Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Стрелков, Сплайн-тригонометрические базисы и их свойства, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 7, 125–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 09:23:32

УДК 517.5

Н. А. Стрелков

Сплайн-тригонометрические базисы и их свойства

Построено семейство пар биортонормированных систем такое, что для любого $p \in (1, \infty)$ одна из этих систем – базис пространства $L_p(a, b)$, а другая – двойственный базис в $L_q(a, b)$ (здесь $1/p + 1/q = 1$). Функции первой системы – произведения тригонометрических и алгебраических полиномов, функции второй системы – произведения тригонометрических многочленов и производных B -сплайнов. Исследовано асимптотическое поведение функций Лебега построенных систем. В частности, показано, что главные члены поточечных асимптотических разложений функций Лебега всюду (кроме некоторых особых точек) имеют вид $4/\pi^2 \ln n$ (т.е. такой же, как и для случая ортонормированной тригонометрической системы). Получены интерполяционные представления с кратными узлами для целых функций экспоненциального типа σ . В этих формулах используется равномерная сетка узлов, однако в отличие от теоремы Котельникова, где шаг сетки равен π/σ и уменьшается с ростом типа целой функции, в полученных представлениях узлы интерполяции могут быть зафиксированы и не зависеть от σ , а кратность этих узлов возрастает с увеличением типа интерполируемой функции. Одно из возможных применений таких представлений (и особенно их многомерных аналогов) состоит в конструктивном построении обладающих асимптотической оптимальностью методов аппроксимации с помощью масштабирования и сдвигов аргумента фиксированной функции (всплески, проекционно-сеточные методы и т.п.).

Библиография: 11 названий.

В работе изучается семейство зависящих от целого $N \geq 0$ пар биортонормированных систем функций, каждая из которых является базисом в любом из пространств $L_p(a, b)$ для всех $p \in (1, \infty)$. Базисы от p не зависят, а их элементами являются: в первой системе – произведения тригонометрических и алгебраических полиномов, во второй системе – произведения тригонометрических многочленов и производных B -сплайнов. При $N = 0$ обе системы совпадают (с точностью до умножения на константу) с классическим тригонометрическим ортогональным базисом.

Работа состоит из четырех параграфов, в первом из которых определяются необходимые объекты и понятия, а также доказывается ряд вспомогательных утверждений.

В §2 установлена биортонормированность определенных в §1 систем, а также доказана их полнота и базисность в любом из пространств $L_p(a, b)$ для всех $p \in (1, \infty)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00216) и программы “Университеты России – фундаментальные исследования”.

Параграф 3 посвящен рассмотрению вопроса о поведении функций Лебега построенных систем. Получены достаточно обозримые представления этих функций, на основании которых изучены их асимптотические свойства. В частности, показано, что поточечная асимптотика функций Лебега исследуемых систем всюду (кроме некоторых особых точек) совпадает с асимптотикой констант Лебега ортонормированной тригонометрической системы.

В § 4 приводятся интерполяционные представления с кратными узлами для целых функций экспоненциального типа. Получение этих представлений существенно связано с использованием разложения по базисам, изученным в предыдущих параграфах. Как и в известной теореме Котельникова, сетка узлов интерполяции равномерна, однако если в теореме Котельникова густота сетки увеличивается с ростом типа целой функции, то в полученных представлениях эта густота регулируется с помощью параметра N (например, за счет выбора этого параметра можно добиться того, что узлы интерполяции фиксированы и не зависят от типа функции, а кратность этих узлов возрастает с увеличением типа интерполируемой функции).

Собственно говоря, интерес автора к базисам такого рода и возник во многом благодаря тому, что они являются аппаратом для получения подобных представлений целых функций. Дело в том, что одно из возможных применений таких представлений состоит в конструктивном построении обладающих асимптотической оптимальностью методов аппроксимации с помощью масштабирования и сдвигов аргумента фиксированной функции (всплески, проекционно-сеточные методы и т. п.).

§ 1. Обозначения, определения, вспомогательные утверждения

Всюду в дальнейшем $[a, b]$ ($a < b$) – фиксированный отрезок, N – любое фиксированное неотрицательное целое число, $1 < p < \infty$, а q связано с p равенством $1/p + 1/q = 1$.

Пусть

$$h = \frac{b-a}{N+1}, \quad x_k = a + kh, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Равномерная сетка (1.1) разбивает всю действительную прямую на отрезки длины h ; нумерация узлов такова, что $a = x_0 < \dots < x_{N+1} = b$ (именно эти точки сетки, принадлежащие $[a, b]$, и будут использоваться чаще всего).

Основные объекты исследования – системы функций вида

$$\varphi_{k,s}(x) = e^{2\pi i k x/h} D^{N-s} P_N(x), \quad (1.2)$$

$$\psi_{k,s}(x) = e^{2\pi i k x/h} (-D)^s \omega_N(x), \quad (1.3)$$

где $s = 0, \dots, N$, $k \in \mathbb{Z}$, D – оператор дифференцирования. Здесь

$$P_N(x) = \frac{1}{N!} \prod_{k=1}^N (x - x_k) \quad (1.4)$$

– алгебраический полином степени N ,

$$\omega_N(x) = \frac{1}{N!} \bar{\partial}^{N+1} \{(x-a)_+^N\} \quad (1.5)$$

– B -сплайн Шенберга порядка N [1], где

$$\begin{aligned} t_+^s &= t^s t_+^0, \\ t_+^0 &= \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases} \\ \bar{\partial}f(x) &= h^{-1}\{f(x) - f(x-h)\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Наряду с разностями назад вида (1.6) будет также встречаться оператор вычисления разности вперед, определяемый равенством

$$\partial f(x) = h^{-1}\{f(x+h) - f(x)\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. B -сплайны ω_N вида (1.5) могут быть получены, если свернуть между собой $N+1$ одинаковых функций вида χ/h , где χ – характеристическая функция полуинтервала $[0, h)$, а затем сдвинуть аргумент полученной свертки: $\omega_N(x) = (\chi/h)^{* (N+1)}(x-a)$. Носитель ω_N совпадает с отрезком $[a, b]$, на котором эта функция кусочно-полиномиальна, причем на каждом из интервалов полиномиальности (x_k, x_{k+1}) , $k = 0, \dots, N$, она представляет собой алгебраический полином степени N следующего вида:

$$\omega_N(x) = \frac{1}{N!} \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{N+1}{m} (x-x_m)^N.$$

При этом если $N \geq 1$, то $\omega_N \in C^{N-1}(-\infty, \infty)$, а встречающаяся в (1.3) производная $D^N \omega_N$ кусочно-постоянна и определена всюду, кроме узлов x_k , в каждом из которых она терпит разрыв. Если же $N = 0$, то

$$\omega_0(x) = \frac{\chi_{[a,b)}(x)}{b-a} = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b), \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus [a, b). \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Если $N = 0$, то системы функций (1.2) и (1.3) с точностью до постоянного множителя совпадают с тригонометрической системой на $[a, b]$:

$$\varphi_{k,0}(x) = e^{2\pi i k x / (b-a)}, \quad \psi_{k,0}(x) = \frac{1}{b-a} e^{2\pi i k x / (b-a)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. На интервале $(0, h)$ полиномы $\{\omega_N(x+x_k)\}_{k=0}^N$ линейно независимы (по поводу этого замечания см., например, [2; теорема 4.2.3, следствие 4.2.2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Системы (1.2), (1.3) равномерно по $k \in \mathbb{Z}$ и $s = 0, \dots, N$ ограничены на $[a, b]$. Более того, можно показать, что существует такая зависящая лишь от N константа C , что

$$|\varphi_{k,s}(x)| \leq C h^s, \quad |\psi_{k,s}(x)| \leq C h^{-s-1}$$

для любого $x \in [a, b]$ (за исключением, быть может, узлов сетки $x_0, \dots, x_{N+1}$, где функции $\psi_{k,N}$ не определены) и для всех $k \in \mathbb{Z}$, $s = 0, \dots, N$.

В дальнейшем наряду с функциями P_N и ω_N , определенными равенствами (1.4), (1.5), будут также использоваться полиномы и B -сплайны порядка $m = 0, \dots, N$ следующего вида:

$$P_m(x) = \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^m (x - x_k),$$

$$\omega_m(x) = \frac{1}{m!} \bar{\partial}^{m+1} \{(x - a)_+^m\}$$

(здесь x_k и $\bar{\partial}$ по-прежнему определены равенствами (1.1) и (1.6)).

Оператор преобразования Фурье будет обозначаться символом $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx.$$

Нетрудно проверить (см., например, [1]), что

$$\mathcal{F}\omega_m(t) = e^{-iat} \left\{ \frac{1 - e^{-iht}}{iht} \right\}^{m+1}. \quad (1.7)$$

Из (1.7), в частности, следует, что $\mathcal{F}\omega_m(0) = 1$, а в точках множества $2\pi h^{-1}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ функция $\mathcal{F}\omega_m$ имеет нули кратности $m + 1$.

ЛЕММА 1.1. Для всех $m = 1, \dots, N$ и любого $x \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\partial P_m(x) = P_{m-1}(x), \quad D\omega_m(x) = \bar{\partial}\omega_{m-1}(x). \quad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение сразу следует из соотношений

$$\prod_{k=1}^m (x + h - x_k) - \prod_{k=1}^m (x - x_k) = \prod_{k=0}^{m-1} (x - x_k) - \prod_{k=1}^m (x - x_k) = mh \prod_{k=1}^{m-1} (x - x_k),$$

$$D\bar{\partial}^{m+1}[(x - a)_+^m] = m\bar{\partial}^{m+1}[(x - a)_+^{m-1}] = m\bar{\partial}\{\bar{\partial}^m[(x - a)_+^{m-1}]\}.$$

Лемма доказана.

Для функции F , носитель которой принадлежит отрезку $[a, b]$, символом $\Sigma[F]$ будет обозначаться h -периодическая функция вида

$$\Sigma[F(x)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(x + x_k) \quad (1.9)$$

(заметим, что проблем со сходимостью ряда в правой части (1.9) не возникает, поскольку для любого $x \in \mathbb{R}$ он содержит лишь конечное число отличных от нуля слагаемых).

Легко проверяются следующие соотношения:

$$\Sigma[F(x)e^{2\pi imx/h}] = \Sigma[F(x)]e^{2\pi im(a+x)/h}, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad (1.10)$$

$$\Sigma[\bar{\partial}F(x) \cdot G(x)] = -\Sigma[F(x) \cdot \partial G(x)]; \quad (1.11)$$

$$\int_0^h \Sigma[F(x)] dx = \int_a^b F(x) dx; \quad (1.12)$$

$$\|\Sigma[F]\|_{L_p(0,h)} \leq (N+1)^{1/q} \|F\|_{L_p(a,b)}. \quad (1.13)$$

ЛЕММА 1.2. Для любого $m = 0, \dots, N$ и для любого алгебраического полинома S_n степени $n \leq m$ справедливо тождество

$$h\Sigma[\omega_m(x)S_n(x)] \equiv S_n(iD)\mathcal{F}\omega_m(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу суммирования Пуассона (см., например, [3]), получаем, что

$$\begin{aligned} h\Sigma[\omega_m(x)S_n(x)] &= h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_m(x+a+kh)S_n(x+a+kh) \\ &= h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}\{\omega_m(x+a+\cdot h)S_n(x+a+\cdot h)\}(2\pi k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k(x+a)/h} \mathcal{F}\{S_n \omega_m\}\left(\frac{2\pi k}{h}\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k(x+a)/h} S_n(iD)\mathcal{F}\omega_m\left(\frac{2\pi k}{h}\right) = S_n(iD)\mathcal{F}\omega_m(0), \end{aligned}$$

поскольку $n \leq m$ и $D^s \mathcal{F}\omega_m(2\pi k/h) = 0$ для любого $s = 0, \dots, m$ и всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (см. (1.7)). Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. Для любого $m = 0, \dots, N$ выполнено равенство

$$P_m(iD)\mathcal{F}\omega_m(0) = \delta_m^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ 0, & \text{если } m \neq 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m = 0$, то (1.14) является следствием (1.7) и тождества $P_0(x) \equiv 1$. Если же $m \neq 0$, то, применяя лемму 1.2, получаем, что

$$h\Sigma[\omega_m(x)P_m(x)] \equiv \text{const} = P_m(iD)\mathcal{F}\omega_m(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Так как $\omega_m(x_k) = 0$ для всех $k \leq 0$ и всех $k \geq m+1$, а $P_m(x_k) = 0$ для всех $k = 1, \dots, m$, то $\omega_m(x_k)P_m(x_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$P_m(iD)\mathcal{F}\omega_m(0) = h\Sigma[\omega_m(x)P_m(x)]_{x=0} = h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_m(x_k)P_m(x_k) = 0.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 1.4. Для всех $s, n = 0, \dots, N$ справедливо тождество

$$h \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-D)^n \omega_N(x+x_k) D^{N-s} P_N(x+x_k) \equiv \delta_s^n, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (1.8), (1.11) и перестановочность операторов ∂ и D , получаем

$$\begin{aligned} h\Sigma[(-D)^n \omega_N(x) \cdot D^{N-s} P_N(x)] &= h\Sigma[(-\bar{\partial})^n \omega_{N-n}(x) \cdot D^{N-s} P_N(x)] \\ &= h\Sigma[\omega_{N-n}(x) \cdot \partial^n D^{N-s} P_N(x)] = h\Sigma[\omega_{N-n}(x) \cdot D^{N-s} P_{N-n}(x)]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Если $s < n$, то $D^{N-s} P_{N-n}(x) \equiv 0$; поэтому для $s < n$ утверждение леммы сразу следует из (1.16).

