Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов, Интегральные уравнения Вольтерра с быстро изменяющимися ядрами и их асимптотическое интегрирование, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 8, 53–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm586>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 09:46:42

УДК 517.968

А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов

Интегральные уравнения Вольтерра с быстро изменяющимися ядрами и их асимптотическое интегрирование

Рассматривается сингулярно возмущенная интегральная система с быстро изменяющимися ядрами. В отличие от интегральных уравнений с медленно изменяющимися ядрами, где регуляризация производится по спектру “диагонального” ядра, в задачах с быстро изменяющимися ядрами проблема регуляризации решается в терминах спектра некоторого расширенного оператора. Целью настоящей работы является построение этого оператора и развитие соответствующего алгоритма асимптотических решений.

Библиография: 7 названий.

Введение. Сингулярно возмущенные уравнения типа

$$\varepsilon y(t, \varepsilon) = \int_0^t k(t, s, \varepsilon) y(s, \varepsilon) ds + h(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

с медленно изменяющимися ядрами ($k(t, s, \varepsilon) = k(t, s) + O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow +0$, $\forall t, s$) рассматривались в ряде работ М. И. Иманалиева (см., например, [1]). Основная идея, с помощью которой осуществляется построение асимптотического решения системы (1), состоит в переходе (путем дифференцирования (1) по t) к эквивалентной интегро-дифференциальной системе. При этом если спектр $\{\lambda_j(t)\}$ “диагонального ядра” $k(t, t, 0)$ при всех $t \in [0, T]$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, к полученной интегро-дифференциальной системе становится возможным применение известной процедуры метода погранфункций Васильевой–Бутузова [2]. Если же при некоторых $t \in [0, T]$ точки спектра $\{\lambda_j(t)\}$ попадают на мнимую ось, метод погранфункций не эффективен; в этом случае пользуются другими методами, например, широко известным методом регуляризации С. А. Ломова [3], [4].

При переходе от системы (1) с медленно изменяющимися ядрами к системам с быстро изменяющимися ядрами идея дифференцирования исходной системы по t теряет свою ценность. Поясним, в чем тут дело. Рассмотрим для простоты скалярное уравнение (1) с быстро изменяющимся ядром

$$k(t, s, \varepsilon) \equiv k(t, s) \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta \right\} \quad (\mu(t) \neq 0).$$

Непосредственное дифференцирование уравнения (1) по t приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{dy}{dt} = & \mu(t) \int_0^t k(t, s) \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta \right\} y(s, \varepsilon) ds + \varepsilon k(t, t) y \\ & + \varepsilon \int_0^t \frac{\partial k(t, s)}{\partial t} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta \right\} y(s, \varepsilon) ds + \varepsilon \dot{h}(t), \quad y(0, \varepsilon) = \frac{h(0)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Кроме того, что получено довольно сложное интегро-дифференциальное уравнение, неясно, спектр какого оператора должен участвовать в образовании сингулярностей решения последней задачи. Приведенные соображения поясняют, почему идея непосредственного дифференцирования интегральной системы по t в случае быстро изменяющихся ядер теряет свою привлекательность. Возникает потребность в разработке нового подхода. При этом не отвергается идея перехода к эквивалентной интегро-дифференциальной системе. Однако получение последней, скорее всего, не будет связано с дифференцированием исходной интегральной системы по t .

В случае ядер с одним спектральным значением был разработан алгоритм (см., например, [5]), позволяющий строить асимптотические решения непосредственно, минуя переход к эквивалентной интегро-дифференциальной системе. К сожалению, этот алгоритм в случае нескольких спектральных значений $\mu_1(t), \dots, \mu_r(t)$ ($r > 1$) не удастся обобщить. Как показывают примеры, здесь возникают принципиальные трудности с описанием сингулярностей. В случае $r = 1$ число сингулярностей равно $n + 1$, т.е. на единицу больше размерности системы (1). В этом случае дополнительная сингулярность, обусловленная наличием спектрального значения $\mu(t)$, не изменяет размерности собственных подпространств оператора регуляризации L_0 . Эта размерность совпадает с размерностью системы (1), и поэтому все пространство элементарных решений соответствующих итерационных систем (см. [5]) удастся описать в терминах собственных подпространств матрицы $k(t, t, 0)$. В случае же $r > 1$ число сингулярностей, как видно из примеров интегральных систем с вырожденными ядрами, равно $(n + 1)r$, т.е. значительно превышает размерность n исходной системы (1). В этой ситуации пространство элементарных решений итерационных систем уже не описывается в терминах собственных векторов оператора $k(t, t, 0)$. Каждое собственное подпространство оператора регуляризации L_0 имеет размерность rn . Ясно, что тогда и соответствующие сингулярности должны порождаться спектром матрицы той же размерности. Что это за матрица? Априори описать ее невозможно. Это можно будет сделать лишь после того, как будет получена эквивалентная интегро-дифференциальная система, к построению которой мы переходим.

1. Эквивалентная интегро-дифференциальная система. Частичная регуляризация задачи. Рассмотрим систему

$$\varepsilon y(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^r \int_0^t k_j(t, s) \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta \right\} y(s, \varepsilon) ds + h(t), \quad (2)$$

Получена интегро-дифференциальная система (3), эквивалентная исходной интегральной системе (2) в том смысле, что если вектор-функция $z(t, \varepsilon) = \{z_1, \dots, z_r\}$ является решением системы (3), то функция $y(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1}(z_1 + \dots + z_r + h(t))$ является решением системы (2), и наоборот: если функция $y(t, \varepsilon)$ является решением системы (2), то функции (2а) образуют вектор $z = \{z_1(t, \varepsilon), \dots, z_r(t, \varepsilon)\}$, являющийся решением системы (3). Интегро-дифференциальная система (3) содержит r спектральных значений $\mu_j(t)$ ядра интегрального оператора. Кроме того, неоднородность задачи (3) является быстро изменяющейся функцией. Системы такого типа ранее не рассматривались. Имеется результат [4], касающийся интегро-дифференциальной системы с одним спектральным значением и медленно изменяющейся неоднородностью. Можно попробовать применить идеи этой работы к задаче (3).

Ради единообразия обозначений положим $\lambda_1(t) = \mu_1(t), \dots, \lambda_r(t) = \mu_r(t)$, а собственные значения $\lambda_j(t)$ матрицы $A(t)$ будем нумеровать от $r + 1$ до $(n + 1)r$. Введем, как и в [3], регуляризующие переменные

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}, \quad j = 1, \dots, (n + 1)r. \quad (4)$$

Системе (3) поставим в соответствие систему

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{(n+1)r} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tau_j} - A(t) \tilde{z} = J \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) + g(t), \quad \tilde{z}(0, 0, \varepsilon) = 0. \quad (5)$$

Здесь $\tilde{z} = \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{(n+1)r})$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{(n+1)r})$, а через $J \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$ обозначен интегральный оператор

$$\begin{aligned} J \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) \equiv & \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} E_j k(t, s) \tilde{z} \left(s, \frac{\psi_j(s)}{\varepsilon}, \varepsilon \right) ds \\ & + \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} H_j(t, s) ds. \end{aligned}$$

Ясно, что если $\tilde{z} = \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$ — решение системы (5), то вектор-функция $z = \tilde{z}(t, \psi(t)/\varepsilon, \varepsilon)$ является решением системы (3). Однако систему (5) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального члена $J \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$.

2. Полная регуляризация задачи. Для регуляризации интегрального оператора $J \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$ необходимо ввести пространство M_ε , асимптотически инвариантное относительно этого оператора (см. [3; гл. 2, § 6]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что вектор-функция $z(t, \tau) = \{z_1, \dots, z_{nr}\}$ принадлежит пространству U , если она представима в виде суммы

$$z(t, \tau) = \sum_{k=1}^{(n+1)r} y_k(t) e^{\tau_k} + y_0(t) \quad (6)$$

с коэффициентами $y_0(t), y_k(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^{nr})$, $k = 1, \dots, (n + 1)r$.

