Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Аржанцев, О модальности и сложности аффинных вложений, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 8, 47–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:35:42

УДК 512.74

И. В. Аржанцев

О модальности и сложности аффинных вложений

Пусть G – редуктивная алгебраическая группа и H – редуктивная подгруппа в G . Модальностью G -многообразия X называют максимальное число параметров в непрерывном семействе G -орбит на X . В работе получена точная формула для наибольшего значения модальности по всем аффинным вложениям данного однородного пространства G/H .

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Пусть G – связная редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ нулевой характеристики и H – алгебраическая подгруппа в G . Напомним, что неприводимое алгебраическое G -многообразие X с отмеченной точкой x называется *вложением* однородного пространства G/H , если орбита точки x плотна в X , а стабилизатор этой точки совпадает с H . Будем обозначать вложение $G/H \hookrightarrow X$.

Вложение называется *аффинным*, если X является аффинным многообразием. Заметим, что однородное пространство G/H допускает аффинное вложение тогда и только тогда, когда G/H квазиаффинно (как алгебраическое многообразие), см. [1; теорема 1.6]. В этой ситуации подгруппу H называют *обозримой* в G . Описание обозримых подгрупп получено в [2], см. также [1; теорема 4.18]. По критерию Маусимы G/H аффинно тогда и только тогда, когда H редуктивна (простое доказательство можно найти в [3; п. 2]). В частности, каждая редуктивная подгруппа обозрима.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Аффинное однородное пространство G/H называется *аффинно замкнутым*, если оно допускает только одно аффинное вложение $X = G/H$.

Обозначим через $N_G(H)$ нормализатор подгруппы H в G .

ТЕОРЕМА 1 (Luna [4]). *Однородное пространство G/H аффинно замкнуто тогда и только тогда, когда подгруппа H редуктивна и группа $N_G(H)/H$ конечна.*

ПРИМЕР 1. Пусть T – максимальный тор в G , и пусть V – конечномерный G -модуль. Предположим, что вектор $v \in V$ является T -неподвижным. Тогда G/G_v аффинно замкнуто и орбита Gv замкнута в V .

В статье [5] охарактеризованы аффинные однородные пространства G/H такие, что в каждом аффинном вложении $G/H \hookrightarrow X$ число G -орбит конечно. Цель настоящей работы – обобщить эти результаты, следуя работе [6], и найти максимальное

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00598) и фонда INTAS-OPEN (грант № 97-1570).

число параметров для непрерывных семейств G -орбит по всем аффинным вложениям данного аффинного однородного пространства G/H .

Пусть B – борелевская подгруппа в G . *Сложностью* G -многообразия X называют целое число $c(X)$, равное коразмерности типичной B -орбиты на X для индуцированного действия $B : X$ (см. [7] и [8]). По теореме Розенлихта сложность равна степени трансцендентности поля $\mathbb{k}(X)^B$ рациональных B -инвариантных функций на X . Нормальное G -многообразие X называют *сферическим*, если $c(X) = 0$, или, эквивалентно, $\mathbb{k}(X)^B = \mathbb{k}$. Однородное пространство G/H и подгруппа $H \subseteq G$ называются сферическими, если G/H является сферическим G -многообразием по отношению к естественному G -действию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Рассмотрим действие $F : X$ алгебраической группы F . Целое число

$$d_F(X) = \min_{x \in X} \operatorname{codim}_X Fx = \operatorname{tr. deg} \mathbb{k}(X)^F$$

называется *типичной модальностью* действия. *Модальность* действия $F : X$ – это число $\operatorname{mod}_F X = \max_{Y \subseteq X} d_F(Y)$, где Y пробегает все F -инвариантные неприводимые подмногообразия в X .

Заметим, что $c(X) = d_B(X)$. Э.Б. Винберг [7] доказал, что $\operatorname{mod}_B(X) = c(X)$ для любого G -многообразия X . Это означает, что при переходе к собственному B -инвариантному подмногообразию в X число параметров для типичных B -орбит не может возрасти.

Несложно привести примеры, показывающие, что неравенство $d_G(X) \leq \operatorname{mod}_G(X)$ может быть строгим. Это мотивирует следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Каждому G -многообразию X мы сопоставим целое число

$$m_G(X) = \max_{X'} \operatorname{mod}_G(X'),$$

где X' пробегает все G -многообразия, бирационально G -изоморфные X .

Ясно, что для любой подгруппы $H \subset G$ справедливо неравенство $m_G(X) \leq m_H(X)$. В частности, $m_G(X) \leq c(X)$. Следующая теорема показывает, что $m_G(X) = c(X)$.