Осталось рассмотреть случай $s \geq n$. Очевидно, что $D^{N-s} P_{N-n}$ — алгебраический полином степени $s - n \leq N - n$; обозначим его символом S_{s-n} . Используя (1.16), (1.8), (1.11), получаем, что

$$\begin{aligned} h\Sigma[(-D)^n \omega_N(x) \cdot D^{N-s} P_N(x)] &= h\Sigma[S_{s-n}(x) \omega_{N-n}(x)] \\ &= S_{s-n}(iD) \mathcal{F} \omega_{N-n}(0) = \mathcal{F}\{S_{s-n} \omega_{N-n}\}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{s-n}(z) \omega_{N-n}(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} D^{N-s} P_{N-n}(z) \omega_{N-n}(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} P_{N-n}(z) (-D)^{N-s} \omega_{N-n}(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{N-n}(z) (-\bar{\partial})^{N-s} \omega_{s-n}(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \partial^{N-s} P_{N-n}(z) \omega_{s-n}(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{s-n}(z) \omega_{s-n}(z) dz = \mathcal{F}\{P_{s-n} \omega_{s-n}\}(0) = P_{s-n}(iD) \mathcal{F} \omega_{s-n}(0). \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться равенством (1.14). Лемма доказана.

Пусть

$$Q_N(x) = \frac{1}{N!} \prod_{k=1}^N (x - k), \quad (1.17)$$

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-1) \quad (1.18)$$

(Q_N и ∇ — то же самое, что P_N и $\bar{\partial}$ для $h = 1, a = 0, b = N + 1$).

ЛЕММА 1.5. Для всех $k = 0, \dots, N$ и любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{N+1}{s} Q_N(x+s) = (-1)^k \binom{N}{k} \frac{x+k}{x} Q_N(x+k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $k = 0$, то равенство справедливо, поскольку в этом случае обе его части равны $Q_N(x)$. Предположив, что утверждение имеет место при $k = j$, докажем его справедливость при $k = j + 1$. Используя предположение индукции, получаем, что

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{j+1} (-1)^s \binom{N+1}{s} Q_N(x+s) \\ &= \sum_{s=0}^j (-1)^s \binom{N+1}{s} Q_N(x+s) + (-1)^{j+1} \binom{N+1}{j+1} Q_N(x+j+1) \\ &= (-1)^j \binom{N}{j} \frac{x+j}{x} Q_N(x+j) + (-1)^{j+1} \binom{N+1}{j+1} Q_N(x+j+1). \end{aligned}$$

Для доказательства леммы осталось проверить, что

$$\begin{aligned} & (-1)^j \binom{N}{j} \frac{x+j}{x} Q_N(x+j) + (-1)^{j+1} \binom{N+1}{j+1} Q_N(x+j+1) \\ &= (-1)^{j+1} \binom{N}{j+1} \frac{x+j+1}{x} Q_N(x+j+1). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Поскольку $(x+j)Q_N(x+j) = (x+j-N)Q_N(x+j+1)$, то (1.19) эквивалентно равенству

$$-\binom{N}{j}(x+j-N) + \binom{N+1}{j+1}x = \binom{N}{j+1}(x+j+1),$$

которое сразу следует из легко проверяемых соотношений

$$\binom{N}{j} + \binom{N}{j+1} = \binom{N+1}{j+1}, \quad (N-j)\binom{N}{j} = (j+1)\binom{N}{j+1}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 1.6. Для любого $k = 0, \dots, N$ и всех $y \in [k, k+1)$, $z \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\nabla_y^{N+1} \{y_+^0 Q_N(z-y)\} = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq k}}^N \frac{z-y+k-s}{s-k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\nabla^{N+1} f(x) = \sum_{s=0}^{N+1} (-1)^s \binom{N+1}{s} f(x-s),$$

то

$$\nabla_y^{N+1} \{y_+^0 Q_N(z-y)\} = \sum_{s=0}^{N+1} (-1)^s \binom{N+1}{s} (y-s)_+^0 Q_N(z-y+s).$$

Из условий леммы следует, что $y \geq s$ для $s = 0, \dots, k$ и $y < s$ для $s = k+1, \dots, N+1$, т.е.

$$(y-s)_+^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } s = 0, \dots, k, \\ 0, & \text{если } s = k+1, \dots, N+1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \nabla_y^{N+1} \{y_+^0 Q_N(z-y)\} &= \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{N+1}{s} Q_N(z-y+s) \\ &= (-1)^k \binom{N}{k} \frac{z-y+k}{z-y} Q_N(z-y+k) \end{aligned}$$

(последнее равенство — следствие леммы 1.5). Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} & (-1)^k \binom{N}{k} \frac{z-y+k}{z-y} Q_N(z-y+k) \\ &= (-1)^k \frac{z-y+k}{k!(N-k)!(z-y)} \prod_{s=1}^N (z-y+k-s) = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq k}}^N \frac{z-y+k-s}{s-k}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 2. Биортонормированность, полнота, базисность

ЛЕММА 2.1. Для всех $k, m \in \mathbb{Z}$ и всех $s, n = 0, \dots, N$ имеет место равенство

$$\int_a^b \varphi_{k,s}(x) \overline{\psi_{m,n}(x)} dx = \delta_k^m \delta_s^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{supp } \omega_N = [a, b]$, то

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_{k,s}(x) \overline{\psi_{m,n}(x)} dx &= \int_{\mathbb{R}} D^{N-s} P_N(x) \cdot (-D)^n \omega_N(x) e^{2\pi i(k-m)x/h} dx \\ &= \mathcal{F}\{D^{N-s} P_N \cdot (-D)^n \omega_N\} \left(\frac{2\pi(m-k)}{h} \right) \\ &= P_N^{(N-s)} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \{(-ix)^n \mathcal{F}\omega_N(x)\}_{x=2\pi(m-k)/h}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Так как степень полинома $P^{(N-s)}$ равна $s \leq N$, а для всех $n = 0, 1, \dots, N$ функция $(-ix)^n \mathcal{F}\omega_N(x)$ имеет в точках множества $2\pi h^{-1}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ нули кратности $N+1$ (см. (1.7)), то из (2.1) следует, что

$$\int_a^b \varphi_{k,s}(x) \overline{\psi_{m,n}(x)} dx = 0$$

для всех $k, m \in \mathbb{Z}$, $k \neq m$, и всех $s, n = 0, \dots, N$.

Если же $k = m$, то с помощью соотношений (1.12), (1.15) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_{k,s}(x) \overline{\psi_{k,n}(x)} dx &= \int_a^b D^{N-s} P_N(x) (-D)^n \omega_N(x) dx \\ &= \int_0^h \Sigma[D^{N-s} P_N(x) (-D)^n \omega_N(x)] dx = \delta_s^n. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Система (1.3) полна в $L_p(a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что из условий $f \in L_q(a, b)$ и

$$\int_a^b f(x) \overline{\psi_{k,s}(x)} dx = 0 \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}, \quad s = 0, \dots, N \quad (2.2)$$

следует, что $f = 0$ почти всюду на (a, b) .

Заметим, что, во-первых,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \overline{\psi_{k,s}(x)} dx &= \int_0^h \Sigma[f(x) \overline{\psi_{k,s}(x)}] dx \\ &= (-1)^s e^{-2\pi i k a/h} \int_0^h \Sigma[f(x) D^s \omega_N(x)] e^{-2\pi i k x/h} dx, \end{aligned}$$

а во-вторых, если $f \in L_q(a, b)$, то $\Sigma[fD^s\omega_N] \in L_q(0, h)$ для всех $s = 0, \dots, N$ (это следует из (1.3), (1.10), (1.12), (1.13) и ограниченности производных $D^s\omega_N$, $s = 0, \dots, N$).

Поэтому если $f \in L_q(a, b)$ удовлетворяет условию (2.2), то из тотальности системы $\{e^{2\pi i k x/h}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ в $L_p(0, h)$ получаем, что $\Sigma[fD^s\omega_N] = 0$ почти всюду на $(0, h)$. Зафиксируем такое $x \in (0, h)$, что $\Sigma[f(x)D^s\omega_N(x)] = 0$ для всех $s = 0, \dots, N$, и рассмотрим определенную на $(0, h)$ функцию

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^N f(a+x+kh)\omega_N(a+t+kh).$$

Тогда

$$D^s\Phi(x) = \Sigma[f(x)D^s\omega_N(x)] = 0$$

для всех $s = 0, \dots, N$, т.е. в точке $t = x$ эта функция имеет нуль кратности $N+1$. С другой стороны, Φ — алгебраический многочлен степени N (см. замечание 1.1), поэтому $\Phi(t) \equiv 0$. Так как функции $\{\omega_N(a+t+kh)\}_{k=0}^N$ линейно независимы на интервале $(0, h)$ (см. замечание 1.3), то $f(a+x+kh) = 0$ для всех $k = 0, \dots, N$. Поскольку последнее равенство выполнено для почти всех $x \in (0, h)$, то $f = 0$ почти всюду на (a, b) . Лемма доказана.

Докажем основной результат параграфа. Для этого, прежде всего, упорядочим функции систем (1.2), (1.3) следующим образом. Установим биективное соответствие между множеством пар

$$\{(k, s)\}_{k \in \mathbb{Z}, s=0, \dots, N} \quad (2.3)$$

и множеством $\{n\}$ неотрицательных целых чисел:

$$n = \begin{cases} -2k(N+1) + s, & \text{если } k \leq 0, \\ (2k-1)(N+1) + s, & \text{если } k > 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

и присвоим паре (k, s) из множества (2.3) номер n . Тогда все пары будут занумерованы неотрицательными целыми числами, и если расположить их по порядку возрастания номеров, то возникнет следующая последовательность:

$$(0, 0), \dots, (0, N), (1, 0), \dots, (1, N), (-1, 0), \dots, (-1, N), \dots, \\ (k, 0), \dots, (k, N), (-k, 0), \dots, (-k, N), \dots$$

Занумеровав в соответствии с этим упорядочением функции систем (1.2), (1.3), получим системы

$$\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty, \quad (2.5)$$

$$\{\psi_n\}_{n=0}^\infty \quad (2.6)$$

(индексы n в (2.5), (2.6) связаны с парами индексов (k, s) в (1.2), (1.3) соотношением (2.4)).