Покажем, что в качестве класса M_ε , асимптотически инвариантного относительно оператора J , можно взять класс $M_\varepsilon = U|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}$. Подставим для этого сумму (6) в Jz ; будем иметь

$$\begin{aligned}
Jz(t, \tau) &= \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} E_j k(t, s) \\
&\quad \times \left(\sum_{k=1}^{(n+1)r} y_k(s) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_k(\theta) d\theta\right\} + y_0(s) \right) ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} H_j(t, s) ds \\
&= \sum_{j=1}^r \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{(n+1)r} \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_j(\theta) d\theta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_k(\theta) d\theta\right\} k_{jk}(t, s) ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^r \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} \int_0^t k_{jj}(t, s) ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} [k_{j0}(t, s) + H_j(t, s)] ds, \tag{7}
\end{aligned}$$

где

$$k_{jk}(t, s) \equiv E_j k(t, s) y_k(s), \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 0, \dots, (n+1)r.$$

Надо показать, что интегралы

$$\begin{aligned}
J_{jk}(t, \varepsilon) &= \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_j(\theta) d\theta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_k(\theta) d\theta\right\} k_{jk}(t, s) ds \\
&\equiv \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_k(\theta) - \lambda_j(\theta)) d\theta\right\} k_{jk}(t, s) ds, \\
&\quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, (n+1)r, \quad k \neq j; \\
J_{j0}(t, \varepsilon) &= \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} k_{j0}(t, s) ds \\
&\equiv \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} \int_0^t \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_j(\theta) d\theta\right\} k_{j0}(t, s) ds, \quad j = 1, \dots, r; \\
J_j(t, \varepsilon) &= \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} \int_0^t \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_j(\theta) d\theta\right\} H_j(t, s) ds, \quad j = 1, \dots, r,
\end{aligned}$$

разлагаются (при определенных условиях на $\lambda_j(t)$, $k_j(t, s)$ и $h(t)$; см. ниже) в асимптотические ряды по степеням параметра ε (при $\varepsilon \rightarrow +0$).

Применяя операцию интегрирования по частям к интегралу $J_{jk}(t, \varepsilon)$, будем иметь

$$\begin{aligned}
J_{jk}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} \int_0^t \frac{k_{jk}(t, s)}{\lambda_k(s) - \lambda_j(s)} d \left(\exp \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_0^s (\lambda_k(\theta) - \lambda_j(\theta)) d\theta \right\} \right) \\
&= \varepsilon \left[\frac{k_{jk}(t, t)}{\lambda_k(t) - \lambda_j(t)} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_k(\theta) d\theta \right\} - \frac{k_{jk}(t, 0)}{\lambda_k(0) - \lambda_j(0)} \left\{ \exp \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} \right] \\
&\quad - \varepsilon \left[\exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (\lambda_k(\theta) - \lambda_j(\theta)) d\theta \right\} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{k_{jk}(t, s)}{\lambda_k(s) - \lambda_j(s)} \right) ds \right] \\
&= \varepsilon \left[(I_{jk}^0 k_{jk}(t, s))_{s=t} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_k(\theta) d\theta \right\} - (I_{jk}^0 k_{jk}(t, s))_{s=0} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} \right] \\
&\quad - \varepsilon \left[\exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} \int_0^t \exp \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_0^s (\lambda_k(\theta) - \lambda_j(\theta)) d\theta \right\} \frac{\partial}{\partial s} (I_{jk}^0 k_{jk}(t, s)) ds \right],
\end{aligned}$$

где

$$I_{jk}^0 k_{jk}(t, s) \equiv \frac{1}{\lambda_k(s) - \lambda_j(s)} k_{jk}(t, s).$$

Интеграл, стоящий после квадратной скобки последнего равенства, отличается от интеграла $J_{jk}(t, \varepsilon)$ лишь ядром: в нем вместо $k_{jk}(t, s)$ стоит ядро $\frac{\partial}{\partial s} (I_{jk}^0 k_{jk}(t, s))$. Поэтому дальнейшее интегрирование по частям приводит к формальному разложению

$$\begin{aligned}
J_{jk}(t, \varepsilon) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon^{m+1} \left[(I_{jk}^m k_{jk}(t, s))_{s=t} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_k(\theta) d\theta \right\} \right. \\
&\quad \left. - (I_{jk}^m k_{jk}(t, s))_{s=0} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} \right], \quad (8)
\end{aligned}$$

где введены операторы

$$\begin{aligned}
I_{jk}^0 &= \frac{1}{\lambda_k(s) - \lambda_j(s)}, \quad I_{jk}^1 = \left(I_{jk}^0 \frac{\partial}{\partial s} \right) I_{jk}^0, \quad \dots, \quad I_{jk}^m = \left(I_{jk}^0 \frac{\partial}{\partial s} \right) I_{jk}^{m-1}, \\
m &\geq 1, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, (n+1)r, \quad j \neq k.
\end{aligned}$$

Применяя эту процедуру к интегралу $J_{j0}(t, \varepsilon)$, получаем формальное разложение

$$\begin{aligned}
J_{j0}(t, \varepsilon) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} \left[(I_{j0}^m k_{j0}(t, s))_{s=0} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} - (I_{j0}^m k_{j0}(t, s))_{s=t} \right], \\
j &= 1, \dots, r, \quad (9)
\end{aligned}$$

где введены операторы

$$I_{j0}^0 = \frac{1}{\lambda_j(s)}, \quad I_{j0}^1 = \left(I_{j0}^0 \frac{\partial}{\partial s} \right) I_{j0}^0, \quad \dots, \quad I_{j0}^m = \left(I_{j0}^0 \frac{\partial}{\partial s} \right) I_{j0}^{m-1}, \quad m \geq 1.$$

И аналогично выводим разложение

$$J_j(t, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} \left[(I_{j0}^m H_j(t, s))_{s=0} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} - (I_{j0}^m H_j(t, s))_{s=t} \right],$$

$$j = 1, \dots, r. \quad (10)$$

Покажем теперь, что ряды, стоящие в правых частях равенств (8)–(10), сходятся асимптотически при $\varepsilon \rightarrow +0$, если выполнены условия:

- 1) $h(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$, $k_j(t, s) \in C^\infty(0 \leq s \leq t \leq T, \mathbb{C}^{n^2})$, $\lambda_j(t) \equiv \mu_j(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$, $j = 1, \dots, r$;
- 2) $\lambda_j(t) \equiv \mu_j(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, $j = 1, \dots, r$; $\mu_{jk}(t) \equiv \lambda_k(t) - \lambda_j(t) \neq 0$, $j = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, (n+1)r$, $k \neq j$;
- 3) $\operatorname{Re} \lambda_k(t) \leq 0$, $k = 1, \dots, (n+1)r$, $\forall t \in [0, T]$.

В самом деле, рассмотрим ряд (8). Его частичная сумма

$$S_N(t, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \varepsilon^{m+1} \left[(I_{jk}^m k_{jk}(t, s))_{s=t} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_k(\theta) d\theta \right\} - (I_{jk}^m k_{jk}(t, s))_{s=0} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} \right]$$

удовлетворяет равенству

$$J_{jk}(t, \varepsilon) = S_N(t, \varepsilon) + (-1)^N \varepsilon^N \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} \times \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_k(\theta) - \lambda_j(\theta)) d\theta \right\} \frac{\partial}{\partial s} (I_{jk}^{N-1} k_{jk}(t, s)) ds.$$

Проинтегрировав по частям интеграл, стоящий в правой части этого равенства, получим

$$\begin{aligned} J_{jk}(t, \varepsilon) - S_N(t, \varepsilon) &= (-1)^N \varepsilon^{N+1} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} \\ &\quad \times \int_0^t (I_{jk}^N k_{jk}(t, s)) d \left(\exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_k(\theta) - \lambda_j(\theta)) d\theta \right\} \right) \\ &= (-1)^N \varepsilon^{N+1} \left\{ \left[(I_{jk}^N k_{jk}(t, s))_{s=t} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_k(\theta) d\theta \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (I_{jk}^N k_{jk}(t, s))_{s=0} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} \right] \right. \\ &\quad \left. - \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mu_{kj}(\theta) d\theta \right\} \frac{\partial}{\partial s} (I_{jk}^N k_{jk}(t, s)) ds \right\}. \end{aligned}$$

В силу бесконечной дифференцируемости вектор-функций $k_{jk}(t, s) = E_j k(t, s) y_k(s)$ на множестве $0 \leq s \leq t \leq T$ и функций $\mu_{kj}(t)$, $\lambda_j(t)$ на отрезке $[0, T]$, а также в силу равномерной ограниченности всех экспонент (см. условия 1)–3)) функция, стоящая во внешней фигурной скобке последнего равенства, равномерно ограничена при $(t, \varepsilon) \in [0, T] \times (0, \infty)$. Следовательно,

$$\|J_{jk}(t, \varepsilon) - S_N(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]} \leq C_N \varepsilon^{N+1},$$

где $C_N > 0$ – постоянная, не зависящая от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. Это означает, что ряд (8) сходится к интегралу $J_{jk}(t, \varepsilon)$ асимптотически при $\varepsilon \rightarrow +0$. Аналогичные рассуждения показывают асимптотическую сходимость рядов (9) и (10) к соответствующим интегралам $J_{j0}(t, \varepsilon)$ и $J_j(t, \varepsilon)$. Но тогда из (7) вытекает, что образ $Jz(t, \tau)$ интегрального оператора системы (5) разлагается в асимптотический ряд

$$\begin{aligned} Jz(t, \tau) = & \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} \left\{ (-1)^m \sum_{j=1}^r \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{(n+1)r} [(I_{jk}^m k_{jk}(t, s))_{s=t} e^{\tau_k} - (I_{jk}^m k_{jk}(t, s))_{s=0} e^{\tau_j}] \right. \\ & + \sum_{j=1}^r [(I_{j0}^m k_{j0}(t, s))_{s=0} e^{\tau_j} - (I_{j0}^m k_{j0}(t, s))_{s=t}] \\ & \left. + (I_{j0}^m H_j(t, s))_{s=0} e^{\tau_j} - (I_{j0}^m H_j(t, s))_{s=t} \right\} + \sum_{j=1}^r e^{\tau_j} \int_0^t k_{jj}(t, s) ds, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\tau = \psi(t)/\varepsilon$. Тем самым показано, что класс M_ε асимптотически инвариантен относительно интегрального оператора J .

