G. Schaeffer [12], а также работы [13], [14], использующие теорию особенностей, стимулировали большое число исследований различных авторов и нашли многочисленные приложения (см. библиографию в [5], [7], [10]–[14]). На этой основе строились асимптотики решений ряда важных задач гидродинамики, теории упругости, физики [15]–[20].

Область расположения свободных параметров необходимо знать в приложениях и при разработке приближенных методов в окрестности точки ветвления. Здесь

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант 2000-15).

стандартные методы неприменимы, и лишь удачная параметризация ветви решения может привести к успеху [18], [19]. Ряд общих результатов о явной и неявной параметризации и итерациях в окрестности точки ветвления есть в работах [21]–[23]. Однако случай параметрических решений в этом отношении изучался только в простых ситуациях сферической симметрии и далеко не достаточно. Анализ и упрощение конечномерных систем разветвления, решений исходной задачи дает ключ к решению проблемы.

В нашей работе, продолжающей исследования [21]–[24] по созданию базы алгоритмического анализа в окрестности точек ветвления решений, строится теория сплетаемых УР. Предполагаются выполненными условия сплетения уравнения линейными операторами. Однако сплетающие операторы в отличие от работ [2]–[5], [10], [11] могут быть и необратимыми. Это дает возможность рассмотреть с единой точки зрения классы разветвляющихся решений со свободными параметрами как групповой, так и негрупповой природы. Полученные результаты позволяют упростить УР и применить итерационные методы работ [21]–[23] для построения параметрических ветвей решения.

В § 1 получены достаточные условия, при выполнении которых УР наследует свойство сплетения нелинейного оператора. В § 2 рассмотрен случай, когда сплетающая пара состоит из проекторов. Показано, как в этом случае следует сокращать число уравнений в системе разветвления и строить параметрические разветвляющиеся решения. В § 3 изучен нётеров случай, когда сплетающая пара состоит из параметрических семейств линейных операторов. В § 4 изучен фредгольмов случай, строятся специальные представления семейств разветвляющихся решений, позволяющие сократить число уравнений в системе разветвления, избавиться их от свободных параметров и применить итерационный метод работы [23]. Здесь же рассмотрены сплетаемые УР потенциального типа и случай бисплетения.

§ 1. Свойство сплетения и его наследование уравнением разветвления

Пусть X, Y – вещественные банаховы пространства, Λ – нормированное пространство. Рассмотрим задачу построения малых решений $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ уравнения

$$F(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} Bx - R(x, \lambda) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $B: D \subset X \rightarrow Y$ – замкнутый нётеров оператор с плотной в X областью определения; $\dim N(B) = n \geq 1$, $\dim N(B^*) = m \geq 1$. Нелинейный оператор $R: \Omega \subset X \times \Lambda \rightarrow Y$ предполагается определенным, непрерывным и непрерывно дифференцируемым по x в смысле Фреше в окрестности нуля Ω ; причем $R(0, 0) = 0$, $R_x(0, 0) = 0$.

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – базис в $N(B)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ – базис в $N(B^*)$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$, $\{z_i\}_{i=1}^m$ – соответствующие биортогональные системы из X^* и Y . Введем проекторы

$$P = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i, \quad Q = \sum_{i=1}^m \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i,$$

порождающие прямые разложения [1]

$$X = X^n \oplus X^{\infty-n}, \quad Y = Y_m \oplus Y_{\infty-m}. \quad (1.2)$$

Положим $B^+ = \widehat{B}^{-1}(I - Q)$, где $\widehat{B}$ – сужение оператора B на $X^{\infty-n} \cap D$. Очевидно, что $B^+ \in \mathfrak{L}(Y, X^{\infty-n})$ и имеют место равенства

$$N(B^+) = Y_m, \quad BB^+ = I - Q, \quad \overline{B^+B} = I - P.$$

Ввиду равенств (1.2) и свойств оператора B^+ все решения уравнения (1.1) могут быть представлены в виде

$$x = (\xi, \varphi) + B^+y, \quad (1.3)$$

где $(\xi, \varphi) = \sum_1^n \xi_i \varphi_i$, $\xi_i \in \mathbb{R}$, $y \in Y_{\infty-m}$. Поэтому уравнение (1.1) эквивалентно системе

$$y = R((\xi, \varphi) + B^+y, \lambda), \quad (1.4)$$

$$\langle y, \psi_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.4) на основании теоремы о неявных операторах при $\xi \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ имеет единственное малое решение $y = y((\xi, \varphi), \lambda)$. Подставив это решение в (1.5), придем к системе разветвления

$$\Theta_i(\xi, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \langle y((\xi, \varphi), \lambda), \psi_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (I)$$

Если оператор B фредгольмов, то в (1.3) вместо псевдообратного оператора B^+ можно использовать оператор

$$\Gamma = \left(B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1} \in \mathfrak{L}(Y, X).$$

Отметим, что операторы B^+ и Γ связаны равенством

$$\Gamma = B^+ + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i. \quad (1.6)$$

Уравнение разветвления, полученное с помощью оператора Γ , в дальнейшем будем записывать в виде

$$L_i(\xi, \lambda) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (I')$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Если существуют линейные операторы $S \in \mathfrak{L}(X)$, $K \in \mathfrak{L}(Y)$ такие, что $PS = SP$, $QK = KQ$ и

$$BS = KB \text{ на } D, \quad R(Sx, \lambda) = KR(x, \lambda) \text{ на } \Omega,$$

то уравнение (1.1) будем называть (S, K) -сплетаемым.

В качестве операторов S , K можно рассматривать, как в [3]–[5], представления группы G в пространствах X и Y соответственно, если уравнение (1.1) инвариантно относительно группы G . С другой стороны, это могут быть и необратимые операторы. Поэтому дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Если существуют линейные операторы $S \in \mathfrak{L}(X)$, $K \in \mathfrak{L}(Y)$ такие, что $PS = SP$, $QK = KQ$ и

$$BS = KB \text{ на } D, \quad R(Sx, \lambda) = KR(Sx, \lambda) \text{ на } \Omega,$$

то уравнение (1.1) будем называть (S^2, K) -сплетаемым.

Если $S^2 = S$, то (S, K) -сплетаемое уравнение будет и (S^2, K) -сплетаемым. В определении 1.2 в качестве операторов S и K можно рассматривать, например, проекторы на подпространства

$$X^{\infty-(n-q)} \stackrel{\text{def}}{=} X \ominus \text{span}\{\varphi_{n_{q+1}}, \dots, \varphi_{n_n}\},$$

$$Y_{\infty-(m-p)} \stackrel{\text{def}}{=} Y \ominus \text{span}\{z_{m_{p+1}}, \dots, z_{m_m}\},$$

если $R: X^{\infty-(n-q)} \times \Lambda \rightarrow Y_{\infty-(m-p)}$.