ТЕОРЕМА 2.1. Система (2.6) – базис пространства $L_p(a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно известному критерию базисности (см., например, [4]) с учетом лемм 2.1 и 2.2 осталось доказать существование такой константы C , что для любой $f \in L_p(a, b)$ и всех $K = 0, 1, \dots$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{n=0}^K a_n(f) \psi_n \right\|_{L_p(a, b)} \leq C \|f\|_{L_p(a, b)}, \quad (2.7)$$

где

$$a_n(f) = \int_a^b f(t) \overline{\varphi_n(t)} dt.$$

Понятно, что для доказательства (2.7) достаточно проверить наличие константы C (здесь и далее одним и тем же символом C обозначаются различные постоянные, которые могут зависеть только от $b - a$, N и p) такой, что для любой $f \in L_p(a, b)$ и всех $s = 0, \dots, N$, $M = 0, 1, \dots$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{|k| \leq M} a_{k,s}(f) \psi_{k,s} \right\|_{L_p(a, b)} \leq C \|f\|_{L_p(a, b)}. \quad (2.8)$$

Продолжим функцию f на всю действительную прямую, положив $f(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$. Тогда (см. (1.10), (1.12))

$$a_{k,s}(f) = \int_a^b f(t) \overline{\varphi_{k,s}(t)} dt = e^{-2\pi i k a/h} \int_0^h \Sigma[f(t) D^{N-s} P_N(t)] e^{-2\pi i k t/h} dt.$$

Используя ограниченность производных $D^s \omega_N$ и h -периодичность функций $e^{2\pi i k x/h}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{|k| \leq M} a_{k,s}(f) \psi_{k,s} \right\|_{L_p(a, b)}^p &= \int_a^b \left| D^s \omega_N(x) \sum_{|k| \leq M} a_{k,s}(f) e^{2\pi i k x/h} \right|^p dx \\ &\leq C \int_0^h \left| \sum_{|k| \leq M} a_{k,s}(f) e^{2\pi i k (x+a)/h} \right|^p dx \\ &= C \int_0^h \left| \sum_{|k| \leq M} e^{2\pi i k x/h} \int_0^h \Sigma[f(t) P_N^{(N-s)}(t)] e^{-2\pi i k t/h} dt \right|^p dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Так как $\{e^{2\pi i k x/h}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – базис пространства $L_p(0, h)$, то

$$\begin{aligned} &\int_0^h \left| \sum_{|k| \leq M} e^{2\pi i k x/h} \int_0^h \Sigma[f(t) P_N^{(N-s)}(t)] e^{-2\pi i k t/h} dt \right|^p dx \\ &\leq C \|\Sigma[f P_N^{(N-s)}]\|_{L_p(0, h)}^p \leq C \|f P_N^{(N-s)}\|_{L_p(a, b)}^p \leq C \|f\|_{L_p(a, b)}^p \end{aligned}$$

(здесь использовалась оценка (1.13) и ограниченность полиномов $P_N^{(N-s)}$), что вместе с (2.9) дает неравенство (2.8). Теорема доказана.

Из базисности системы (2.6) в любом из пространств $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, следует, что и сопряженная система (2.5) – базис каждого из этих пространств (см., например, [4]).

Если $p = q = 2$, то безусловность построенных базисов обеспечивается абсолютной сходимостью ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f, \varphi_n)_{L_2(a, b)} (g, \psi_n)_{L_2(a, b)}$$

для всех $f, g \in L_2(a, b)$. В остальных случаях о безусловности говорить не приходится.

§ 3. Асимптотика функций Лебега

Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ функции Лебега систем (2.5), (2.6) имеют следующий вид:

$$L_n(t) = \int_a^b \left| \sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \overline{\psi_k(x)} \right| dx, \quad (3.1)$$

$$M_n(t) = \int_a^b \left| \sum_{k=0}^n \psi_k(t) \overline{\varphi_k(x)} \right| dx, \quad (3.2)$$

где $t \in [a, b]$. Напомним, что системы (2.5), (2.6) – это системы (1.2), (1.3), элементы которых упорядочены в соответствии с (2.4).

Функции Лебега определяют характер сходимости рядов Фурье по системам (2.5) и (2.6) соответственно. В частности, справедливы равенства

$$L_n(t) = \sup_{\|f\|_{L_\infty(a, b)} \leq 1} |S_n^{(1)}(t)|, \quad M_n(t) = \sup_{\|f\|_{L_\infty(a, b)} \leq 1} |S_n^{(2)}(t)|,$$

где

$$S_n^{(1)}(t) = \sum_{k=0}^n a_k(f) \varphi_k(t), \quad S_n^{(2)}(t) = \sum_{k=0}^n b_k(f) \psi_k(t)$$

– частичные суммы рядов Фурье функции f по системам (2.5) и (2.6), а коэффициенты Фурье $a_k(f)$ и $b_k(f)$ определяются равенствами

$$a_k(f) = \int_a^b f(x) \overline{\psi_k(x)} dx, \quad b_k(f) = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx.$$

Основная цель этого параграфа – показать, что при $n \rightarrow \infty$ функции Лебега (3.1), (3.2) ведут себя почти точно так же, как и константы Лебега классической ортонормированной тригонометрической системы. В частности, будет установлено, что для всех точек отрезка $[a, b]$ асимптотика этих функций имеет характерный для тригонометрического базиса вид $4/\pi^2 \ln n$ (исключение составляют: для L_n – концы отрезка, а для M_n – внутренние узлы сплайна ω_N , где множитель перед $\ln n$ увеличивается). Точные формулировки соответствующих утверждений приведены в конце параграфа (теорема 3.1, следствия 3.1–3.5).

Начнем с того, что изучим поведение подпоследовательностей $L_{(2n+1)(N+1)-1}$ и $M_{(2n+1)(N+1)-1}$, где $n \in \mathbb{N}$. Если для удобства записи ввести обозначения

$$L_n^0(t) = L_{(2n+1)(N+1)-1}(t), \quad M_n^0(t) = M_{(2n+1)(N+1)-1}(t),$$

то с помощью (2.4) нетрудно убедиться в том, что

$$L_n^0(t) = \int_a^b \left| \sum_{|j| \leq n} \sum_{s=0}^N \varphi_{j,s}(t) \overline{\psi_{j,s}(x)} \right| dx, \quad M_n^0(t) = \int_a^b \left| \sum_{|j| \leq n} \sum_{s=0}^N \psi_{j,s}(t) \overline{\varphi_{j,s}(x)} \right| dx.$$

ЛЕММА 3.1. *Для функций Лебега L_n^0 и M_n^0 имеют место следующие представления:*

1) *если $z \in [0, N+1]$, то*

$$L_n^0(a+zh) = \int_{z-1}^z \left| \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} \right| l_N(x) dx, \quad (3.3)$$

где

$$l_N(x) = \sum_{k=0}^N \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq k}}^N \left| \frac{x-s}{k-s} \right| \quad (3.4)$$

– *функция Лебега интерполяционного процесса по системе равноотстоящих узлов $0, 1, \dots, N$;*

2) *если $j = 0, \dots, N$ и $z \in [j, j+1)$, то*

$$M_n^0(a+zh) = \int_{z-1}^z \left| \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} \right| m_{N,j}(x) dx, \quad (3.5)$$

где

$$m_{N,j}(x) = \sum_{k=0}^N \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^N \left| \frac{x-k+s-j}{s-j} \right|. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (1.2) и (1.3), получаем

$$L_n^0(t) = \int_a^b \left| \sum_{|j| \leq n} \sum_{s=0}^N D^{N-s} P_N(t) (-D)^s \omega_N(x) e^{2\pi i j(t-x)/h} \right| dx. \quad (3.7)$$

Суммируя геометрическую прогрессию, находим

$$\begin{aligned} \sum_{|j| \leq n} e^{2\pi i j(t-x)/h} &= \frac{e^{2\pi i(n+1)(t-x)/h} - e^{-2\pi i n(t-x)/h}}{e^{2\pi i(t-x)/h} - 1} \\ &= \frac{\sin\{(2n+1)\pi(t-x)/h\}}{\sin\{\pi(t-x)/h\}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Поскольку степень полинома P_N равна N , то

$$P_N(t + \alpha) = \sum_{s=0}^N \frac{\alpha^{N-s}}{(N-s)!} D^{N-s} P_N(t)$$

для всех α . Поэтому (см. (1.5))

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^N D^{N-s} P_N(t) (-D)^s \omega_N(x) \\ &= \sum_{s=0}^N D^{N-s} P_N(t) \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^s \left\{ \frac{1}{N!} \bar{\partial}^{N+1} \{ (x-a)_+^N \} \right\} \\ &= \sum_{s=0}^N (-1)^s D^{N-s} P_N(t) \frac{1}{(N-s)!} \bar{\partial}^{N+1} \{ (x-a)_+^0 (x-a)^{N-s} \} \\ &= (-1)^N \bar{\partial}_x^{N+1} \left\{ (x-a)_+^0 \sum_{s=0}^N \frac{(a-x)^{N-s}}{(N-s)!} D^{N-s} P_N(t) \right\} \\ &= (-1)^N \bar{\partial}_x^{N+1} \{ (x-a)_+^0 P_N(t+a-x) \}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.7)–(3.9) следует, что

$$L_n^0(t) = \int_a^b \left| \frac{\sin\{(2n+1)\pi(t-x)/h\}}{\sin\{\pi(t-x)/h\}} \bar{\partial}_x^{N+1} \{ (x-a)_+^0 P_N(t+a-x) \} \right| dx. \quad (3.10)$$

Удобно в (3.10) ввести новую независимую переменную $z \in [0, N+1]$ и новую переменную интегрирования $y \in [0, N+1]$, связанные с $t \in [a, b]$, $x \in [a, b]$ равенствами

$$t = t(z) = a + zh, \quad (3.11)$$

$$x = a + yh. \quad (3.12)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \bar{\partial}_x^{N+1} \{ (x-a)_+^0 P_N(t+a-x) \} \\ &= h^{-N-1} \sum_{s=0}^{N+1} (-1)^s \binom{N+1}{s} (x-sh-a)_+^0 P_N(t+a-x+sh) \\ &= h^{-N-1} \sum_{s=0}^{N+1} (-1)^s \binom{N+1}{s} (h(y-s))_+^0 P_N(hz-hy+a+sh) \\ &= h^{-N-1} \sum_{s=0}^{N+1} (-1)^s \binom{N+1}{s} (y-s)_+^0 \frac{1}{N!} \prod_{k=1}^N (hz-hy+sh-kh) \\ &= h^{-1} \sum_{s=0}^{N+1} (-1)^s \binom{N+1}{s} (y-s)_+^0 Q_N(z-y+s) \\ &= h^{-1} \nabla_y^{N+1} \{ y_+^0 Q_N(z-y) \} \end{aligned}$$

(см. (1.17), (1.18)), то из (3.10)–(3.12) следует, что

$$L_n^0(t(z)) = \int_0^{N+1} \left| \frac{\sin(2n+1)\pi(z-y)}{\sin \pi(z-y)} \nabla_y^{N+1} \{y_+^0 Q_N(z-y)\} \right| dy. \quad (3.13)$$

Точно так же доказывается, что

$$M_n^0(t(z)) = \int_0^{N+1} \left| \frac{\sin(2n+1)\pi(z-y)}{\sin \pi(z-y)} \nabla_z^{N+1} \{z_+^0 Q_N(y-z)\} \right| dy. \quad (3.14)$$

Применяя лемму 1.6, из (3.13) получаем, что

$$\begin{aligned} L_n^0(t(z)) &= \sum_{k=0}^N \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin(2n+1)\pi(z-y)}{\sin \pi(z-y)} \nabla_y^{N+1} \{y_+^0 Q_N(z-y)\} \right| dy \\ &= \sum_{k=0}^N \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin(2n+1)\pi(z-y)}{\sin \pi(z-y)} \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq k}}^N \frac{z-y+k-s}{s-k} \right| dy \\ &= \int_{z-1}^z \left| \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} \right| \sum_{k=0}^N \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq k}}^N \left| \frac{x-s}{k-s} \right| dx \end{aligned}$$

(в последнем равенстве введена новая переменная интегрирования $x = z - y + k$).

