Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Анфиногенов, И. К. Лифанов, П. И. Лифанов, О некоторых гиперсингулярных одномерных и двумерных интегральных уравнениях, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 8, 3–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm584>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:54:18

УДК 517.5

А. Ю. Анфиногенов, И. К. Лифанов, П. И. Лифанов

О некоторых гиперсингулярных одномерных и двумерных интегральных уравнениях

Для двумерных сингулярных и гиперсингулярных интегралов даны более общие, чем традиционные, определения. Для гиперсингулярного интеграла на сфере получено новое спектральное соотношение. Рассмотрены квадратурные формулы типа дискретных вихревых пар для одномерных и дискретных замкнутых вихревых рамок для двумерных гиперсингулярных интегралов, изучены вопросы их сходимости, а также сходимости численных решений соответствующих гиперсингулярных интегральных уравнений на отрезке и окружности. Проведен численный эксперимент численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения на сфере, из которого видна аналогия численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке и сфере.

Библиография: 26 названий.

Введение

Теория сингулярных интегральных уравнений, как указано в [1], начала развиваться почти непосредственно вслед за возникновением классической теории интегральных уравнений Фредгольма в работах А. Пуанкаре [2] и Д. Гильберта [2], [3]. Однако долгое время теория находилась в тени и только необходимость исследования плоских задач теории упругости и гидродинамики вызвала бурное ее развитие, которое было подытожено в двух фундаментальных монографиях [1], [4]. Параллельно задачи практики привели к необходимости численного решения сингулярных интегральных уравнений.

Наиболее ранней работой (1932 г.) в этом направлении является работа М. А. Лаврентьева [5], в которой дано численное решение сингулярного интегрального уравнения для обтекания тонкого профиля, основанное на полигональной аппроксимации решения, предвосхитившая в частном случае общую схему методов типа Ритца–Галёркина. В 1938 году появилась работа Мультихопа [6], в которой решение одномерного сингулярного интегрального уравнения на отрезке представляется в виде произведения гладкой функции и весовой функции, определяющей особенности решения на концах. Такая функция раскладывается в ряд по полиномам Чебышёва первого рода, а правая часть уравнения раскладывается в ряд по полиномам Чебышёва второго рода. С помощью спектрального соотношения для соответствующего сингулярного оператора между этими полиномами составляется система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов этого ряда. Однако такой подход не удалось распространить на двумерные сингулярные интегральные уравнения, к которым сводится пространственная задача обтекания поверхностей.

В начале пятидесятых годов С. М. Белоцерковский предложил метод дискретных вихрей численного решения одномерных и двумерных сингулярных интегральных уравнений указанного выше типа [7]. С математической точки зрения этот метод является методом коллокации численного решения сингулярных интегральных уравнений на основе применения специальных квадратурных формул типа прямоугольников к соответствующим сингулярным интегралам.

С другой стороны, сингулярные интегральные уравнения, к которым сводятся задачи обтекания поверхностей идеальной несжимаемой жидкостью, являются граничными интегральными уравнениями для решения задачи Неймана для уравнения Лапласа при ее решении с помощью потенциала двойного слоя. В этом случае неизвестной функцией является градиент плотности потенциала двойного слоя, и поэтому в пространственных задачах он имеет две составляющие. Так как эти составляющие не являются независимыми функциями, то получающиеся алгоритмы численного решения пространственных задач обтекания методом дискретных вихревых отрезков имели очень сложную структуру даже для простых поверхностей, лежащих в плоскости [8]. Поэтому в работе [9] было предложено в качестве неизвестной функции брать плотность потенциала двойного слоя и сводить задачу Неймана для уравнения Лапласа к гиперсингулярному интегральному уравнению относительно этой плотности. Решение этого гиперсингулярного интегрального уравнения с помощью специальных квадратурных формул типа прямоугольников получило название метода дискретных замкнутых вихревых рамок [10]. Этот метод быстро получил широкое распространение в задачах аэродинамики, часть которых была опубликована в книге [11]. Параллельно численные методы решения одномерных сингулярных интегральных уравнений начали широко использоваться в различных приложениях (см. [12]–[14] и цитируемую там литературу).

Отметим, что метод дискретных замкнутых вихревых рамок в основном развивался на основе численного эксперимента и физических представлений. Долгое время единственным математическим результатом в этом направлении был результат И. К. Лифанова о сходимости квадратурных формул типа метода дискретных замкнутых вихревых рамок внутри области с кусочно гладкой границей, лежащей в плоскости [15]. Затем в работах Л. Н. Полтавского и И. К. Лифанова вопросы сходимости квадратурных формул и численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений были изучены для разомкнутых гладких поверхностей [16], [17]. Для замкнутых гладких поверхностей таких результатов до настоящего времени не было. Численный эксперимент показывал, что численное решение гиперсингулярного интегрального уравнения на сфере равномерно по расчетным точкам сходится к точному [9], [11]. Доказать математически это не удавалось, и было впечатление, что и сами квадратурные формулы для гиперсингулярного интегрального уравнения на сфере равномерно сходятся по расчетным точкам к точному значению интеграла. Этот факт математически доказать не удавалось, в связи с чем А. Ю. Анфиногеновым и П. И. Лифановым был поставлен аккуратный численный эксперимент, в результате которого выяснилось, что поведение квадратурных формул типа дискретных замкнутых вихревых рамок и численного решения соответствующего гиперсингулярного интегрального уравнения на сфере подобно поведению аналогичных квадратурных формул и численного решения соответствующего гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке.

В предлагаемой работе доказывается, что квадратурные формулы типа метода дискретных вихревых пар на отрезке (аналог метода дискретных замкнутых вихревых рамок на поверхности) сходятся равномерно по всем расчетным точкам вне фиксированной окрестности концов отрезка и интегрально сходятся на всем отрезке. Численное решение метода дискретных вихревых пар для гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке сходится равномерно на всем отрезке, а разностная производная этого численного решения сходится к производной решения исходного гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке таким образом, каким квадратурные формулы этого метода сходятся к точному значению гиперсингулярного интеграла на отрезке.

Для гиперсингулярного интегрального уравнения типа Гильберта доказано, что квадратурные формулы типа метода дискретных вихревых пар, а также его численное решение этим методом и разностная производная этого численного решения равномерно по расчетным точкам сходятся соответственно к точному значению интеграла, точному решению уравнения и производной этого решения.

Для гиперсингулярного интеграла на сфере доказана равномерная вне полюсов сходимость квадратурных формул метода дискретных замкнутых вихревых рамок. В численном эксперименте показано, что имеется интегральная сходимость этих квадратур на всей сфере и равномерная по всем расчетным точкам сходимость численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения на сфере.

В процессе этого доказательства потребовалось дать более общее, чем традиционное, определение двумерного сингулярного интеграла для области на плоскости. Для таких сингулярных интегралов на плоской области предложены некоторые квадратурные формулы типа прямоугольников и доказана их сходимость, если плотности интегралов являются функциями Гёльдера на области интегрирования. Для гиперсингулярного интеграла на сфере получено новое спектральное соотношение для сферических функций. Для гиперсингулярного интеграла на торе доказана равномерная по расчетным точкам сходимость квадратурных формул типа метода дискретных замкнутых вихревых рамок к значению интеграла.

§1. Гиперсингулярные интегралы и уравнения с ними на отрезке и окружности

Рассмотрим вначале следующий интеграл:

$$I(x_0) = \int_a^b \frac{dx}{(x_0 - x)^2}, \quad x_0 \in (a, b). \quad (1.1)$$

Если определить его по аналогии с интегралом Коши, то получится (при $\varepsilon > 0$):

$$\begin{aligned} I(x_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{dx}{(x_0 - x)^2} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x_0 - x} \Big|_a^{x_0 - \varepsilon} + \frac{1}{x_0 - x} \Big|_{x_0 + \varepsilon}^b \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x_0 - a} + \frac{1}{x_0 - b} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{1}{x_0 - b} - \frac{1}{x_0 - a} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Из формулы (1.2) видно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ этот предел равен $+\infty$.

Поэтому, используя идею Адамара [18] о понятии интеграла в смысле конечной части, определим интеграл (1.1) следующим образом:

$$I(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{I \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} - \frac{2}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{x_0 - b} - \frac{1}{x_0 - a}, \quad (1.3)$$

где введены обозначения $I = [a, b]$, $O(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, согласно которым $I \setminus O(x_0, \varepsilon) = [a, x_0 - \varepsilon] \cup [x_0 + \varepsilon, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Интеграл $I(x_0)$ в формуле (1.1) определим по формуле (1.3) и будем называть *гиперсингулярным интегралом на отрезке*.

Рассмотрим теперь интеграл

$$I(x_0) = \int_a^b \frac{g(x) dx}{(x_0 - x)^2}, \quad x_0 \in (a, b), \quad (1.4)$$

где функция $g(x)$ определена на $[a, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Интеграл (1.4) будем понимать в смысле равенства

$$I(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{I \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{g(x) dx}{(x_0 - x)^2} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right) \quad (1.5)$$

и называть *гиперсингулярным интегралом на отрезке*.

Докажем несколько теорем.

ТЕОРЕМА 1.1. Интеграл (1.5) существует для любой функции $g(x) \in H_1(\alpha)$ на отрезке $[a, b]$, т.е. $g'(x)$ принадлежит классу Гёльдера $H(\alpha)$ степени α [1; § 3] на $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем формулу (1.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} I(x_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{I \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{(g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)) dx}{(x - x_0)^2} \right. \\ &\quad \left. + g(x_0) \int_{I \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{(x - x_0)^2} - g'(x_0) \int_{I \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{x_0 - x} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{I \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{(g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)) dx}{(x - x_0)^2} \right] \\ &\quad + g(x_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{I \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{(x - x_0)^2} - \frac{2}{\varepsilon} \right] - g'(x_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{I \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{dx}{x_0 - x} \\ &= I_1(x_0) + g(x_0)I_2(x_0) - g'(x_0)I_3(x_0). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В формуле (1.6) интеграл $I_1(x_0)$ существует как несобственный интеграл, так как $g'(x) \in H(\alpha)$, и поэтому

$$|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)| \leq A|x - x_0|^{1+\alpha}. \quad (1.7)$$

Интеграл $I_2(x_0)$ существует в смысле определения 1.1, а интеграл $I_3(x_0)$ — в смысле главного значения по Коши [1; § 11].

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть функция $g(x)$ принадлежит классу $H_1(\alpha)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда для интеграла (1.4) справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b \frac{g(x) dx}{(x - x_0)^2} = \frac{g(b)}{x_0 - b} - \frac{g(a)}{x_0 - a} - \int_a^b \frac{g'(x) dx}{x_0 - x}. \quad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполним в формуле (1.5) интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} I(x_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g(x)}{x_0 - x} \Big|_a^{x_0 - \varepsilon} + \frac{g(x)}{x_0 - x} \Big|_{x_0 + \varepsilon}^b - \int_{I \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{g'(x) dx}{x_0 - x} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right) \\ &= \frac{1}{x_0 - b} - \frac{1}{x_0 - a} \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{g(x_0 - \varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{g(x_0 + \varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{2g(x_0)}{\varepsilon} \right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{I \setminus O(x_0, \varepsilon)} \frac{g'(x) dx}{x_0 - x} \right) \\ &= \frac{1}{x_0 - b} - \frac{1}{x_0 - a} + I_4(x_0) - I_5(x_0). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Интеграл $I_5(x_0)$ существует в смысле главного значения по Коши. Так как $g(x) \in H_1(\alpha)$, то

$$|g(x_0 + \varepsilon) + g(x_0 - \varepsilon) - 2g(x_0)| = |[g(x_0 + \varepsilon) - g(x_0)] - [g(x_0) - g(x_0 - \varepsilon)]| \leq 2A\varepsilon^{1+\alpha}, \quad (1.10)$$

и поэтому предел $I_4(x_0)$ равен нулю для любого $x \in (a, b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если $g(a) = g(b) = 0$ и $g(x) \in H_1(\alpha)$ на $[a, b]$, то формула (1.8) приобретает вид:

$$\int_a^b \frac{g(x) dx}{(x - x_0)^2} = - \int_a^b \frac{g'(x) dx}{x_0 - x}, \quad x_0 \in (a, b). \quad (1.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Формула (1.11) справедлива и в том случае, если $g(a) = g(b) = 0$, а $g(x) \in H_1^*(\alpha)$ на $[a, b]$, т.е. производная $g'(x) \in H^*(\alpha)$ на $[a, b]$, что означает [1; §8]:

$$g'(x) = \frac{\psi(x)}{(x - a)^\nu (b - x)^\mu}, \quad (1.12)$$

где $\psi(x) \in H$ на $[a, b]$, т.е. является функцией Гёльдера на $[a, b]$ некоторой степени, а $\nu, \mu < 1$.

Если функция $g(x)$ удовлетворяет требованиям, указанным в замечании 1.2, то будем говорить, что $g(x) \in H_1^{(0,0),*}$ на $[a, b]$.