Отметим, что из равенства $PS = SP$ вытекает инвариантность линейной оболочки $X^{*n} = \text{span}\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ относительно оператора S^* , а из равенства $QK = KQ$ – инвариантность дефектного подпространства $Y_m^* = N(B^*)$ относительно K^* .

Пусть действие оператора S на инвариантном подпространстве X^n определяется равенствами

$$S\varphi_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \varphi_j, \quad \mathcal{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^n, \quad (1.7)$$

а действие K^* на Y_m^* – равенствами

$$K^*\psi_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} \psi_j, \quad \mathcal{B} = [b_{ij}]_{i,j=1}^m. \quad (1.8)$$

Наряду с (1.3) будем искать решения уравнения (1.1) в виде

$$x = (\xi, S\varphi) + B^+ y_s, \quad (1.3')$$

где $y_s = y((\xi, S\varphi), \lambda)$ – единственное малое решение уравнения

$$y = R((\xi, S\varphi) + B^+ y, \lambda), \quad (1.9)$$

а параметр $\xi \in \mathbb{R}^n$ теперь ввиду равенства (1.7) определяется системой разветвления

$$\Theta_i(\mathcal{A}\xi, \lambda) = \langle y((\xi, S\varphi), \lambda), \psi_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (\text{II})$$

ЛЕММА 1.1. Если уравнение (1.1) (S, K) -сплетаемое, то $B^+K = SB^+$. Если при этом оператор B фредгольмов, то $\Gamma K = S\Gamma$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения 1.1 и свойств оператора B^+ имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} B^+K &= B^+(I - Q)K = B^+K(I - Q) = B^+KBB^+ \\ &= B^+BSB^+ = (I - P)SB^+ = S(I - P)B^+ = SB^+. \end{aligned}$$

Далее, согласно (1.6)–(1.8) имеем

$$\Gamma K - S\Gamma = \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} - a_{ij}) \langle \cdot, \psi_j \rangle \varphi_i.$$

Откуда в силу линейной независимости систем $\{\varphi_i\}_{i=1}^n, \{\psi_i\}_{i=1}^m$ равенство $\Gamma K = S\Gamma$ возможно тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть уравнение (1.1) (S, K) -сплетаемое. Тогда уравнение разветвления (I) наследует свойство сплетения, т.е.

$$\Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda) = \mathcal{B}\Theta(\xi, \lambda). \quad (1.10)$$

Если во фредгольмовом случае, кроме того, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, то уравнение разветвления (I') наследует свойство сплетения в виде

$$L(\mathcal{A}\xi, \lambda) = \mathcal{A}L(\xi, \lambda). \quad (1.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения (1.4), (1.9) имеют единственные малые решения $y = y((\xi, \varphi), \lambda)$ и $y_s = y((\xi, S\varphi), \lambda)$ соответственно. С другой стороны,

$$\begin{aligned} Ky((\xi, \varphi), \lambda) &= KR((\xi, \varphi) + B^+y((\xi, \varphi), \lambda), \lambda) \\ &= R((\xi, S\varphi) + B^+Ky((\xi, \varphi), \lambda), \lambda), \end{aligned}$$

т.е. уравнение (1.9) наряду с решением y_s имеет решение Ky . В силу единственности малого решения уравнения (1.9) они совпадают и

$$\langle y((\xi, S\varphi), \lambda), \psi_i \rangle = \langle y((\xi, \varphi), \lambda), K^*\psi_i \rangle, \quad i = \overline{1, m}.$$

Последнее равенство ввиду (1.7), (1.8) и есть (1.10).

Доказательство равенства (1.11) во фредгольмовом случае проводится аналогично и также использует лемму 1.1.

ПРИМЕР. Пусть X, Y суть прямые произведения N банаховых пространств X_i и Y_i соответственно,

$$B = (B_1, \dots, B_N)^t, \quad R = (R_1, \dots, R_N)^t.$$

Здесь $B_i: D_i \subset X_i \rightarrow Y_i$ – фредгольмовы операторы, $\dim N(B_i) = n_i, n_1 + \dots + n_N = n, R_i: \Omega \subset X \times \Lambda \rightarrow Y_i$. Пусть

$$R_i(a_1x_1, \dots, a_Nx_N, \lambda) = a_iR_i(x_1, \dots, x_N, \lambda), \quad i = \overline{1, N},$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, причем некоторые a_i могут быть равны нулю. Тогда в уравнении разветвления (I')

$$L(\xi, \lambda) = (L^1(\xi, \lambda), \dots, L^N(\xi, \lambda))^t,$$

где $L^i: \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$, и на основании теоремы 1.1 в окрестности нуля выполнены равенства

$$L^i(a_1\xi^1, \dots, a_N\xi^N, \lambda) = a_iL^i(\xi^1, \dots, \xi^N, \lambda), \quad i = \overline{1, N},$$

где $\xi^i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Если $S = I$, $K^2 = K$, то $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}$ и имеет место равенство $\Theta(\xi, \lambda) = \mathcal{B}\Theta(\xi, \lambda)$, т.е. возможна редукция УР по числу уравнений. Если $S^2 = S$, $K = I$, то $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ и имеет место равенство $\Theta(\xi, \lambda) = \Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda)$, т.е. возможна редукция УР по числу переменных.

2) Если $\det \mathcal{B} \neq 0$, то УР (I) и (II) эквивалентны. Если $\det \mathcal{A} \neq 0$, то все малые решения уравнения (1.1) представимы в виде (1.3') с условием (II).

3) Если в условиях теоремы 1.1 уравнение (1.1) инвариантно относительно группы G , а операторы S, K – ее представления в X и Y , то мы приходим к известному результату о наследовании групповой инвариантности УР [4], [5]. В частности, при $S = K = -I$ уравнение (1.1) будет нечетным по x и соответственно УР (I), (I') нечетны по ξ .

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть уравнение (1.1) (S^2, K) -сплетаемое. Тогда при любых ξ, λ из окрестности нуля вектор $\Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda)$ является неподвижной точкой матрицы $\mathcal{B}$, т.е.

$$\mathcal{B}\Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda) = \Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda). \quad (1.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность

$$y_k = R((\xi, S\varphi) + B^+y_{k-1}, \lambda), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.13)$$

где $y_0 = 0$. Последовательность (1.13) сходится к единственному малому решению y_s уравнения (1.9). Индукцией по k проверяется справедливость равенств $y_k = Ky_k$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому

$$\langle y_k, \psi \rangle = \mathcal{B}\langle y_k, \psi \rangle, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (1.14)$$

Переходя в (1.14) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем искомое тождество $\Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda) = \mathcal{B}\Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Если выполнено равенство (1.10) (равенство (1.12)), то будем говорить, что УР (I) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -сплетаемое ($(\mathcal{A}^2, \mathcal{B})$ -сплетаемое). Если же при этом $\mathcal{A}(\alpha)$, $\mathcal{B}(\alpha)$ – параметрические семейства матриц, то будем говорить, что УР (I) α -параметрически сплетаемое.