Пусть теперь дана некоторая вектор-функция $\tilde{z} = \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$, непрерывная по $(t, \tau) \in [0, T] \times \Pi$ ($\Pi = \{\tau : \operatorname{Re} \tau_j \leq 0, j = 1, \dots, (n+1)r\}$), и пусть для нее справедливо асимптотическое разложение

$$\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, \tau), \quad y_k(t, \tau) \in U, \quad (12)$$

сходящееся при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерно по $(t, \tau) \in [0, T] \times \Pi$. Последнее означает, что для любого $N = 0, 1, 2, \dots$ имеет место равенство

$$\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(t, \tau) + \varepsilon^{N+1} l_N(t, \tau, \varepsilon), \quad (13)$$

причем $\|l_N(t, \tau, \varepsilon)\|_{C([0, T] \times \Pi)} \leq \bar{l}_N$, где $\bar{l}_N > 0$ – постоянная, не зависящая от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. Покажем, что образ $J\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$ также разлагается в асимптотический ряд.

Из (13) получаем, что

$$J\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k Jy_k(t, \tau) + \varepsilon^{N+1} Jl_N(t, \tau, \varepsilon). \quad (14)$$

Поскольку функции $\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$ и $l_N \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$ непрерывны по $(t, \tau) \in [0, T] \times \Pi$ (при каждом $\varepsilon > 0$), то образы $J\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$ и $Jl_N(t, \tau, \varepsilon)$ имеют смысл, причем в силу условий 1)–3) имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|Jl_N(t, \tau, \varepsilon)\|_{C[0, T]} &\equiv \left\| \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} E_j k(t, s) l_N\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \lambda_j(\theta) d\theta\right\} H_j(t, s) ds \right\|_{C[0, T]} \\ &\leq \sum_{j=1}^r \left(p_j \left\| l_N\left(s, \frac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) \right\|_{C[0, T]} + q_j \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^r (p_j \bar{l}_N + q_j) \leq K_N, \end{aligned}$$

где p_j, q_j, K_N – некоторые положительные постоянные, не зависящие от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Функции $Jy_k(t, \tau)$ разлагаются в асимптотические ряды, поэтому (см. (11)) имеют место равенства

$$Jy_k(t, \tau) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i w_i^{(k)}\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{N+1} l_N^{(k)}(t, \varepsilon),$$

причем $\|l_N^{(k)}(t, \varepsilon)\|_{C([0, T])} \leq \bar{l}_N^k = \text{const}$. Но тогда из (14) вытекает, что

$$\begin{aligned} J\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \sum_{i=0}^N \varepsilon^i w_i^{(k)}\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{N+1} \left(Jl_N(t, \tau, \varepsilon) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k l_N^{(k)}(t, \varepsilon) \right) \\ &\equiv \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{i=0 \\ k+i=j}}^N w_i^{(k)}\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{N+1} \left[Jl_N(t, \tau, \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=N+1}^{2N} \varepsilon^{j-N-1} \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{i=0 \\ k+i=j}}^N w_i^{(k)}\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k l_N^{(k)}(t, \varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

В силу условий 1)–3) вектор-функция, стоящая в квадратной скобке последнего равенства, равномерно ограничена при $(t, \varepsilon) \in [0, T] \times (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. Это означает, что образ $J\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$ разлагается в асимптотический ряд

$$J\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Jy_k(t, \tau) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{\substack{k=0 \\ r-k \geq 0}}^r w_{r-k}^{(k)}\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right), \quad (15)$$

сходящийся при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерно по $t \in [0, T]$. Для вычисления функций $w_{r-k}^{(k)}(t, \psi(t)/\varepsilon)$ введем операторы $R_m: U \rightarrow U$, действующие по следующему закону.

Пусть $z(t, \tau)$ — произвольный элемент (6) из пространства U . Тогда имеет место разложение (11), которое можно представить в виде

$$Jz(t, \tau) = R_0 z(t, \tau) + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m+1} R_{m+1} z(t, \tau), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} R_0 z(t, \tau) &= \sum_{j=1}^r e^{\tau_j} \int_0^t k_{jj}(t, s) ds; \\ R_{m+1} z(t, \tau) &= (-1)^m \sum_{j=1}^r \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{(n+1)r} [(I_{jk}^m k_{jk}(t, s))_{s=t} e^{\tau_k} - (I_{jk}^m k_{jk}(t, s))_{s=0} e^{\tau_j}] \\ &\quad + \sum_{j=1}^r \{ [(I_{j0}^m k_{j0}(t, s))_{s=0} e^{\tau_j} - (I_{j0}^m k_{j0}(t, s))_{s=t}] \\ &\quad + [(I_{j0}^m H_j(t, s))_{s=0} e^{\tau_j} - (I_{j0}^m H_j(t, s))_{s=t}] \}, \quad m \geq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

причем $\tau = \psi(t)/\varepsilon$. При независимых переменных τ_i ($i = 1, \dots, (n+1)r$) равенства (17) определяют операторы $R_m: U \rightarrow U$. Их естественно назвать *операторами порядка*, так как они выделяют в $Jz(t, \tau)$ коэффициент при ε^m . Функция $w_{r-k}^{(k)}(t, \psi(t)/\varepsilon)$ является коэффициентом при ε^{r-k} в $Jy_k(t, \tau)$, поэтому $w_{r-k}^{(k)}(t, \psi(t)/\varepsilon) = R_{r-k} y_k(t, \tau)$ и, значит, (15) можно записать в виде

$$J\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{\substack{k=0 \\ r-k \geq 0}}^r R_{r-k} y_k(t, \tau) \right) \Big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}. \quad (18)$$

Разложение (18) позволяет построить расширение оператора J .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Формальным расширением* оператора J назовем оператор $\tilde{J}$, действующий на каждую функцию $\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) \in C([0, T] \times \Pi, \mathbb{C}^{nr})$ вида (12) по закону

$$\tilde{J}\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) \equiv \tilde{J} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{\substack{s=0 \\ r-s \geq 0}}^r R_{r-s} y_s(t, \tau). \quad (19)$$

Из (18) вытекает равенство

$$\tilde{J}\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) \Big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon} = J\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon), \quad (20)$$

которое нужно понимать в асимптотическом смысле: ряд, стоящий слева в равенстве (20), при $\varepsilon \rightarrow +0$ сходится асимптотически к функции $J\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon)$, стоящей справа.

Равенство (20) показывает, что оператор $\tilde{J}$ действительно является расширением оператора J .

Несмотря на то, что расширение $\tilde{J}$ оператора J построено формально, им вполне можно пользоваться при построении асимптотического решения задачи (3). На практике обычно удается построить асимптотическое решение $z_\varepsilon(t)$ порядка $N < \infty$. Если следовать этой цели, можно определить расширение оператора J более строго.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Расширением порядка N оператора J ($N \geq 0$ – фиксированное число) называется оператор $\tilde{J}_N$, действующий на любую функцию $\tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) \in C([0, T] \times \Pi, \mathbb{C}^{nr})$ вида (12) по закону*

$$\tilde{J}_N \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) \equiv \tilde{J}_N \left(\sum_{k=0}^{\infty} y_k(t, \tau) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=0}^N \varepsilon^r \sum_{\substack{s=0 \\ r-s \geq 0}}^r R_{r-s} y_s(t, \tau) + \varepsilon^{N+1} \gamma_N(t, \tau, \varepsilon), \quad (21)$$

где $\gamma_N(t, \tau, \varepsilon)$ – произвольная функция класса $C([0, T] \times \Pi, \mathbb{C}^{nr})$, удовлетворяющая условию

$$\gamma_N(t, \tau, \varepsilon) \Big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \left[J \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) - \left(\sum_{s=0}^N \varepsilon^r \sum_{\substack{s=0 \\ r-s \geq 0}}^r R_{r-s} y_s(t, \tau) \right) \Big|_{\tau=\psi(t)/\varepsilon} \right].$$

Заметим, что в силу (18) функция $\gamma_N(t, \psi(t)/\varepsilon, \varepsilon)$ равномерно ограничена при $(t, \varepsilon) \in [0, T] \times (0, \varepsilon_0]$, т.е.

$$\left\| \gamma_N \left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon \right) \right\|_{C[0, T]} \leq \text{const} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \quad (22)$$

Заметим также, что все расширения $\tilde{J} = \tilde{J}_N$ удовлетворяет требованию (20).