Рассмотрим теперь для гиперсингулярного интеграла (1.4) на $[a, b]$ следующую квадратурную сумму. Возьмем на $[a, b]$ точки $x_k = a + (k - 1)h$, $h = (b - a)/n$, $k = 1, \dots, n + 1$, которые разбивают отрезок $[a, b]$ на n равных отрезков $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, \dots, n$, и точки $x_{0k} = x_k + \frac{h}{2}$, $k = 1, \dots, n$. Будем говорить, что множества $E = \{x_k, k = 1, \dots, n\}$ и $E_0 = \{x_{0k}, k = 1, \dots, n\}$ образуют

каноническое разбиение отрезка $[a, b]$. Заменим теперь интеграл (1.4) в точке $x_{0j} \in E_0$ следующей суммой:

$$S_n(x_{0j}) = \sum_{k=1}^n g(x_{0k}) \int_{I_k} \frac{dx}{(x_{0j} - x)^2} = \sum_{k=1}^n g(x_{0k}) \left(\frac{1}{x_{0j} - x_{k+1}} - \frac{1}{x_{0j} - x_k} \right). \quad (1.13)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть функция $g(x) \in H_1^*(\alpha)$ на $[a, b]$. Пусть множества точек E и E_0 образуют каноническое разбиение этого отрезка. Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} I_n(x_{0j}) &= |I(x_{0j}) - S_n(x_{0j})| \\ &= \left| \int_a^b \frac{g(x) dx}{(x_{0j} - x)^2} - \sum_{k=1}^n g(x_{0k}) \left(\frac{1}{x_{0j} - x_{k+1}} - \frac{1}{x_{0j} - x_k} \right) \right| \\ &\leq \Theta(x_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где величина $\Theta(x_{0j})$ удовлетворяет неравенствам:

а) для всех точек $x_{0j} \in [a + \delta, b - \delta]$, где $\delta > 0$ — сколь угодно малое число,

$$\Theta(x_{0j}) \leq C_\delta h^{\lambda_1}, \quad 0 < \lambda_1 < 1, \quad (1.15)$$

б) для всех точек $x_{0j} \in [a, b]$

$$\sum_{j=1}^n \Theta(x_{0j}) h \leq C h^{\lambda_2}, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad (1.16)$$

где C_δ, C — некоторые константы, не зависящие от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл $I(x_{0j})$ представим по формуле (1.8), а сумму $S_n(x_{0j})$ запишем в виде

$$S_n(x_{0j}) = -\frac{g(x_{01})}{x_{0j} - a} - \sum_{k=2}^n \frac{g(x_{0k}) - g(x_{0k-1})}{h} \frac{h}{x_{0j} - x_k} + \frac{g(x_{0n})}{x_{0j} - b}. \quad (1.17)$$

Тогда для $I_n(x_{0j})$ можно записать:

$$\begin{aligned} I_n(x_{0j}) &\leq \left| \frac{g(b) - g(x_{0n})}{x_{0j} - b} \right| + \left| \frac{g(x_{01}) - g(a)}{x_{0j} - b} \right| \\ &\quad + \left| \int_a^b \frac{g'(x) dx}{x_{0j} - x} - \sum_{k=2}^n \frac{g(x_{0k}) - g(x_{0k-1})}{h} \frac{h}{x_{0j} - x_k} \right| \\ &= I_{1,n}(x_{0j}) + I_{2,n}(x_{0j}) + I_{3,n}(x_{0j}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Теперь непосредственно видно, что $I_{1,n}(x_{0j}) \leq \Theta_1(x_{0j})$, $I_{2,n}(x_{0j}) \leq \Theta_2(x_{0j})$, а из результатов [15; гл. 1, § 3] следует, что $I_{3,n}(x_{0j}) \leq \Theta_3(x_{0j})$, где каждая из величин $\Theta_p(x_{0j})$, $p = 1, 2, 3$, удовлетворяет неравенствам (1.15) и (1.16). Следовательно, сумма величин $\Theta_p(x_{0j})$, $p = 1, 2, 3$, также удовлетворяет этим неравенствам. Теорема 1.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Таким образом, квадратурная сумма $S_n(x_{0j})$ сходится к значению интеграла $I(x_{0j})$ следующим образом. Эта сходимость равномерна по точкам x_{0j} вне фиксированных окрестностей концов отрезка $[a, b]$, при подходе точки x_{0j} к одному из концов эта погрешность может стремиться к ∞ при $n \rightarrow \infty$, но в целом имеется интегральная сходимость, т.е. выполняется неравенство (1.16).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\int_{-1}^1 \frac{g(x) dx}{(x_0 - x)^2} = f(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1). \quad (1.19)$$

Будем искать решение этого уравнения в классе $H_1^{(0,0),*}$ функций на $[-1, 1]$. В этом классе функций в силу формулы (1.11) уравнение (1.19) эквивалентно уравнению

$$-\int_{-1}^1 \frac{g'(x) dx}{x_0 - x} = f(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1), \quad (1.20)$$

при выполнении условия

$$\int_{-1}^1 g'(x) dx = g(1) - g(-1) = 0. \quad (1.21)$$

Как следует из [1], решением уравнения (1.20) при условии (1.21) является функция

$$g'(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x_0^2} f(x_0) dx_0}{x-x_0}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (1.22)$$

Следовательно, решением уравнения (1.19) из класса $H_1^{(0,0),*}$ функций на $[-1, 1]$ будет функция

$$g(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^x \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x_0^2} f(x_0) dx_0}{\tau-x_0}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (1.23)$$

Так как при последовательном интегрировании можно менять местами порядок интегрирования, если один из интегралов сингулярный, а другой абсолютно интегрируемый [1; §28], то можно записать:

$$g(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x_0^2} \left(\int_{-1}^x \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-x_0)} \right) f(x_0) dx_0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (1.24)$$

Непосредственным вычислением с помощью замены переменной $\tau = \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $-1 \leq \tau \leq 1$, получаем

$$\int_{-1}^x \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-x_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \ln \frac{|x_0-x|}{1-x_0x + \sqrt{1-x_0^2}\sqrt{1-x^2}}. \quad (1.25)$$

Таким образом, решение уравнения (1.19) для любой функции $f(x) \in H$ на $[-1, 1]$ задается формулой

$$g(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{|x_0-x|}{1-x_0x + \sqrt{1-x_0^2}\sqrt{1-x^2}} f(x_0) dx_0, \quad x \in [-1, 1]. \quad (1.26)$$

Из формулы (1.26) видно, что интеграл в ней имеет логарифмическую особенность на диагонали (при $x = x_0$) и $g(-1) = g(1) = 0$.

Рассмотрим теперь численное решение гиперсингулярного интегрального уравнения на основе метода дискретных вихревых пар [11; гл. 13, § 4]. Заменим уравнение (1.19) следующей системой линейных алгебраических уравнений, используя каноническое разбиение отрезка $[-1, 1]$:

$$\sum_{k=1}^n g_n(x_{0k}) \left(\frac{1}{x_{0j} - x_{k+1}} - \frac{1}{x_{0j} - x_k} \right) = f(x_{0j}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.27)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть функция $f(x_0)$ принадлежит классу H на отрезке $[-1, 1]$. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений (1.27) и решением (1.26) уравнения (1.19) выполняется соотношение

$$|g(x_{0k}) - g_n(x_{0k})| \leq Ch^\lambda, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.28)$$

где $\lambda > 0$ и константа C не зависит от n , а между разностной производной $\frac{g_n(x_{0k}) - g_n(x_{0k-1})}{h}$ и $g'(x_k)$ выполняется соотношение

$$\left| g'(x_k) - \frac{g_n(x_{0k}) - g_n(x_{0k-1})}{h} \right| \leq \Theta(x_k), \quad k = 2, \dots, n, \quad (1.29)$$

где величина $\Theta(x_k)$, $k = 2, \dots, n$, удовлетворяет соотношениям (1.15), (1.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представление (1.17), запишем систему (1.27) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_n(x_{0k}) - g_n(x_{0k-1})}{h} \frac{1}{x_{0j} - x_k} &= f(x_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{g_n(x_{0k}) - g_n(x_{0k-1})}{h} h &= 0, \quad j = n+1. \end{aligned} \quad (1.30)$$

где полагается $g(x_{00}) = g(x_{0n+1}) = 0$.

Используя теперь численное решение сингулярного интегрального уравнения, методом дискретных вихрей для индекса $\varkappa = 1$ при значении интеграла от решения, равном нулю, получим [15; гл. 5, § 1]:

$$\frac{g_n(x_{0k}) - g_n(x_{0k-1})}{h} = \frac{1}{h} I_{1,k}^{(n+1)} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(n+1)} \frac{f(x_{0j})h}{x_k - x_{0j}}, \quad k = 1, \dots, n+1, \quad (1.31)$$

где $I_{1,k}^{(n+1)}$ и $I_{1,0j}^{(n+1)}$ даны в [15; гл. 5, § 1] и отсюда же следует справедливость соотношения (1.29), а следовательно, и соотношения (1.28).

Так как описанный выше численный метод типа дискретных вихревых пар [19; гл. 17, § 1] для уравнения (1.19) имеет невысокую скорость сходимости, то желательно построить для этого уравнения численный метод, сходимость которого зависит от дифференциальных свойств функции $f(x)$. Для этого покажем, что для интеграла (1.4) выполняются следующие спектральные соотношения.

ТЕОРЕМА 1.5. Для интеграла (1.4) выполняются следующие спектральные соотношения:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x) dx}{(x-x_0)^2} = -\pi(n+1)U_n(x_0), \quad x \in (-1, 1), \quad (1.32)$$

где $U_n(x)$ – полином Чебышёва второго рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представление $U_n(x)$ и равенство

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},$$

можно записать:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x) dx}{(x-x_0)^2} = \int_{-1}^1 \frac{\sin((n+1)\arccos x) dx}{(x-x_0)^2}. \quad (1.33)$$

Теперь, в силу формулы интегрирования по частям (1.11), так как

$$\sin((n+1)\arccos(1)) = \sin((n+1)\arccos(-1)) = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\sin((n+1)\arccos x) dx}{(x-x_0)^2} &= (n+1) \int_{-1}^1 \frac{\cos((n+1)\arccos x) dx}{\sqrt{1-x^2}(x_0-x)} \\ &= (n+1) \int_{-1}^1 \frac{T_{n+1}(x) dx}{\sqrt{1-x^2}(x_0-x)} \\ &= -\pi(n+1)U_n(x_0), \quad x \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Последнее равенство справедливо в силу соответствующего спектрального соотношения для сингулярного интеграла на отрезке [19; гл. 14, § 1].

Рассмотрим теперь интеграл

$$I_\Gamma(\theta_0) = \int_0^{2\pi} \frac{g(\theta) d\theta}{\sin^2((\theta_0 - \theta)/2)}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (1.35)$$

где плотность $g(\theta)$ – 2π -периодическая функция. Этот интеграл будем называть *гиперсингулярным интегралом типа Гильберта* или, если надо подчеркнуть геометрическую сущность этого интеграла, *гиперсингулярным интегралом на окружности*. Последнее название связано с тем, что [19; гл. 4, § 3] краевая задача Неймана для уравнения Лапласа на окружности приводится с помощью потенциала двойного слоя к гиперсингулярному интегральному уравнению с интегралом вида (1.35).

Как и для гиперсингулярного интеграла на отрезке, рассмотрим вначале случай $g(\theta) \equiv 1$ на $[0, 2\pi]$. Тогда в соответствии с формулами (1.2) и (1.3) дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Интеграл $I_\Gamma(\theta_0)$ при $g(\theta) \equiv 1$ на $[0, 2\pi]$ будем понимать в следующем смысле:

$$\begin{aligned} I_\Gamma(\theta_0) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2((\theta_0 - \theta)/2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{[0, 2\pi] \setminus O(\theta_0, \varepsilon)} \frac{d\theta}{((\theta_0 - \theta)/2)} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - 2\pi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ &= \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta_0}{2} - \pi \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta_0}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Теперь для интеграла (1.35) по определению будем полагать:

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta) d\theta}{\sin^2((\theta_0 - \theta)/2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{[0, 2\pi] \setminus O(\theta_0, \varepsilon)} \frac{g(\theta) d\theta}{\sin^2((\theta_0 - \theta)/2)} - 2g(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right]. \quad (1.37)$$

Аналогично теоремам 1.1 и 1.2 доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1.6. *Интеграл (1.37) существует для любой периодической функции $g(\theta)$, принадлежащей классу $H_1(\alpha)$ на $[0, 2\pi]$.*

ТЕОРЕМА 1.7. *Пусть функция $g(\theta)$ 2π -периодическая и принадлежит классу $H_1(\alpha)$ на $[0, 2\pi]$. Тогда для интеграла (1.35) справедлива следующая формула интегрирования по частям:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta) d\theta}{\sin^2((\theta_0 - \theta)/2)} = -2 \int_0^{2\pi} g'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} d\theta. \quad (1.38)$$

Обратимся к рассмотрению квадратурных формул для интеграла (1.35). По аналогии с квадратурной формулой для гиперсингулярного интеграла на отрезке поступим следующим образом. Пусть множества $E = \{\theta_k, k = 1, \dots, n+1\}$ и $E_0 = \{\theta_{0k}, k = 1, \dots, n\}$ образуют каноническое разбиение отрезка $[0, 2\pi]$. Тогда заменим интеграл (1.35) в точке $\theta_{0j} \in E_0$ следующей суммой:

$$\begin{aligned} S_{\Gamma, n}(\theta_{0j}) &= \sum_{k=1}^n g(\theta_{0k}) \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{d\theta}{\sin^2((\theta_{0j} - \theta)/2)} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n g(\theta_{0k}) \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_{k+1}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right], \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.39)$$

ТЕОРЕМА 1.8. *Пусть функция $g(\theta)$ 2π -периодическая и принадлежит классу $H_1(\alpha)$ на $[0, 2\pi]$. Пусть множества точек E и E_0 образуют каноническое разбиение этого отрезка. Тогда справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} I_{\Gamma, n}(\theta_{0j}) &= |I_\Gamma(\theta_{0j}) - S_{\Gamma, n}(\theta_{0j})| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{g(\theta) d\theta}{\sin^2((\theta_{0j} - \theta)/2)} \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^n g(\theta_{0k}) \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_{k+1}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right] \right| \leq C \frac{\ln n}{n^\alpha}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл $I_\Gamma(\theta_{0j})$ представим по формуле (1.38), а сум-
му $S_{\Gamma,n}(\theta_{0j})$ запишем в виде

$$S_{\Gamma,n}(\theta_{0j}) = -2 \sum_{k=1}^n \frac{g(\theta_{0k}) - g(\theta_{0k-1})}{h} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} h, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.41)$$

где $g(\theta_{00}) = g(\theta_{0n})$.