Теоремы 1.1 и 1.2 дают достаточные условия сплетаемости УР.

§ 2. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -сплетаемые и $(\mathcal{A}^2, \mathcal{B})$ -сплетаемые УР (I)

В этом параграфе рассмотрим $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -сплетаемые и $(\mathcal{A}^2, \mathcal{B})$ -сплетаемые УР (I) с вырожденной матрицей $\mathcal{B}$. Покажем, как в этом случае следует сокращать число уравнений в системе разветвления.

Пусть $\text{rank } \mathcal{B} = q < m$. Тогда размерность $N(\mathcal{B})$ равна $r = m - q$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^r$ – базис в $N(\mathcal{B}^t)$, а

$$e \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ k_1, \dots, k_r \end{pmatrix}$$

– ранговый минор матрицы $\|e_i\|_{i=1}^r$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть уравнение (I) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -сплетаемое, $\text{rank } \mathcal{B} = q$. Тогда число уравнений в системе разветвления (II) можно понизить на $r = m - q$ единиц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если пара (ξ^*, λ^*) удовлетворяет q уравнениям

$$\Theta_i(\mathcal{A}\xi, \lambda) = 0, \quad i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\}, \quad (2.1)$$

системы разветвления (II), то (ξ^*, λ^*) удовлетворяет и остальным уравнениям этой системы. В силу (1.10) имеем

$$(\Theta(\mathcal{A}\xi^*, \lambda^*), e_i) = (\Theta(\xi^*, \lambda^*), \mathcal{B}^t e_i) = 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

Перепишем последние равенства в координатной форме

$$\sum_{s \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\}} e_{is} \Theta_s(\mathcal{A}\xi^*, \lambda^*) = - \sum_{s \in \{k_1, \dots, k_r\}} e_{is} \Theta_s(\mathcal{A}\xi^*, \lambda^*), \quad i = \overline{1, r}.$$

Отсюда в силу (2.1)

$$\sum_{s \in \{k_1, \dots, k_r\}} e_{is} \Theta_s(\mathcal{A}\xi^*, \lambda^*) = 0, \quad i = \overline{1, r},$$

где $\det \|e_{is}\| \neq 0$. Следовательно, если пара (ξ^*, λ^*) удовлетворяет уравнениям (2.1), то $\Theta_s(\mathcal{A}\xi^*, \lambda^*) = 0$ и при $s \in \{k_1, \dots, k_r\}$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть УР (I) $(\mathcal{A}^2, \mathcal{B})$ -сплетаемое. Если $\text{rank } \mathcal{B} = q$, то число уравнений в системе разветвления (II) можно понизить на $r = m - q$ единиц. Если же $\text{rank}(\mathcal{B} - E) = l$ и все собственные числа матрицы $\mathcal{B} - E$ вещественные, то число уравнений можно понизить на l единиц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.12) имеют место равенства

$$(\Theta(\mathcal{A}\xi^*, \lambda^*), e_i) = (\Theta(\mathcal{A}\xi^*, \lambda^*), \mathcal{B}^t e_i) = 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

Следовательно, доказательство первого утверждения теоремы может быть проведено по схеме доказательства теоремы 2.1.

В силу $(\mathcal{A}^2, \mathcal{B})$ -сплетения справедливо тождество

$$(\mathcal{B} - E)\Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda) = 0. \quad (2.2)$$

Так как $\text{rank}(\mathcal{B} - E) = l$, то матрице $\mathcal{B} - E$ отвечает $m - l$ элементарных делителей $\lambda^{p_1}, \dots, \lambda^{p_{m-l}}$, а ее нормальная жорданова форма имеет вид

$$J = \{H^{p_1}, \dots, H^{p_{m-l}}, \lambda_{m-l+1} E^{p_{m-l+1}} + H^{p_{m-l+1}}, \dots, \lambda_s E^{p_s} + H^{p_s}\}.$$

Здесь $J = P(\mathcal{B} - E)P^{-1}$, P — матрица преобразования,

$$H^{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$\lambda_i, i = m - l + 1, \dots, s$, — отличные от нуля собственные числа матрицы $\mathcal{B} - E$.

Положим

$$\theta(\mathcal{A}\xi, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} P\Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda). \quad (2.3)$$

Тогда тождество (2.2) с помощью невырожденной матрицы P сводится к тождеству

$$J\theta(\mathcal{A}\xi, \lambda) = 0. \quad (2.4)$$

Вектор $\theta \in \mathbb{R}^m$ представим в виде $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)^t$, где $\theta_i \in \mathbb{R}^{p_i}$. При этом в силу тождества (2.4) $\theta_i = 0$ при $i = \overline{m-l+1, s}$ и любых ξ, λ , так как соответствующие $\det \|\lambda_i E^{p_i} + H^{p_i}\| \neq 0$. В силу тождества (2.4) в векторах $\theta_i, i = \overline{1, m-l}$, все координаты, кроме, быть может, первых, равны нулю при всех ξ, λ . Поэтому для того чтобы пара (ξ^*, λ^*) удовлетворяла системе (II), достаточно, чтобы первые координаты векторов $\theta_i, i = \overline{1, m-l}$, в точке (ξ^*, λ^*) обращались в нуль. Следовательно, система (II) эквивалентна системе

$$\sum_{k=1}^m P_{ik} \Theta_k(\mathcal{A}\xi, \lambda) = 0, \quad i \in \{1, p_1 + 1, \dots, p_1 + \dots + p_{m-l-1} + 1\}, \quad (2.5)$$

состоящей из $m-l$ уравнений.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть UP (I) $(\mathcal{A}^2, \mathcal{B})$ -сплетаемое. Если $\det(\mathcal{B} - E) \neq 0$, то уравнение (1.1) имеет ξ -параметрическое решение вида (1.3'), где y определяется как предел последовательности

$$y_k = R((\xi, S\varphi) + B^+ y_{k-1}, \lambda), \quad y_0 = 0.$$

Решение (1.3') уравнения (1.1) зависит от t произвольных параметров, где $t = \text{rank } \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $(\mathcal{B} - E)\Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda) = 0$ при любых ξ, λ и $\det(\mathcal{B} - E) \neq 0$, то $\Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda) = 0$ при любых ξ, λ . Следовательно, вектор ξ в решении (1.3') остается произвольным. Поэтому с учетом условия $\text{rank } \mathcal{A} = t$ в решении (1.3') будет t свободных параметров.