Хотя расширение $\tilde{J}_N$ определяется неоднозначно (с точностью до функции $\gamma_N(t, \tau, \varepsilon)$), построение асимптотического решения порядка N задачи (3) приводит к вполне определенной функции $z_\varepsilon(t)$. Это обусловлено тем, что при построении функции $z_\varepsilon(t)$ слагаемое $\varepsilon^{N+1} \gamma_N$ участвовать не будет.

Процедуры вычисления асимптотического решения конечного порядка N , осуществляемые порознь с помощью формального расширения $\tilde{J}$ и расширения $\tilde{J}_N$, приводят к одному и тому же результату, поэтому впредь будем пользоваться расширением $\tilde{J}$.

Теперь можно записать окончательно систему, расширенную по отношению к исходной (2). Она имеет вид

$$L_\varepsilon \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) - \tilde{J} \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) = g(t), \quad z(0, 0, 0) = 0, \quad (23)$$

где

$$L_\varepsilon \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) \equiv \sum_{j=1}^{(n+1)r} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tau_j} - A(t) \tilde{z} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}.$$

Система (23) имеет смысл в классе функций $z(t, \tau, \varepsilon) \in C([0, T] \times \Pi, \mathbb{C}^{nr})$, представимых рядами (12), сходящимися асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow +0$) равномерно по $(t, \tau) \in [0, T] \times \Pi$. Перейдем к построению формального решения системы (23).

3. Разрешимость итерационных задач. Будем определять решение системы (23) в виде ряда (12). Для коэффициентов этого ряда получим следующие задачи:

$$L_0 y_0 - R_0 y_0 = g(t), \quad y_0(0, 0) = 0; \quad (24_0)$$

$$L_0 y_1 - R_0 y_1 = -\frac{\partial y_0}{\partial t} + R_1 y_0, \quad y_1(0, 0) = 0; \quad (24_1)$$

$$L_0 y_2 - R_0 y_2 = -\frac{\partial y_1}{\partial t} + R_1 y_1 + R_2 y_0, \quad y_2(0, 0) = 0; \quad (24_2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$L_0 y_k - R_0 y_k = -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t} + \sum_{\substack{s=0 \\ k-s \geq 0}}^{k-1} R_{k-s} y_s, \quad y_k(0, 0) = 0; \quad (24_k)$$

$$\dots \dots \dots$$

Каждая из итерационных задач имеет вид

$$(L_0 - R_0)y(t, \tau) = P(t, \tau), \quad y(0, 0) = 0, \quad (25)$$

где

$$L_0 \equiv \sum_{j=1}^{(n+1)r} \lambda_j(t) \frac{\partial}{\partial \tau_j} - A(t),$$

а оператор R_0 (как и все операторы R_m) определен в пространстве U вектор-функций $y(t, \tau) = \{y_1, \dots, y_{nr}\}$, представимых суммами

$$y(t, \tau) = \sum_{k=1}^{(n+1)r} y_k(t) e^{\tau_k} + y_0(t) \quad (26)$$

с коэффициентами $y_0(t), y_k(t) \in C([0, T], \mathbb{C}^{nr})$, $k = 1, \dots, (n+1)r$. При этом (см. (17)) $R_0 y(t, \tau)$ вычисляются по формуле

$$R_0 y(t, \tau) = \sum_{j=1}^r e^{\tau_j} \int_0^t E_j k(t, s) y_j(s) ds. \quad (27)$$

Для формулировки условий нормальной разрешимости системы (25) в пространстве U нам понадобится скалярное (при каждом $t \in [0, T]$) произведение в U :

$$\langle y(t, \tau), w(t, \tau) \rangle \equiv \left\langle \sum_{k=1}^{(n+1)r} y_k(t) e^{\tau_k} + y_0(t), \sum_{k=1}^{(n+1)r} w_k(t) e^{\tau_k} + w_0(t) \right\rangle$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{(n+1)r} (y_k(t), w_k(t)),$$

где $(\cdot, \cdot)$ – обычное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^{nr}$. До сих пор не требовалось, чтобы спектр $\{\lambda_j(t)\}$ ($j = r+1, \dots, (n+1)r$) матрицы $A(t)$ был простой. Для дальнейшего важно, чтобы выполнялись условия:

$$4) \lambda_i(t) \neq 0, \lambda_i(t) \neq \lambda_s(t), i \neq s, i, s = r+1, \dots, (n+1)r, \forall t \in [0, T].$$

Обозначим через $\{\varphi_i(t)\}$ и $\{\chi_j(t)\}$ системы собственных векторов матриц $A(t)$ и $A^*(t)$ соответственно, причем возьмем эти системы биортонормированными, т.е.

$$A(t)\varphi_j(t) = \lambda_j(t)\varphi_j(t), \quad A^*(t)\chi_j(t) = \bar{\lambda}_j(t)\chi_j(t), \quad (\varphi_i(t), \chi_j(t)) \equiv \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = r+1, \dots, (n+1)r$. Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1)–4) и правая часть

$$P(t, \tau) = \sum_{j=1}^{(n+1)r} P_j(t)e^{\tau_j} + P_0(t) \quad (28)$$

системы (25) принадлежит пространству U . Тогда для разрешимости этой системы в U необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle P(t, \tau), \chi_k(t)e^{\tau_k} \rangle \equiv 0, \quad k = r+1, \dots, (n+1)r, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив (26) в (25), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{(n+1)r} (\lambda_j(t)y_j(t)e^{\tau_j} - A(t)y_j(t)e^{\tau_j}) - A(t)y_0(t) - \sum_{j=1}^r e^{\tau_j} \int_0^t E_j k(t, s)y_j(s) ds \\ = \sum_{j=1}^{(n+1)r} P_j(t)e^{\tau_j} + P_0(t). \end{aligned}$$

Приравнявая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых степенях e^{τ_j} , будем иметь:

$$-A(t)y_0(t) = P_0(t), \quad (30)$$

$$[\lambda_j(t)I - A(t)]y_j(t) - \int_0^t E_j k(t, s)y_j(s) ds = P_j(t), \quad j = 1, \dots, r; \quad (31)$$

$$[\lambda_j(t)I - A(t)]y_i(t) = P_i(t), \quad i = r+1, \dots, (n+1)r. \quad (32)$$

Так как $\det A(t) \neq 0$ ($\forall t \in [0, T]$), то система (30) имеет единственное решение

$$y_0(t) = -A^{-1}(t)P_0(t). \quad (33)$$

С другой стороны, так как $\mu_{kj}(t) = \lambda_k(t) - \mu_j(t) \equiv \lambda_k(t) - \lambda_j(t) \neq 0$ при $k \neq j$, $k = r+1, \dots, (n+1)r$ и $\forall t \in [0, T]$, то $\det(\lambda_j(t)I - A(t)) \neq 0$ $\forall t \in [0, T]$, $j = 1, \dots, r$, поэтому система (31) эквивалентна системе

$$y_j(t) - \int_0^t [\lambda_j(t)I - A(t)]^{-1} E_j k(t, s)y_j(s) ds = [\lambda_j(t)I - A(t)]^{-1} P_j(t), \quad j = 1, \dots, r.$$

Получена неоднородная система интегральных уравнений Вольтерра с ядром $K_j(t, s) \equiv [\lambda_j(t)I - A(t)]^{-1}E_j k(t, s) \in C^\infty(0 \leq s \leq t \leq T, \mathbb{C}^{(nr)^2})$. В силу гладкости ядра $K_j(t, s)$ она имеет единственное решение

$$y_j(t) = [\lambda_j(t)I - A(t)]^{-1}P_j(t) + \int_0^t R_j(t, s)[\lambda_j(s)I - A(s)]^{-1}P_j(s) ds, \quad j = 1, \dots, r, \quad (34)$$

где $R_j(t, s)$ – резольвента ядра $K_j(t, s)$, $j = 1, \dots, r$. Решение системы (32) при фиксированном $i \in \{r+1, \dots, (n+1)r\}$ будем определять в виде $y_i(t) = \Phi(t)\xi_i(t) \equiv (\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_{(n+1)r}(t))\xi_i(t)$. Тогда для вектора $\xi_i(t) = \{\xi_{1i}, \dots, \xi_{nr,i}\}$ получим систему

$$[\lambda_j(t)I - \Lambda(t)]\xi_i(t) = \Phi^{-1}(t)P_i(t),$$

где $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_{r+1}(t), \dots, \lambda_{(n+1)r}(t))$. Поскольку

$$\Phi^{-1}(t)P_i(t) = \{(P_i(t), \chi_{r+1}(t)), \dots, (P_i(t), \chi_{(n+1)r}(t))\}, \quad (35)$$