ТЕОРЕМА 2 (Ахиезер [6]). *Существует G -многообразие X' , бирационально G -изоморфное X такое, что $\operatorname{mod}_G(X') = c(X)$.*

В случае однородного пространства G/H имеем $m_G(G/H) = \max_X \operatorname{mod}_G(X)$, где X пробегает все вложения пространства G/H . Аффинной версией этого понятия служит

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Каждому квазиаффинному однородному пространству G/H сопоставим целое число

$$a_G(G/H) = \max_X \operatorname{mod}_G(X),$$

где X пробегает все аффинные вложения пространства G/H .

Следующая теорема является основным результатом работы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть H – редуктивная подгруппа в G .

- (1) Если группа $N_G(H)/H$ конечна, то $a_G(G/H) = 0$.
- (2) Если $N_G(H)/H$ бесконечна, то

$$a_G(G/H) = \max_{H_1} c(G/H_1),$$

где H_1 пробегает все нетривиальные расширения H при помощи одномерного подтора из $N_G(H)$. В частности, $a_G(G/H) = c(G/H)$ или $c(G/H) - 1$.

В случае $a_G(G/H) = 0$ получаем

СЛЕДСТВИЕ 1 (Аржанцев–Тимашев [5]). Для редуктивной подгруппы H в G следующие условия эквивалентны:

- (1) для любого аффинного вложения $G/H \hookrightarrow X$ число G -орбит в X конечно;
- (2) либо группа $N_G(H)/H$ конечна, либо каждое нетривиальное расширение H при помощи одномерного подтора из $N_G(H)$ сферично в G .

Другой заслуживающий внимания частный случай получается, когда $H = \{e\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть U – максимальная унитарная подгруппа в G . Если G полупроста, то $a_G(G) = \dim U - 1$, иначе $a_G(G) = \dim U$.

Приведем принятые в настоящей работе обозначения и соглашения:

G – связная редуктивная группа;

H – алгебраическая подгруппа в G ;

$T \subseteq B$ – максимальный тор и борелевская подгруппа в G ;

U – максимальная унитарная подгруппа в B ;

$N_G(H)$ – нормализатор подгруппы H в G ;

$W(H)$ – факторгруппа $N_G(H)/H$;

$\gamma: N_G(H) \rightarrow W(H)$ – гомоморфизм факторизации;

$\mathbb{k}^*$ – мультипликативная группа основного поля $\mathbb{k}$;

X^L – множество L -неподвижных точек L -многообразия X ;

L_x – стабилизатор точки $x \in X$;

$\mathbb{k}[X]$ – алгебра регулярных функций и $\mathbb{k}(X)$ – поле рациональных функций на алгебраическом многообразии X ;

$\text{Spec } A$ – аффинное многообразие, отвечающее конечно порожденной алгебре A без нильпотентных элементов.

Автор благодарен Д. А. Тимашеву за полезные обсуждения.

Эта работа была написана во время пребывания в Международном институте математической физики им. Эрвина Шрёдингера (Вена, Австрия). Автор благодарен этому институту за приглашение и гостеприимство.

2. Аффинный конус.

ТЕОРЕМА 4. Пусть H – обзримая подгруппа в G . Предположим, что существует нетривиальная однопараметрическая подгруппа $\lambda: \mathbb{k}^* \rightarrow W(H)$,

и пусть $H_1 = \gamma^{-1}(\lambda(\mathbb{k}^*))$. Тогда найдется аффинное вложение $G/H \hookrightarrow X$ такое, что $\text{mod}_G(X) \geq c(G/H_1)$.

Идея доказательства состоит в применении конструкции Ахиезера [6] к однородному пространству G/H_1 и в переходе к аффинному конусу над проективным вложением X' пространства G/H_1 , для которого $\text{mod}_G(X') = c(G/H_1)$.

ЛЕММА 1. Пусть $H \subseteq G$ – обзримая подгруппа и H_1 – расширение H при помощи одномерного тора $\lambda(\mathbb{k}^*) \subseteq W(H)$. Тогда найдутся конечномерный G -модуль V и H_1 -собственный вектор $v \in V$ такие, что:

- (1) орбита $G(v)$ прямой $\langle v \rangle$ в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ изоморфна G/H_1 ;
- (2) H стабилизирует v ;
- (3) H_1 действует транзитивно на $\mathbb{k}^*v$;
- (4) $\text{mod}_G(\overline{G\langle v \rangle}) = c(G/H_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1)–(3) По теореме Шевалле найдутся G -модуль V' и вектор $v' \in V'$ со свойством (1). Пусть χ – характер подгруппы H на векторе v' . Поскольку H обзрима в G , каждый конечномерный H -модуль может быть вложен в конечномерный G -модуль [9]. В частности, найдется конечномерный G -модуль V'' , содержащий H -собственный вектор, отвечающий характеру $-\chi$. Выберем среди таких векторов H_1 -собственный вектор v'' и положим $V = V' \otimes V''$ и $v = v' \otimes v''$. Для этой пары выполнены свойства (1) и (2).