ПРИМЕР. Положим

$$S = I - \sum_{i=q+1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i, \quad K = I - \sum_{i=1}^m \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i.$$

Пусть в уравнении (1.1) $R: X^{\infty-(n-q)} \times \Lambda \rightarrow Y_{\infty-m}$. Тогда уравнение (1.1) (S^2, K) -сплетаемое. Здесь $\mathcal{B} = 0, \mathcal{A} = \text{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}, \text{rank } \mathcal{A} = q, \Theta(\mathcal{A}\xi, \lambda) = 0$ при любых ξ, λ , и справедлив результат следствия 2.1.

§ 3. α -параметрически сплетаемые УР (I)

Пусть уравнение (1.1) $(S(\alpha), K(\alpha))$ -сплетаемое. Тогда на основании теоремы 1.1 УР (I) α -параметрически сплетаемое, т.е. при всех $\alpha \in G$ и ξ, λ из окрестности нуля имеет место равенство

$$\Theta(\mathcal{A}(\alpha)\xi, \lambda) = \mathcal{B}(\alpha)\Theta(\xi, \lambda). \quad (3.1)$$

Здесь G – область в $\mathbb{R}^l$, содержащая нуль, $\mathcal{A}(\alpha), \mathcal{B}(\alpha)$ – параметрические семейства матриц такие, что $\mathcal{A}(0) = E, \det \mathcal{B}(\alpha) \neq 0$ при $\alpha \in G$.

Положим

$$Y_q = \text{span}\{z_{m_1}, \dots, z_{m_q}\}, \quad Y_{m-q} = \text{span}\{z_{m_{q+1}}, \dots, z_{m_m}\},$$

где $1 \leq q \leq m-1, m_1, \dots, m_m$ – перестановка первых m натуральных чисел.

Множество $o(z) = \{K(\alpha)z : \alpha \in G\}$ назовем *траекторией элемента* z из Y_m , отвечающей оператору $K(\alpha)$.

Будем говорить, что траектория $o(z)$ элемента z из Y_m *проходит подпространство* Y_q , если существует $\alpha_z \in G$ такое, что $K(\alpha_z)z \in Y_q$. Пусть $z \in Y_{m-q}$. Если существует $\alpha_z \in G$ такое, что $K(\alpha_z)z \notin Y_{m-q}$, то будем говорить, что траектория $o(z)$ *не остается* в Y_{m-q} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $K(\alpha)$ – группа линейных операторов, действующая в Y_m q -стационарно (см. определение в [3]), то траектория любого элемента z из Y_m проходит Y_q .

Положим

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_q^m &= \{c \in \mathbb{R}^m : c_{m_i} = 0, i = \overline{q+1, m}\}, \\ \mathbb{R}_{m-q}^m &= \{c \in \mathbb{R}^m : c_{m_i} = 0, i = \overline{1, q}\}. \end{aligned}$$

Множество $o(c) = \{\mathcal{B}(\alpha)c : \alpha \in G\}$ назовем *траекторией вектора* c из $\mathbb{R}^m$, отвечающей матрице $\mathcal{B}(\alpha)$. Прямой проверкой доказывается следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Траектория $o(c)$ любого вектора c из $\mathbb{R}^m$ проходит подпространство $\mathbb{R}_q^m$ тогда и только тогда, когда траектория $o(z)$ любого элемента z из Y_m проходит подпространство Y_q . Траектория любого ненулевого вектора c из $\mathbb{R}_{m-q}^m$ не остается в $\mathbb{R}_{m-q}^m$ тогда и только тогда, когда траектория любого ненулевого элемента z из Y_{m-q} не остается в Y_{m-q} .*

В матрице $\mathcal{B}(\alpha)$ выделим миноры

$$\mathcal{B}_1 \begin{pmatrix} m_{q+1}, \dots, m_m \\ 1, \dots, m \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 \begin{pmatrix} m_1, \dots, m_q \\ m_{q+1}, \dots, m_m \end{pmatrix}.$$

Соответствующие им матрицы размерностей $(m-q) \times m$ и $q \times (m-q)$ обозначим через $\mathcal{B}_1(\alpha)$ и $\mathcal{B}_2(\alpha)$. Из вида матриц $\mathcal{B}_1(\alpha), \mathcal{B}_2(\alpha)$ и невырожденности матрицы $\mathcal{B}(\alpha)$ вытекают следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Траектория любого вектора s из $\mathbb{R}^m$ проходит подпространство $\mathbb{R}_q^m$ тогда и только тогда, когда для любого вектора s из $\mathbb{R}^m$ существует $\alpha_c \in G$ такое, что $\mathcal{B}_1(\alpha_c)s = 0$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

- 1) $q \geq m/2$ и существует $\alpha_0 \in G$ такое, что $\text{rank } \mathcal{B}_2(\alpha_0) = m - q$;
- 2) $q \leq m - 2$ и хотя бы одна строка матрицы $\mathcal{B}_2(\alpha)$ состоит из линейно независимых функций;
- 3) траектория $o(c)$ любого вектора s из $\mathbb{R}^m$ проходит $\mathbb{R}_q^m$.

Тогда траектория любого ненулевого вектора s из $\mathbb{R}_{m-q}^m$ не остается в $\mathbb{R}_{m-q}^m$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть при всех $\alpha \in G$ пара (ξ^*, λ^*) удовлетворяет q уравнениям системы разветвления (II), т.е.*

$$\Theta_{m_i}(\mathcal{A}(\alpha)\xi^*, \lambda^*) \equiv 0, \quad i = \overline{1, q}. \quad (3.2)$$

Пусть, далее, траектория любого ненулевого вектора s из $\mathbb{R}_{m-q}^m$ не остается в $\mathbb{R}_{m-q}^m$. Тогда при всех $\alpha \in G$ пара (ξ^, λ^*) удовлетворяет полной системе разветвления (II).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.1) и (3.2) при всех $\alpha \in G$ имеем

$$\sum_{j=1}^m \mathcal{B}_{m_i j}(\alpha) \Theta_j(\xi^*, \lambda^*) = 0, \quad i = \overline{1, q}. \quad (3.3)$$

Так как $\mathcal{A}(0) = E$, согласно (3.3) имеем $\Theta_{m_i}(\xi^*, \lambda^*) = 0, i = \overline{1, q}$. Следовательно, $\Theta(\xi^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}_{m-q}^m$. Предположим, что $\Theta(\xi^*, \lambda^*) \neq 0$. Тогда в силу второго условия теоремы найдется $\alpha^* \in G$ такое, что хотя бы для одного $i, 1 \leq i \leq q$,

$$\sum_{j=1}^m \mathcal{B}_{m_i j}(\alpha^*) \Theta_j(\xi^*, \lambda^*) \neq 0.$$

Но в силу (3.3) это невозможно. Значит, $\Theta(\xi^*, \lambda^*) = 0$ и согласно (3.1) пара (ξ^*, λ^*) при всех $\alpha \in G$ удовлетворяет полной системе разветвления (II).