то последнюю систему можно записать покомпонентно так:

$$\begin{aligned} (\lambda_i(t) - \lambda_{r+1}(t))\xi_{1i}(t) &= (P_i(t), \chi_{r+1}(t)), \\ (\lambda_i(t) - \lambda_{r+2}(t))\xi_{2i}(t) &= (P_i(t), \chi_{r+2}(t)), \\ &\dots\dots\dots \\ (\lambda_i(t) - \lambda_{i-1}(t))\xi_{i-1-r,i}(t) &= (P_i(t), \chi_{i-1}(t)), \\ (\lambda_i(t) - \lambda_i(t))\xi_{i-r,i}(t) &= (P_i(t), \chi_i(t)), \\ (\lambda_i(t) - \lambda_{i+1}(t))\xi_{i+1-r,i}(t) &= (P_i(t), \chi_{i+1}(t)), \\ &\dots\dots\dots \\ (\lambda_i(t) - \lambda_{(n+1)r}(t))\xi_{nr,i}(t) &= (P_i(t), \chi_{(n+1)r}(t)). \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда видно, что для разрешимости системы (36) (а значит, и эквивалентной ей системы (32)) необходимо и достаточно, чтобы

$$(P_i(t), \chi_i(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (37)$$

При этом система (36) имеет решение

$$\xi_{1i}(t) = \frac{(P_i(t), \chi_{r+1}(t))}{\lambda_i(t) - \lambda_{r+1}(t)}, \dots, \xi_{i-r,i}(t) \equiv \alpha_i(t), \dots, \xi_{nr,i}(t) = \frac{(P_i(t), \chi_{(n+1)r}(t))}{\lambda_i(t) - \lambda_{(n+1)r}(t)},$$

где $\alpha_i(t)$ – произвольная функция класса $C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$. Возвращаясь к старой переменной $y_j(t)$, получаем, что при условии (37) система (32) имеет следующее решение:

$$y_i(t) = \alpha_i(t)\varphi_i(t) + \sum_{\substack{j=r+1 \\ j \neq i}}^{(n+1)r} \frac{(P_i(t), \chi_j(t))}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)}\varphi_j(t), \quad (38)$$

где $\alpha_i(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – произвольная функция.

Итак, для разрешимости системы (25) в U необходимо и достаточно выполнения условий (37) при $i = r+1, \dots, (n+1)r$, а это эквивалентно условиям (29). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При выполнении условий ортогональности (29) система (25) имеет следующее решение в пространстве U (см. формулы (33), (34), (38)):

$$\begin{aligned} y(t, \tau) = & -A^{-1}(t)P_0(t) + \sum_{j=1}^r \left([\lambda_j(t)I - A(t)]^{-1}P_j(t) \right. \\ & \left. + \int_0^t R_j(t, s)[\lambda_j(s)I - A(s)]^{-1}P_j(s) ds \right) e^{\tau_j} \\ & + \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \left[\alpha_i(t)\varphi_i(t) + \sum_{\substack{j=r+1 \\ j \neq i}}^{(n+1)r} \frac{(P_i(t), \chi_j(t))}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} \varphi_i(t) \right] e^{\tau_i}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\alpha_i(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ – произвольные функции, $i = r+1, \dots, (n+1)r$.

Перейдем к формулировке условий однозначной разрешимости задачи (25).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия 1)–4) и $P(t, \tau) \in U$ удовлетворяет условиям ортогональности (29). Тогда задача (25) при дополнительном условии

$$\left\langle -\frac{\partial y}{\partial t} + R_1 y + Q(t, \tau), \chi_j(t) e^{\tau_j} \right\rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad j = r+1, \dots, (n+1)r, \quad (40)$$

где $Q(t, \tau) \in U$ – известная вектор-функция, однозначно разрешима в пространстве U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку выполнены условия ортогональности (29), то система (25) имеет решение в пространстве U в виде вектор-функции (см. (39))

$$y(t, \tau) = \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \alpha_i(t) \varphi_i(t) e^{\tau_i} + \hat{y}(t, \tau), \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{y}(t, \tau) = & -A^{-1}(t)P_0(t) + \sum_{j=1}^r \left\{ [\lambda_j(t)I - A(t)]^{-1}P_j(t) \right. \\ & \left. + \int_0^t R_j(t, s)[\lambda_j(s)I - A(s)]^{-1}P_j(s) ds \right\} e^{\tau_j} \\ & + \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \left(\sum_{\substack{j=r+1 \\ j \neq i}}^{(n+1)r} \frac{(P_i(t), \chi_j(t))}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} \varphi_j(t) \right) e^{\tau_i} \\ \equiv & \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \hat{y}_i(t) e^{\tau_i} + \sum_{j=1}^r \hat{y}_j(t) e^{\tau_j} + \hat{y}_0(t). \end{aligned}$$

Подчиним (41) условию $y(0, 0) = 0$; будем иметь

$$\sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \alpha_i(0) \varphi_i(0) = -\widehat{y}(0, 0).$$

Умножая это равенство скалярно на $\chi_i(0)$, вычислим значения $\alpha_i(0)$:

$$\alpha_i(0) = -(\widehat{y}(0, 0), \chi_i(0)), \quad i = r + 1, \dots, (n + 1)r. \quad (42)$$

Имея в виду, что (см. (17))

$$\begin{aligned} R_1 y(t, \tau) &= R_1 \left(\sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \alpha_i(t) \varphi_i(t) e^{\tau_i} + \widehat{y}(t, \tau) \right) \\ &= R_1 \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \alpha_i(t) \varphi_i(t) e^{\tau_i} \\ &\quad - \sum_{j=1}^r [(I_{j0}^0 H_j(t, s))_{s=0} e^{\tau_j} - (I_{j0}^0 H_j(t, s))_{s=t}] + R_1 \widehat{y}(t, \tau) \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \left[\frac{E_j k(t, t) \alpha_i(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} \varphi_i(t) e^{\tau_i} - \frac{E_j k(t, 0) \alpha_i(0)}{\lambda_i(0) - \lambda_j(0)} \varphi_i(0) e^{\tau_j} \right] \\ &\quad + R_1 \widehat{y}(t, \tau), \end{aligned}$$

запишем условия ортогональности (40) в виде

$$\begin{aligned} &\left\langle - \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} (\alpha_i(t) \varphi_i(t)) \cdot e^{\tau_i} - \frac{\partial \widehat{y}(t, \tau)}{\partial t} \right. \\ &\quad + \sum_{s=1}^r \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \left[\frac{E_s k(t, t) \alpha_i(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_s(t)} \varphi_i(t) e^{\tau_i} - \frac{E_s k(t, 0) \alpha_i(0)}{\lambda_i(0) - \lambda_s(0)} \varphi_i(0) e^{\tau_s} \right] \\ &\quad \left. + R_1 \widehat{y}(t, \tau) + Q(t, \tau), \chi_j(t) e^{\tau_j} \right\rangle \equiv 0, \quad j = r + 1, \dots, (n + 1)r. \end{aligned}$$

Выполняя здесь скалярное умножение, будем иметь

$$\begin{aligned} &-\dot{\alpha}_j(t) - \left[(\dot{\varphi}_j(t), \chi_j(t)) - \sum_{s=1}^r \frac{(E_s k(t, t) \varphi_j(t), \chi_j(t))}{\lambda_j(t) - \lambda_s(t)} \right] \alpha_j(t) \\ &= -\langle R_1 \widehat{y}(t, \tau) + Q(t, \tau) + \widehat{y}_j(t) e^{\tau_j}, \chi_j(t) e^{\tau_j} \rangle, \quad j = r + 1, \dots, (n + 1)r. \end{aligned}$$

Присоединяя к этим уравнениям начальные условия (42), находим однозначно функции $\alpha_j(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha_j(t) = \exp \left\{ \int_0^t G_j(s) ds \right\} & \left[-(\hat{y}(0, 0), \chi_j(0)) \right. \\ & \left. + \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^s G_j(\theta) d\theta \right\} \langle R_1 \hat{y}(s, \tau) + Q(s, \tau) - \dot{\hat{y}}_j(s) e^{\tau j}, \chi_j(s) e^{\tau j} \rangle ds \right], \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$G_j(t) \equiv -(\dot{\varphi}_j(t), \chi_j(t)) + \sum_{s=1}^r \frac{(E_s k(t, t) \varphi_j(t), \chi_j(t))}{\lambda_j(t) - \lambda_s(t)}, \quad j = r+1, \dots, (n+1)r. \quad (44)$$

Тем самым, решение (39) системы (25) вычисляется в пространстве U однозначно. Теорема доказана.

При последовательном решении итерационных задач (24_k) в пространстве U условия (29) и (40) возникают естественным образом (как условия разрешимости двух соседних задач (24_k) и (24_{k+1})). Покажем, например, как с помощью теорем 1 и 2 можно вычислить решение $y_0(t, \tau) \in U$ первой итерационной задачи (24₀).