Тогда для $I_\Gamma(\theta_{0j})$ можно записать

$$\begin{aligned} I_\Gamma(\theta_{0j}) \leq 2 \left| \int_0^{2\pi} g'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta}{2} d\theta - \sum_{k=1}^n g'(\theta_k) \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} h \right| \\ + C_1 h^\alpha \sum_{k=1}^n \left| \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right| h, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Теперь из результатов [15] для квадратурных формул метода дискретных вих-
рей для интеграла с ядром Гильберта следует оценка (1.40)

Рассмотрим теперь уравнение

$$\int_0^{2\pi} \frac{g(\theta) d\theta}{\sin^2((\theta_0 - \theta)/2)} = f(\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (1.43)$$

Будем искать решение этого уравнения в классе H_1 2π -периодических на $[0, 2\pi]$
функций. Сразу заметим, что в силу равенства (1.36) константа является решением
однородного уравнения (1.43). Таким образом, решение этого уравнения опреде-
лено с точностью до константы. Так как функция $\sin^{-2}((\theta_0 - \theta)/2)$ симметрична
относительно переменных θ_0 и θ , то отсюда и из формулы (1.36) следует, что урав-
нение (1.43) разрешимо только для тех функций $f(\theta)$, для которых выполняется
равенство

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0. \quad (1.44)$$

Используя теперь формулу (1.38), уравнение (1.43) запишем в виде

$$-2 \int_0^{2\pi} g'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta}{2} d\theta = f(\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi]. \quad (1.45)$$

Известно [1; §33], [19; гл. 2, §4], что если $f(\theta_0)$ удовлетворяет условию (1.44)
и принадлежит классу H на $[0, 2\pi]$, то решение его $g'(\theta)$ тоже принадлежит этому
классу, и так как при этом очевидно

$$\int_0^{2\pi} g'(\theta) d\theta = 0 \quad (1.46)$$

в силу 2π -периодичности функции $g(\theta)$, то получаем

$$g'(\theta) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} f(\theta_0) d\theta_0, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (1.47)$$

Из формулы (1.47) находим, что

$$g(\theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{\sin((\theta - \theta_0)/2)}{\sin(\theta_0/2)} \right| f(\theta_0) d\theta_0 + C, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (1.48)$$

Так как известно [19], что

$$\int_0^{2\pi} \ln |\sin((\theta - \theta_0)/2)| d\theta = -2\pi \ln 2, \quad (1.49)$$

то, записав решение (1.48) в виде

$$g(\theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \ln |\sin((\theta - \theta_0)/2)| f(\theta_0) d\theta_0 + \frac{\ln 2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f(\theta_0) d\theta_0 + C, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (1.50)$$

получим такую запись решения с произвольной константой C , что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = C. \quad (1.51)$$

Рассмотрим теперь численное решение уравнения (1.43) опять на основе метода дискретных вихревых пар [11; гл. 17, §4]. Заменяем уравнение (1.43) следующей системой линейных алгебраических уравнений, используя каноническое разбиение отрезка $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + 2 \sum_{k=1}^n g_n(\theta_{0k}) \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_{k+1}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right) &= f(\theta_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n g_n(\theta_{0k}) \frac{2\pi}{n} &= C, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где величина γ_{0n} является регуляризующей [19; гл. 13, §2].

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть функция $f(\theta_0)$ принадлежит классу $H(a)$ на $[0, 2\pi]$ и является 2π -периодической. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений (1.52) и решением уравнения (1.43), удовлетворяющим условию (1.51), выполняется соотношение

$$|g(\theta_{0k}) - g_n(\theta_{0k})| \leq C^* n^{-\alpha} \ln n, \quad k = 1, \dots, n; \quad (1.53)$$

такое же соотношение выполняется между $g'(\theta_{0k})$ и $[g_n(\theta_{0k}) - g_n(\theta_{0k-1})]/h$, $h = 2\pi/n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система (1.52) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{g_n(\theta_{0k}) - g_n(\theta_{0k-1})}{h} \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} h &= f(\theta_{0j}), \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n \frac{g_n(\theta_{0k}) - g_n(\theta_{0k-1})}{h} h &= 0, \\ g_n(\theta_{00}) &= g_n(\theta_{0n}), \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n g_n(\theta_{0k}) h &= C. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Из результатов [19; гл. 13, § 2] следуют разрешимость первых $n + 1$ уравнений в системе (1.54) и справедливость неравенства

$$\left| g'(\theta_k) - \frac{g_n(\theta_{0k}) - g_n(\theta_{0k-1})}{h} \right| \leq C_1 n^{-\alpha} \ln n, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.55)$$

Последние два уравнения (1.54) обеспечивают теперь однозначное нахождение величин $g_n(\theta_{0k})$, $k = 1, \dots, n$, и совместно с неравенством (1.55) неравенство (1.53). Теорема доказана.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 1.10. *При условиях теоремы 1.9 на функцию $f(\theta)$ такие же соотношения выполняются между точным решением уравнения (1.43), удовлетворяющим условию $g(\theta_{0n}) = 0$, и решением системы линейных алгебраических уравнений*

$$\gamma_{0n} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} g_n(\theta_{0k}) \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_{k+1}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\theta_{0j} - \theta_k}{2} \right) = f(\theta_{0j}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.56)$$

Отметим, что для интеграла (1.35) в [19; гл. 4, § 3] получено следующее спектральное соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2((\theta_0 - \theta)/2)} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) d\theta \\ = -4\pi n (a_n \cos(n\theta_0) + b_n \sin(n\theta_0)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \theta_0 \in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (1.57)$$

где a_n и b_n — произвольные действительные числа.

§ 2. Гиперсингулярные интегралы и уравнение с ними на сфере

Вначале напомним [19; гл. 5, § 3] сведение задачи Неймана для уравнения Лапласа к гиперсингулярному интегральному уравнению. Итак, пусть требуется найти функцию $U(M)$, $M(x, y, z) \in E^3$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta U(M) = 0, \quad M \notin \sigma, \quad (2.1)$$

вне поверхности σ , имеющую заданную нормальную производную на ней

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \bar{n}_{M_0}} \right|_{\sigma} = f(M_0), \quad M_0 \in \sigma, \quad (2.2)$$

и удовлетворяющую условиям на бесконечности:

$$|U(M)| \rightarrow 0, \quad |\text{grad } U(M)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \rho(M, \sigma) \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

где $\bar{n}_{M_0}$ — орт нормали к поверхности σ в точке M_0 ,

$$\text{grad } U(M) = \frac{\partial}{\partial x} U(M) \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} U(M) \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} U(M) \bar{k},$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — орты осей Ox, Oy и Oz соответственно, а $\rho(M, \sigma)$ — расстояние от точки M до поверхности σ . Будем предполагать, что поверхность σ является гладкой, ограниченной и если она замкнутая, то

$$\int_{\sigma} f(M) d\sigma = 0. \quad (2.4)$$

Решение задачи (2.1)–(2.3) будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) g(M) d\sigma_M, \quad (2.5)$$

где $M_0 \notin \sigma$.

Тогда [20; гл. 4, § 5], [21; гл. 2, § 7] функция $U(M_0)$ в (2.5) удовлетворяет для точек $M_0 \notin \sigma$ уравнению (2.1) и соотношению (2.3), а также будет удовлетворять граничному условию (2.2) тогда и только тогда, когда функция $g(M)$ будет решением интегрального уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) g(M) d\sigma_M = f(M_0), \quad M_0 \in \sigma. \quad (2.6)$$

В уравнении (2.6) знак нормальной производной по точке M_0 внесен под знак интеграла, так как она непрерывна при переходе точки M_0 через поверхность σ для потенциала двойного слоя [21; гл. 2, § 5].

Выполняя операции дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} K_N(M, M_0) &= \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \bar{n}_M} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \\ &= \frac{r_{MM_0}^2 (\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0}) - 3(\bar{n}_{M_0}, \bar{r}_{MM_0})(\bar{n}_M, \bar{r}_{MM_0})}{r_{MM_0}^5}, \quad M, M_0 \in \sigma. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В частном случае, когда σ является частью плоскости Oxy , получаем

$$K_N(M, M_0) = \frac{1}{r_{MM_0}^3}. \quad (2.8)$$

Таким образом, интеграл в (2.6) имеет особенность более высокого порядка, чем двумерный сингулярный интеграл, и его надо понимать в смысле конечного значения по Адамару [18; III, гл. 1, § 2]. Дадим его более точное определение в случае, когда σ лежит в плоскости Oxy и имеет кусочно гладкую границу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем полагать

$$I(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{1}{r_{MM_0}^3} d\sigma_M = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\sigma \setminus (M_0, \varepsilon)} \frac{1}{r_{MM_0}^3} d\sigma_M - \frac{2\pi}{\varepsilon} \right], \quad M_0 \in \sigma^-, \quad (2.9)$$

где $\sigma^- = \sigma \setminus \text{гр } \sigma$, где $\text{гр } \sigma$ — граница области σ .

Покажем, что определение 2.1 имеет смысл. Действительно, переходя к полярным координатам с центром в точке M_0 , получим

$$\begin{aligned} I(M_0) &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\varepsilon}^{\lambda(M_0, \varphi)} \frac{\rho d\rho}{\rho^3} - \frac{2\pi}{\varepsilon} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\frac{1}{\rho} \right) \Big|_{\varepsilon}^{\lambda(M_0, \varphi)} - \frac{2\pi}{\varepsilon} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\lambda(M_0, \varphi)} + 2\pi \frac{1}{\varepsilon} - \frac{2\pi}{\varepsilon} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\lambda(M_0, \varphi)}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\rho = \lambda(M_0, \varphi)$ является уравнением границы поверхности σ , M_0 не лежит на границе поверхности σ .

Теперь интеграл на части плоскости с произвольной плотностью

$$I(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{g(M) d\sigma_M}{r_{MM_0}^3}, \quad M_0 \in \sigma, \quad (2.11)$$

определим следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем полагать

$$I(M_0) = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\sigma \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{g(M) d\sigma_M}{r_{MM_0}^3} - \frac{2\pi g(M_0)}{\varepsilon} \right], \quad M_0 \in \sigma. \quad (2.12)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.1. *Интеграл (2.12) существует для любой функции $g(M)$ класса $H_1(\alpha)$, т.е. когда g'_x и g'_y являются функциями класса $H(\alpha)$ на σ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем интеграл (2.12) в виде

$$\begin{aligned}
I(M_0) &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\sigma \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{g(M) - g(M_0) - g'_x(M_0)(x - x_0) - g'_y(M_0)(y - y_0)}{r_{MM_0}^3} d\sigma_M \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} g(M_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\sigma \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{d\sigma_M}{r_{MM_0}^3} - \frac{2\pi}{\varepsilon} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\sigma \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{g'_x(M_0)(x - x_0) + g'_y(M_0)(y - y_0)}{r_{MM_0}^3} d\sigma_M \right] \\
&= I_1(M_0) + I_2(M_0) + I_3(M_0).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Так как $g(M) \in H_1(\alpha)$, то

$$|g(M) - g(M_0) - g'_x(M_0)(x - x_0) - g'_y(M_0)(y - y_0)| \leq Cr_{MM_0}^{1+\alpha} \tag{2.14}$$

и интеграл $I_1(M_0)$ существует как несобственный.

Интеграл $I_2(M_0)$ существует в смысле определения 2.1.

Интеграл $I_3(M_0)$ существует как сингулярный интеграл [21; гл. 2, § 5], [22; § 5].

Пусть теперь σ — гладкая поверхность класса C^2 [21; гл. 2, § 4], т.е. ее параметрическое представление является дважды непрерывно дифференцируемым на области определения. Тогда величины $(\bar{n}_{M_0}, \bar{r}_{MM_0})$ и $(\bar{n}_M, \bar{r}_{MM_0})$ являются величинами порядка $r_{MM_0}^2$ при $M \rightarrow M_0$. При этих предположениях интеграл по поверхности σ от величины $(\bar{n}_M - \bar{n}_{M_0}, \bar{n}_{M_0})/r_{MM_0}^3$ определен как сингулярный двумерный интеграл. Таким образом, для определения интеграла $I_N(M_0)$, стоящего в (2.6) слева, достаточно определить интеграл по поверхности σ от функции $r_{MM_0}^{-3}$, что и сделано в работах [23], [24].

Квадратурные формулы метода дискретных замкнутых вихревых рамок [11; гл. 13, § 4], [19; гл. 23, § 4] для интеграла $I_N(M_0)$ строятся следующим образом. Пусть поверхность σ является образом (достаточно гладким) прямоугольника $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ плоскости O^*UV при отображении $x = x(U, V)$, $y = y(U, V)$, $z = z(U, V)$, $M^*(U, V) \in \Pi$. На каждом отрезке $[a, b]$ и $[c, d]$ возьмем некоторое каноническое разбиение (см. § 1) с шагом h_1 на отрезке $[a, b]$ и шагом h_2 на отрезке $[c, d]$ так, что $0 < q_1 \leq h_1/h_2$, $h_2/h_1 \leq q_2 < +\infty$, где q_1 и q_2 — некоторые положительные числа. Тогда прямоугольник Π разобьется на прямоугольники Π_k с центрами в точках M_{0k}^* , $k = 1, \dots, n$. Образ прямоугольника Π_k на поверхности σ обозначим σ_k , а точки M_{0k}^* — через M_{0k} . Тогда в точке M_{0j} , $j = 1, \dots, n$, интеграл $I_N(M_{0j})$ заменяется следующей суммой:

$$S_{N,n}(M_{0j}) = \sum_{k=1}^n g(M_{0k}) \int_{\sigma_k} K_N(M, M_{0j}) d\sigma_M, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.15}$$

В частном случае, когда σ является прямоугольником Π на плоскости Oxy , в работе [23] доказана

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть функция $g(x, y)$ представляется в виде

$$g(x, y) = \sqrt{\rho(x, y)} \Psi(x, y), \quad (2.16)$$

где $\rho(x, y)$ – расстояние от точки $M(x, y)$ до границы прямоугольника Π , а $\Psi(x, y) \in H_1(\alpha)$, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, на Π .

Тогда справедлива оценка

$$|I_N(M_{0j}) - S_{N,n}(M_{0j})| = \Theta_n(M_{0j}) \leq C \frac{h^{1/2}}{\rho(M_{0j})}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.17)$$

где $C \geq 0$ не зависит от n .

Таким образом, из формулы (2.17) видно, что поведение величины $\Theta_n(M_{0j})$ аналогично поведению величины $\Theta(x_{0j})$ в формуле (1.14), т.е. $S_{N,n}(M_{0j})$ равномерно сходится к значениям интеграла $I_N(M_{0j})$ для точек M_{0j} , отстоящих от границы поверхности не менее, чем на некоторое положительное число, и имеется интегральная сходимость

$$\sum_{j=1}^n |I_N(M_{0j}) - S_{N,n}(M_{0j})| s_{\Pi_j} \leq C_1 h^{1/2} \ln n, \quad (2.18)$$

где s_{Π_j} – площадь прямоугольника Π_j .