Если $j = 0, \dots, N$ и $z \in [j, j+1)$, то из (3.14) и леммы 1.6 (в которой роль k играет j , а y и z поменялись местами) следует, что

$$\begin{aligned} M_n^0(t(z)) &= \int_0^{N+1} \left| \frac{\sin(2n+1)\pi(z-y)}{\sin \pi(z-y)} \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^N \frac{y-z+j-s}{s-j} \right| dy \\ &= \sum_{k=0}^N \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin(2n+1)\pi(z-y)}{\sin \pi(z-y)} \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^N \frac{y-z+j-s}{s-j} \right| dy \\ &= \int_{z-1}^z \left| \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} \right| \sum_{k=0}^N \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^N \left| \frac{x-k+s-j}{s-j} \right| dx \end{aligned}$$

(здесь использована та же замена переменной интегрирования $x = z - y + k$). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Как уже упоминалось в замечании 1.1, производная $D^N \omega_N$ не определена в узлах $x_0, \dots, x_{N+1}$. Поэтому в этих же точках не определены функции $\psi_{k,N}$ вида (1.3) и функция Лебега M_n^0 . Если в рассмотрениях §2 и при определении функции Лебега L_n^0 этот факт не имел никакого значения, то для создания более цельной картины поведения функции M_n^0 стоит доопределить функцию $D^N \omega_N$ в этих узлах, и фактически это уже сделано при доказательстве леммы 3.1. Дело в том, что при доказательстве равенства (3.9) использовалось соотношение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^N \left\{ \frac{1}{N!} \{(x-a)_+^N\} \right\} = (x-a)_+^0,$$

правая часть которого при $x = a$ равна 1 (и это несмотря на то, что функция $(x - a)_+^N$ не имеет производной порядка N в точке $x = a$). Такое доопределение приводит к тому, что кусочно-постоянная функция $D^N \omega_N$ становится непрерывной справа в узлах $x_0, \dots, x_N$ (как и функция M_n^0 , что, впрочем, видно и из представления (3.5)). Что касается точки $x_{N+1} = b$, то в ней функция M_n^0 по той же причине пока не определена (см. (3.5)). Логично это сделать таким образом, чтобы функция M_n^0 оказалась непрерывной слева в этой точке. Все сказанное выше в равной мере относится и ко всем функциям M_n вида (3.2) (имеется в виду их непрерывность справа в узлах $x_0, \dots, x_N$ и непрерывность слева в точке b).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если $N = 0$, то системы функций (1.2) и (1.3) с точностью до постоянного множителя совпадают с тригонометрической системой на $[a, b]$ (см. замечание 1.2). Конечно, в этом случае совпадают и их функции Лебега. Поскольку $l_0(x) \equiv m_{0,0}(x) \equiv 1$, то лемма 3.1 подтверждает ставший классическим факт постоянства функций Лебега тригонометрической системы (см., например, [5]):

$$\begin{aligned} L_n^0(a + z(b - a)) &= M_n^0(a + z(b - a)) = \int_{z-1}^z \left| \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} \right| dx \\ &= \int_0^1 \left| \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} \right| dx, \quad z \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Отметим некоторые свойства функций l_N и $m_{N,j}$, определенных равенствами (3.4) и (3.6). Эти свойства будут в дальнейшем применяться для исследования асимптотики функций Лебега. Очевидно, что l_N и $m_{N,j}$ — непрерывные кусочно-полиномиальные функции, причем на любом из интервалов $(m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$, каждая из них представляет собой алгебраический многочлен степени N . Кроме того, непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что

$$l_0(x) \equiv m_{0,0}(x) \equiv 1;$$

если $N \geq 1$, то

$$\begin{aligned} l_N(m) &= 1, \quad m = 0, \dots, N; \\ l_N(-1) &= l_N(N+1) = 2^{N+1} - 1; \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} m_{N,j}(j) &= 1, \quad j = 0, \dots, N; \\ m_{N,j}(j-1) &= 1 + \binom{N+1}{j}, \quad j = 1, \dots, N; \\ m_{N,j}(j+1) &= 1 + \binom{N+1}{j+1}, \quad j = 0, \dots, N-1; \\ m_{N,0}(-1) &= m_{N,N}(N+1) = 1. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Перейдем теперь к изучению асимптотического поведения функций Лебега. Предлагаемый ниже подход состоит в нахождении таких функциональных последовательностей $\alpha_n(z)$ и $\beta_n(z)$, которые, во-первых, имеют достаточно

обозримый вид, а во-вторых, обладают следующим свойством: существует такая константа C , что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $z \in [0, N+1]$ справедливы оценки

$$|L_n^0(a+zh) - \alpha_n(z)| \leq C, \quad |M_n^0(a+zh) - \beta_n(z)| \leq C.$$

На основании такого рода глобальных оценок, равномерных по совокупности переменных $\{n, z\}$, будут построены некоторые более наглядные асимптотики функций Лебега.

В дальнейшем выражение

$$f_n(z) \simeq g_n(z), \quad z \in A,$$

будет означать существование константы C (которая может зависеть только от N) такой, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $z \in A$ справедлива оценка

$$|f_n(z) - g_n(z)| \leq C.$$

Кроме того, одним и тем же символом C будут обозначаться различные константы, которые могут зависеть только от N .

Пусть α — определенная на $\mathbb{R}$ 1-периодическая функция, причем $\alpha(x) = \pi|x|$ для всех $x \in [-1/2, 1/2]$. Другими словами, если $m \in \mathbb{R}$, то $\alpha(x) = \pi|x - m|$ для всех $x \in [m - 1/2, m + 1/2]$. Эта функция будет выполнять роль весьма грубого (но достаточного для наших целей) приближения для $|\sin \pi x|$.

ЛЕММА 3.2. *Для всех $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство*

$$\left| \frac{|\sin(2n+1)\pi x|}{|\sin \pi x|} - \frac{|\sin 2n\pi x|}{\alpha(x)} \right| \leq \frac{2}{\pi} + 1. \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n \in \mathbb{R}$ и $x \in [-1/2, 1/2]$, то

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} - \frac{\sin 2n\pi x}{\pi x} &= \frac{\sin 2n\pi x \cos \pi x + \cos 2n\pi x \sin \pi x}{\sin \pi x} - \frac{\sin 2n\pi x}{\pi x} \\ &= \sin 2n\pi x \left\{ \operatorname{ctg} \pi x - \frac{1}{\pi x} \right\} + \cos 2n\pi x. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Функция $g(x) = \operatorname{ctg} \pi x - 1/(\pi x)$ непрерывна и монотонна на $[-1/2, 1/2]$. Поэтому

$$\max_{x \in [-1/2, 1/2]} |g(x)| = \left| g\left(\pm \frac{1}{2}\right) \right| = \frac{2}{\pi},$$

что вместе с (3.18) приводит к оценке

$$\left| \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} - \frac{\sin 2n\pi x}{\pi x} \right| \leq \left| \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} - \frac{\sin 2n\pi x}{\pi x} \right| \leq \frac{2}{\pi} + 1$$

для всех $x \in [-1/2, 1/2]$, $n \in \mathbb{Z}$. Осталось воспользоваться определением функции α и 1-периодичностью левой части (3.17). Лемма доказана.

Заметим, что в неравенстве (3.17) (равно как и в подобных оценках, получаемых в дальнейшем) мы вовсе не стремимся к тому, чтобы константа в правой части была наименьшей (например, правую часть (3.17) можно без труда заменить на меньшую величину $\sqrt{\pi^2 + 4}/\pi$); важно лишь, чтобы эта константа не зависела от n .

Пусть последовательность функций $\Phi_n(\xi)$ ($n \in \mathbb{N}$, $\xi \in [0, 1]$) имеет следующий вид:

$$\Phi_n(\xi) = \int_{\xi-1}^{\xi} \left| \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} \right| R(x) dx. \quad (3.19)$$

Здесь R — определенная на $[-1, 1]$ не зависящая от n кусочно-полиномиальная непрерывная неотрицательная функция такая, что

$$R(x) = \begin{cases} S_1(x), & \text{если } x \in [-1, 0], \\ S_2(x), & \text{если } x \in [0, 1], \end{cases} \quad (3.20)$$

где S_1 и S_2 — некоторые алгебраические многочлены. Кроме того, пусть

$$R(-1) = 1 + A, \quad R(0) = 1, \quad R(1) = 1 + B,$$

где $A \geq 0$, $B \geq 0$, т.е.

$$S_1(-1) = 1 + A, \quad S_1(0) = S_2(0) = 1, \quad S_2(1) = 1 + B. \quad (3.21)$$

Смысл такого определения состоит в том, что поскольку L_n и M_n имеют подобный вид (см. лемму 3.1), возможно параллельное исследование их асимптотических свойств, которое, по сути дела, сводится к изучению асимптотики Φ_n .

Определим еще последовательность функций $F_n(\xi)$ ($n \in \mathbb{N}$, $\xi \in [0, 1/2]$) следующим образом:

$$F_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi\xi}^{\pi} \frac{|\sin nx|}{x} dx. \quad (3.22)$$

ЛЕММА 3.3. *Существует константа C , зависящая только от полиномов S_1 и S_2 , такая, что для всех $n \in \mathbb{Z}$ выполняются следующие неравенства:*

1) если $\xi \in [0, 1/2]$, то

$$|\Phi_n(\xi) - \{2F_n(0) + AF_n(\xi)\}| \leq C; \quad (3.23)$$

2) если $\xi \in [1/2, 1]$, то

$$|\Phi_n(\xi) - \{2F_n(0) + BF_n(1 - \xi)\}| \leq C. \quad (3.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.17) и (3.19) следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \Phi_n(\xi) - \int_{\xi-1}^{\xi} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\alpha(x)} R(x) dx \right| \\ & \leq \int_{\xi-1}^{\xi} \left| \frac{|\sin(2n+1)\pi x|}{\sin \pi x} - \frac{|\sin 2n\pi x|}{\alpha(x)} \right| R(x) dx \leq C_1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

для всех $\xi \in [0, 1]$, где в качестве константы C_1 можно взять, например, следующую величину:

$$C_1 = \left(\frac{2}{\pi} + 1 \right) \max_{x \in [-1, 1]} R(x).$$

Заметим, что если $\xi \in [0, 1/2]$, то

$$\int_{\xi-1}^{\xi} f(x) dx = \int_{\xi}^{1/2} f(x-1) dx + \int_0^{1/2} f(-x) dx + \int_0^{\xi} f(x) dx,$$

а если $\xi \in [1/2, 1]$, то

$$\int_{\xi-1}^{\xi} f(x) dx = \int_0^{1-\xi} f(-x) dx + \int_0^{1/2} f(x) dx + \int_{1-\xi}^{1/2} f(1-x) dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\xi-1}^{\xi} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\alpha(x)} R(x) dx &= \int_{\xi}^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} S_1(x-1) dx \\ &+ \int_0^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} S_1(-x) dx + \int_0^{\xi} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} S_2(x) dx \end{aligned} \quad (3.26)$$

для всех $\xi \in [0, 1/2]$ и

$$\begin{aligned} \int_{\xi-1}^{\xi} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\alpha(x)} R(x) dx &= \int_0^{1-\xi} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} S_1(-x) dx \\ &+ \int_0^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} S_2(x) dx + \int_{1-\xi}^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} S_2(1-x) dx \end{aligned} \quad (3.27)$$

для всех $\xi \in [1/2, 1]$.