Поскольку правая часть $P(t, \tau) \equiv g(t)$ удовлетворяет условию (29), то система (24₀) имеет решение в пространстве U в виде вектор-функции (см. (39)):

$$y_0(t, \tau) \equiv y_0^{(0)}(t) + \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \alpha_i^{(0)}(t) \varphi_i(t) e^{\tau i}, \quad (45)$$

где $y_0^{(0)}(t) \equiv -A^{-1}(t)g(t)$. При этом система (24₁) принимает вид (см. (17))

$$\begin{aligned} (L_0 - R_0)y_1(t, \tau) = & -\dot{y}_0^{(0)}(t) - \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} (\alpha_i^{(0)}(t) \varphi_i(t))' e^{\tau i} \\ & + \sum_{s=1}^r \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \left[\frac{E_s k(t, t) \alpha_i^{(0)}(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_s(t)} \varphi_i(t) e^{\tau i} - \frac{E_s k(t, 0) \alpha_i^{(0)}(0)}{\lambda_i(0) - \lambda_s(0)} \varphi_i(0) e^{\tau s} \right] \\ & + \sum_{s=1}^r \left[\frac{E_s k(t, 0) y_0^{(0)}(0)}{\lambda_s(0)} e^{\tau s} - \frac{E_s k(t, t) y_0^{(0)}(t)}{\lambda_s(t)} \right] \\ & + \sum_{s=1}^r \left[\frac{E_s k(t, 0) E_s H(0)}{\lambda_s(0)} e^{\tau s} - \frac{E_s k(t, t) E_s H(t)}{\lambda_s(t)} \right]. \end{aligned}$$

Для разрешимости этой системы в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности (29):

$$\left(-(\alpha_j^{(0)}(t) \varphi_j(t))' + \sum_{s=1}^r \frac{E_s k(t, t) \alpha_j^{(0)}(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_s(t)} \varphi_j(t), \chi_j(t) \right) \equiv 0,$$

или

$$\dot{\alpha}_j^{(0)}(t) = \left(\sum_{s=1}^r \frac{E_s k(t, t) \varphi_j(t)}{\lambda_j(t) - \lambda_s(t)} - \dot{\varphi}_j(t), \chi_j(t) \right) \alpha_j^{(0)}(t), \quad j = r+1, \dots, (n+1)r. \quad (46)$$

Подчиняя (45) начальному условию $y_0(0, 0) = 0$, получим

$$\sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \alpha_i^{(0)}(0) \varphi_i(0) = -y_0^{(0)}(0).$$

Умножая скалярно это равенство на $\chi_j(0)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(0)}(0) &= -(y_0^{(0)}(0), \chi_j(0)) = (A^{-1}(0)g(0), \chi_j(0)) \\ &= \left(A^{-1}(0)g(0), \frac{A^*(0)\chi_j(0)}{\lambda_j(0)} \right) = \frac{1}{\lambda_j(0)} (g(0), (A^*(0))^{-1}A^*(0)\chi_j(0)) \\ &= \frac{1}{\lambda_j(0)} (g(0), \chi_j(0)), \quad j = r+1, \dots, (n+1)r. \end{aligned}$$

Присоединяя эти начальные условия к уравнениям (46), найдем функции $\alpha_j^{(0)}(t)$:

$$\alpha_j^{(0)}(t) = \frac{1}{\lambda_j(0)} \exp \left\{ \int_0^t G_j(\theta) d\theta \right\} (g(0), \chi_j(0)), \quad j = r+1, \dots, (n+1)r, \quad (47)$$

где $G_j(t)$ — функции (44), и, значит, построим решение (45) итерационной задачи (24₀) однозначным образом. Аналогично вычисляются решения следующих итерационных задач (24_k), $k \geq 1$. Тем самым будет построен ряд (12) с коэффициентами $y_k(t, \tau) \in U$. Пусть $S_N(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(t, \tau)$ — N -я частичная сумма этого ряда. Обозначим через $z_{\varepsilon N}(t) = S_N(t, \psi(t)/\varepsilon, \varepsilon)$ сужение этой суммы при $\tau = \psi(t)/\varepsilon$. Надо доказать оценку

$$\|z(t, \varepsilon) - z_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0, T]} \leq C_N \varepsilon^{N+1}, \quad (48)$$

где $z(t, \varepsilon)$ — точное решение задачи (3), $C_N > 0$ — постоянная, не зависящая от ε при достаточно малых $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$). Для этого нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

4. Корректная разрешимость интегро-дифференциальной системы.

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = A(t)z + \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta \right\} E_j k(t, s) z(s, \varepsilon) ds + \Phi(t, \varepsilon), \quad z(0, \varepsilon) = 0. \quad (49)$$

При каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ решение этой задачи существует на отрезке $[0, T]$ и единственно (в силу гладкости всех коэффициентов и ядер). Попытаемся

получить оценку решения $z(t, \varepsilon)$ через норму правой части $\Phi(t, \varepsilon)$. Введем дополнительные функции

$$v_j(t, \varepsilon) = \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta\right\} E_j k(t, s) z(s, \varepsilon) ds, \quad j = 1, \dots, r. \quad (50)$$

Дифференцируя (50) по t , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dv_j}{dt} &= E_j k(t, t) z(t, \varepsilon) \\ &+ \frac{\mu_j(t)}{\varepsilon} \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta\right\} E_j k(t, s) z(s, \varepsilon) ds \\ &+ \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta\right\} E_j \frac{\partial k(t, s)}{\partial t} z(s, \varepsilon) ds, \end{aligned}$$

или (учитывая (50))

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dv_j}{dt} &= \mu_j(t) v_j + \varepsilon E_j k(t, t) z(t, \varepsilon) \\ &+ \varepsilon \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta\right\} E_j \frac{\partial k(t, s)}{\partial t} z(s, \varepsilon) ds, \quad j = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Вводя вектор $v = \{v_1, \dots, v_r\}$ размера $nr^2 \times 1$, вместо системы (49) получим систему

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A(t) & S \\ 0 & M(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} \\ &+ \varepsilon \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_1(\theta) d\theta\right\} E_1 \frac{\partial k(t, s)}{\partial t} z(s, \varepsilon) \\ \dots \\ \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_r(\theta) d\theta\right\} E_r \frac{\partial k(t, s)}{\partial t} z(s, \varepsilon) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} \Phi(t, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ z(0, \varepsilon) &= 0, \quad v(0, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \quad (51)$$

где $S = (I_{nr}, I_{nr}, \dots, I_{nr})$ – матрица размера $nr \times nr^2$, $B(t) = (E_1 k(t, t), \dots, E_r k(t, t))$ – матрица размера $nr^2 \times nr$, $M(t) = \text{diag}(\mu_1(t) I_{nr}, \dots, \mu_r(t) I_{nr})$ – квазидиагональная матрица размера $nr^2 \times nr^2$.

Поскольку спектр $\{\lambda_i(t)\}$ ($i = r + 1, \dots, (n + 1)r$) матрицы $A(t)$ простой и $\lambda_j(t) \equiv \mu_j(t) \neq \lambda_i(t)$ ($\forall t \in [0, T], j = 1, \dots, r, i = r + 1, \dots, (n + 1)r$), то матрица

$$N(t) = \begin{pmatrix} A(t) & S \\ 0 & M(t) \end{pmatrix}$$

является матрицей простой структуры (см. [6]), т.е. существует матрица $T(t)$ ($\det T(t) \neq 0 \forall t \in [0, T]$) такая, что

$$T^{-1} N(t) T(t) = \text{diag}(\Lambda(t), M(t)) \equiv \{\Lambda(t), M(t)\}.$$

Нетрудно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть матрица $A(t) \in C^1([0, T], \mathbb{C}^{(nr)^2})$ имеет спектр $\{\lambda_i(t)\}$ ($i = r + 1, \dots, (n + 1)r$), удовлетворяющий условиям:

- 1) $\lambda_i(t) \neq \lambda_s(t)$, $i \neq s$, $i, s = r + 1, \dots, (n + 1)r$, $\forall t \in [0, T]$,
- 2) $\lambda_i(t) \neq \mu_j(t)$, $j = 1, \dots, r$, $i = r + 1, \dots, (n + 1)r$, $\forall t \in [0, T]$,

причем $\lambda_j(t) \equiv \mu_j(t) \in C^1[0, T]$, $j = 1, \dots, r$. Тогда матрица

$$N(t) = \begin{pmatrix} A(t) & S \\ 0 & M(t) \end{pmatrix},$$

где $M(t) = \text{diag}(\mu_1(t)I_{nr}, \dots, \mu_r(t)I_{nr})$, S – произвольная постоянная матрица размера $nr \times nr^2$ является матрицей простой структуры. При этом $T^{-1}(t)N(t)T(t) = \text{diag}(\Lambda(t), M(t))$ и преобразующая матрица $T(t)$ принадлежит классу $C^1([0, T], \mathbb{C}^{(nr+nr^2)^2})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение леммы 1 не изменится, если в $N(t)$ вместо постоянной матрицы S взята переменная матрица $S = S(t) \in C^1([0, T], \mathbb{C}^{n^2 r^3})$.