Рассмотрим теперь более внимательно квадратурные формулы метода дискретных замкнутых вихревых рамок для сферы C_R^2 радиуса R . Введем в пространстве E^3 сферическую систему координат

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad (2.19)$$

где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Тогда уравнение сферы C_R^2 радиуса R с центром в начале координат получается, если в формулах (2.19) положить $r = R$. На отрезке $[0, 2\pi]$ возьмем точки $\varphi_k = (k-1)h$, $h = 2\pi/(2n) = \pi/n$, $k = 1, \dots, 2n+1$, и точки $\varphi_{0k} = \varphi_k + h/2$, $k = 1, \dots, 2n$, и на отрезке $[0, \pi]$ возьмем точки $\theta_k = (k-1)h$, $h = \pi/n$, $k = 1, \dots, n+1$, и $\theta_{0k} = \theta_k + h/2$, $k = 1, \dots, n$. Тогда линии $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, \dots, 2n+1$, и $\theta = \theta_k$, $k = 1, \dots, n+1$, разобьют прямоугольник $I = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ на прямоугольники $I_{i,k}$ с центрами в точках $M^*(\varphi_{0i}, \theta_{0k})$, $i = 1, \dots, 2n$, $k = 1, \dots, n$. Образ прямоугольника $I_{i,k}$ на сфере C_R^2 будем обозначать $\sigma_{i,k}$, а образ точки $M^*(\varphi_{0i}, \theta_{0k})$ – через $M_{0i,0k}$. Теперь для интеграла $I_N(M_{0j,0m})$ на сфере рассмотрим сумму

$$S_{N,n}(M_{0j,0m}) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n g(M_{0i,0k}) \int_{\sigma_{ik}} K_N(M, M_{0j,0m}) d\sigma_m, \quad (2.20)$$

где $j = 1, \dots, 2n$; $m = 1, \dots, n$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть функция $g(M)$ принадлежит классу $H_1(\alpha)$ на сфере C_R^2 . Тогда для всех точек $M_{0j,0m}$ сферы таких, что $\theta_{0m} \in [\delta, \pi - \delta]$, где $\delta > 0$ – достаточно малое положительное число, выполняется оценка

$$|I_N(M_{0j,0m}) - S_{N,n}(M_{0j,0m})| \leq C_\delta h^\alpha \ln n. \quad (2.21)$$

Прежде чем доказывать теорему 2.3, докажем лемму.

ЛЕММА 2.1. Справедливо следующее представление:

$$\int_{C_R^2} K_N(M, M_0) g(M) d\sigma_M = \frac{1}{R} \int_{C_{R=1}^2} \left(\frac{1}{r_{MM_0}^3} + \frac{1}{4r_{MM_0}} \right) g(M) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.22)$$

для любой точки (φ_0, θ_0) , $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для преобразования функции $K_N(M, M_0)$ заметим, что для точек сферы C_R^2 справедливы следующие соотношения.

Для величины $r_{MM_0}^2$ имеем

$$\begin{aligned} r_{MM_0}^2 &= R^2 [(\sin \theta_0 \cos \varphi_0 - \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta_0 \sin \varphi_0 - \sin \theta \sin \varphi)^2 \\ &\quad + (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2] \\ &= R^2 \left[\sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad + \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \sin \varphi_0 \sin \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \\ &\quad \left. + 4 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right] \\ &= R^2 \left[\sin^2 \theta_0 - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi_0 - \varphi) + \sin^2 \theta + 4 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right] \\ &= R^2 \left[(\sin \theta_0 - \sin \theta)^2 + 2 \sin \theta_0 \sin \theta (1 - \cos(\varphi_0 - \varphi)) \right. \\ &\quad \left. + 4 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right] \\ &= R^2 \left[4 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} + 4 \sin \theta_0 \sin \theta \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right. \\ &\quad \left. + 4 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right] \\ &= 4R^2 \left[\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \sin \theta_0 \sin \theta \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Далее, из геометрии сферы получаем

$$\begin{aligned} \bar{n}_M &= \sin \theta \cos \varphi \bar{i} + \sin \theta \sin \varphi \bar{j} + \cos \theta \bar{k}, \\ \bar{n}_{M_0} &= \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \bar{i} + \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \bar{j} + \cos \theta_0 \bar{k}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из формул (2.24) следует

$$\begin{aligned}
(\overline{n}_M - \overline{n}_{M_0}, \overline{n}_{M_0}) &= (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0) \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\
&\quad + (\sin \theta \sin \varphi - \sin \theta_0 \sin \varphi_0) \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + (\cos \theta - \cos \theta_0) \cos \theta_0 \\
&= \sin \theta \cos \varphi \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 + \sin \theta \sin \varphi \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \\
&\quad - \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + \cos \theta \cos \theta_0 - \cos^2 \theta_0 \\
&= \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) + \cos \theta \cos \theta_0 - 1 \\
&= \sin \theta \sin \theta_0 [\cos(\varphi_0 - \varphi) - 1] + \cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta - 1 \\
&= -2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \sin \theta \sin \theta_0 - 2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \\
&= -2 \left(\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \sin \theta \sin \theta_0 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right). \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Из сравнения формул (2.23) и (2.25) получаем

$$(\overline{n}_M - \overline{n}_{M_0}, \overline{n}_{M_0}) = -\frac{1}{2R^2} r_{MM_0}^2. \tag{2.26}$$

Далее, можно заметить, что

$$\begin{aligned}
(\overline{r}_{MM_0}, \overline{n}_{M_0}) &= R[(\sin \theta_0 \cos \varphi_0 - \sin \theta \cos \varphi) \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\
&\quad + (\sin \theta_0 \sin \varphi_0 - \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + (\cos \theta_0 - \cos \theta) \cos \theta_0] \\
&= R[\sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 - \sin \theta \cos \varphi \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\
&\quad + \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 - \sin \theta \sin \varphi \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + \cos^2 \theta_0 - \cos \theta \cos \theta_0] \\
&= R[1 - \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi_0 - \varphi) - \cos \theta_0 \cos \theta] \\
&= R[1 - (\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta) + \sin \theta_0 \sin \theta (1 - \cos(\varphi_0 - \varphi))] \\
&= 2R \left(\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \sin \theta_0 \sin \theta \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right) = \frac{1}{2R} r_{MM_0}^2. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Итак, имеем

$$(\overline{r}_{MM_0}, \overline{n}_{M_0}) = \frac{1}{2R} r_{MM_0}^2. \tag{2.28}$$

Аналогично получаем

$$(\overline{r}_{MM_0}, \overline{n}_M) = -(\overline{r}_{M_0M}, \overline{n}_M) = -\frac{1}{2R} r_{MM_0}^2. \tag{2.29}$$

Из формул (2.7), (2.26), (2.28) и (2.29) получаем

$$\begin{aligned}
&\int_{C_R^2} K_N(M, M_0) g(M) d\sigma_M \\
&= \int_{C_R^2} \left(\frac{1}{r_{MM_0}^3} - \frac{2}{4R^2 r_{MM_0}} + \frac{3}{4R^2 r_{MM_0}} \right) g(M) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
&= \int_{C_R^2} \left(\frac{1}{r_{MM_0}^3} + \frac{1}{4R^2 r_{MM_0}} \right) g(M) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Так как для расстояния r_{R,MM_0} точек на сфере C_R^2 радиуса R и расстояния $r_{1,\widetilde{M}\widetilde{M}_0}$ соответствующих точек на сфере $C_{R=1}^2$ радиуса 1 справедливо соотношение

$$r_{R,MM_0} = Rr_{1,\widetilde{M}\widetilde{M}_0}, \quad (2.31)$$

то получаем справедливость леммы 2.1.

Обратимся теперь к доказательству теоремы 2.3.

Преобразуем левую часть в неравенстве (2.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} & |I_N(M_{0j,0m}) - S_{N,n}(M_{0j,0m})| \\ & \leq \frac{1}{R} \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} [g(M) - g(M_{0i,0k})] \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{r_{MM_{0j,0m}}^3} \right| \\ & \quad + \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} |g(M) - g(M_{0i,0k})| \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{r_{MM_{0j,0m}}} \\ & = \frac{1}{R} I_1(M_{0j,0m}) + \frac{1}{R} I_2(M_{0j,0m}), \quad j = 1, \dots, 2n, \quad m = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Вначале оценим величину $I_2(M_{0j,0m})$. Для этого напомним, что так как $g(M) \in H_1(\alpha)$ на сфере C_R^2 , то справедливо неравенство

$$|g(M) - g(M_0)| \leq Ar_{MM_0}, \quad (2.33)$$

где $M, M_0 \in C_R^2$, r_{MM_0} – расстояние между соответствующими точками на сфере единичного радиуса, $A > 0$ – некоторая константа.

Представим теперь $I_2(M_{0j,0m})$ в виде

$$\begin{aligned} I_2(M_{0j,0m}) &= \int_{\sigma_{j,m}} \frac{|g(M) - g(M_{0j,0m})|}{r_{MM_{0j,0m}}} \sin \theta d\theta d\varphi \\ & \quad + \sum_{\substack{i=1 \\ (i,k) \neq (j,m)}}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{j,m}} \frac{|g(M) - g(M_{0i,0k})|}{r_{MM_{0j,0m}}} \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= I_{2,1}(M_{0j,0m}) + I_{2,2}(M_{0j,0m}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Для $I_{2,1}(M_{0j,0m})$ с учетом (2.33) имеем

$$I_{2,1}(M_{0j,0m}) \leq A \int_{\sigma_{j,m}} \sin \theta d\theta d\varphi \leq Ah^2. \quad (2.35)$$

Для оценки $I_{2,2}(M_{0j,0m})$ заметим, что справедливо неравенство (см. рис. 1):

$$\alpha \geq \sin \alpha \geq \frac{2}{\pi} \alpha, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (2.36)$$

Рис. 1

Поэтому из (2.23) и (2.33) имеем

$$\begin{aligned}
 |g(M) - g(M_{0i,0k})| &\leq A r_{M M_{0i,0k}} \leq A 2 \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_{0k} - \theta}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_{0k} - \varphi}{3}} \\
 &\leq A 2 \sqrt{\frac{(\theta_{0k} - \theta)^2}{4} + \frac{(\varphi_{0k} - \varphi)^2}{4}} \\
 &= A \sqrt{(\theta_{0k} - \theta)^2 + (\varphi_{0k} - \varphi)^2} \leq A \frac{h}{\sqrt{2}}, \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

когда $M(\varphi, \theta) \in I_{i,k}$.

Введем на прямоугольнике $I = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ переменных φ и θ полярные координаты с центром в точке $M(\varphi_{0j}, \theta_{0m})$:

$$\begin{cases} \varphi - \varphi_{0j} = r \cos \alpha, \\ \theta - \theta_{0m} = r \sin \alpha, \end{cases} \quad (2.38)$$

где $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq \pi\sqrt{2}$. Последние неравенства справедливы, так как в силу периодичности всех функций в рассматриваемом интеграле по φ можно полагать, что разность $(\varphi - \varphi_{0j})$ меняется в пределах от $-\pi$ до π и, тем более, в этих пределах меняется разность $(\theta - \theta_{0m})$. Теперь в силу формулы (2.23) можно записать для точек единичной сферы:

$$\begin{aligned}
 r_{M M_{0j,0m}}^2 &= 4[\sin^2 A + \sin \theta_0 \sin \theta \sin^2 B] \\
 &= 4r^2 \left[\frac{\sin^2 A}{A^2} \frac{\cos^2 \alpha}{4} + \sin \theta_0 \sin \theta \frac{\sin^2 B}{B^2} \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right], \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

где $A = \frac{1}{2}r \cos \alpha$, $B = \frac{1}{2}r \sin \alpha$. Теперь в силу ограничения на r (см. (2.38)) получим, что

$$0 \leq \left| r \frac{\cos \alpha}{2} \right|, \quad \left| r \frac{\sin \alpha}{2} \right| \leq \frac{\sqrt{2} \pi}{2} = \alpha^*, \quad (2.40)$$

и поэтому (см. рис. 1) имеем

$$\frac{\sin^2 \alpha^*}{(\alpha^*)^2} \leq \frac{\sin^2 A}{A^2}, \quad \frac{\sin^2 B}{B^2} \leq 1. \quad (2.41)$$

Заметим, что для любых положительных чисел a и b выполняется соотношение

$$\min(a; b) \leq a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha \leq \max(a; b) \quad (2.42)$$

для любых α . Следовательно, из формул (2.39)–(2.42) получаем

$$r^2 \geq r_{M M_{0j,0m}}^2 \geq \lambda^2 r^2 \quad (2.43)$$

для любых M и $M_{0j,0m}$, где $\lambda^2 = \min((\sin \alpha^* / \alpha^*)^2; \sin \theta_{0m} \sin \theta)$, или

$$1 \geq \frac{r_{M M_{0j,0m}}}{r} \geq \lambda.$$

Возвращаясь теперь к оценке $I_{2,2}(M_{0j,0m})$ с переходом к полярным координатам (r, α) , получим

$$\begin{aligned} I_{2,2}(M_{0j,0m}) &\leq \frac{A}{\sqrt{2}} h \int_{I \setminus I_{j,m}} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{r\lambda} \leq \frac{C_1 h}{\sqrt{\rho^*(\theta_{0m})}} \int_{I \setminus I_{j,m}} \frac{\sqrt{\sin \theta} d\theta d\varphi}{r} \\ &\leq \frac{C_1 h}{\sqrt{\rho^*(\theta_{0m})}} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{2\pi} \frac{r dr}{r} = \frac{C_1 h}{\sqrt{\rho^*(\theta_{0m})}} 4^2 \pi^2 = \frac{C_2}{\sqrt{\rho^*(\theta_{0m})}} h, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где $\rho^*(\theta_{0m}) = \min(\theta_{0m}; \pi - \theta_{0m})$.

Обратимся теперь к оценке $I_1(M_{0j,0m})$. Введем величину $\tilde{r}_{M M_0}$ для точек единичной сферы по формуле

$$\tilde{r}_{M M_0} = 2 \left[\sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + \sin^2 \theta_0 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right]^{1/2}. \quad (2.45)$$

Преобразуем выражение для $I_1(M_{0j,0m})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1(M_{0j,0m}) &\leq \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{g(M) - g(M_{0i,0k})}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi \right| \\ &+ \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} [g(M) - g(M_{0i,0k})] \left[\frac{1}{r_{M M_{0j,0m}}^3} - \frac{1}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} \right] \sin \theta d\theta d\varphi \right| \\ &= I_{1,1}(M_{0j,0m}) + I_{1,2}(M_{0j,0m}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Введем обозначения $r_{M M_{0j,0m}}^2 = c$ и $\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^2 = d$. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{M M_{0j,0m}}^3} - \frac{1}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} &= \frac{1}{c^{3/2}} - \frac{1}{d^{3/2}} = \frac{d^{3/2} - c^{3/2}}{c^{3/2} d^{3/2}} \\ &= \frac{d^3 - c^3}{c^{3/2} d^{3/2} [d^{3/2} + c^{3/2}]} = \frac{(d - c)(d^2 + dc + c^2)}{c^{3/2} d^{3/2} (d^{3/2} + c^{3/2})} \\ &= \frac{d - c}{c^{3/2} d} \left[\frac{d^{3/2}}{d^{3/2} + c^{3/2}} + \frac{d^{1/2} c^{2/2}}{d^{3/2} + c^{3/2}} \right] + \frac{d - c}{c d^{3/2}} \frac{c^{3/2}}{d^{3/2} + c^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Заметим, что поскольку величины d и c положительны, то справедливы неравенства

$$\frac{d^{3/2}}{d^{3/2} + c^{3/2}} \leq 1, \quad \frac{d^{1/2}c^{2/2}}{d^{3/2} + c^{3/2}} \leq 1, \quad \frac{c^{3/2}}{d^{3/2} + c^{3/2}} \leq 1 \quad (2.48)$$

для произвольных точек M и $M_{0j,0m}$.