ВЫВОД. Если УР (I) α -параметрически сплетаемое и траектория любого ненулевого вектора s из $\mathbb{R}_{m-q}^m$ не остается в $\mathbb{R}_{m-q}^m$, то все малые решения уравнения (1.1) могут быть представлены в виде

$$x = (\xi, S(\alpha)\varphi) + B^+ y,$$

где $y = y((\xi, S(\alpha)\varphi), \lambda)$ – единственное малое решение уравнения

$$y = R((\xi, S(\alpha)\varphi) + B^+ y, \lambda), \quad (3.4)$$

а параметр $\xi \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет q уравнениям

$$\Theta_{m_i}(\mathcal{A}(\alpha)\xi, \lambda) = 0, \quad i = \overline{1, q}. \quad (3.5)$$

Система разветвления (3.5) содержит свободный параметр α , что затрудняет ее использование для построения соответствующих ветвей решения итерационными методами. Используя вместо (3.4) представление (4.1) искомого решения, можно избавиться от этого недостатка, свести задачу к не зависящей от свободных параметров системе разветвления и применить итерационные методы из [22], [23]. Эти вопросы рассматриваются во фредгольмовом случае в § 4.

**§ 4. α -параметрически сплетаемые УР
и представление решений во фредгольмовом случае**

Пусть уравнение (1.1) $(S(\alpha), K(\alpha))$ -сплетаемое, причем B – фредгольмов оператор и $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{B}(\alpha)$. Тогда

$$L(\mathcal{A}(\alpha)\xi, \lambda) = \mathcal{B}(\alpha)L(\xi, \lambda).$$

Будем строить искомые решения уравнения (1.1) в виде

$$x = (\mu, S(\alpha)\hat{\varphi}) + \Gamma y. \quad (4.1)$$

Здесь $y \in Y_{\infty-n}$, $\mu \in \mathbb{R}^l$, $1 \leq l \leq n-1$, $\hat{\varphi} = (\varphi_{n_0+1}, \dots, \varphi_{n_{l-1}+1})$, $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_{l-1} < n_l = n$.

Отличие представления (4.1) от (1.3) состоит в использовании псевдорезольвенты Шмидта Γ вместо псевдообратного оператора B^+ и в выборе векторов μ , $\hat{\varphi}$ в подпространствах меньшей размерности.

Так как $S(\alpha)\hat{\varphi} = t^t(\alpha)\varphi$, где $t^t(\alpha)$ – матрица размерности $l \times n$, то (4.1) можно переписать в виде

$$x = (t(\alpha)\mu, \varphi) + \Gamma y. \quad (4.2)$$

В формулах (4.1), (4.2) элемент y – единственное малое решение уравнения

$$y = R((\mu, S(\alpha)\hat{\varphi}) + \Gamma y, \lambda), \quad (4.3)$$

а параметр μ определяется из системы разветвления

$$L_i(t(\alpha)\mu, \lambda) = \langle y((\mu, S(\alpha)\hat{\varphi}), \lambda), \psi_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.4)$$

Покажем, что при соответствующем выборе $S(\alpha)$ и $\hat{\varphi}$ все малые решения уравнения (1.1) исчерпываются формулой (4.2), причем число уравнений в системе разветвления (4.4) можно понизить.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Отображение

$$(\mu, S(\alpha)\hat{\varphi}): \mathbb{R}^l \times G \rightarrow D, \quad (4.5)$$

где $D \subset X^n$, назовем G -сюръективным на D , если для любого φ из D найдутся $\alpha \in G$ и $\mu \in \mathbb{R}^l$ такие, что $(\mu, S(\alpha)\hat{\varphi}) = \varphi$.

Пусть $S(\alpha)\hat{\varphi} = ((a^1(\alpha), \varphi^1), \dots, (a^l(\alpha), \varphi^l))^t$, где

$$(a^i, \varphi^i) = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} a_j^i(\alpha)\varphi_j, \quad i = \overline{1, l}.$$

Тогда в (4.2) $t(\alpha) = \|a^1(\alpha), \dots, a^l(\alpha)\|$ – блочно-диагональная матрица размерности $n \times l$ и ввиду тождества $(\mu, S(\alpha)\hat{\varphi}) = (t(\alpha)\mu, \varphi)$ справедливо следующее свойство.

СВОЙСТВО 4.1. Отображение (4.5) G -сюръективно на X^n тогда и только тогда, когда отображение $t(\alpha)\mu: \mathbb{R}^l \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ G -сюръективно на $\mathbb{R}^n$.

В приложениях столбцы $a^i(\alpha)$ матрицы $t(\alpha)$ обычно задают параметризацию поверхности ∂ , определяемой некоторой системой $J_i(\xi^i) = 1, i = \overline{1, l}$.

ПРИМЕРЫ. 1) $X^2 = \text{span}\{\cos t, \sin t\}$, $\widehat{\varphi} = \cos t$. Пусть $S(\alpha)\widehat{\varphi} = \cos(t - \alpha)$. Тогда отображение $\mu \cos(t - \alpha)$ $\mathbb{R}$ -сюръективно на X^2 , $a^1(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)^t$, $J_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2$.