Рассмотрим теперь систему

$$\varepsilon \frac{dw}{dt} = N(t)w, \quad (52)$$

где $w = \{z, v\}$. Обозначим ее фундаментальную матрицу решений через $Y(t, s, \varepsilon)$, $Y(s, s, \varepsilon) = I$.

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены условия леммы 1 и $\text{Re } \lambda_j(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, $j = 1, \dots, (n + 1)r$, то фундаментальная матрица решений $Y(t, s, \varepsilon)$ системы (52) равномерно ограничена, т.е.

$$\|Y(t, s, \varepsilon)\| \leq c_0 = \text{const}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \varepsilon > 0,$$

где постоянная $c_0 > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем в (52) замену переменных $w = T(t)\eta$. Будем иметь

$$\varepsilon \frac{d\eta}{dt} = \begin{pmatrix} \Lambda(t) & 0 \\ 0 & M(t) \end{pmatrix} \eta - \varepsilon T^{-1}(t)T'(t)\eta. \quad (53)$$

При этом фундаментальная матрица $Y(t, s, \varepsilon)$ переходит в фундаментальную матрицу $G(t, s, \varepsilon)$ системы (53) с начальным условием $G(s, s, \varepsilon) = T^{-1}(s)$, т.е.

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{G(t, s, \varepsilon)}{dt} &= \begin{pmatrix} \Lambda(t) & 0 \\ 0 & M(t) \end{pmatrix} G(t, s, \varepsilon) - \varepsilon T^{-1}(t)T'(t)G(t, s, \varepsilon), \\ G(s, s, \varepsilon) &= T^{-1}(s). \end{aligned} \quad (54)$$

Система (54) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} G(t, s, \varepsilon) &= \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \widehat{\Lambda}(\theta) d\theta \right\} T^{-1}(s) \\ &\quad - \int_s^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_\zeta^t \widehat{\Lambda}(\theta) d\theta \right\} T^{-1}(\zeta)T'(\zeta)G(\zeta, s, \varepsilon) d\zeta, \end{aligned}$$

где $\widehat{\Lambda}(t) = \text{diag}(\Lambda(t), M(t))$. Переходя здесь к нормам и учитывая, что $\text{Re } \lambda_j(t) \leq 0$, $j = 1, \dots, (n+1)r$, имеем

$$\|G(t, s, \varepsilon)\| \leq c_1 + c_2 \int_s^t \|G(\zeta, s, \varepsilon)\| d\zeta \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Из леммы Гронуолла–Беллмана (см., например, [7]) отсюда получаем, что

$$\|G(t, s, \varepsilon)\| \leq c_1 e^{c_2(t-s)} \leq c_0 = \text{const}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \varepsilon > 0,$$

а значит, и $Y(t, s, \varepsilon)$ равномерно ограничена при $0 \leq s \leq t \leq T$ и $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Обратимся теперь к системе (51). Она эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} w(t, \varepsilon) = & \int_0^t Y(t, s, \varepsilon) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B(s) & 0 \end{pmatrix} w(s, \varepsilon) ds \\ & + \int_0^t \left[Y(t, \zeta, \varepsilon) \int_0^\zeta \begin{pmatrix} 0 \\ \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^\zeta \mu_1(\theta) d\theta\right\} E_1 \frac{\partial k(\zeta, s)}{\partial t} z(s, \varepsilon) \\ \dots \\ \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^\zeta \mu_r(\theta) d\theta\right\} E_r \frac{\partial k(\zeta, s)}{\partial t} z(s, \varepsilon) \end{pmatrix} ds \right] d\zeta \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y(t, s, \varepsilon) \begin{pmatrix} \Phi(s, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

Переходя здесь к нормам и учитывая равномерную ограниченность фундаментальной матрицы $Y(t, s, \varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned} \|w(t, \varepsilon)\| & \leq c_3 \int_0^t \|w(s, \varepsilon)\| ds + c_4 \int_0^t \left(\int_0^\zeta \|z(s, \varepsilon)\| ds \right) d\zeta + \frac{c_5}{\varepsilon} \|\Phi(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]} \\ & \leq c_3 \int_0^t \|w(s, \varepsilon)\| ds + c_4 T \int_0^t \|w(s, \varepsilon)\| ds + \frac{c_5}{\varepsilon} \|\Phi(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]}, \end{aligned}$$

или

$$\|w(t, \varepsilon)\| \leq c_6 \int_0^t \|w(s, \varepsilon)\| ds + \frac{c_5}{\varepsilon} \|\Phi(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Вновь используя неравенство Гронуолла–Беллмана, отсюда получаем оценку

$$\|w(t, \varepsilon)\| \leq \frac{c_5}{\varepsilon} \|\Phi(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]} e^{c_6 t} \leq \frac{c_7}{\varepsilon} \|\Phi(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]}.$$

Доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия леммы 1 и $k(t, s) \in C^1(0 \leq s \leq t \leq T, \mathbb{C}^{(nr)^2})$, $\Phi(t, \varepsilon) \in C([0, T], \mathbb{C}^{nr})$. Тогда начальная задача (49) однозначно разрешима в $C^1([0, T], \mathbb{C}^{nr})$ и для ее решения справедлива оценка

$$\|z(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]} \leq \frac{\nu}{\varepsilon} \|\Phi(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]}, \quad (55)$$

где $\nu > 0$ – постоянная, не зависящая от ε ($\varepsilon > 0$).

5. Обоснование асимптотической сходимости формальных решений.

Докажем сначала следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия 1)–4). Тогда сужение $z_{\varepsilon N}(t)$ при $\tau = \psi(t)/\varepsilon$ N -й частичной суммы ряда (12) удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_{\varepsilon N}(t)}{dt} &= A(t)z_{\varepsilon N} + \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} E_j k(t, s) z_{\varepsilon N}(s) ds \\ &+ \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_j(t) d\theta\right\} H_j(t, s) ds + g(t) + \varepsilon^{N+1} F_N(t, \varepsilon), \\ z_{\varepsilon N}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (56)$$

где $\|F_N(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]} \leq \overline{F}_N = \cos nt \quad \forall (t, \varepsilon) \in [0, T] \times (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислив решения $y_0(t, \tau), \dots, y_N(t, \tau)$, подставим их в итерационные задачи (24₀), ..., (24_N); получим тождества. Умножим последние на $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^N$ соответственно и просуммируем полученные равенства. Будем иметь тождество

$$\begin{aligned} L_0 S_N(t, \tau, \varepsilon) - R_0 S_N(t, \tau, \varepsilon) &\equiv g(t) - \varepsilon \frac{\partial S_N(t, \tau, \varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon^{N+1} \frac{\partial y_N(t, \tau)}{\partial \tau} \\ &+ \varepsilon R_1 y_0(t, \tau) + \varepsilon^2 (R_1 y_1 + R_2 y_0) + \dots + \varepsilon^N \sum_{\substack{s=0 \\ N-s \geq 0}}^{N-1} R_{N-s} y_s, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} L_0 S_N(t, \tau, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial S_N(t, \tau, \varepsilon)}{\partial t} &\equiv g(t) + \varepsilon^{N+1} \frac{\partial y_N(t, \tau)}{\partial t} + R_0 y_0 + \varepsilon (R_0 y_1 + R_1 y_0) \\ &+ \varepsilon^2 (R_0 y_2 + R_1 y_1 + R_2 y_0) + \dots + \varepsilon^N (R_0 y_N + R_1 y_{N-1} + \dots + R_N y_0). \end{aligned}$$

Вычитая из обеих частей этого тождества $JS_N(t, \tau, \varepsilon) \equiv Jz_{\varepsilon N}(t)$, а затем производя сужение при $\tau = \psi(t)/\varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_{\varepsilon N}(t)}{dt} - A(t)z_{\varepsilon N} - Jz_{\varepsilon N}(t) &\equiv g(t) + \varepsilon^{N+1} \frac{\partial y_N(t, \psi/\varepsilon)}{\partial t} \\ &- \left[JS_N(t, \tau, \varepsilon) - \sum_{r=0}^N \varepsilon^r \sum_{\substack{s=0 \\ r-s \geq 0}}^r R_{r-s} y_s(s, \tau) \right]_{\tau=\psi(t)/\varepsilon}. \end{aligned}$$

По определению операторов R_m выражение в квадратной скобке представляет-
ся в виде $\varepsilon^{N+1}l_N(t, \varepsilon)$, причем $\|l_N(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]} \leq \bar{l}_N = \text{const}$. Следовательно,

$$\varepsilon \frac{dz_{\varepsilon N}(t)}{dt} - A(t)z_{\varepsilon N} - Jz_{\varepsilon N}(t) \equiv g(t) + \varepsilon^{N+1}F_N(t, \varepsilon),$$

где $F_N(t, \varepsilon) \equiv \frac{\partial y_N(t, \psi/\varepsilon)}{\partial t} - l_N(t, \varepsilon)$. В силу условий 1)–3) вектор-функция $F_N(t, \varepsilon)$ равномерно ограничена, т.е.

$$\|F_N(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]} \leq \bar{F}_N = \text{const} \quad \forall (t, \varepsilon) \in [0, T] \times (0, \varepsilon_0],$$

где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. Равенство $z_{\varepsilon N}(0) = 0$ очевидно, так как все $y_j(t, \tau)$ удовлетворяют условию $y_j(0, 0) = 0$. Лемма доказана.