Запишем теперь разность $d - c$ в виде

$$\begin{aligned} d - c &= \tilde{r}_{M M_0}^2 - r_{M M_0}^2 = 4 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \sin \theta_0 (\sin \theta_0 - \sin \theta) \\ &= 8 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos \frac{\theta_0 + \theta}{2} \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

при $M_0 = M_{0j,0m}$.

Теперь обратимся к слагаемому $I_{1,2}(M_{0j,0m})$. Используя формулы (2.37) и (2.46)–(2.49), получим

$$\begin{aligned} I_{1,2}(M_{0j,0m}) &\leq \int_{\sigma_{j,m}} \frac{8A \sin^2((\varphi_{0j} - \varphi)/2) \sin |(\theta_{0m} - \theta)/2| \sin \theta_{0m}}{r_{M M_{0j,0m}} \tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^2} \\ &\times \left(\frac{2}{r_{M M_{0j,0m}}} + \frac{1}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}} \right) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &+ \frac{8Ah}{\sqrt{2}} \int_{C_R^2 \setminus \sigma_{j,m}} \frac{\sin^2((\varphi_{0j} - \varphi)/2) \sin |(\theta_{0m} - \theta)/2| \sin \theta_{0m}}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^2} \\ &\times \left(\frac{2}{r_{M M_{0j,0m}}} + \frac{1}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}} \right) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= I_{1,2}^*(M_{0j,0m}) + I_{1,2}^{**}(M_{0j,0m}). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Заметим теперь, что для величины $\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}$ справедливы соотношения

$$1 \geq \frac{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}}{r} \geq \lambda_1, \quad (2.51)$$

где $\lambda_1 = \min(\sin \alpha^* / \alpha^*; \sin \theta_{0m})$ для любых точек M и $M_{0j,0m}$.

Далее, справедливы неравенства

$$\frac{\sin |(\theta_{0m} - \theta)/2|}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}} \leq 1, \quad \frac{\sin |(\theta_{0m} - \theta)/2|}{r_{M M_{0j,0m}}} \leq 1, \quad (2.52)$$

$$\frac{\sin^2((\varphi_{0j} - \varphi)/2) \sin \theta_{0m}}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^2} \leq \frac{1}{\sin \theta_{0m}} \quad (2.53)$$

для любых точек M и $M_{0j,0m}$. С учетом неравенств (2.52), (2.53), переходя к полярным координатам (2.38), имеем

$$\begin{aligned} I_{1,2}^*(M_{0j,0m}) &\leq 8A \int_0^{2\pi} \int_0^{h/\sqrt{2}} \frac{1}{r \sin \theta_{0m}} \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} \right) \sin \theta r dr d\alpha \\ &\leq A_1 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{h/\sqrt{2}} \frac{1}{\sin \theta_{0m}} \left(\frac{2}{\sqrt{\sin \theta_{0m}}} + \frac{1}{\sin \theta_{0m}} \right) dr \\ &\leq A_2 h \frac{1}{\sin^2 \theta_{0m}}, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad m = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Для $I_{1,2}^{**}(M_{0j,0m})$ имеем аналогично

$$\begin{aligned} I_{1,2}^{**}(M_{0j,0m}) &\leq \frac{8Ah}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{2\pi} \frac{1}{r\lambda} \frac{1}{\sin \theta_{0m}} \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} \right) \frac{\sin \theta r}{r} \\ &\leq A_3 h \left(\frac{2}{(\sin \theta_{0m})^{3/2}} + \frac{1}{(\sin \theta_{0m})^{5/2}} \right) \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{2\pi} \frac{dr}{r} \\ &\leq A_4 h \frac{1}{(\sin^2 \theta_{0m})^{5/2}} \ln n, \quad j = 1, \dots, 2n, \quad m = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Таким образом, из формул (2.50) и (2.54), (2.55) получаем

$$I_{1,2}(M_{0j,0m}) \leq A_5 \frac{1}{(\sin \theta_{0m})^{5/2}} h \ln n. \quad (2.56)$$

Теперь рассмотрим оценку для $I_{1,1}(M_{0j,0m})$ в (2.46). Запишем $I_{1,1}(M_{0j,0m})$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_{1,1}(M_{0j,0m}) &\leq \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{\Delta(M, M_{0i,0k})}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{g'_\varphi(M)(\varphi - \varphi_{0i})}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{\sigma_{i,k}} \frac{g'_\theta(M)(\theta - \theta_{0k})}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi \right| \\ &= I_{1,1}^*(M_{0j,0m}) + I_{1,1}^{**}(M_{0j,0m}) + I_{1,1}^{***}(M_{0j,0m}), \end{aligned} \quad (2.57)$$

где $\Delta(M, M_{0i,0k}) = g(M) - g(M_{0i,0k}) - g'_\varphi(M)(\varphi - \varphi_{0i}) - g'_\theta(M)(\theta - \theta_{0k})$.

Для $I_{1,1}^*(M_{0j,0m})$ с учетом формулы для $\Delta(M, M_{0i,0k})$ и того, что $g(M) \in H_1(\alpha)$ на сфере, получаем

$$\begin{aligned} I_{1,1}^*(M_{0j,0m}) &\leq A^* \int_{\sigma_{j,m}} \frac{r_{M M_{0j,0m}}^{1+\alpha}}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi + A_1^* h^{1+\alpha} \int_{C_R^2 \setminus \sigma_{j,m}} \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} \\ &\leq A^* \left[\int_{\sigma_{j,m}} \frac{r_{M M_{0j,0m}}^{1+\alpha} |\sin \theta - \sin \theta_{0m}|}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi + \sin \theta_{0m} \int_{\sigma_{j,m}} \frac{r_{M M_{0j,0m}}^{1+\alpha}}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right] \\ &\quad + A_1^* h^{1+\alpha} \left[\int_{C_R^2 \setminus \sigma_{j,m}} \frac{|\sin \theta - \sin \theta_{0m}|}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi + \sin \theta_{0m} \int_{C_R^2 \setminus \sigma_{j,m}} \frac{d\theta d\varphi}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} \right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Переходя к полярным координатам (2.38) и проводя выкладки, аналогичные проведенным для оценки $I_{1,2}^{**}(M_{0j,0m})$, получим

$$I_{1,1}^*(M_{0j,0m}) \leq A_2^* \frac{h^\alpha}{\sin^2 \theta_{0m}}. \quad (2.59)$$

Для оценки $I_{1,1}^{**}(M_{0j,0m})$ запишем его вначале в виде

$$\begin{aligned} I_{1,1}^{**}(M_{0j,0m}) &\leq \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{[g'_\varphi(M) - g'_\varphi(M_{0i,0k})](\varphi - \varphi_{0i})}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} \sin \theta d\theta d\varphi \right| \\ &\quad + B_1 \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{(\varphi - \varphi_{0i})(\sin \theta - \sin \theta_{0m})}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right| \\ &\quad + B_1 |\sin \theta_{0m}| \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{\varphi - \varphi_{0i}}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right| \\ &= \eta_1(M_{0j,0m}) + B_1 \eta_2(M_{0j,0m}) + B_1 |\sin \theta_{0m}| \eta_3(M_{0j,0m}), \quad (2.60) \end{aligned}$$

где $B_1 = \max_{M \in C_R^2} g'_\varphi(M)$.

Теперь, записав $\eta_3(M_{0j,0m})$ в виде

$$\eta_3(M_{0j,0m}) = \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{\varphi - \varphi_{0i}}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi + \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{\varphi_{0j} - \varphi_{0i}}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right|, \quad (2.61)$$

видим, что $\eta_3(M_{0j,0m}) = 0$ в силу нечетности по $(\varphi - \varphi_{0j})$ подынтегральной функции (напомним, что φ_{0j} является точкой 0, а интегрирование идет от $-\pi$ до π по φ) в первом слагаемом и в силу симметрии точек φ_{0i} относительно точки φ_{0j} (см. рис. 2) во втором слагаемом.

Рис. 2

Для $\eta_2(M_{0j,0m})$ с учетом неравенств (2.52) получаем

$$\begin{aligned} \eta_2(M_{0j,0m}) &\leq \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{|\varphi - \varphi_{0i}|}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^2} d\theta d\varphi \\ &= \int_{I_{j,m}} \frac{|\varphi - \varphi_{0i}|}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^2} d\theta d\varphi + \sum_{\substack{i=1 \\ (i,k) \neq (j,m)}}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{|\varphi - \varphi_{0i}|}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^2} d\theta d\varphi. \quad (2.62) \end{aligned}$$

Переходя опять к полярным координатам (2.38), видим, что

$$\eta_2(M_{0j,0m}) \leq B_2 \frac{h \ln n}{\sin^2 \theta_{0m}}. \quad (2.63)$$

Для оценки $\eta_1(M_{0j,0m})$ запишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta_1(M_{0j,0m}) &\leq \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{[g'_\varphi(M) - g'_\varphi(M_{0i,0k})](\varphi - \varphi_{0i})}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} (\sin \theta - \sin \theta_{0m}) d\theta d\varphi \right| \\ &\quad + |\sin \theta_{0m}| \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{[g'_\varphi(M) - g'_\varphi(M_{0i,0k})](\varphi - \varphi_{0i})}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right|. \quad (2.64) \end{aligned}$$

Опять используя неравенства (2.51) и выделяя слагаемое (j, m) , получим оценку

$$\eta_1(M_{0j,0m}) \leq B_3 \frac{h^\alpha}{\sin^2 \theta_{0m}}. \quad (2.65)$$

Таким образом, для $I_{1,1}^{**}(M_{0j,0m})$ в формуле (2.57) получена оценка такого же типа, как и оценка (2.59) для слагаемого $I_{1,1}^*(M_{0j,0m})$ в этой формуле.

Наконец, для исследования $I_{1,1}^{***}(M_{0j,0m})$, сделав для него такие же преобразования, как и для $I_{1,1}^{**}(M_{0j,0m})$, придем к рассмотрению величин, аналогичных величинам $\eta_p(M_{0j,0m})$, $p = 1, 2, 3$, с заменой $(\varphi - \varphi_{0i})$ на $(\theta - \theta_{0k})$. Для первых двух слагаемых получим такие же оценки, а для третьего слагаемого, предполагая $\theta_{0m} < \pi/2$, получим (см. рис. 3)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n \int_{I_{i,k}} \frac{\theta - \theta_{0k}}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right| &= \left| \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=2m}^n \int_{I_{i,k}} \frac{\theta - \theta_{0k}}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\theta d\varphi \right| \\ &\leq \frac{h}{\sin^3 \theta_{0m}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_{(-\theta_{0m} + \theta_{2m})/|\sin \alpha|}^{\frac{dr}{r^2}} \\ &\leq B_4 \frac{h}{\sin^3 \theta_{0m} \rho^*(\theta_{0m})}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Рис. 3

С учетом множителя $\sin \theta_{0m}$ окончательно получаем

$$I_{1,1}^{***}(M_{0j,0m}) \leq B_5 \frac{h}{\sin^3 \theta_{0m} \rho^*(\theta_{0m})}. \quad (2.67)$$

Из всех приведенных выкладок следует справедливость теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Численный эксперимент, проведенный для сферы в случаях, когда известны спектральные соотношения для ядра $K_N(M, M_0)$, показывает справедливость теоремы 2.3 и, более того, показывает справедливость результата

$$\sum_{j=1}^{2n} \sum_{m=1}^n |I_N(M_{0j,0m}) - S_{N,n}(M_{0j,0m})| s_{\sigma_{j,m}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2.68)$$

который, к сожалению, не следует из оценок, полученных в процессе доказательства теоремы 2.3. Доказательству такого результата препятствует оценка (2.67).

Вычислительный эксперимент проводился с использованием соотношений [19]:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C_R^2} K_N(M, M_0) Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_M = -\frac{n(n+1)}{R(2n+1)} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.69)$$

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n (A_{m,n} \cos(m\varphi) + B_{m,n} \sin(m\varphi)) P_n^m(\cos \theta), \quad (2.70)$$

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} P_n^{(m)}(\mu), \quad m = 0, \dots, n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.71)$$

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.72)$$

где $Y_n(\theta, \varphi)$ – сферическая функция порядка n ; $A_{m,n}, B_{m,n}$ – произвольные числа; $P_n^m(\mu)$ – присоединенные функции Лежандра; $P_n(\mu)$ – полиномы Лежандра степени n .

Например, рассматривалась функция $Y_1(\theta, \varphi)$ при $A_{0,1} = A_{1,1} = B_{0,1} = B_{1,1} = 1$. Затем интеграл в левой части заменялся квадратурной суммой

$$S_{N,n}(M_{0j,0m}) = S_{N,n}(\theta_{0m}, \varphi_{0j})$$

(см. (2.15)) при $g(M_{0i,0k}) = Y_1(\theta_{0k}, \varphi_{0i})$. Полученные результаты вычислений даны в табл. 1, где в столбце 1 указано разбиение по $\theta \in [0, \pi]$, в столбце 2 – по $\varphi \in [0, 2\pi]$, в столбце 3 указаны значения сумм

$$\sum_{j=1}^{2n} \sum_{m=1}^n \left| \frac{1}{4\pi} S_{N,n}(\theta_{0m}, \varphi_{0j}) \right| \Delta\sigma_{j,m},$$

в столбце 4 – значения сумм

$$\sum_{j=1}^{2n} \sum_{m=1}^n \left| \frac{2}{3} Y_1(\theta_{0m}, \varphi_{0j}) \right| \Delta\sigma_{j,m},$$

в столбце 5 – значения сумм

$$\sum_{j=1}^{2n} \sum_{m=1}^n \left| \frac{1}{4\pi} S_{N,n}(\theta_{0m}, \varphi_{0j}) + \frac{2}{3} Y_1(\theta_{0m}, \varphi_{0j}) \right| \Delta\sigma_{j,m},$$

а в столбце 6 указаны величины

$$\max_{(j,m)} \left| \frac{1}{4\pi} S_{N,n}(\theta_{0m}, \varphi_{0j}) + \frac{2}{3} Y_1(\theta_{0m}, \varphi_{0j}) \right|,$$

где $\Delta\sigma_{j,m}$ – площадь поверхности $\sigma_{j,m}$.