Используя (3.21), получаем, что для многочленов S_1 и S_2 имеют место представления

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 1 - Ax + x(x+1)T_1(x), \\ S_2(x) &= 1 + Bx + x(x-1)T_2(x), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где T_1 и T_2 – некоторые алгебраические полиномы. Из (3.26)–(3.28) следует, что если $\xi \in [0, 1/2]$, то

$$\begin{aligned}
 & \int_{\xi-1}^{\xi} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\alpha(x)} R(x) dx \\
 &= \int_{\xi}^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} \{1 + A - Ax + x(x-1)T_1(x-1)\} dx \\
 &+ \int_0^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} \{1 + Ax + x(x-1)T_1(-x)\} dx \\
 &+ \int_0^{\xi} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} \{1 + Bx + x(x-1)T_2(x)\} dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{x} dx + \frac{A}{\pi} \int_{\xi}^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{x} dx + \rho_{n,1}(\xi), \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho_{n,1}(\xi) = & \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{\xi}^{1/2} |\sin 2n\pi x| \{-A + (x-1)T_1(x-1)\} dx \right. \\
 & + \int_0^{1/2} |\sin 2n\pi x| \{A + (x-1)T_1(-x)\} dx \\
 & \left. + \int_0^{\xi} |\sin 2n\pi x| \{B + (x-1)T_2(x)\} dx \right\}.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем, что если $\xi \in [1/2, 1]$, то

$$\begin{aligned}
 & \int_{\xi-1}^{\xi} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\alpha(x)} R(x) dx \\
 &= \int_0^{1-\xi} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} \{1 + Ax + x(x-1)T_1(-x)\} dx \\
 &+ \int_0^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} \{1 + Bx + x(x-1)T_2(x)\} dx \\
 &+ \int_{1-\xi}^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\pi x} \{1 + B - Bx + x(x-1)T_2(1-x)\} dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{x} dx + \frac{B}{\pi} \int_{1-\xi}^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{x} dx + \rho_{n,2}(\xi), \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho_{n,2}(\xi) = & \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{1-\xi} |\sin 2n\pi x| \{A + (x-1)T_1(-x)\} dx \right. \\
 & + \int_0^{1/2} |\sin 2n\pi x| \{B + (x-1)T_2(x)\} dx \\
 & \left. + \int_{1-\xi}^{1/2} |\sin 2n\pi x| \{-B + (x-1)T_2(1-x)\} dx \right\}.
 \end{aligned}$$

Понятно, что существует константа C_2 (зависящая только от полиномов S_1 и S_2) такая, что для всех $n \in \mathbb{Z}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |\rho_{n,1}(\xi)| &\leq C_2 \quad \text{для всех } \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ |\rho_{n,2}(\xi)| &\leq C_2 \quad \text{для всех } \xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Поскольку

$$\frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{1/2} \frac{|\sin 2n\pi x|}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi\eta}^{\pi} \frac{|\sin nx|}{x} dx = F_n(\eta)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$, $\eta \in [0, 1/2]$ (см. (3.22)), то из (3.29)–(3.31) получаем, что

$$\left| \int_{\xi-1}^{\xi} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\alpha(x)} R(x) dx - \{2F_n(0) + AF_n(\xi)\} \right| \leq C_2, \quad (3.32)$$

если $\xi \in [0, 1/2]$;

$$\left| \int_{\xi-1}^{\xi} \frac{|\sin 2n\pi x|}{\alpha(x)} R(x) dx - \{2F_n(0) + BF_n(1-\xi)\} \right| \leq C_2, \quad (3.33)$$

если $\xi \in [1/2, 1]$. Из (3.25), (3.32), (3.33) сразу следуют оценки (3.23), (3.24). Лемма доказана.

Для оценки значений фигурирующей в формулировке леммы 3.3 последовательности функций $F_n(\xi)$ вида (3.22) докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 3.4. *Справедливо соотношение*

$$F_n(\xi) \simeq \frac{2}{\pi^2} \left| \ln \left(\xi + \frac{1}{n} \right) \right|, \quad \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (3.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После замены переменной интегрирования функция F_n приобретает следующий вид:

$$F_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi\xi}^{\pi} \frac{|\sin nx|}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi n\xi}^{\pi n} \frac{|\sin x|}{x} dx. \quad (3.35)$$

С целью интегрирования по частям в (3.35) определим первообразную функции $|\sin x|$ равенством

$$f(x) = \int_0^x |\sin t| dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно показать, что

$$f(x) = \frac{2x}{\pi} + q(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где q — π -периодическая функция, имеющая на отрезке $[0, \pi]$ следующий вид:

$$q(x) = -\frac{2x}{\pi} + 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad x \in [0, \pi].$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $q(\pi n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{2\pi n\xi}^{\pi n} \frac{|\sin x|}{x} dx &= \int_{2\pi n\xi}^{\pi n} \frac{f'(x) dx}{x} = \frac{f(\pi n)}{\pi n} - \frac{f(2\pi n\xi)}{2\pi n\xi} + \int_{2\pi n\xi}^{\pi n} \frac{f(x) dx}{x^2} \\ &= -\frac{q(2\pi n\xi)}{2\pi n\xi} + \int_{2\pi n\xi}^{\pi(1+n\xi)} \frac{f(x) dx}{x^2} + \int_{\pi(1+n\xi)}^{\pi n} \frac{f(x) dx}{x^2} \\ &= -\frac{q(2\pi n\xi)}{2\pi n\xi} + \int_{2\pi n\xi}^{\pi(1+n\xi)} \frac{f(x) dx}{x^2} + \frac{2}{\pi} \int_{\pi(1+n\xi)}^{\pi n} \frac{dx}{x} + \int_{\pi(1+n\xi)}^{\pi n} \frac{q(x) dx}{x^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\left| \int_{2\pi n\xi}^{\pi n} \frac{|\sin x|}{x} dx - \frac{2}{\pi} \ln \frac{n}{1+n\xi} \right| \\ &= \left| -\frac{q(2\pi n\xi)}{2\pi n\xi} + \int_{2\pi n\xi}^{\pi(1+n\xi)} \frac{f(x) dx}{x^2} + \int_{\pi(1+n\xi)}^{\pi n} \frac{q(x) dx}{x^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{q(2\pi n\xi)}{2\pi n\xi} \right| + \left| \int_{2\pi n\xi}^{\pi(1+n\xi)} \frac{f(x) dx}{x^2} \right| + \int_{\pi}^{\infty} \frac{|q(x)| dx}{x^2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Равномерная по $\xi \in [0, 1/2]$ и $n \in \mathbb{N}$ ограниченность первого и третьего слагаемых правой части последнего неравенства следует из легко проверяемой ограниченности на $\mathbb{R}$ функций $q(x)/x$ и $q(x)$. Что касается второго слагаемого, то дело сводится к установлению равномерной по $z \in [0, \infty)$ ограниченности величины

$$\left| \int_{2z}^{\pi+z} \frac{f(x) dx}{x^2} \right|$$

(здесь использовано обозначение $z = \pi n\xi$). Необходимо рассмотреть два случая. Если $z \in [0, \pi]$, то $0 \leq 2z \leq \pi + z \leq 2\pi$ и

$$\left| \int_{2z}^{\pi+z} \frac{f(x) dx}{x^2} \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{f(x) dx}{x^2} < \infty.$$

Если же $z \in [\pi, \infty)$, то $2\pi \leq \pi + z \leq 2z \leq \infty$ и

$$\begin{aligned} \left| \int_{2z}^{\pi+z} \frac{f(x) dx}{x^2} \right| &= \int_{\pi+z}^{2z} \frac{f(x) dx}{x^2} \\ &\leq \frac{2}{\pi} \ln \frac{2z}{\pi+z} + \int_{\pi+z}^{2z} \frac{|q(x)| dx}{x^2} \\ &\leq \frac{2}{\pi} \ln 2 + \int_{2\pi}^{\infty} \frac{|q(x)| dx}{x^2} < \infty. \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться представлением (3.35), только что полученными оценками правой части (3.36) и заметить, что если $n \geq 2$ и $\xi \in [0, 1/2]$, то

$$\ln \frac{n}{1+n\xi} = \left| \ln \left(\xi + \frac{1}{n} \right) \right|.$$

Лемма доказана.

Прямым следствием лемм 3.3 и 3.4 является следующее утверждение.

ЛЕММА 3.5. Последовательность $\Phi_n(x)$ вида (3.19) такова, что

$$\Phi_n(\xi) \simeq \frac{4}{\pi^2} \ln n + \frac{2A}{\pi^2} \left| \ln \left(\xi + \frac{1}{n} \right) \right| + \frac{2B}{\pi^2} \left| \ln \left(1 - \xi + \frac{1}{n} \right) \right|, \quad \xi \in [0, 1]. \quad (3.37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.34) получаем, что

$$F_n(0) \simeq \frac{2}{\pi^2} \ln n.$$

Поэтому (см. (3.23), (3.24), (3.34))

$$\Phi_n(\xi) \simeq \frac{4}{\pi^2} \ln n + \begin{cases} \frac{2A}{\pi^2} \left| \ln \left(\xi + \frac{1}{n} \right) \right|, & \xi \in \left[0, \frac{1}{2} \right], \\ \frac{2B}{\pi^2} \left| \ln \left(1 - \xi + \frac{1}{n} \right) \right|, & \xi \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \end{cases}$$

откуда сразу следует (3.37), поскольку если $n \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{2B}{\pi^2} \left| \ln \left(1 - \xi + \frac{1}{n} \right) \right| \leq \frac{2B}{\pi^2} \ln 2 \quad \text{для всех } \xi \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$$

и

$$\frac{2A}{\pi^2} \left| \ln \left(\xi + \frac{1}{n} \right) \right| \leq \frac{2A}{\pi^2} \ln 2 \quad \text{для всех } \xi \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right].$$

Лемма доказана.

Леммы 3.1 и 3.5 позволяют сделать вывод о поведении функций Лебега L_n^0 и M_n^0 (стоит напомнить, что узлы x_k , фигурирующие в формулировке приводимой ниже леммы, имеют вид $x_k = a + kh$, где $h = (b - a)/(N + 1)$).

ЛЕММА 3.6. Существует константа C , зависящая только от N , такая, что

$$\left| L_n^0(t) - \frac{4}{\pi^2} \left\{ \ln n + (2^N - 1) \left[\left| \ln \left(\frac{t - a}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| + \left| \ln \left(\frac{b - t}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \right] \right\} \right| \leq C \quad (3.38)$$

и

$$\left| M_n^0(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(\frac{|t - x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \right| \leq C \quad (3.39)$$

для всех $t \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку изучение поведения функций L_n^0 и M_n^0 будет вестись параллельно, то во избежание путаницы нижними индексами l и m будут снабжаться объекты, относящиеся к L_n^0 и M_n^0 соответственно. Для выяснения характера поведения функций Лебега воспользуемся тем, что при подходящем выборе функции R они могут трактоваться как функции Φ_n вида (3.19), поведение которых описано в лемме 3.5. Более точно, сравнение полученных в лемме 3.1 представлений (3.3)–(3.6) функций Лебега с определением (3.19) функции Φ_n позволяет для каждого $j = 0, \dots, N$ сделать следующий вывод о поведении $L_n^0(a + zh)$ и $M_n^0(a + zh)$ на полуинтервале $[j, j + 1)$. Возьмем любое $j = 0, \dots, N$. Тогда справедливы такие утверждения:

- 1) если в определении (3.19) функции Φ_n положить $R(x) = R_l(x) = l_N(x + j)$, то $\Phi_n(z - j) = L_n^0(a + zh)$ для всех $z \in [j, j + 1)$;
- 2) если в определении функции Φ_n положить $R(x) = R_m(x) = m_{N,j}(x + j)$, то $\Phi_n(z - j) = M_n^0(a + zh)$ для всех $z \in [j, j + 1)$.