2) $X^2 = \text{span}\{\text{ch } t, \text{sh } t\}$, $\widehat{\varphi} = \text{ch } t$. Отображение $\mu \text{ch}(t - \alpha)$ $\mathbb{R}$ -сюръективно на D , где

$$D = \{\xi_1 \text{ch } t + \xi_2 \text{sh } t : |\xi_1| > |\xi_2|\}.$$

При этом $a^1(\alpha) = (\text{ch } \alpha, -\text{sh } \alpha)^t$, $J = \xi_1^2 - \xi_2^2$. Аналогично, отображение $\mu \text{sh}(t - \alpha)$ $\mathbb{R}$ -сюръективно на D' , где

$$D' = \{\xi_1 \text{ch } t + \xi_2 \text{sh } t : |\xi_1| < |\xi_2|\}.$$

Разложим пространство $\mathbb{R}^n$ в прямую сумму подпространств

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_{n_1-n_0}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{R}_{n_l-n_{n-l}}^n.$$

В каждом подпространстве $\mathbb{R}_{n_i-n_{i-1}}^n$ зададим ρ_i -однородную положительную форму J_i независимой переменной $\xi^i = (\xi_{n_{i-1}+1}, \dots, \xi_{n_i})$, $i = \overline{1, l}$. Обозначим через ∂ множество решений соответствующей системы $J_i(\xi^i) = 1, i = \overline{1, l}$, и назовем его поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

СВОЙСТВО 4.2. Пусть формы $J_1, \dots, J_l$ определяют поверхность ∂ , а вектор $(a^1(\alpha), \dots, a^l(\alpha))^t, \alpha \in G$, задает ее параметризацию. Тогда отображение

$$\sum_{i=1}^l \mu_i(a^i(\alpha), \varphi^i): \mathbb{R}^l \times G \rightarrow X^n$$

G -сюръективно.

Введем условие:

(А) пусть при всех $\alpha \in G$ в окрестности точки $\mu = 0, \lambda = 0$ выполнено равенство

$$L(t(\alpha)\mu, \lambda) = b(\alpha)l(\mu, \lambda),$$

где матрица $b(\alpha)$ размерности $n \times l$ при всех $\alpha \in G$ имеет полный ранг l , $l(\mu, \lambda) = (l_1(\mu, \lambda), \dots, l_l(\mu, \lambda))^t$.

Выполнение условия (А) нетрудно проверить на основе результатов [7], [15], [21] в случае УР потенциального типа [25].

В самом деле, пусть УР удовлетворяет условию

$$(B) \quad L(\xi, \lambda) = d \text{grad}_\xi U(\xi, \lambda),$$

где $\det d \neq 0$, $U = U(J_1, \dots, J_l, \lambda)$, $1 \leq l \leq n-1$, $J_i: \mathbb{R}_{n_i-n_{i-1}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — ρ_i -однородные положительные формы независимых переменных $\xi^i = (\xi_{n_{i-1}+1}, \dots, \xi_{n_i})$, $i = \overline{1, l}$.

Введем систему уравнений $J_1 = 1, \dots, J_l = 1$, задающую в $\mathbb{R}^n$ поверхность ∂ ; поверхности $\partial_i = \{a^i \in \mathbb{R}_{n_i-n_{i-1}}^n : J_i(a^i) = 1\}$ и вектор-функции $a^i = a^i(\alpha)$, $\alpha \in G$, $i = \overline{1, l}$, задающие их параметризацию.

Отметим, что в любой точке поверхности ∂

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial J_i}{\partial \xi_j} \right\|_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, l} = l.$$

Пусть

$$(C) \quad \mathcal{A}(\alpha) = \|\mathcal{A}^{ik}(\alpha)\|_{i,k=1}^l,$$

где $\mathcal{A}^{ik}$ — блоки размерности $(n_i - n_{i-1}) \times (n_k - n_{k-1})$, причем в диагональных блоках $\mathcal{A}^{ii}$ первые столбцы $a^i(\alpha)$ задают параметризацию поверхности ∂ , а остальные элементы столбцов матрицы с номерами $1, n_1 + 1, \dots, n_{l-1} + 1$ нулевые.

Положим

$$t(\alpha) = \|a^1(\alpha), \dots, a^l(\alpha)\| \quad \text{и} \quad S(\alpha)\hat{\varphi} = t'(\alpha)\varphi.$$

Тогда из условия (B) следует, что

$$L_i(t(\alpha)\mu, \lambda) = \sum_{k=1}^n d_{ik} \sum_{s=1}^l \frac{\partial J_s}{\partial \xi_k} \frac{\partial U}{\partial J_s}, \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$\frac{\partial J_s}{\partial \xi_k} = \hat{a}_{sk}(\alpha) \mu_s^{\rho_s-1}.$$

Так как $\text{rank} \|\hat{a}_{sk}(\alpha)\|_{k=1, \dots, n}^{s=1, \dots, l} = l$, $J_i(\mu_i a^i) = \mu_i^{\rho_i}$, $i = \overline{1, l}$, то выполнено условие (A), где

$$b(\alpha) = \left\| \sum_{k=1}^n d_{ik} \hat{a}_{sk}(\alpha) \right\|_{s=1, \dots, l}^{i=1, \dots, n}. \quad (4.6)$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия (B), (C). Тогда все малые решения уравнения (1.1) представимы в виде (4.1), где параметр $\mu \in \mathbb{R}^l$ удовлетворяет l уравнениям разветвления

$$l(\mu, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} b_l^{-1}(\alpha) L(t(\alpha)\mu, \lambda) = 0, \quad (III)$$

не зависящим от параметра α . Матрица $b(\alpha)$ определена в (4.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (B) и свойств 4.2, 4.1 отображение $t(\alpha)\mu: \mathbb{R}^l \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ G -сюръективно на $\mathbb{R}^n$, а отображение (4.5) G -сюръективно на X^n . Поэтому все малые решения уравнения (1.1) представимы в виде (4.1) с системой разветвления (4.4), которая ввиду условия (C) эквивалентна системе (III), что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ (о расслоении области свободных параметров). В условиях теоремы 4.1 в решении (4.1)

$$(\mu, S(\alpha)\widehat{\varphi}) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} \mu_i a_j^i(\alpha) \varphi_j,$$

где параметры $a^i(\alpha): G \rightarrow \mathbb{R}_{n_i-n_{i-1}}^n$, $i = \overline{1, l}$, остаются произвольными точками гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$, являющихся геометрическими образами непрерывной группы преобразований $S(\alpha)$ l элементов из $N(B)$.

Таким образом, область свободных параметров, входящих в решение (4.1), расщепляется на гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$.

ПРИМЕР. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^{2\pi} K(t-s)x(s)ds + f(x(t), \lambda),$$

где

$$K(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos mt, \quad f(x, \lambda) = \sum_{i \geq 1, i+k \geq 2} b_{ik} x^i \lambda^k,$$

причем $c_1 = \dots = c_l = 1/\pi$, $c_m \neq 1/\pi$, $m = l+1, l+2, \dots$.