ТАБЛИЦА 1

1	2	3	4	5	6
10	20	90.40412	91.81063	2.034871	1.943787
15	30	90.70240	91.40501	1.209499	2.093547
20	40	90.89680	91.33085	0.862051	2.154906
25	50	90.94277	91.24721	0.669597	2.195151
30	60	91.00057	91.23430	0.547807	2.217790
35	70	91.02794	91.21292	0.464127	2.231807
40	80	91.04869	91.20231	0.403166	2.241108
45	90	91.06531	91.19571	0.356936	2.250282
50	100	91.07541	91.18868	0.320761	2.256694
55	110	91.08763	91.18690	0.291534	2.261319
60	120	91.09575	91.18363	0.267480	2.264742
65	130	91.10316	91.18303	0.247167	2.268629
70	140	91.10955	91.18195	0.229727	2.271567
75	150	91.11315	91.17981	0.214569	2.273816

Далее, рассмотрим численное решение уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C_R^2} K_N(M, M_0) g(M) d\sigma_M = -\frac{2}{3} Y_1(\theta_0, \varphi_0), \quad \theta_0 \in [0, \pi], \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi], \quad (2.73)$$

для которого точное решение $g(M) = Y_1(\theta, \varphi)$. Численное решение этого уравнения получим из системы уравнений

$$\begin{aligned} \gamma_{0n} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n g_n(\theta_{0k}, \varphi_{0i}) \int_{\sigma_{i,k}} K_N(M, M_{0j,0m}) d\sigma_M &= -\frac{2}{3} Y_1(\theta_{0m}, \varphi_{0j}), \\ m = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, 2n, \\ \sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n g_n(\theta_{0k}, \varphi_{0i}) \Delta\sigma_{i,k} &= 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Результаты численных расчетов даны в табл. 2, где столбцы 1 и 2 те же, что в табл. 1, в столбце 3 указаны значения сумм

$$\sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n |g_n(\theta_{0k}, \varphi_{0i})| \Delta\sigma_{i,k},$$

в столбце 4 – значения сумм

$$\sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n |Y_1(\theta_{0k}, \varphi_{0i})| \Delta\sigma_{i,k},$$

в столбце 5 – значения сумм

$$\sum_{i=1}^{2n} \sum_{k=1}^n |g_n(\theta_{0k}, \varphi_{0i}) - Y_1(\theta_{0k}, \varphi_{0i})| \Delta\sigma_{i,k},$$

в столбце 6 – значения величины

$$\max_{(i,k)} |g_n(\theta_{0k}, \varphi_{0i}) - Y_1(\theta_{0k}, \varphi_{0i})|.$$

ТАБЛИЦА 2

1	2	3	4	5	6
10	20	11.1044	10.9591	0.1522	0.0570
15	30	10.9765	10.9107	0.0722	0.0404
20	40	10.9398	10.9018	0.0440	0.0311
25	50	10.9171	10.8918	0.0307	0.0253
30	60	10.9087	10.8903	0.0234	0.0213
35	70	10.9017	10.8877	0.0188	0.0184
40	80	10.8977	10.8865	0.0156	0.0162
45	90	10.8949	10.8857	0.0134	0.0144

В следующей теореме установлено представляющее интерес в различных теоретических и вычислительных задачах спектральное соотношение.

ТЕОРЕМА 2.4. *На единичной сфере справедливо следующее спектральное соотношение:*

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C_{R=1}^2} \frac{1}{r_{MM_0}^3} Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_M = -\frac{2n+1}{4} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.75)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [19; гл. 5, §2], [25; гл. II, §2, п. 112] следующее спектральное соотношение:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C_{R=1}^2} \frac{1}{r_{MM_0}} Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_M = \frac{1}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.76)$$

Теперь, используя соотношения (2.69), (2.76) и представление интеграла в (2.69) в виде (2.30) для $R = 1$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{C_{R=1}^2} \frac{1}{r_{MM_0}^3} Y_n(\theta, \varphi) d\sigma_M \\ &= -\frac{(n+1)n}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0) - \frac{1}{4(2n+1)} Y_n(\theta_0, \varphi_0) \\ &= -\frac{(2n+1)^2}{4(2n+1)} Y_n(\theta_0, \varphi_0) = -\frac{2n+1}{4} Y_n(\theta_0, \varphi_0), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.77) \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 3. Обобщение понятия сингулярного интеграла

В процессе доказательства теоремы 2.3 была рассмотрена следующая конструкция. Дан двумерный интеграл вида

$$I(M_0) = \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} g(M) d\sigma_M, \quad (3.1)$$

где D – область в плоскости Oxy ; φ – полярный угол точки M относительно точки M_0 , $f(M_0, \varphi)$ – функция, ограниченная на $D \times D$ как функция точек M и M_0 из области D , непрерывная в $D \setminus M_0$ и являющаяся достаточно гладкой функцией в полярных координатах с центром в точке M_0 на плоскости Oxy ; функция $g(M) \in H(\alpha)$ – плотность интеграла $I(M_0)$ и $d\sigma_M = dx dy$. Пусть D является прямоугольником и интеграл $I(M_0)$ понимается в некотором смысле, обобщающем понятие несобственного двумерного интеграла. Зададим на D каноническое разбиение на прямоугольники $D_{i,k}$, $i = 1, \dots, n_1$, $k = 1, \dots, n_2$, с центрами в точках $M_{0i,0k}$ и со сторонами h_1 и h_2 такими, что $0 < q_1 \leq h_1/h_2$, $h_2/h_1 \leq q_2 < +\infty$, где q_1 и q_2 – некоторые данные числа, и пусть $h = \min(h_1; h_2)$.

Возьмем теперь для интеграла $I(M_0)$ квадратурную сумму

$$S_h(M_{0j,0m}) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} g(M_{0i,0k}) \int_{D_{i,k}} \frac{f(M_{0j,0m}, \varphi_{0j,0m})}{r_{MM_{0j,0m}}^2} d\sigma_M, \quad (3.2)$$

$$j = 1, \dots, n_1, \quad m = 1, \dots, n_2,$$

где $\varphi_{0j,0m}$ – полярный угол точки M интегрирования относительно точки $M_{0j,0m}$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть функция $g(M)$ принадлежит классу $H(\alpha)$ на D , $0 < \alpha \leq 1$. Тогда справедливо неравенство

$$|I(M_{0j,0m}) - S_h(M_{0j,0m})| \leq Ch^\alpha |\ln h| \quad (3.3)$$

для всех точек $M_{0j,0m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (3.1) и (3.2), можно записать

$$\begin{aligned} & |I(M_{0j,0m}) - S_h(M_{0j,0m})| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \int_{D_{i,k}} \frac{f(M_{0j,0m}, \varphi_{0j,0m}) [g(M) - g(M_{0i,0k})]}{r_{MM_{0j,0m}}^2} dx dy \right| \\ &\leq BA \int_{D_{j,m}} \frac{dx dy}{r_{MM_{0j,0m}}^{2-\alpha}} + BAA_1^\alpha \frac{h^\alpha}{(\sqrt{2})^\alpha} \sum_{\substack{i=1 \\ (i,k) \neq (j,m)}}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \int_{D_{i,k}} \frac{dx dy}{r_{MM_{0j,0m}}^2} = I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $B = \sup_{M_0, M \in D} |f(M_0, \varphi)|$, A – константа в условии Гёльдера для функции $g(M)$, а $A_1 > 0$ – такое число, что $h_1, h_2 \leq A_1 h$ при $n_1, n_2 \rightarrow \infty$.

Для оценки слагаемых I_1 и I_2 в формуле (3.4) введем на плоскости Oxy полярные координаты с центром в точке $M_{0j,0m}$. Получим

$$I_1 \leq C_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \frac{dr}{r^{1-\alpha}} = C_1 2\pi h^\alpha, \quad (3.5)$$

где $C_1 = BA$.

Далее,

$$I_2 \leq C_2 h^\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{h/2}^R \frac{dr}{r} = C_2 2\pi h^\alpha \left(\ln R - \ln \frac{h}{2} \right) \leq C_3 h^\alpha |\ln h|, \quad (3.6)$$

где $C_2 = C_1(A_1/\sqrt{2})^\alpha$, $C_3 = 4\pi C_2$, а R – радиус круга с центром в точке $M_{0j,0m}$, содержащем область D . Теорема доказана.

Теперь посмотрим, в каком едином смысле можно понимать интегралы вида (3.1). Для этого рассмотрим конкретные примеры.

Рассмотрим вначале двумерный интеграл

$$I(M_0) = \int_D \frac{1}{r_{MM_0}^2} \frac{x - x_0}{r_{MM_0}} dx dy, \quad (3.7)$$

где D – некоторая ограниченная односвязная область, $M_0 \in D$.

Видно, что подынтегральная функция в интеграле (3.7) неограничена в точке M_0 и в обычном смысле он не существует. По аналогии с одномерным сингулярным интегралом было предложено поступить следующим образом: вырезать ε -окрестность $O(M_0, \varepsilon)$ точки M_0 и взять интеграл (3.7) по оставшемуся множеству $D \setminus O(M_0, \varepsilon)$; затем устремить ε к нулю и если предел существует, то его и обозначить $I(M_0)$, т.е. определить этот интеграл по формуле

$$I(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{1}{r_{MM_0}^2} \frac{x - x_0}{r_{MM_0}} dx dy, \quad (3.8)$$

где $M_0 \in D$.

Переходя к полярным координатам с центром в точке M_0 на плоскости Oxy , получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{1}{r_{MM_0}^2} \frac{x - x_0}{r_{MM_0}} dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^{\rho(M_0, \varphi)} \frac{1}{r^2} \cos \varphi r dr \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \cos \varphi (\ln \rho(M_0, \varphi) - \ln \varepsilon) d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \ln \rho(M_0, \varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \varphi \ln \rho(M_0, \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (3.9)$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0, \quad (3.10)$$

а функция $r = \rho(M_0, \varphi)$ описывает границу области D в выбранной системе координат.

Таким образом, интеграл $I(M_0)$, понимаемый в смысле равенства (3.8), имеет значение

$$I(M_0) = \int_0^{2\pi} \cos \varphi \ln \rho(M_0, \varphi) d\varphi. \quad (3.11)$$

Аналогично можно определить интеграл вида

$$I(M_0) = \int_D \frac{1}{r_{MM_0}^2} f(M_0, \varphi) dx dy, \quad (3.12)$$

где φ – полярный угол точки M по отношению к точке M_0 , а функция $f(M_0, \varphi)$ такая, как указано в (3.1). Как известно [22; § 5], интеграл (3.12) в смысле (3.8) существует тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi = 0, \quad (3.13)$$

где $M_0 \in D$. Если же равенство (3.13) не выполняется для некоторой точки $M_0 \in D$, то говорят [22; § 5], что интеграл (3.12) не существует. С другой стороны, как было показано в теореме 3.1, квадратурные формулы (исследованные там) сходятся к точному значению интеграла $I(M_0)$, не обязательно понимаемому в смысле равенства (3.13). Поэтому имеет смысл ввести следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть характеристика $f(M_0, \varphi)$ такая, как это указано после (3.1). Будем полагать

$$I(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} dx dy + \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \right], \quad (3.14)$$

если предел существует, и по-прежнему будем обозначать его в виде (3.12).

Сразу отметим, что если равенство (3.13) выполняется, то интеграл $I(M_0)$, понимаемый в смысле (3.14), является двумерным сингулярным интегралом в обычном смысле [22; § 5].

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.2. *Если характеристика в интеграле (3.1) удовлетворяет сформулированным после (3.1) условиям, то интеграл $I(M_0)$, понимаемый в смысле равенства (3.14), существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдя в (3.14) к полярным координатам с центром в точке M_0 , получим

$$\begin{aligned} I(M_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \int_{\varepsilon}^{\rho(M_0, \varphi)} \frac{dr}{r} + \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \right] \\ &= \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) \ln \rho(M_0, \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $r = \rho(M_0, \varphi)$ – уравнение границы области D в выбранных полярных координатах. Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$I^*(M_0) = \int_D \frac{\sin(\varphi/2)}{r_{MM_0}^2} dx dy. \quad (3.16)$$

Для характеристики этого интеграла выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = -2 \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4. \quad (3.17)$$

Следовательно, интеграл $I^*(M_0)$ не существует в обычном смысле [22; §5] сингулярного двумерного интеграла, т.е. в смысле равенства (3.8), но существует в смысле равенства (3.14).

Теперь рассмотрим сингулярный интеграл вида

$$I(M_0) = \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} g(M) dx dy, \quad (3.18)$$

где функция $g(M)$ называется *плотностью* этого интеграла, а функция $f(M_0, \varphi)$ – *характеристикой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Интеграл (3.18) будем называть *сингулярным интегралом* и понимать его в следующем смысле

$$I(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} g(M) dx dy + g(M_0) \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \right]. \quad (3.19)$$

Опять можно заметить, что если выполняется равенство (3.13), то интеграл (3.19) будет сингулярным интегралом в обычном смысле [22; §5].

Теперь докажем теорему.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть функция $g(M)$ принадлежит классу $H(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, на области D , а характеристика $f(M_0, \varphi)$ удовлетворяет условиям, указанным после (3.1). Тогда интеграл (3.19) существует для любой точки M_0 из области D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем формулу (3.19) следующим образом:

$$\begin{aligned} I(M_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} [g(M) - g(M_0)] dx dy \right) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(g(M_0) \int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} dx dy + g(M_0) \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \right) \\ &= I_1(M_0) + I_2(M_0). \end{aligned} \quad (3.20)$$

В формуле (3.20) для интеграла $I_2(M_0)$ с использованием (3.15) получаем

$$I_2(M_0) = g(M_0) \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) \ln \rho(M_0, \varphi) d\varphi. \quad (3.21)$$

Интеграл $I_1(M_0)$ является абсолютно сходящимся, так как $g(M) \in H(\alpha)$ на D . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Теорема 3.1 справедлива для интеграла (3.1), понимаемого в смысле (3.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Интеграл (3.1), понимаемый в смысле (3.19), обладает свойством линейности на множестве функций из $H(\alpha)$ на D , т.е. если $g(M)$ и $\eta(M)$ принадлежат $H(\alpha)$ на D , то

$$\begin{aligned} & \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} [Ag(M) + B\eta(M)] dx dy \\ &= A \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} g(M) dx dy + B \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^2} \eta(M) dx dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь с аналогичной точки зрения интеграл (2.11). Вначале рассмотрим интеграл вида

$$I^*(M_0) = \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^3} dx dy, \quad (3.22)$$

где функция $f(M_0, \varphi)$, называемая *характеристикой интеграла*, такая, как указано после (3.1), в частности, она может быть константой. Определим $I^*(M_0)$ следующим образом:

$$I^*(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^3} dx dy - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \right]. \quad (3.23)$$

Как и для интеграла (2.9), показывается, что этот интеграл существует.