Действительно, если $R(x) = R_m(x) = m_{N,j}(x + j)$, то в соответствии с (3.19) и (3.5)

$$\begin{aligned}\Phi_n(z - j) &= \int_{z-j-1}^{z-j} \left| \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} \right| m_{N,j}(x + j) dx \\ &= \int_{z-1}^z \left| \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} \right| m_{N,j}(x) dx = M_n^0(a + zh)\end{aligned}$$

для всех $z \in [j, j + 1)$. Аналогичным образом проверяется и первое из сформулированных выше утверждений.

Кроме того, R_l и R_m – не зависящие от n кусочно-полиномиальные непрерывные неотрицательные функции, удовлетворяющие всем условиям, дающим возможность применить лемму 3.5. В частности, $R_l(0) = R_m(0) = 1$, поскольку в силу (3.15), (3.16) $l_N(j) = m_{N,j}(j) = 1$ для всех $j = 0, \dots, N$. Для того чтобы воспользоваться леммой 3.5, осталось найти значения $R(\pm 1)$, определяющие величины $A = R(-1) - 1$ и $B = R(1) - 1$ (см. (3.21)). Используя (3.15), (3.16), описывающие значения l_N и $m_{N,j}$ в целых точках, получаем, что если $N = 0$, то для $j = 0$

$$A_l = B_l = A_m = B_m = 0,$$

поскольку $l_0(x) \equiv m_{0,0}(x) \equiv 1$. Если же $N \geq 1$, то следует рассмотреть три случая.

- 1) Пусть $j = 0$. Тогда поскольку

$$\begin{aligned}R_l(-1) &= l_N(-1) = 2^{N+1} - 1, & R_l(1) &= l_N(1) = 1, \\ R_m(-1) &= m_{N,0}(-1) = 1, & R_m(1) &= m_{N,0}(1) = 1 + \binom{N+1}{1},\end{aligned}$$

то

$$A_l = 2^{N+1} - 2, \quad B_l = 0, \quad A_m = 0, \quad B_m = \binom{N+1}{1}.$$

2) Пусть $j = 1, \dots, N-1$. Тогда поскольку

$$\begin{aligned} R_l(-1) &= l_N(j-1) = 1, & R_l(1) &= l_N(j+1) = 1, \\ R_m(-1) &= m_{N,j}(j-1) = 1 + \binom{N+1}{j}, & R_m(1) &= m_{N,j}(j+1) = 1 + \binom{N+1}{j+1}, \end{aligned}$$

то

$$A_l = B_l = 0, \quad A_m = \binom{N+1}{j}, \quad B_m = \binom{N+1}{j+1}.$$

3) Пусть $j = N$. Тогда поскольку

$$\begin{aligned} R_l(-1) &= l_N(N-1) = 1, & R_l(1) &= l_N(N+1) = 2^{N+1} - 1, \\ R_m(-1) &= m_{N,N}(N-1) = 1 + \binom{N+1}{N}, & R_m(1) &= m_{N,N}(N+1) = 1, \end{aligned}$$

то

$$A_l = 0, \quad B_l = 2^{N+1} - 2, \quad A_m = \binom{N+1}{N}, \quad B_m = 0.$$

После того как найдены все A и B , можно применить (3.37). Для $N = 0$ получаем, что

$$L_n^0(a + zh) \simeq \frac{4}{\pi^2} \ln n, \quad M_n^0(a + zh) \simeq \frac{4}{\pi^2} \ln n, \quad z \in [0, 1]. \quad (3.40)$$

Если же $N \geq 1$, то

$$\begin{aligned} L_n^0(a + zh) &\simeq \frac{4}{\pi^2} \ln n \\ &+ \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} (2^N - 1) \left| \ln \left(z + \frac{1}{n} \right) \right|, & z \in [0, 1), \\ 0, & z \in [j, j+1), j = 1, \dots, N-1, \\ \frac{4}{\pi^2} (2^N - 1) \left| \ln \left(N+1 - z + \frac{1}{n} \right) \right|, & z \in [N, N+1], \end{cases} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} M_n^0(a + zh) &\simeq \frac{4}{\pi^2} \ln n \\ &+ \begin{cases} \frac{2}{\pi^2} \binom{N+1}{1} \left| \ln \left(1 - z + \frac{1}{n} \right) \right|, & z \in [0, 1), \\ \frac{2}{\pi^2} \left\{ \binom{N+1}{j} \left| \ln \left(z - j + \frac{1}{n} \right) \right| \right. \\ \quad \left. + \binom{N+1}{j+1} \left| \ln \left(j+1 - z + \frac{1}{n} \right) \right| \right\}, & z \in [j, j+1), j = 1, \dots, N-1, \\ \frac{2}{\pi^2} \binom{N+1}{N} \left| \ln \left(z - N + \frac{1}{n} \right) \right|, & z \in [N, N+1]. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.42)$$

В только что выписанных соотношениях участвует точка $z = N+1$, поскольку для L_n^0 это можно сделать сразу с помощью лемм 3.1 и 3.5, а для функции M_n^0 используется ее непрерывность слева в точке $t = b$ (см. замечание 3.1).

Используя (3.40)–(3.42), получаем, что

$$L_n^0(a + zh) \simeq \frac{4}{\pi^2} \left\{ \ln n + (2^N - 1) \left[\left| \ln \left(z + \frac{1}{n} \right) \right| + \left| \ln \left(N + 1 - z + \frac{1}{n} \right) \right| \right] \right\}, \quad z \in [0, N + 1], \quad (3.43)$$

$$M_n^0(a + zh) \simeq \frac{4}{\pi^2} \ln n + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(|z - k| + \frac{1}{n} \right) \right|, \quad z \in [0, N + 1]. \quad (3.44)$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что разности правых частей соотношений (3.43), (3.44) и соответствующих правых частей (3.40)–(3.42) равномерно по $n \in \mathbb{Z}$, $z \in [0, N + 1]$ ограничены. Если $N = 0$, то эти разности равны нулю. Пусть $N \geq 1$. Оценим разности правых частей (3.41) и (3.43). Если $z \in [0, 1)$, то

$$\frac{4}{\pi^2} (2^N - 1) \left| \ln \left(N + 1 - z + \frac{1}{n} \right) \right| \leq \frac{4}{\pi^2} (2^N - 1) \ln(N + 2)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $j = 1, \dots, N - 1$ и $z \in [j, j + 1)$, то

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\pi^2} (2^N - 1) \left\{ \left| \ln \left(z + \frac{1}{n} \right) \right| + \left| \ln \left(N + 1 - z + \frac{1}{n} \right) \right| \right\} \\ & \leq \frac{4}{\pi^2} (2^N - 1) \{ \ln(j + 2) + \ln(N + 2 - j) \} \leq \frac{8}{\pi^2} (2^N - 1) \ln(N + 1) \end{aligned}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Наконец, если $z \in [N, N + 1]$, то

$$\frac{4}{\pi^2} (2^N - 1) \left| \ln \left(z + \frac{1}{n} \right) \right| \leq \frac{4}{\pi^2} (2^N - 1) \ln(N + 2)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Оценивая разности правых частей (3.42) и (3.44), получаем, что если $j = 0, \dots, N$ и $z \in [j, j + 1)$, то

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{k=1, k \neq j \\ k \neq j+1}}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(|z - k| + \frac{1}{n} \right) \right| \\ & \leq \frac{2}{\pi^2} \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} \binom{N+1}{k} \ln(j + 2 - k) + \sum_{k=j+2}^N \binom{N+1}{k} \ln(k - j + 1) \right\} \\ & \leq \frac{2^{N+2}}{\pi^2} \ln(N + 1) \end{aligned}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. В точке $z = N + 1$ тоже все в порядке.

Для того чтобы получить из (3.43), (3.44) соотношения (3.38), (3.39), осталось вернуться к старой переменной t , связанной с z равенством $t = a + zh$, и учесть

соотношение $h(N+1) = b - a$. Зависимость постоянной C только от N легко прослеживается. Лемма доказана.

Лемма 3.6, дающая представление о характере поведения подпоследовательностей $L_{(2n+1)(N+1)-1}$ и $M_{(2n+1)(N+1)-1}$ (напомним, что в начале параграфа были введены обозначения $L_n^0 = L_{(2n+1)(N+1)-1}$, $M_n^0 = M_{(2n+1)(N+1)-1}$), позволяет доказать следующее утверждение, описывающее поведение L_n и M_n для всех $n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует константа C , зависящая только от N , такая, что*

$$\left| L_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \left\{ \ln n + (2^N - 1) \left[\left| \ln \left(\frac{t-a}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| + \left| \ln \left(\frac{b-t}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \right] \right\} \right| \leq C \quad (3.45)$$

и

$$\left| M_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \right| \leq C \quad (3.46)$$

для всех $t \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы получить (3.46), воспользуемся леммой 3.6 (немного переформулировав ее результаты). Тогда можно гарантировать наличие такой константы C (зависящей только от N), что для любого $n \in \mathbb{N}$, имеющего вид $n = (2m+1)(N+1) - 1$, где $m \in \mathbb{N}$, неравенство

$$\left| M_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln m - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{m} \right) \right| \right| \leq C \quad (3.47)$$

выполняется для всех $t \in [a, b]$. Так как $n = 2(N+1)m + N$, то

$$\begin{aligned} 2(N+1)m &\leq n \leq (3N+2)m, \\ \frac{1}{3N+2} \left\{ \frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{m} \right\} &\leq \frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n} \leq \frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |\ln n - \ln m| &\leq \ln(3N+2), \\ \left| \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{m} \right) \right| &\leq \ln(3N+2). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &\left| M_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \right| \\ &\leq \left| M_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln m - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{m} \right) \right| \right| \\ &\quad + \frac{4}{\pi^2} |\ln m - \ln n| \\ &\quad + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \left| \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{m} \right) \right| - \left| \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \right|, \end{aligned}$$

то наличие оценок (3.47), (3.48) позволяет сделать вывод о справедливости неравенства (3.46) для всех $n \in \mathbb{N}$, имеющих вид $n = (2m + 1)(N + 1) - 1$, где $m \in \mathbb{N}$.

Используя только что полученную оценку (3.46) для каждого $(2N + 2)$ -го элемента последовательности M_n , установим ее справедливость для любого $n \in \mathbb{N}$. Для этого заметим, что если $n \in \mathbb{N}$, то найдется такое $n' \in \mathbb{N}$, что, во-первых, $n' = (2m + 1)(N + 1) - 1$, где $m \in \mathbb{N}$, а во-вторых, $0 \leq n' - n \leq M$, где $M = 2N + 1$ для $n \geq N + 1$ и $M = 3N + 1$ для $n \leq N$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| M_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(\frac{|t - x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \right| \\ & \leq |M_n(t) - M_{n'}(t)| \\ & + \left| M_{n'}(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n' - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(\frac{|t - x_k|}{h} + \frac{1}{n'} \right) \right| \right| \\ & + \frac{4}{\pi^2} |\ln n' - \ln n| \\ & + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \left| \ln \left(\frac{|t - x_k|}{h} + \frac{1}{n'} \right) \right| - \left| \ln \left(\frac{|t - x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \right|. \quad (3.49) \end{aligned}$$

Покажем, что каждое из слагаемых в правой части последнего неравенства оценивается сверху константой, зависящей только от N . Из (3.2) следует, что

$$\begin{aligned} |M_n(t) - M_{n'}(t)| &= \left| \int_a^b \left| \sum_{k=0}^n \psi_k(t) \overline{\varphi_k(x)} \right| dx - \int_a^b \left| \sum_{k=0}^{n'} \psi_k(t) \overline{\varphi_k(x)} \right| dx \right| \\ &\leq \int_a^b \sum_{k=n+1}^{n'} |\psi_k(t) \overline{\varphi_k(x)}| dx. \quad (3.50) \end{aligned}$$

Поскольку для систем (1.2), (1.3) существует такая зависящая лишь от N константа C , что

$$|\varphi_{j,s}(x)| \leq Ch^s, \quad |\psi_{j,s}(t)| \leq Ch^{-s-1}$$

для всех $x, t \in [a, b]$ и любых $j \in \mathbb{Z}$, $s = 0, \dots, N$ (см. замечание 1.4), то

$$\int_a^b |\psi_k(t) \overline{\varphi_k(x)}| dx \leq C^2 h^{-1} (b - a) = C^2 (N + 1),$$