Здесь

$$N(B) = \text{span} \left\{ \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos lt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin lt}{\sqrt{\pi}} \right\},$$

$S(\alpha)x \stackrel{\text{def}}{=} x(t-\alpha)$, $K(\alpha) = S(\alpha)$. Условия теоремы 4.1 выполнены, причем $L(\xi, \lambda) = \text{grad } U(\xi_1^2 + \xi_2^2, \dots, \xi_{2l-1}^2 + \xi_{2l}^2, \lambda)$, $a^i(\alpha) = (\cos i\alpha, \sin i\alpha)^t$, $i = 1, \dots, l$,

$$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{B}(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & \\ & & \ddots \\ & & \cos l\alpha & -\sin l\alpha \\ 0 & & \sin l\alpha & \cos l\alpha \end{array} \right\|.$$

В решении (4.1)

$$(\mu, S(\alpha)\widehat{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^l \mu_i \cos i(t-\alpha).$$

В системе разветвления (III) можно положить

$$b_l^{-1}(\alpha) = \left\| \begin{array}{ccc} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & \cos l\alpha & \sin l\alpha \end{array} \right\|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если уравнение (1.1) допускает две пары сплетающихся операторов (кратко, является бисплетающим), то представление (4.1) может индуцировать УР вида (III) без требования потенциальности УР.

ПРИМЕР. Введем проекторы

$$P = I - \sum_{i \in \Omega} \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i, \quad Q = I - \sum_{i \in \Omega} \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i,$$

где $\Omega = \{1, \dots, n\} \setminus \{n_0 + 1, \dots, n_{l-1} + 1\}$. Пусть в уравнении (1.1) оператор $R: X^{\infty-(n-l)} \times \Lambda \rightarrow Y_{\infty-(n-l)}$. Тогда уравнение (1.1) (P^2, Q) -сплетаемое. Пусть, кроме того, оно допускает другую пару $(S(\alpha), K(\alpha))$ -сплетающих операторов, удовлетворяющих равенствам (1.7), (1.8), причем

$$\text{rank } \|\mathcal{B}_{ik}\|_{k \in \{n_0+1, \dots, n_{l-1}+1\}}^{i=1, \dots, n} = l.$$

Тогда уравнение (1.1) является бисплетающим и имеет решение вида (4.1), где y — единственное малое решение уравнения (4.3), а параметр μ , как и в теореме 4.1, удовлетворяет l уравнениям

$$l_k((\mu, \widehat{\varphi}), \lambda) = 0, \quad k \in \{n_0 + 1, \dots, n_{l-1} + 1\}, \quad (4.7)$$

не зависящим от α .

Действительно, рассмотрим последовательность

$$y_m = R((\mu, S\widehat{\varphi}) + \Gamma y_{m-1}, \lambda), \quad y_0 = 0,$$

сходящуюся в окрестности нуля к решению $y((\mu, S\widehat{\varphi}), \lambda)$ уравнения (4.3). В силу условия (S, K) -сплетения $y_m = K v_m$, где $v_m \in Y_{\infty-(n-l)}$ в силу (P^2, Q) -сплетения, причем $v_m = v_m((\mu, \widehat{\varphi}), \lambda)$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем представление $y((\mu, S\widehat{\varphi}), \lambda) = K v((\mu, \widehat{\varphi}), \lambda)$. Подставляя полученное выражение для y в (4.4), учитывая включение $v \in Y_{\infty-(n-l)}$ и равенство $K^* \psi = \mathcal{B} \psi$, получаем, что в данном случае система разветвления (4.4) имеет вид

$$L_i((\mu, S\widehat{\varphi}), \lambda) = \sum_{k \in \{n_0+1, \dots, n_{l-1}+1\}} \mathcal{B}_{ik} l_k((\mu, \widehat{\varphi}), \lambda) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Так как

$$\text{rank } \|\mathcal{B}_{ik}\|_{k \in \{n_0+1, \dots, n_{l-1}+1\}}^{i=1, \dots, n} = l,$$

то УР (4.8) и (4.7) эквивалентны.

Покажем что, теорема 4.1 позволяет строить α -параметрические ветви решений методом последовательных приближений.

В самом деле, пусть

$$R(x, \lambda) = R_{01} \lambda + \sum_{i+k \geq 2} R_{ik}(x) \lambda^k$$

при $(x, \lambda) \in \Omega$.

Множества $M_j = \{(i, k) : \langle R_{ik}(x), \psi_j \rangle \neq 0\}$, $j = \overline{1, n}$, назовем *носителями коэффициентов проекции* QF .

Введем условие:

- (D) пусть диаграммы Ньютона множеств M_j имеют параллельные грани $pi + qk = \theta_j$, $j = \overline{1, n}$, где $p, q, \theta_j \in \mathbb{N}_+$, $p/q = N + m/q$, $N \in \{0, 1, \dots\}$, $m \in \{1, \dots, q\}$, $R_{0k} = 0$, $k = \overline{1, N}$, $QR_{0N+1} = 0$.

Пусть далее наряду с (D) выполнено условие (A).

Введем функции $l_{0s}: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^1$, $1 \leq l \leq n-1$, $s = \overline{1, l}$,

$$l_{0s}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n b_{sj}^l(\alpha) \left\langle \sum_{pi+qk=\theta_j} R_{ik}((t(\alpha)\mu, \varphi) + \hat{x}^0), \psi_j \right\rangle. \quad (4.9)$$

Здесь $\hat{x}^0 = 0$, если $m \in \{1, \dots, q-1\}$, и $\hat{x}^0 = \Gamma R_{0N+1}$, если $m = q$. Матрица $b^l(\alpha)$ есть левая обратная к матрице $b(\alpha)$ из условия (A).

Пусть μ^0 – простое решение системы

$$l_0(\mu) = 0. \quad (4.10)$$

Тогда на основании теоремы 4.1 и теоремы о неявном операторе [26] при $\lambda = \varepsilon^q$ каждому простому решению μ^0 системы (4.10) отвечает α -параметрическое решение уравнения (1.1) $x = x(\varepsilon, \alpha) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем

$$x \sim ((t(\alpha)\mu^0, \varphi) + \Gamma R_{0N+1})\varepsilon^p, \quad (4.11)$$

если $p/q = N+1$, и

$$x \sim (t(\alpha)\mu^0, \varphi)\varepsilon^p, \quad (4.12)$$

если $p/q \notin \mathbb{N}_+$. При этом

$$Px \sim (t(\alpha)\mu^0, \varphi)\varepsilon^p, \quad (I - P)x \sim \Gamma R_{0N+1}\varepsilon^{p+q-m}.$$

Более того, при $\lambda = \varepsilon^q$ последовательность

$$x_m = (t(\alpha)\mu^m, \varphi)\varepsilon^p + \Gamma y_m \varepsilon^r, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4.13)$$

где

$$y_m = \varepsilon^{-r} R(x_{m-1}, \varepsilon^q), \quad (4.14)$$

$$\mu_i^m = \mu_i^{m-1} - \sum_{s=1}^l D_{is} \sum_{j=1}^n b_{sj}^l(\alpha) \varepsilon^{-\theta_j} \langle R(\varepsilon^p(t(\alpha)\mu^{m-1}, \varphi) + \varepsilon^r \Gamma y_m, \varepsilon^q), \psi_j \rangle, \quad (4.15)$$

$$i = \overline{1, l},$$

$$D = \left\| \frac{\partial l_{0s}(\mu^0)}{\partial \mu_k} \right\|^{-1},$$

$y_0 = y(0)$, сходится к решению $x(\varepsilon, \alpha)$ уравнения (1.1) в окрестности точки $\varepsilon = 0$ при всех $\alpha \in G$.