Теперь рассмотрим интеграл

$$I^*(M_0) = \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^3} g(M) dx dy, \quad M_0 \in \sigma, \quad (3.24)$$

обобщающий интеграл (2.11). Пусть $g(M) \in H_1(\alpha)$ на D , и рассмотрим по аналогии с формулой (2.12) предел

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^3} g(M) dx dy - \frac{g(M_0)}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^3} \Delta(M, M_0) dx dy \right] \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[g(M_0) \left(\int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^3} dx dy - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi \right) \right] \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[g'_x(M_0) \int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi) \cos \varphi}{r_{MM_0}^2} dx dy \right] \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[g'_y(M_0) \int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi) \sin \varphi}{r_{MM_0}^2} dx dy \right], \quad (3.25) \end{aligned}$$

где $\Delta(M, M_0) = g(M) - g(M_0) - g'_x(M_0)(x - x_0) - g'_y(M_0)(y - y_0)$.

В силу неравенства (2.14) первое слагаемое имеет предел. Второе слагаемое имеет предел, как это указано для формулы (3.23), а вот третье и четвертое слагаемые имели бы предел, если бы выполнялись равенства

$$\int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) \sin \varphi d\varphi = 0. \quad (3.26)$$

Так как равенства (3.26) не обязательно выполняются, то интеграл (3.24) надо определить следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть частные производные функции $g(M)$ существуют в каждой точке области D . Тогда интеграл (3.24) понимаем следующим образом:

$$\begin{aligned} I^*(M_0) &= \int_D \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^3} g(M) dx dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{D \setminus O(M_0, \varepsilon)} \frac{f(M_0, \varphi)}{r_{MM_0}^3} g(M) dx dy \right. \\ &\quad - \frac{g(M_0)}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) d\varphi + g'_x(M_0) \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) \cos \varphi d\varphi \\ &\quad \left. + g'_y(M_0) \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} f(M_0, \varphi) \sin \varphi d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Принимая во внимание формулу (3.25) и теорему 3.2, видим теперь, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть характеристика $f(M_0, \varphi)$ в интеграле (3.24) такая, как указано после (3.1), а плотность $g(M)$ принадлежит классу $H_1(\alpha)$ на D . Тогда интеграл (3.24), понимаемый в смысле равенства (3.27), существует.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Определение 3.3 является обобщением определения 2.2, так как если взять $f(M_0, \varphi) \equiv 1$, то формула (3.27) перейдет в формулу (2.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если проанализировать доказательство сходимости квадратурных формул для гиперсингулярного интеграла на сфере, то ясно, что для гиперсингулярного интеграла (3.22) будет справедлив аналогичный результат для некоторого класса характеристик. Чтобы определить этот класс, заметим вначале, что в этом доказательстве существенную роль играло свойство функций $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$: $\sin(\varphi + \pi) = -\sin \varphi$ и $\cos(\varphi + \pi) = -\cos \varphi$. Поэтому введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Назовем функцию $f(M_0, \varphi)$ *четной* или *нечетной относительно π* , если для нее выполняется соответственно равенство

$$f(M_0, \varphi + \pi) = f(M_0, \varphi), \quad (3.28)$$

$$f(M_0, \varphi + \pi) = -f(M_0, \varphi). \quad (3.29)$$

Видно, что $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ являются нечетными относительно π . Поэтому если $f(M_0, \varphi)$ является четной относительно π , то $f(M_0, \varphi) \cos \varphi$ и $f(M_0, \varphi) \sin \varphi$ являются нечетными относительно π .

Таким образом, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть характеристика $f(M_0, \varphi)$ в интеграле (3.24) является четной относительно π , $g(M)$ принадлежит классу $H_1(\alpha)$ на D и область D является прямоугольником. Возьмем для D каноническое разбиение на прямоугольники $D_{i,k}$, $i = 1, \dots, n_1$, $k = 1, \dots, n_2$, с центрами в точках $M_{0i,0k}$ и сумму

$$S_h(M_{0j,0m}) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} g(M_{0i,0k}) \int_{D_{i,k}} \frac{f(M_{0j,0m}, \varphi_{0j,0m})}{r_{M_{0j,0m}}^3} dx dy, \quad (3.30)$$

где $\varphi_{0j,0m}$ – полярный угол точки M относительно точки $M_{0j,0m}$.

Тогда для всех точек $M_{0j,0m}$ таких, что расстояние $\rho(M_{0j,0m}, \text{гр } D)$ от этих точек до границы области D не менее $\delta > 0$, выполняется соотношение

$$|I(M_{0j,0m}) - S_h(M_{0j,0m})| \leq C_\delta h^\alpha |\ln h|. \quad (3.31)$$

§ 4. Гиперсингулярный интеграл и уравнение с ним на торе

Пример сферы показал, что если параметрическое представление поверхности является периодическим по одной из переменных, то по этой переменной удастся доказать равномерную по расчетным точкам $M_{0j,0m}$ сходимость квадратурных формул типа метода дискретных замкнутых вихревых рамок к точным значениям соответствующего гиперсингулярного интеграла. Поэтому целесообразно теперь рассмотреть замкнутую поверхность, параметрическое представление которой периодическое по обоим переменным. Примером такой поверхности является тор.

Итак, пусть теперь поверхность σ в уравнении (2.6) является тором. Напишем параметрическое уравнение тора в удобной форме. Геометрически ясно, что тор получается вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости окружности и не пересекающей ее. Поэтому возьмем в плоскости Oxz пространства $Oxyz$ окружность радиуса $R_1 > 0$ с центром в точке $(a, 0, 0)$ оси Ox , $0 < R_1 < a$. Уравнение этой окружности в плоскости Oxz будет

$$\begin{cases} z = R_1 \sin \theta, \\ x = a + R_1 \cos \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (4.1)$$

Теперь напишем уравнение окружности в плоскости $z = R_1 \sin \theta$ радиуса $R = a + R_1 \cos \theta$ и с центром в точке $(0, 0, R_1 \sin \theta)$ (см. рис. 4).

Рис. 4

Имеем

$$\begin{cases} z = R_1 \sin \theta, \\ x = (a + R_1 \cos \theta) \cos \varphi, \\ y = (a + R_1 \cos \theta) \sin \varphi, \end{cases} \quad (4.2)$$

где θ – постоянная величина, а $\varphi \in [0, 2\pi]$. Если теперь менять θ тоже на $[0, 2\pi]$, то система уравнений (4.2) и будет параметрическим представлением тора, где $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi, 0 < R_1 < a$.

Для удобного представления $K_{T,N}(M, M_0)$ на торе, как и в случае сферы, найдем вначале удобное представление для величины $r_{MM_0}^2$ квадрата расстояния между двумя точками на торе. Имеем

$$\begin{aligned} r_{MM_0}^2 &= (x - x_0)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2 \\ &= [(a + R_1 \cos \theta_0) \cos \varphi_0 - (a + R_1 \cos \theta) \cos \varphi]^2 \\ &\quad + [(a + R_1 \cos \theta_0) \sin \varphi_0 - (a + R_1 \cos \theta) \sin \varphi]^2 + R_1^2 (\sin \theta_0 - \sin \theta)^2 \\ &= (a + R_1 \cos \theta_0)^2 + (a + R_1 \cos \theta)^2 \\ &\quad - 2(a + R_1 \cos \theta_0)(a + R_1 \cos \theta)(\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi) \\ &\quad + 4R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \\ &= R_1^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2 + 4R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \\ &\quad + 2(a + R_1 \cos \theta_0)(a + R_1 \cos \theta)(1 - \cos(\varphi_0 - \varphi)) \\ &= 4R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} + 4R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} \cos^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \\ &\quad + 4(a + R_1 \cos \theta_0)(a + R_1 \cos \theta) \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$r_{MM_0}^2 = 4 \left[R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + (a + R_1 \cos \theta_0)(a + R_1 \cos \theta) \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right]. \quad (4.4)$$

Орт $\bar{n}_M$ нормали к тору в точке M найдем как векторное произведение касательных ортов $\bar{\tau}_\varphi$ и $\bar{\tau}_\theta$ в точке M к соответствующим координатным линиям на торе. Имеем

$$\begin{cases} x'_\varphi = -(a + R_1 \cos \theta) \sin \varphi, \\ y'_\varphi = (a + R_1 \cos \theta) \cos \varphi, \\ z'_\varphi = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

т. е.

$$\bar{\tau}_\varphi = \frac{x'_\varphi \bar{i} + y'_\varphi \bar{j} + z'_\varphi \bar{k}}{\sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2}} = -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j}. \quad (4.6)$$

Аналогично находим

$$\bar{\tau}_\theta = -\sin \theta \cos \varphi \bar{i} - \sin \theta \sin \varphi \bar{j} + \cos \theta \bar{k}. \quad (4.7)$$

Запишем теперь выражения для внешней нормали в точках M и M_0 соответственно:

$$\begin{aligned}\bar{n}_M &= \frac{\bar{\tau}_\varphi \times \bar{\tau}_\theta}{|\bar{\tau}_\varphi \times \bar{\tau}_\theta|} = \cos \theta \cos \varphi \bar{i} + \cos \theta \sin \varphi \bar{j} + \sin \theta \bar{k}, \\ \bar{n}_{M_0} &= \frac{\bar{\tau}_{\varphi_0} \times \bar{\tau}_{\theta_0}}{|\bar{\tau}_{\varphi_0} \times \bar{\tau}_{\theta_0}|} = \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \bar{i} + \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \bar{j} + \sin \theta_0 \bar{k}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}(\bar{n}_M, \bar{n}_{M_0}) &= \cos \theta \cos \theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) + \sin \theta \sin \theta_0 \\ &= -\cos \theta \cos \theta_0 (1 - \cos(\varphi_0 - \varphi)) + \cos(\theta_0 - \theta) \\ &= -2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta \cos \theta_0 - (1 - \cos(\theta_0 - \theta)) + 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta \cos \theta_0.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Так как

$$\begin{aligned}\bar{r}_{MM_0} &= (x_0 - x)\bar{i} + (y_0 - y)\bar{j} + (z_0 - z)\bar{k} \\ &= [(a + R_1 \cos \theta_0) \cos \varphi_0 - (a + R_1 \cos \theta_0) \cos \varphi] \bar{i} \\ &\quad + [(a + R_1 \cos \theta_0) \sin \varphi_0 - (a - R_1 \cos \theta_0) \sin \varphi] \bar{j} + R_1 (\sin \theta_0 - \sin \theta) \bar{k},\end{aligned}\tag{4.10}$$

то, принимая во внимание еще формулу (4.8), получим

$$\begin{aligned}(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M) &= [a(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + R_1(\cos \theta_0 \cos \varphi_0 - \cos \theta \cos \varphi)] \cos \theta \cos \varphi \\ &\quad + [a(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) + R_1(\cos \theta_0 \sin \varphi_0 - \cos \theta \sin \varphi)] \cos \theta \sin \varphi \\ &\quad + R_1(\sin \theta_0 \sin \theta - \sin^2 \theta) \\ &= -2a \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \cos \theta \cos \varphi + 2a \sin \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \cos \theta \sin \varphi \\ &\quad + R_1[\cos \theta_0 \cos \varphi_0 \cos \theta \cos \varphi - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi] \\ &\quad + R_1[\cos \theta_0 \sin \varphi_0 \cos \theta \sin \varphi - \cos^2 \theta \sin^2 \varphi] + R_1(\sin \theta_0 \sin \theta - \sin^2 \theta) \\ &= 2a \sin \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta \left(\sin \varphi \cos \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} - \cos \varphi \sin \frac{\varphi_0 + \varphi}{2} \right) \\ &\quad + R_1[\cos \theta_0 \cos \theta (\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi) - \cos^2 \theta] \\ &\quad + R_1(\sin \theta_0 \sin \theta - \sin^2 \theta) \\ &= -2a \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta + R_1 \cos \theta_0 \cos \theta \cos(\varphi_0 - \varphi) \\ &\quad - R_1(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + R_1 \sin \theta_0 \sin \theta \\ &= -2a \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta - R_1 \cos \theta_0 \cos \theta (1 - \cos(\varphi_0 - \varphi)) - R_1 \\ &\quad + R_1(\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta) \\ &= -2a \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta - R_1(1 - \cos(\theta_0 - \theta)) - 2R_1 \cos \theta_0 \cos \theta \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \\ &= -2R_1 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} (a \cos \theta + R_1 \cos \theta_0 \cos \theta).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Окончательно получаем

$$(\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_M) = -2R_1 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta (a + R_1 \cos \theta_0). \quad (4.12)$$

Далее,

$$\begin{aligned} (\bar{r}_{MM_0}, \bar{n}_{M_0}) &= -(\bar{r}_{M_0M}, \bar{n}_{M_0}) \\ &= 2R_1 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \theta_0 (a + R_1 \cos \theta). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Теперь заметим, что так как

$$\begin{cases} (a + R_1 \cos \theta) \geq (a - R_1) > 0, \\ (a + R_1 \cos \theta_0) \geq (a - R_1) > 0, \end{cases}$$

то из предыдущих формул и (4.4) получаем для тора

$$\frac{\sin^2((\theta_0 - \theta)/2)}{r_{MM_0}^2} \leq \frac{1}{4R_1^2}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\sin^2((\varphi_0 - \varphi)/2)}{r_{MM_0}^2} \leq \frac{1}{4(a + R_1 \cos \theta_0)(a + R_1 \cos \theta)}. \quad (4.15)$$

Поэтому для функции $K_{T,N}(M, M_0)$ на торе из формул (4.9), (4.12)–(4.15) получаем

$$K_{T,N}(M, M_0) = \frac{1}{r_{MM_0}^3} + \frac{\lambda_1(M, M_0)}{r_{MM_0}}, \quad (4.16)$$

где функция $\lambda_1(M, M_0)$ гладкая на $\sigma \setminus M_0$ и ограниченная на торе.