что вместе с (3.50) приводит к оценке

$$|M_n(t) - M_{n'}(t)| \leq MC^2 (N + 1). \quad (3.51)$$

Поскольку $n \leq n' \leq n + M$, то

$$\begin{aligned} n &\leq n' \leq (M + 1)n, \\ \frac{1}{M + 1} \left\{ \frac{|t - x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right\} &\leq \frac{|t - x_k|}{h} + \frac{1}{n'} \leq \frac{|t - x_k|}{h} + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |\ln n' - \ln n| &\leq \ln(M+1), \\ \left| \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n'} \right) - \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| &\leq \ln(M+1). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{4}{\pi^2} |\ln n' - \ln n| + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n'} \right) - \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \leq C \quad (3.52)$$

для всех $t \in [a, b]$. Оценка (3.46) сразу следует из (3.49), (3.51), (3.52) и уже доказанной ограниченности величины

$$\left| M_{n'}(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n' - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n'} \right) \right|.$$

Неравенство (3.45) устанавливается точно так же. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Заслуживает внимания тот факт, что характер поведения функций Лебега не зависит от a, b и h (особенно наглядно это видно в соотношениях типа (3.43), (3.44), правые части которых зависят только от z, n и N).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Интересно отметить, что сумма “амплитуд” флуктуаций функции M_n в узлах $x_1, \dots, x_N$ совпадает с соответствующей величиной для L_n в каждом из концов отрезка $[a, b]$:

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} = \frac{4}{\pi^2} (2^N - 1).$$

Впрочем, такое совпадение может быть истолковано как следствие очевидного равенства

$$\int_a^b L_n(t) dt = \int_a^b M_n(t) dt.$$

Как уже упоминалось в замечаниях 1.2 и 3.2, если $N = 0$, то системы функций (1.2) и (1.3) с точностью до постоянного множителя совпадают с тригонометрической системой, а их функции Лебега постоянны и совпадают. Полагая в (3.45), (3.46) $N = 0$, получаем следующее подтверждение классической асимптотики констант Лебега тригонометрической системы (см., например, [5]).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если $N = 0$, то

$$L_n(t) = M_n(t) \simeq \frac{4}{\pi^2} \ln n, \quad t \in [a, b].$$

Если $N \geq 1$, то из теоремы 3.1 следует, что на $[a, b]$ имеются точки, в которых портится асимптотика функций Лебега. Для L_n это концы отрезка, для M_n — внутренние узлы сплайна ω_N . Следующие два утверждения описывают для случая $N \geq 1$ асимптотическое поведение функций Лебега на множестве, получаемом из отрезка $[a, b]$ удалением окрестностей “плохих” точек.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Существует зависящая только от N константа C такая, что для любого $\delta \in (0, (N+1)/2]$ и любых $t \in [a + \delta h, b - \delta h]$, $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\left| L_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n \right| \leq C + \frac{4}{\pi^2} (2^N - 1) |\ln \delta|. \quad (3.53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.45) следует, что

$$\left| L_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n \right| \leq C + \frac{4}{\pi^2} (2^N - 1) \left\{ \left| \ln \left(\frac{t-a}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| + \left| \ln \left(\frac{b-t}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \right\}. \quad (3.54)$$

Пусть $t \in [a + \delta h, (a+b)/2]$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\delta \leq \frac{t-a}{h} + \frac{1}{n} \leq \frac{N+3}{2}, \quad \frac{N+1}{2} \leq \frac{b-t}{h} + \frac{1}{n} \leq N+2,$$

откуда

$$\begin{aligned} \left| \ln \left(\frac{t-a}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| &\leq \max \left\{ |\ln \delta|, \ln \frac{N+3}{2} \right\} \leq |\ln \delta| + \ln \frac{N+3}{2}, \\ \left| \ln \left(\frac{b-t}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| &\leq \ln(N+2), \end{aligned}$$

что вместе с (3.54) приводит к оценке (3.53). Случай $t \in [(a+b)/2, b - \delta h]$ рассматривается точно так же. Утверждение доказано.

Пусть $0 < \delta \leq 1/2$ и D_δ — множество, получающееся из $[a, b]$ удалением δh -окрестностей точек x_k , $k = 1, \dots, N$, т.е.

$$D_\delta = [a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^N (x_k - \delta h, x_k + \delta h).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Существует зависящая только от $N \geq 1$ константа C такая, что для любого $\delta \in (0, 1/2]$ и любых $t \in D_\delta$, $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\left| M_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n \right| \leq C + \frac{2}{\pi^2} \binom{N+1}{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} |\ln \delta|. \quad (3.55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.46) следует, что

$$\left| M_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n \right| \leq C + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(\frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right|. \quad (3.56)$$

Если $t \in D_\delta$ и x_s — ближайший к точке t среди узлов $x_1, \dots, x_N$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \delta &\leq \frac{|t-x_s|}{h} + \frac{1}{n} \leq 2, \\ \frac{1}{2} &\leq \frac{|t-x_k|}{h} + \frac{1}{n} \leq N+2 \quad \text{для всех } k \neq s, \end{aligned}$$

откуда

$$\left| \ln \left(\frac{|t - x_s|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \leq |\ln \delta|,$$

$$\left| \ln \left(\frac{|t - x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \leq \ln(N+2) \quad \text{для всех } k \neq s.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} \left| \ln \left(\frac{|t - x_k|}{h} + \frac{1}{n} \right) \right| \leq \binom{N+1}{s} |\ln \delta| + \ln(N+2) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^N \binom{N+1}{k}. \quad (3.57)$$

Поскольку

$$\binom{N+1}{s} \leq \binom{N+1}{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor},$$

где $[w]$ — целая часть w , то из (3.57) и (3.56) следует оценка (3.55). Утверждение доказано.

Практически дословное повторение схемы получения оценок (3.53) и (3.55) приводит к следующему утверждению, придающему этим оценкам несколько иной смысл.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Существует зависящая только от $N \geq 1$ константа C такая, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ и любого $t \in [a, b]$ имеют место неравенства*

$$\left| L_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n \right| \leq C + \frac{4}{\pi^2} (2^N - 1) |\ln \delta_1(t)|,$$

$$\left| M_n(t) - \frac{4}{\pi^2} \ln n \right| \leq C + \frac{2}{\pi^2} \binom{N+1}{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} |\ln \delta_2(t)|,$$

где

$$\delta_1(t) = \min(|t - a|, |t - b|)$$

— расстояние от точки t до границы отрезка $[a, b]$,

$$\delta_2(t) = \min_{1 \leq k \leq N} |t - x_k|$$

— расстояние от точки t до множества $\{x_1, \dots, x_N\}$ внутренних узлов B -сплайна ω_N .

Утверждение, формулировка которого приведена выше, свидетельствует о том, что поточечная асимптотика функций Лебега систем (1.2), (1.3) всюду (кроме некоторых особых точек) совпадает с асимптотикой констант Лебега тригонометрической системы.

Пусть L_n и M_n — константы Лебега, определяемые для каждого $n \in \mathbb{N}$ равенствами

$$L_n = \sup_{t \in [a, b]} L_n(t), \quad M_n = \sup_{t \in [a, b]} M_n(t).$$

Если $N = 0$, то поведение констант Лебега описано в следствии 3.1. Если же $N \geq 1$, то, пользуясь отраженным в теореме 3.1 характером поведения функций Лебега, получаем следующее утверждение, которое показывает, что, сохраняя тот же порядок роста по n , константы Лебега систем (1.2), (1.3) при $N \geq 1$ уступают константам Лебега тригонометрической системы в размере постоянного множителя.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Если $N \geq 1$, то

$$L_n \simeq \frac{2^{N+2}}{\pi^2} \ln n, \quad M_n \simeq \frac{2}{\pi^2} \left\{ 2 + \left(\frac{N+1}{[\frac{N+1}{2}]} \right) \right\} \ln n.$$

§ 4. Представления целых функций экспоненциального типа

В этом параграфе приводятся интерполяционные представления с кратными узлами для целых функций экспоненциального типа. Получение таких представлений существенно связано с использованием разложения по базисам, изученным в предыдущих параграфах. Как и в известной теореме Котельникова (см., например, [6]), сетка узлов интерполяции равномерна, однако если в теореме Котельникова густота сетки увеличивается с ростом типа целой функции (шаг сетки для функций типа σ равен π/σ), то в полученных представлениях эта густота регулируется с помощью параметра N (например, за счет выбора этого параметра можно добиться того, что узлы интерполяции фиксированы и не зависят от типа функции, а кратность этих узлов возрастает с увеличением типа интерполируемой функции).

Одно из возможных применений представлений такого вида состоит в конструктивном построении обладающих асимптотической оптимальностью методов аппроксимации с помощью масштабирования и сдвигов аргумента фиксированной функции (всплески, проекционно-сеточные методы, конформные методы конечных элементов и т. п.). Дело в том, что в этих методах образы Фурье координатных функций являются целыми функциями, тип которых зависит от размеров носителя базисных функций; при этом асимптотическая оптимальность равносильна тому, что эти образы Фурье имеют в точках некоторой решетки нули определенной кратности. Поэтому использование полученных в этом параграфе представлений (или их многомерных аналогов) с узлами интерполяции нужной кратности в точках этой решетки позволяет дать полное описание всех координатных функций, порождающих асимптотически оптимальные подпространства.

Пусть B_σ — класс целых функций экспоненциального типа σ , которые как функции действительного x принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$ (см., например, [7]).

Получение интерполяционных представлений функций класса B_σ будет характеризоваться следующими двумя ключевыми моментами:

- 1) применение теоремы Пэли–Винера, устанавливающей с помощью оператора преобразования Фурье $\mathcal{F}$ изоморфизм между $L_2(-\sigma, \sigma)$ и B_σ (см., например, [7]);
- 2) использование разложений элементов пространства $L_2(-\sigma, \sigma)$ в ряд по сплайн-тригонометрическим базисам вида (1.3) (для $a = -\sigma$, $b = \sigma$), элементы которых имеют вид

$$\psi_{k,s}(x) = e^{2\pi i k x/h} (-D)^s \omega_N(x), \quad s = 0, \dots, N, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

где $\omega_N - B$ -сплайн порядка N с носителем $[-\sigma, \sigma]$, $h = 2\sigma/(N+1)$. Для вычисления коэффициентов разложений будет использоваться двойственная система

$$\varphi_{k,s}(x) = e^{2\pi i k x / h} P_{s,N}(x), \quad s = 0, \dots, N, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

образующая с системой (4.1) биортонормированную пару. В равенстве (4.2) алгебраические полиномы $P_{s,N}$ степени s имеют вид

$$P_{s,N}(x) = \frac{1}{N!} \frac{\partial^{N-s}}{\partial x^{N-s}} \prod_{k=1}^N (x - x_k), \quad s = 0, \dots, N, \quad (4.3)$$

где $x_k = -\sigma + kh$ (см. (1.4)).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f \in B_\sigma$. Тогда для любого неотрицательного целого N справедливо равенство

$$f(z) = \left(2 \sin \frac{zh}{2}\right)^{N+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^N \frac{c_{k,s}}{(z - 2\pi k/h)^{N+1-s}}, \quad (4.4)$$

где $h = 2\sigma/(N+1)$,

$$c_{k,s} = (-1)^{k(N+1)} (-i)^s h^{-N-1} P_{s,N}(iD) f\left(\frac{2\pi k}{h}\right), \quad (4.5)$$

$P_{s,N}$ – многочлены вида (4.3). При этом

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^N |c_{k,s}|^2 < \infty. \quad (4.6)$$

Наоборот, если $\{c_{k,s}\}$ – любая последовательность, удовлетворяющая условию (4.6), то соотношение (4.4) определяет функцию $f \in B_\sigma$, причем справедливо равенство (4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itx} dt$$

– прообраз Фурье функции f . Тогда $\tilde{f} \in L_2(-\sigma, \sigma)$ и $\tilde{f}(x) = 0$ почти всюду вне $[-\sigma, \sigma]$. Разложим $\tilde{f}$ в ряд по системе (4.1):

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^N b_{k,s} \psi_{k,s}(x). \quad (4.7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} b_{k,s} &= (\tilde{f}, \varphi_{k,s})_{L_2(-\sigma, \sigma)} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t) P_{s,N}(t) e^{-2\pi i k t / h} dt \\ &= P_{s,N} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t) e^{-itx} dt \right\}_{x=2\pi k/h} = P_{s,N}(iD) f\left(\frac{2\pi k}{h}\right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где D – оператор дифференцирования.