Доказательство сходимости последовательности в частном случае приведено в работе [23]. В общем случае оно аналогично и изложено в препринте [27].

ЗАМЕЧАНИЕ. Итерационным формулам (4.13)–(4.15) можно придать более компактную форму:

$$x_m = (t(\alpha)\nu^m, \varphi) + \hat{x}_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $\hat{x}_m$ – решение линейного уравнения

$$\begin{aligned} \hat{B}\hat{x}_m &= R(x_{m-1}, \varepsilon^q), \\ \nu^m &= \nu^{m-1} - D^{-1}b_l^{-1}(\alpha) \langle R((t(\alpha)\nu^{m-1}, \varphi) + \hat{x}_m, \varepsilon^q), \Psi(\varepsilon) \rangle, \\ \Psi(\varepsilon) &= (\varepsilon^{-\theta_1+p}\psi_1, \dots, \varepsilon^{-\theta_n+p}\psi_n)^t, \quad \hat{x}_0 = \Gamma y(0)\varepsilon^r, \quad \nu^0 = \mu^0 \varepsilon^r. \end{aligned}$$

Заключение

Таким образом, изложенные результаты позволяют применить метод последовательных приближений [21]–[23] при построении параметрических разветвляющихся решений. В случае α -параметрически сплетаемых уравнений разветвления потенциального типа возникает явление расслоения области свободных параметров, входящих в решение, на отдельные гиперповерхности. В приложениях этому соответствует разложение пространства коэффициентов проекции решения $P_{N(B)}x$ в прямую сумму подпространств с введением в каждом из подпространств своей системы координат. Разумный выбор этой системы позволяет сократить число уравнений в системе разветвления и зависит от симметрии задачи, точнее, от инвариантов потенциала системы разветвления.

Полученные результаты позволяют в приложениях (см., например, [17], [20], [28]) доказывать теоремы существования точек бифуркации нелинейных краевых задач и строить соответствующие решения. Изученные в настоящей работе условия сплетения находят применение и при решении дифференциально-операторных уравнений с вырождением [29].

Авторы благодарят рецензентов за полезные замечания.

Список литературы

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
2. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление // ПММ. 1969. Т. 31. №1. С. 101–111.
3. Логинов Б. В., Треногин В. А. Об использовании групповых свойств для определения многопараметрических семейств решений нелинейных уравнений // Матем. сб. 1971. Т. 85 (127). С. 440–454.
4. Логинов Б. В., Треногин В. А. Об использовании групповой инвариантности в теории ветвления // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. С. 1709–1712.
5. Логинов Б. В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент: Изд-во ФАН, 1985.
6. Логинов Б. В. Об инвариантных решениях в теории ветвления // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246. №5. С. 1048–1051.
7. Логинов Б. В. Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия // Вестн. СамГУ. 1998. №4 (10). С. 15–70.
8. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
10. Sattinger D. H. Group theoretical methods in bifurcation theory. Berlin: Springer-Verlag, 1979. (Lecture Notes in Math. V. 762.)
11. Vanderbauwhede A. Local bifurcation and symmetry. Boston: Pitman, 1982. (Res. Notes Math. V. 75.)
12. Golubitsky M., Keyfitz B. L., Schaeffer D. G. A singularity theory analysis of a thermal-chainbranching model for the explosion peninsula // Comm. Pure Appl. Math. 1981. V. 34. P. 433–463.
13. Stewart J. Applications of catastrophe theory to the physical sciences // Phys. D. 1981. V. 2. P. 245–305.
14. Chillingworth D. R. J. Notes on some recent methods in bifurcation theory // Banach Center Publ. 1985. V. 15. P. 161–174.
15. Loginov B. V. Determination of the branching equation by its group symmetry – Andronov–Hopf bifurcation // Nonlinear Anal. 1997. V. 28. №12. P. 2033–2047.
16. Keller H. B. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems // Application of bifurcation theory / ed. P. Rabinowitz. New York: Academic Press, 1977. P. 359–384.

17. Сидоров Н. А., Синицын А. В. Исследование точек бифуркации и нетривиальных ветвей решений системы Власова–Максвелла // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 2. С. 268–292.
18. Vorovich I. I. Nonlinear theory of shallow shells. New York: Springer-Verlag, 1999.
19. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного дифференцирования: метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. М.: Наука, 1988.
20. Buchanan M., Dorning J. Nonlinear waves in collisionless plasmas // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. № 2. P. 3015–3033.
21. Логинов Б. В., Сидоров Н. А. Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова–Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 5. С. 681–691.
22. Сидоров Н. А. Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 2. С. 129–141.
23. Сидоров Н. А. N-ступенчатый итерационный метод в теории ветвления решений нелинейных уравнений // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38. № 2. С. 383–395.
24. Sidorov N. A., Abdullin V. R. Interlaced branching equations and invariance in the theory of nonlinear equations // Symmetry and perturbation theory. International workshop SPT'98, Roma. Singapore: World Scientific, 1999.
25. Сидоров Н. А., Треногин В. А. Условия потенциальности уравнения разветвления и точки бифуркации нелинейных операторов // Узб. матем. журн. 1992. № 2. С. 40–49.
26. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
27. Сидоров Н. А., Абдуллин В. Р. Сплетающие уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений // Препринт № 1. Сер. АНН ИРО. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1999.
28. Sidorov N. A., Sinitsyn A. V. On bifurcation points of the stationary Vlasov–Maxwell system with bifurcation direction // Progress in industrial mathematics at ESMI 98 / ed. L. Arkeryd, J. Bergh, P. Brenner, R. Pettersson. Stuttgart: B.G. Teubner, 1999. P. 295–303.
29. Sidorov N. A., Romanova O. A. Difference-differential equations with the Fredholm operator in the main part // Report TW 243, 1996, Katholieke Universiteit Leuven, Department of computer science, Belgium.

Иркутский государственный университет;
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
г. Иркутск

Поступила в редакцию
31.01.2000 и 14.02.2001