Если свойство (3) также выполнено, требуемая пара построена. Иначе рассмотрим G -модуль W , содержащий вектор со стабилизатором, равным H . Выберем H_1 -собственный вектор $w \in W^H$, отвечающий нетривиальному характеру, и заменим V на $V \otimes W$ и v на $v \otimes w$. Теперь свойства (1)–(3) выполнены.

(4) Согласно результату Ахиезера [6], существует пара (V', v') , для которой выполнены свойства (1) и (4). Повторяя рассуждения предыдущего абзаца, мы получаем пару (V, v) . Замыкание $\overline{G\langle v \rangle} \subseteq \mathbb{P}(V)$ содержится в образе вложения Сегре

$$\mathbb{P}(V') \times \mathbb{P}(V'') \hookrightarrow \mathbb{P}(V) \quad \text{или} \quad \mathbb{P}(V') \times \mathbb{P}(V'') \times \mathbb{P}(W) \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$$

и G -эквивариантно и сюръективно проектируется на $\overline{G\langle v' \rangle} \subseteq \mathbb{P}(V')$. Это обеспечивает свойство (4) для пары (V, v) .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если H редуктивна, то можно выбрать вектор v так, что $G_v = H$. Для произвольной обзримой подгруппы этого добиться нельзя (см. [5]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть (V, v) – пара, построенная в лемме 1. Обозначим через H' стабилизатор G_v вектора v , и пусть $\tilde{X} = \overline{Gv}$. Из свойств (1)–(3) и того, что группа H_1/H изоморфна $\mathbb{k}^*$, следует, что H' является конечным расширением H . Свойство (3) показывает, что замыкание орбиты Gv в V является конусом, и из (4) следует, что $\text{mod}_G(\tilde{X}) \geq c(G/H_1)$.

Рассмотрим морфизм $G/H \rightarrow G/H'$. Он определяет вложение $\mathbb{k}[G/H'] \subseteq \mathbb{k}[G/H]$. Пусть A – целое замыкание подалгебры $\mathbb{k}[\tilde{X}] \subseteq \mathbb{k}[G/H']$ в поле $\mathbb{k}(G/H)$.

Имеем следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & \mathbb{k}[G/H] & \longrightarrow & \mathbb{k}(G/H) & \text{Спец } A & \longleftarrow & G/H \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{k}[\tilde{X}] & \longrightarrow & \mathbb{k}[G/H'] & \longrightarrow & \mathbb{k}(G/H') & X & \longleftarrow & G/H' \end{array}.$$

Аффинное многообразие $X = \text{Спец } A$ с естественным G -действием можно рассматривать как аффинное вложение пространства G/H . Вложение $\mathbb{k}[\tilde{X}] \subseteq A$ определяет конечный (сюръективный) морфизм $X \rightarrow \tilde{X}$, и поэтому $\text{mod}_G(X) = \text{mod}_G(\tilde{X}) \geq c(G/H_1)$.

3. Доказательство теоремы 3. В начале этого раздела мы сформулируем несколько результатов, полученных Ф. Кнопом.

ЛЕММА 2 [10; п. 7.3.1] (см. также [5; лемма 3]). Пусть X – неприводимое G -многообразие и v – G -инвариантное нормирование поля $\mathbb{k}(X)/\mathbb{k}$ с полем вычетов $\mathbb{k}(v)$. Тогда $\mathbb{k}(v)^B$ является полем вычетов ограничения v на $\mathbb{k}(X)^B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [11; п. 7]. Пусть X – нормальное G -многообразие. Дискретное $\mathbb{Q}$ -значное G -инвариантное нормирование поля $\mathbb{k}(X)$ называется *центральным*, если оно обращается в нуль на $\mathbb{k}(X)^B \setminus \{0\}$. *Источником* на X называется непустое G -инвариантное подмногообразие $Y \subseteq X$, являющееся центром некоторого центрального нормирования поля $\mathbb{k}(X)$.

Следующая лемма является несложным следствием результатов [11], детали см. в [5; лемма 4].