Напомним [26; гл. 17, §2], что если $x = x(U, V)$, $y = y(U, V)$, $z = z(U, V)$ – параметрическое представление поверхности σ , то для дифференциала площади поверхности справедлива формула

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dU dV, \quad (4.17)$$

где

$$E = x_U'^2 + y_U'^2 + z_U'^2, \quad G = x_V'^2 + y_V'^2 + z_V'^2, \quad F = x_U'x_V' + y_U'y_V' + z_U'z_V'.$$

Поэтому, исходя из формулы (4.2), которая дает параметрическое представление тора, получаем (полагая $U = \theta$, $V = \varphi$):

$$E = R_1^2, \quad G = (a + R_1 \cos \theta)^2, \quad F = 0 \quad (4.18)$$

и окончательно имеем

$$d\sigma = R_1(a + R_1 \cos \theta) d\theta d\varphi. \quad (4.19)$$

Обозначая через $I_{T,N}(M_0)$ интеграл слева в уравнении (2.6), можем теперь записать для тора:

$$I_{T,N}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(M) \left(\frac{1}{r_{MM_0}^3} + \frac{\lambda_1(M, M_0)}{r_{MM_0}} \right) R_1(a + R_1 \cos \theta) d\theta d\varphi, \quad (4.20)$$

где $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$.

Аналогично тому, как это было сделано для сферы, введем величину $\tilde{r}_{MM_0}^2$ по формуле

$$\tilde{r}_{MM_0}^2 = 4 \left[R_1^2 \sin^2 \frac{\theta_0 - \theta}{2} + (a + R_1 \cos \theta_0)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \right] \quad (4.21)$$

и запишем

$$\frac{1}{r_{MM_0}^3} = \frac{1}{\tilde{r}_{MM_0}^3} + \left(\frac{1}{r_{MM_0}^3} - \frac{1}{\tilde{r}_{MM_0}^3} \right). \quad (4.22)$$

Заметим теперь, что из формул (4.4) и (4.21) следует

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{MM_0}^2 - r_{MM_0}^2 &= 4 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} (a + R_1 \cos \theta_0) R_1 (\cos \theta_0 - \cos \theta) \\ &= -8 R_1 \sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \sin \frac{\theta_0 + \theta}{2} (a + R_1 \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Аналогично формулам (4.14) и (4.15) можно написать

$$\frac{\sin^2((\theta_0 - \theta)/2)}{\tilde{r}_{MM_0}^2} \leq \frac{1}{4R_1^2}, \quad (4.24)$$

$$\frac{\sin^2((\varphi_0 - \varphi)/2)}{\tilde{r}_{MM_0}^2} \leq \frac{1}{4(a + R_1 \cos \theta_0)^2} \leq \frac{1}{4(a - R_1)^2}, \quad (4.25)$$

$$\frac{\nu_1^2}{\nu_2^2} \geq \frac{r_{MM_0}^2}{\tilde{r}_{MM_0}^2}, \quad \frac{\tilde{r}_{MM_0}^2}{r_{MM_0}^2} \geq \frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}, \quad (4.26)$$

где $\nu_1 = a + R_1$, $\nu_2 = \min(R_1; a - R_1)$.

Из формул (4.14), (4.15), (4.24)–(4.26) следует, что выражение для $I_{T,N}(M_0)$ можно записать в виде

$$I_{T,N}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(M) \left(\frac{\lambda_3^*(M_0)}{\tilde{r}_{MM_0}^3} + \frac{\lambda_2^*(M, M_0)}{\tilde{r}_{MM_0}^2} + \frac{\lambda_1^*(M, M_0)}{\tilde{r}_{MM_0}} \right) d\theta d\varphi \quad (4.27)$$

для произвольной точки $M_0 = M(x_0, y_0, z_0) = M(\varphi_0, \theta_0)$, где $\lambda_3^*(M_0) = R_1(a + R_1 \cos \theta_0)$, а $\lambda_2^*(M, M_0)$ и $\lambda_1^*(M, M_0)$ такие же, как и функции $\lambda_1(M, M_0)$ в формуле (4.16).

Перейдем теперь к построению квадратурной формулы для интеграла $I_{T,N}(M_0)$ на торе. Возьмем на осях $O^*\varphi$ и $O^*\theta$ точки $\varphi_i, \theta_i = (i-1)h$, $h = 2\pi/(2n-1)$, $i = 1, \dots, 2n$, и точки $\varphi_{0i} = \varphi_i + h/2$, $\theta_{0i} = \theta_i + h/2$, $i = 1, \dots, 2n-1$. Тогда линии $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, \dots, 2n$, и $\theta = \theta_k$, $k = 1, \dots, 2n$, разобьют квадрат $I = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ плоскости $O^*\varphi\theta$ на прямоугольники $I_{i,k}$ с центрами в точках $M^*(\varphi_{0i}, \theta_{0k})$, $i, k = 1, \dots, 2n-1$. Образ прямоугольника $I_{i,k}$ на торе T будем обозначать $\sigma_{i,k}$, а образ точки $M^*(\varphi_{0i}, \theta_{0k})$ — через $M_{0i,0k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Так как точек $\varphi_{0i}, \theta_{0i}$ нечетное число и они являются серединами отрезков $I_{\varphi,i} = [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$, $I_{\theta,i} = [\theta_i, \theta_{i+1}]$, $i = 1, \dots, 2n-1$, то точка π является одной из них. Так как интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна периоду, не зависит от сдвига этого отрезка на любое число, то можно считать, что заданная точка $M^*(\varphi_{0j}, \theta_{0m})$ является серединой квадрата I , т.е. имеет координаты (π, π) .

Теперь для интеграла $I_{T,N}(M_{0j,0m})$ на торе, как это было сделано для сферы, рассмотрим сумму

$$S_{T,N,n}(M_{0j,0m}) = \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} g(M_{0i,0k}) \int_{\sigma_{i,k}} K_{T,N}(M, M_{0j,0m}) d\sigma_M, \quad (4.28)$$

где $j, m = 1, \dots, 2n-1$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть функция $g(M)$ принадлежит классу $H_1(\alpha)$ на торе T . Тогда для всех точек $M_{0j,0m}$ выполняется оценка

$$|I_{T,N}(M_{0j,0m}) - S_{T,N,n}(M_{0j,0m})| \leq Ch^\alpha \ln n, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.29)$$

где константа C не зависит от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (4.27), запишем

$$\begin{aligned} & |I_{T,N}(M_{0j,0m}) - S_{T,N,n}(M_{0j,0m})| \\ & \leq |\lambda_3^*(M_{0j,0m})| \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{[g(M) - g(M_{0i,0k})] d\varphi d\theta}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} \right| \\ & \quad + \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\lambda_2^*(M_{0j,0m}) [g(M) - g(M_{0i,0k})] d\varphi d\theta}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^2} \right| \\ & \quad + \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\lambda_1^*(M_{0j,0m}) [g(M) - g(M_{0i,0k})] d\varphi d\theta}{r_{M M_{0j,0m}}} \right| \\ & = |\lambda_3^*(M_{0j,0m})| I_{T,1}(M_{0j,0m}) + I_{T,2}(M_{0j,0m}) + I_{T,3}(M_{0j,0m}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

По формуле (2.38) на квадрате $I = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ в плоскости $O^*\varphi\theta$ введем полярные координаты с центром в точке $M^*(\varphi_{0j}, \theta_{0m})$. Тогда в силу замечания 4.1 имеем $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq \pi\sqrt{2}$. Теперь аналогично формуле (2.39) можно записать

$$\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^2 = 4r^2 \left[R_1^2 \frac{\sin^2 A}{A^2} \frac{\cos^2 \alpha}{4} + (a + R_1 \cos \theta_0)^2 \frac{\sin^2 B}{B^2} \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right], \quad (4.31)$$

где A и B определены после формулы (2.39). Из (4.31) в силу соотношения (2.41) получаем

$$\nu_1^2 \geq \frac{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^2}{r^2} \geq (\nu_1^*)^2, \quad (4.32)$$

где ν_1 определено в (4.26), а $\nu_1^* = \min(\frac{4}{3}\pi; R_1; a - R_1) > 0$.

Так как по условию теоремы 4.1 $g(M) \in H_1(\alpha)$, то с учетом неравенств (2.33), (2.37) и неравенств (4.26) получим

$$I_{T,3}(M_{0j,0m}) \leq A_1 h \int_I \frac{d\varphi d\theta}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}} \leq \frac{A_1}{\nu_1^*} h \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi\sqrt{2}} dr = A_1^* h, \quad (4.33)$$

где константы $A_1, A_1^* > 0$ не зависят от n .

Для $I_{T,2}(M_{0j,0m})$ можно написать

$$\begin{aligned} I_{T,2}(M_{0j,0m}) &\leq A_2 h \int_{I \setminus I_{j,m}} \frac{d\varphi d\theta}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^2} + A_2^* \int_{I_{j,m}} \frac{d\varphi d\theta}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}} \\ &= I_{T,2}^*(M_{0j,0m}) + I_{T,2}^{**}(M_{0j,0m}), \end{aligned} \quad (4.34)$$

где $I_{j,m} = [\varphi_j, \varphi_{j+1}] \times [\theta_m, \theta_{m+1}]$, а константы A_2 и A_2^* не зависят от n . Переходя к полярным координатам (2.38), получим

$$I_{T,2}^*(M_{0j,0m}) \leq \frac{A_2}{(\nu_1^*)^2} h \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h/2}^{\pi\sqrt{2}} \frac{dr}{r} \leq B_2 h \ln n, \quad (4.35)$$

$$I_{T,2}^{**}(M_{0j,0m}) \leq \frac{A_2^*}{\nu_1^*} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{h/\sqrt{2}} dr \leq B_2^* h, \quad (4.36)$$

где константы B_2 и B_2^* не зависят от n . Наконец, для $I_{T,1}(M_{0j,0m})$ сделаем преобразования, аналогичные тем, которые были сделаны для $I_{1,1}(M_{0j,0m})$ в формуле (2.55). Получим

$$\begin{aligned} I_{T,1}(M_{0j,0m}) &\leq \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{I_{i,k}} \frac{\Delta(M, M_{0i,0k})}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\varphi d\theta \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{I_{i,k}} \frac{g'_\varphi(M)(\varphi - \varphi_{0i})}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\varphi d\theta \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{I_{i,k}} \frac{g'_\theta(M)(\theta - \theta_{0k})}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\varphi d\theta \right| \\ &= I_{T,1}^*(M_{0j,0m}) + I_{T,1}^{**}(M_{0j,0m}) + I_{T,1}^{***}(M_{0j,0m}). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Как и для $I_{1,1}^*(M_{0j,0m})$ в (2.58), переходя к полярным координатам (2.38), получим

$$I_{T,1}^*(M_{0j,0m}) \leq A_3 h^\alpha. \quad (4.38)$$

Для $I_{T,1}^{**}(M_{0j,0m})$ запишем

$$\begin{aligned} I_{T,1}^{**}(M_{0j,0m}) &\leq \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{I_{i,k}} \frac{|g'_\varphi(M) - g'_\varphi(M_{0j,0m})|}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} |\varphi - \varphi_{0i}| d\varphi d\theta \\ &\quad + g'_\varphi(M_{0j,0m}) \left| \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{I_{i,k}} \frac{\varphi - \varphi_{0i}}{\tilde{r}_{M M_{0j,0m}}^3} d\varphi d\theta \right| = S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Так как $|\varphi - \varphi_{0i}| \leq h/2$, $g'_\varphi \in H(\alpha)$ на $I = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ и справедливы неравенства (4.26), (4.32), то, переходя к полярным координатам (2.38), получим

$$\begin{aligned} S_1 &\leq B_3 h \int_{I \setminus I_{j,m}} \frac{d\varphi d\theta}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^{3-\alpha}} + B_3^* \int_{I_{j,m}} \frac{d\varphi d\theta}{\tilde{r}_{MM_{0j,0m}}^{2-\alpha}} \\ &\leq \frac{2\pi B_3 h}{(\nu_1^*)^{3-\alpha}} \int_{h/2}^{\pi\sqrt{2}} \frac{dr}{r^{2-\alpha}} + \frac{2\pi B_3^*}{(\nu_1^*)^{2-\alpha}} \int_0^{h/\sqrt{2}} \frac{dr}{r^{1-\alpha}} \\ &\leq \tilde{B}_3 \frac{h}{h^{1-\alpha}} + \tilde{B}_3^* h^\alpha \leq B_4 h^\alpha. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Наконец, теперь представляя

$$\varphi - \varphi_{0i} = (\varphi - \varphi_{0j}) + (\varphi_{0j} - \varphi_{0i})$$

и учитывая, что $\varphi_{0j} = \pi$ и точки φ_{0i} симметричны относительно точки φ_{0j} , получаем

$$S_2 = 0. \quad (4.41)$$

Таким образом, имеем

$$I_{T,1}^{**}(M_{0j,0m}) \leq B_4 h^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (4.42)$$

Оценка, аналогичная оценке (4.42), справедлива и для $I_{T,1}^{***}(M_{0j,0m})$.

Проведенные выше рассуждения доказывают теорему 4.1.

Список литературы

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
2. *Poincare H.* Lecons de Mecanique Celeste. V. III. Paris, 1910. X.
3. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig-Berlin, 1912.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
5. *Лаврентьев М. А.* О построении потока, обтекающего дугу заданной формы // Тр. ЦАГИ. 1932. №118. С. 3–56.
6. *Multhopp H.* Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln // Luftfahrtforschung. 1938. V. X. №4. P. 153–169.
7. *Белоцерковский С. М.* Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М.: Наука, 1965.
8. *Белоцерковский С. М., Ништ М. И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
9. *Лифанов И. К., Михайлов А. А.* К расчету безотрывного и отрывного обтекания тел // Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского. 1986. №1313. С. 137–145.
10. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К., Михайлов А. А.* Расчет бесциркуляционного обтекания произвольных тел // Ученые записки ЦАГИ. 1987. Т. XVIII. №5. С. 1–10.
11. *Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K.* Method of discrete vortices. Boca Raton: CRC Press, 1993.
12. *Панасюк В. В., Саверух М. П., Дачышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова Думка, 1976.
13. *Захаров Е. В., Пименов Ю. В.* Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982.

14. *Назарчук З. Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наукова Думка, 1989.
15. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.
16. *Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Пространства дробных отношений, дискретные операторы и их приложения. I // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 9. С. 41–98.
17. *Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Пространства дробных отношений, дискретные операторы и их приложения. II // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 67–134.
18. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
19. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО “Янус”, 1995.
20. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
21. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
22. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
23. *Полтавский Л. Н.* Математическое обоснование некоторых численных схем в аэродинамике // Дис докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1993.
24. *Lifanov I. K., Poltavskii L. N.* Quadrature formulae for the Hadamard integral over a curvilinear surface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1988. V. 13. № 1. P. 27–44.
25. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. IV, часть вторая. М.: Наука, 1981.
26. *Фиттенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М.-Л.: Физматгиз, 1960.

Военный авиационный технический
университет им. Н. Е. Жуковского;
Институт вычислительной математики РАН

Поступила в редакцию
25.12.2000