Используя рассуждения, подобные проводившимся при установлении оценки (2.8), нетрудно убедиться в том, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^N |b_{k,s}|^2 \leq C_1 \|\tilde{f}\|_{L_2(-\sigma, \sigma)}^2, \quad (4.9)$$

где постоянная C_1 зависит только от N и σ .

Используя (1.7) (напомним, что $a = -\sigma$, $h(N+1) = 2\sigma$), найдем образ Фурье сплайна ω_N :

$$\mathcal{F}\omega_N(t) = e^{i\sigma t} \left\{ \frac{1 - e^{-iht}}{iht} \right\}^{N+1} = \left\{ \frac{2 \sin \frac{th}{2}}{th} \right\}^{N+1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\psi_{k,s}(z) &= \int_{\mathbb{R}} (-D)^s \omega_N(x) e^{ix(2\pi k/h - z)} dx \\ &= i^s \left(\frac{2\pi k}{h} - z \right)^s \mathcal{F}\omega_N \left(z - \frac{2\pi k}{h} \right) \\ &= (-i)^s (-1)^{k(N+1)} h^{-N-1} \frac{(2 \sin \frac{zh}{2})^{N+1}}{(z - 2\pi k/h)^{N+1-s}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Поскольку $f(z) = \mathcal{F}\tilde{f}(z)$, то из (4.7)–(4.10) следует первая часть теоремы.

Обратно, если последовательность $\{c_{k,s}\}$ удовлетворяет условию (4.6) и

$$\tilde{f}(x) = h^{N+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^N i^s (-1)^{k(N+1)} c_{k,s} \psi_{k,s}(x), \quad (4.11)$$

то $\tilde{f} \in L_2(-\sigma, \sigma)$, так как

$$\|\tilde{f}\|_{L_2(-\sigma, \sigma)}^2 \leq C_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^N |c_{k,s}|^2 < \infty,$$

где константа C_2 зависит только от N и σ . Если теперь

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) e^{-izx} dx, \quad (4.12)$$

то в силу теоремы Пэли–Винера $f \in B_\sigma$. Кроме того, из (4.10)–(4.12) следует, что $f(z)$ имеет вид (4.4), причем справедливо равенство (4.5). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если $N = 0$, то теорема 4.1 совпадает с теоремой Котельникова (см., например, [6]), а представление (4.4) приобретает следующий вид:

$$f(z) = \sin \sigma z \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k f(\pi k / \sigma)}{\sigma z - \pi k};$$

другими словами, любая функция из B_σ однозначно восстанавливается по ее значениям в узлах сетки шага π / σ . Для произвольного N густота сетки в (4.4) уменьшается по сравнению с теоремой Котельникова в $N + 1$ раз, но при этом каждый узел приобретает кратность $N + 1$ (соседние $N + 1$ узлов “склеиваются” между собой), т.е. любая функция класса B_σ однозначно восстанавливается по ее значениям вместе с производными до порядка N включительно в узлах равномерной сетки шага $\pi(N + 1) / \sigma$. Величина σ / π , равная среднему на единицу времени числу параметров, определяющих функцию $f \in B_\sigma$ (см., например, [8]), равна средней размерности класса B_σ (по этому поводу см. [9]). Точно такое же значение средней размерности B_σ при несколько другом ее определении получено в [10].

Используя теорему 4.1, получаем еще одно представление функций класса B_σ (фактически совпадающее с (4.4)), которое удобно использовать в ряде случаев.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $f \in B_\sigma$. Тогда для любого неотрицательного целого N справедливо равенство

$$f(z) = \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial t^N} \left\{ \left(\frac{t \sin \frac{zh}{2}}{\sin \frac{th}{2}} \right)^{N+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k(N+1)} \frac{f(t + 2\pi k / h)}{z - t - 2\pi k / h} \right\}_{t=0}, \quad (4.13)$$

где $h = 2\sigma / (N + 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_s^{(N+1)}$ – обобщенные многочлены Бернулли, определяемые равенством

$$B_s^{(N+1)}(y) = \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left\{ \frac{t^{N+1} e^{ty}}{(e^t - 1)^{N+1}} \right\}_{t=0} \quad (4.14)$$

(см. [11; 19.1(30)]). Если $0 \leq s \leq N$, то для многочленов Бернулли справедливо следующее представление:

$$B_s^{(N+1)}(y) = \frac{s!}{N!} \frac{\partial^{N-s}}{\partial y^{N-s}} \prod_{k=1}^N (y - k) \quad (4.15)$$

(см. [11; 19.1(32)]). Используя (4.3) и (4.15), получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{h^s}{s!} B_s^{(N+1)} \left(\frac{x + \sigma}{h} \right) &= \frac{h^s}{N!} \frac{\partial^{N-s}}{\partial y^{N-s}} \left\{ \prod_{k=1}^N (y - k) \right\}_{y = \frac{x + \sigma}{h}} \\ &= \frac{h^N}{N!} \frac{\partial^{N-s}}{\partial x^{N-s}} \prod_{k=1}^N \left(\frac{x + \sigma}{h} - k \right) \\ &= \frac{1}{N!} \frac{\partial^{N-s}}{\partial x^{N-s}} \prod_{k=1}^N (x - x_k) = P_{s,N}(x). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Так как

$$\frac{\partial^s}{\partial t^s} \{F(t)\}_{t=0} = \alpha^{-s} \frac{\partial^s}{\partial t^s} \{F(\alpha t)\}_{t=0},$$

то из (4.16) и (4.14) следует, что

$$\begin{aligned} P_{s,N}(x) &= \frac{h^s}{s!} B_s^{(N+1)} \left(\frac{x+\sigma}{h} \right) = \frac{h^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left\{ \frac{t^{N+1} e^{t(x+\sigma)/h}}{(e^t - 1)^{N+1}} \right\}_{t=0} \\ &= \frac{h^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left\{ \left(\frac{t}{e^{t/2} - e^{-t/2}} \right)^{N+1} e^{tx/h} \right\}_{t=0} \\ &= \frac{1}{(-i)^s s!} \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left\{ \left(\frac{-ith}{e^{-ith/2} - e^{ith/2}} \right)^{N+1} e^{-itx} \right\}_{t=0} \\ &= \frac{i^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left\{ \left(\frac{th/2}{\sin \frac{th}{2}} \right)^{N+1} e^{-itx} \right\}_{t=0} \end{aligned} \quad (4.17)$$

(здесь использовалось равенство $\sigma/h = (N+1)/2$). Так как f — целая функция, то

$$e^{\alpha D} f(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} D^k f(\beta) = f(\alpha + \beta)$$

для всех α и β . Поэтому из (4.17) получаем, что

$$\begin{aligned} P_{s,N}(iD) f\left(\frac{2\pi k}{h}\right) &= \frac{i^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left\{ \left(\frac{th/2}{\sin \frac{th}{2}} \right)^{N+1} e^{tD} \right\}_{t=0} f\left(\frac{2\pi k}{h}\right) \\ &= \frac{i^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left\{ \left(\frac{th/2}{\sin \frac{th}{2}} \right)^{N+1} f\left(t + \frac{2\pi k}{h}\right) \right\}_{t=0}, \end{aligned}$$

откуда (см. (4.5))

$$\begin{aligned} c_{k,s} &= (-1)^{k(N+1)} (-i)^s h^{-N-1} P_{s,N}(iD) f\left(\frac{2\pi k}{h}\right) \\ &= \frac{(-1)^{k(N+1)}}{s!} \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left\{ \left(\frac{t/2}{\sin \frac{th}{2}} \right)^{N+1} f\left(t + \frac{2\pi k}{h}\right) \right\}_{t=0}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая равенство

$$\frac{1}{(z - 2\pi k/h)^{N+1-s}} = \frac{1}{(N-s)!} \frac{\partial^{N-s}}{\partial t^{N-s}} \left\{ \frac{1}{z - t - 2\pi k/h} \right\}_{t=0},$$

получаем, что

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^N \frac{c_{k,s}}{(z - 2\pi k/h)^{N+1-s}} \\ &= \sum_{s=0}^N \frac{(-1)^{k(N+1)}}{s! (N-s)!} \frac{\partial^s}{\partial t^s} \left\{ \left(\frac{t/2}{\sin \frac{th}{2}} \right)^{N+1} f\left(t + \frac{2\pi k}{h}\right) \right\}_{t=0} \\ &\quad \times \frac{\partial^{N-s}}{\partial t^{N-s}} \left\{ \frac{1}{z - t - 2\pi k/h} \right\}_{t=0} \\ &= \frac{(-1)^{k(N+1)}}{N!} \frac{\partial^N}{\partial t^N} \left\{ \left(\frac{t/2}{\sin \frac{th}{2}} \right)^{N+1} \frac{f(t + 2\pi k/h)}{z - t - 2\pi k/h} \right\}_{t=0}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Из (4.4) и (4.18) сразу следует равенство (4.13). Утверждение доказано.

Частными случаями представлений (4.4) и (4.13) являются следующие два утверждения, которые позволяют восстанавливать функцию $f \in B_\sigma$ по значениям ее производных в точках не зависящей от σ решетки $2\pi\mathbb{Z}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $f \in B_\sigma$ и N – любое целое, удовлетворяющее условию $N \geq 2\sigma - 1$. Тогда

$$f(z) = \left(2 \sin \frac{z}{2}\right)^{N+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{s=0}^N \frac{c_{k,s}}{(z - 2\pi k)^{N+1-s}}, \quad (4.19)$$

где

$$c_{k,s} = (-1)^{k(N+1)} (-i)^s P_{s,N}(iD) f(2\pi k), \quad (4.20)$$

$P_{s,N}$ – многочлены, определяемые равенством (4.3) при $h = 1$. При этом выполнено условие (4.6). Наоборот, если $\{c_{k,s}\}$ – любая последовательность, удовлетворяющая условию (4.6), то соотношение (4.19) определяет функцию $f \in B_{(N+1)/2}$, причем справедливо равенство (4.20).

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Если $f \in B_\sigma$, то

$$f(z) = \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial t^N} \left\{ \left(\frac{t \sin \frac{z}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{N+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k(N+1)} \frac{f(t + 2\pi k)}{z - t - 2\pi k} \right\}_{t=0}$$

для любого целого $N \geq 2\sigma - 1$.

Список литературы

1. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе: Мир, 1974.
2. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977.
3. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1971.
4. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
5. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
6. Левин Б. Я. Целые функции (тексты лекций). М.: МГУ, 1971.
7. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
8. Витушкин А. Г. Аппроксимация целых функций и кодирование сигналов с конечным спектром // Теория приближения функций. Труды Международной конференции по теории приближения функций. Калуга, 24–28 июля 1975 г. М.: Наука, 1977. С. 83–89.
9. Стрелков Н. А. Эрмитовы поперечники, средняя размерность и кратные укладки // Матем. сб. 1996. Т. 187. №1. С. 121–142.
10. Динь Зунг, Магарил-Ильяев Г. Г. Задачи типа Бернштейна и Фавара и средняя ε -размерность некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. №4. С. 783–786.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.

Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова
E-mail: strelkov@univ.uniya.ac.ru

Поступила в редакцию
13.03.2000