ЛЕММА 3. Если X – нормальное аффинное G -многообразие, содержащее собственный источник, то существует одномерный тор $S \subseteq \text{Aut}_G(X)$ такой, что $\mathbb{k}(X)^B \subseteq \mathbb{k}(X)^S$ (здесь $\text{Aut}_G(X)$ обозначает группу G -эквивариантных автоморфизмов X).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Утверждение (1) вытекает из теоремы 1. Для доказательства (2) мы воспользуемся теоремой 4. Из редуктивности H следует редуктивность группы $W(H)$. Поэтому $W(H)$ содержит одномерный подтор $\lambda(\mathbb{k}^*)$. Отсюда $a_G(G/H) \geq c(G/H_1) \geq c(G/H) - 1$ для расширенной подгруппы H_1 . Если найдется одномерный подтор в $W(H)$ такой, что $c(G/H) = c(G/H_1)$, то существует аффинное вложение пространства G/H модальности $c(G/H)$.

Обратно, пусть $G/H \hookrightarrow X$ – аффинное вложение модальности $c(G/H)$. Требуется найти одномерный подтор $\lambda(\mathbb{k}^*) \subseteq W(H)$, для которого $c(G/H_1) = c(G/H)$. По определению модальности существует собственное G -инвариантное подмногообразие $Y \subset X$, для которого коразмерность типичной G -орбиты в Y равна $c(G/H)$. Поэтому $c(Y) = c(G/H)$. Рассмотрим G -инвариантное нормирование v поля $\mathbb{k}(X)$ с центром Y . Для поля вычетов $\mathbb{k}(v)$ имеем $\text{tr. deg } \mathbb{k}(v)^B \geq \text{tr. deg } \mathbb{k}(Y)^B$, откуда $\text{tr. deg } \mathbb{k}(v)^B = \text{tr. deg } \mathbb{k}(X)^B$. Если ограничение v на $\mathbb{k}(X)^B$ нетривиально, то по лемме 2 $\text{tr. deg } \mathbb{k}(v)^B < \text{tr. deg } \mathbb{k}(X)^B$, – противоречие. Поэтому v центрально, и Y является источником на X . Лемма 3 обеспечивает существование одномерного подтора $S \subseteq \text{Aut}_G(X) \subseteq \text{Aut}_G(G/H) = W(H)$, который определяет расширение подгруппы H такой же сложности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если H – обозримая подгруппа и $W(H)$ содержит нетривиальный подтор, то формула $a_G(G/H) = \max_{H_1} c(G/H_1)$ остается справедливой (доказательство аналогично). Если же $W(H)$ конечна или унипотентна, то наши рассуждения доказывают только неравенство $a_G(G/H) \leq c(G/H) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Если G не полупроста, то для одномерного центрального подтора T_1 имеем $c(G/T_1) = c(G) = \dim U$. Если G полупроста, то для любого одномерного подтора $T_1 \subset G$ найдется борелевская подгруппа B , которая не содержит T_1 , и на многообразии G/T_1 имеется B -орбита размерности $\dim B$. Это показывает, что $c(G/T_1) = c(G) - 1$.

Список литературы

1. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–309.
2. Суханов А. А. Описание наблюдаемых подгрупп линейных алгебраических групп // Матем. сб. 1988. Т. 137 (179). № 1. С. 90–102.
3. Luna D. Slices étales // Mém. Soc. Math. France (N. S.). 1973. V. 33. P. 81–105.
4. Luna D. Adhérences d'orbite et invariants // Invent. Math. 1975. V. 29. P. 231–238.
5. Arzhantsev I. V., Timashev D. A. Affine embeddings with a finite number of orbits // Transformation groups. 2001. V. 6. № 2. P. 101–110.
6. Ахизер Д. Н. О модальности и сложности действий редуктивных групп // УМН. 1988. Т. 43. № 2. С. 129–130.
7. Винберг Э. Б. Сложность действий редуктивных групп // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 1. С. 1–13.
8. Luna D., Vust Th. Plongements d'espaces homogènes // Comment. Math. Helv. 1983. V. 58. P. 186–245.
9. Bialynicki-Birula A., Hochschild G., Mostow G. D. Extensions of representations of algebraic linear groups // Amer. J. Math. 1963. V. 85. P. 131–144.
10. Knop F. Über Bewertungen, welche unter einer reduktiven Gruppe invariant sind // Math. Ann. 1993. V. 295. P. 333–363.
11. Knop F. The asymptotic behavior of invariant collective motion // Invent. Math. 1994. V. 116. P. 309–328.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
27.09.2000