Из теоремы 4 и леммы 2 вытекает следующий основной результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены условия 1)–4). Тогда задача (3) однозначно разрешима в классе $C^1([0, T], \mathbb{C}^{nr})$ и для ее решения справедлива оценка (48), где $z_{\varepsilon N}(t)$ – построенное выше формальное асимптотическое решение порядка N , а постоянная $C_N > 0$ не зависит от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 функция $z_{\varepsilon, N+1}(t) \equiv S_{N+1}(t, \psi(t)/\varepsilon, \varepsilon)$ удовлетворяет задаче

$$\varepsilon \frac{dz_{\varepsilon, N+1}(t)}{dt} = A(t)z_{\varepsilon, N+1}(t) + Jz_{\varepsilon, N+1}(t) + g(t) + \varepsilon^{N+2}F_{N+1}(t, \varepsilon), \quad z_{\varepsilon, N+1}(0) = 0,$$

а поэтому невязка $z(t, \varepsilon) - z_{\varepsilon, N+1}(t) = \Delta_{\varepsilon N}(t)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\Delta_{\varepsilon, N+1}(t)}{dt} &= A(t)\Delta_{\varepsilon, N+1}(t) \\ &+ \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} E_j k(t, s) \Delta_{\varepsilon N}(s) ds - \varepsilon^{N+2}F_{N+1}(t, \varepsilon), \\ \Delta_{\varepsilon, N+1}(0) &= 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Задача (57) имеет вид задачи (49) с неоднородностью $\Phi(t, \varepsilon) \equiv -\varepsilon^{N+2}F_{N+1}(t, \varepsilon)$. По теореме 4 ее решение удовлетворяет оценке

$$\|\Delta_{\varepsilon, N+1}(t)\|_{C[0, T]} \leq \frac{\nu}{\varepsilon} \varepsilon^{N+2} \|F_{N+1}(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^{N+1} \bar{F}_{N+1},$$

Учитывая, что $y_{N+1}(t, \psi(t)/\varepsilon)$ равномерно ограничена при $(t, \varepsilon) \in [0, T] \times (0, \varepsilon_0]$, отсюда получаем оценку (48). Теорема доказана.

6. Пределный переход в системе (2). Из теоремы 5 следует, что решение системы (3) представляется в виде

$$z(t, \varepsilon) = y_0\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon y_1\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 R_2(t, \varepsilon), \quad (58)$$

где $\|R_2(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]} \leq \bar{R}_2 = \text{const}$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$; при этом

$$\begin{aligned} y_0(t, \tau) &= y_0^{(0)}(t) + \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \alpha_i^{(0)}(t) \varphi_i(t) e^{\tau_i}, \\ y_1(t, \tau) &= y_0^{(1)}(t) + \sum_{j=1}^{(n+1)r} y_j^{(1)}(t) e^{\tau_j}, \\ y_0^{(0)}(t) &= -A^{-1}(t)g(t), \\ y_0^{(1)}(t) &= A^{-1}(t) \left[\dot{y}_0^{(0)}(t) + \sum_{s=1}^r \frac{E_s k(t, t) y_0^{(0)}(t) + E_s k(t, t) E_s H(t)}{\lambda_s(t)} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Вводя матрицы

$$F_j = \begin{pmatrix} 0, \dots, 0, I_n, 0, \dots, 0 \\ (j) \end{pmatrix}$$

размера $n \times nr$ и учитывая, что $\varepsilon y = z_1 + \dots + z_r + h(t)$, приходим к выводу, что решение исходной задачи (2) представляется в виде

$$\begin{aligned} y(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^r F_j z(t, \varepsilon) + h(t) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^r F_j y_0^{(0)}(t) + h(t) \right] + \sum_{j=1}^r F_j y_0^{(1)}(t) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^r \sum_{i=r+1}^{(n+1)r} \alpha_i^{(0)}(t) F_j \varphi_i(t) e^{\psi_i(t)/\varepsilon} \\ &\quad + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{(n+1)r} F_j y_i^{(1)}(t) e^{\psi_i(t)/\varepsilon} + \varepsilon \sum_{j=1}^r F_j R_2(t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (60)$$

Желая изучить в (60) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow +0$, заменим условие 3) (на спектр $\{\lambda_j(t)\}$ оператора $A(t)$ и спектральные значения $\mu_j(t)$) условием

$$3') \operatorname{Re} \lambda_j(t) < 0 \quad \forall t \in [0, T], j = 1, \dots, (n+1)r.$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow +0$ функция $\varepsilon^{-\nu} e^{\psi_i(t)/\varepsilon}$ равномерно стремится к нулю на любом отрезке $[\delta, T] \subset (0, T]$ при любом фиксированном $\nu > 0$.

Переходя в (60) к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем, что на любом отрезке $[\delta, T] \subset (0, T]$, на котором $\sum_{j=1}^r F_j (-A^{-1}(t)g(t) + h(t)) \neq 0$, точное решение $y(t, \varepsilon)$ системы (2) стремится к бесконечности, поэтому конечный предел в системе (2) при

$\varepsilon \rightarrow +0$ невозможен. Однако предельный переход можно описать в несколько обобщенном смысле, выбрав в качестве “предельного” режима $\bar{y}(t, \varepsilon)$ простейшую вектор-функцию вида

$$\bar{y}(t, \varepsilon) = \frac{g_k(t)}{\varepsilon^k} + \frac{g_{k-1}(t)}{\varepsilon^{k-1}} + \dots + \frac{g_1(t)}{\varepsilon} + g_0(t), \quad k \geq 0, \quad (61)$$

которая при $\varepsilon \rightarrow +0$ и $k \geq 1$ стремится к бесконечности и, тем не менее, неограниченно сближается с функцией $y(t, \varepsilon)$ на любом отрезке $[\delta, T] \subset (0, T]$. При этом функции $g_j(t)$ в (61) не зависят от ε .

Дадим точное описание такого предельного режима.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что функция (61), в которой $g_j(t)$ не зависят от ε , является *асимптотическим предельным режимом* системы (2) при $\varepsilon \rightarrow +0$, если для любого $\delta > 0$ ($\delta < T$) имеет место предельный переход $\|y(t, \varepsilon) - \bar{y}(t, \varepsilon)\|_{C[\delta, T]} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, где $y(t, \varepsilon)$ — точное решение системы (2).

Можно показать, что асимптотический предельный режим единственен (если, конечно, он существует). Например, для уравнения

$$\varepsilon y(t, \varepsilon) = - \int_0^t e^{-(t-s)/\varepsilon} y(s, \varepsilon) ds + h(t),$$

точное решение которого имеет вид

$$y(t, \varepsilon) = \frac{h(t)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-2t/\varepsilon} \int_0^t e^{2s/\varepsilon} h(s) ds,$$

асимптотическим предельным режимом является функция

$$\bar{y}(t, \varepsilon) = \frac{h(t)}{2\varepsilon} + \frac{\dot{h}(t)}{4},$$

в чем нетрудно убедиться после двукратного интегрирования по частям в $y(t, \varepsilon)$. Значит, на любом отрезке $[\delta, T] \subset (0, T]$ точное решение $y(t, \varepsilon)$ неограниченно сближается с функцией $\bar{y}(t, \varepsilon)$, которая выглядит значительно проще, чем $y(t, \varepsilon)$. Отбросив в (60) все члены, содержащие экспоненты $e^{\psi_j(t)/\varepsilon}$, $j = 1, \dots, n+1$, получим асимптотический предельный режим:

$$\bar{y}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^r F_j y_0^{(0)}(t) + h(t) \right] + \sum_{j=1}^r F_j y_0^{(1)}(t). \quad (62)$$

Действительно, из (48) и (60) следует, что

$$\|y(t, \varepsilon) - \bar{y}(t, \varepsilon)\|_{C[\delta, T]} \leq c_0 \varepsilon.$$

Доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнены условия 1), 2), 3'), 4). Тогда система (2) имеет единственный асимптотический предельный режим вида (62), где функции $y_0^{(0)}(t)$ и $y_0^{(1)}(t)$ имеют вид (59).

Список литературы

1. *Иманалиев М. И.* Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение. Фрунзе: Илим, 1977.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
3. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
4. *Lotov S. A.* Introduction to the general theory of singular perturbations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992.
5. *Сафонов В. Ф., Туйчиев О. Д.* Регуляризация сингулярно возмущенных интегральных уравнений с быстро изменяющимися ядрами и их асимптотика // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. №9. С. 1199–1211.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: ГИТТЛ, 1953.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
17.11.2000