Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Герко, О гомологических размерностях, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 8, 79–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:05:20

УДК 512.717

А. А. Герко

О гомологических размерностях

Для конечно порожденных модулей над локальными кольцами рассматривается общая задача расширения класса модулей конечной проективной размерности с сохранением тех или иных свойств. В первой части вводится понятие удобного комплекса, обобщающее известные понятия дуализирующего комплекса и удобного модуля, и доказываются некоторые свойства определенной относительно таких комплексов размерности. В частности, получено обобщение теоремы Е. С. Голода о поведении G_K -размерности относительно удобного модуля K при факторизации по идеалам специального вида, а также дана переформулировка гипотезы Аврамова–Фоксби о транзитивности G -размерности. Во второй части строится расширение известного класса модулей конечной CI -размерности, обладающее некоторыми дополнительными свойствами. В третьей части рассматривается размерность, характеризующая кольца Коэна–Маколея в том же смысле, в каком класс модулей конечной проективной размерности характеризует регулярные кольца, а класс модулей CI -размерности – полные пересечения.

Библиография: 19 названий.

Введение

В статье все рассматриваемые кольца предполагаются локальными, а модули, если явно не указано обратное, – конечно порожденными. Как известно, класс модулей конечной проективной размерности над кольцом R характеризует регулярные кольца в следующем смысле:

$$R \text{ регулярно} \Leftrightarrow \forall M \operatorname{pd} M < \infty \Leftrightarrow \operatorname{pd} k < \infty, \quad (1)$$

где $k \simeq R/\mathfrak{m}$ – поле вычетов кольца R .

Есть некоторые основания полагать, что модули конечной проективной размерности в существенном ведут себя как модули над регулярными кольцами (см., например, введение в [1]). В связи с этим возникает вопрос о возможности расширения класса модулей конечной проективной размерности, которое характеризовало бы в смысле (1) другие классы колец: полные пересечения, кольца Горенштейна или кольца Коэна–Маколея и при этом по-прежнему удовлетворяло тем или иным свойствам, присущим модулям конечной проективной размерности.

Подобные классы модулей неоднократно возникали в разных задачах коммутативной алгебры.

Для колец Горенштейна соответствующий класс рассматривался Ауслендером и Бриджером в [2] и задавался следующим образом. Положим $G\text{-dim } M = 0$,

---

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01144).

если естественное отображение $M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, R), R)$ есть изоморфизм и $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0 = \text{Ext}_R^i(M^*, R)$ при $i > 0$. Точную нижнюю грань длин резольвент модуля M , составленных из модулей P с $\text{G-dim } P = 0$, будем обозначать $\text{G-dim } M$. Далее этот подход был развит в работах [3] и [4], где исследовалась так называемая G_K -размерность относительно *удобного* модуля K (см. определение 1.1), характеризующая пары (кольцо Коэна–Маколея, канонический модуль над ним).

Для полных пересечений соответствующий класс модулей, названных модулями конечной виртуальной проективной размерности (vpd), возник в работе Л. Л. Аврамова [5] при изучении свойств чисел Бетти модулей бесконечной проективной размерности; $\text{vpd}_R M$ полагалось конечной, если существовал сюръективный гомоморфизм колец $S \rightarrow \hat{R}$, где $\hat{R}$ – $\mathfrak{m}$ -адическое пополнение R , такой, что ядро гомоморфизма порождено регулярной последовательностью и $\text{pd}_S(M \otimes_R \hat{R}) < \infty$. Для (возможно) более широкого класса модулей конечной CI-размерности (см. определение 2.2), рассматривавшегося в [6] и также характеризующего полные пересечения, были доказаны некоторые утверждения, справедливость которых для виртуальной проективной размерности неизвестна, в частности, установлено “хорошее” поведение при локализации. К тому же модули конечной CI-размерности в некоторых задачах действительно демонстрируют поведение, сходное с поведением модулей над полными пересечениями. В качестве примера можно указать работы [7], [8] и [9], где с модулей над полными пересечениями на модули конечной CI-размерности обобщается формула глубины. В работе [8] также обобщается критерий свободы Ауслендера.

Упомянем также импликацию

$$\text{pd}_R M < \infty \Rightarrow \text{CI-dim}_R M < \infty \Rightarrow \text{G-dim}_R M < \infty,$$

частным случаем которой при $M = k$ является следующее утверждение:

$$R \text{ регулярно} \Rightarrow R \text{ – полное пересечение} \Rightarrow R \text{ горенштейново.}$$

Будем говорить, что задана *обобщенная гомологическая размерность*, если для любого кольца R задан класс модулей H_R и отображение H-dim_R из H_R в $\mathbb{Z}$. Перечислим некоторые из ограничений, которые целесообразно наложить для получения содержательного понятия.

- I. $M \in \text{H}_R \Rightarrow \text{H-dim}_R M + \text{depth } M = \text{depth } R$.
- II. $k = R/\mathfrak{m} \in \text{H}_R \Leftrightarrow \forall R$ модуль $M \in \text{H}_R$.
- III. Пусть $x - R$ - и M -регулярный элемент. Тогда $M \in \text{H}_R \Rightarrow M/xM \in \text{H}_{R/xR}$ и $\text{H-dim}_R M = \text{H-dim}_{R/xR} M/xM$.
- IV. $M \in \text{H}_R \Rightarrow M_{\mathfrak{p}} \in \text{H}_{R_{\mathfrak{p}}}$ и $\text{H-dim}_R M \geq \text{H-dim}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$.
- V. Если в короткой точной последовательности $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow K \rightarrow 0$ два из трех модулей принадлежат H_R , то и третий тоже обладает этим свойством; если эта точная последовательность расщепляется, то $N \in \text{H}_R \Rightarrow M \in \text{H}_R$ и $K \in \text{H}_R$.

Вообще говоря, мы не требуем, чтобы $\text{H-dim}_R M$ было неотрицательным.

Заметим, что проективная и G -размерности удовлетворяют всем этим свойствам, для виртуальной проективной размерности доказаны свойства I и II, а для CI -размерности – свойства I–IV.

Определение G_K -размерности уже не вполне укладывается в эту схему из-за наличия дополнительного параметра, однако и тут выполняются аналоги свойств I–V.

В первой части этой работы рассматривается понятие размерности относительно *удобного* комплекса, который является одновременно обобщением понятий *удобного* модуля [4] и дуализирующего комплекса. Этот подход, в частности, позволяет получить более простое доказательство предложения 5 из [4], а также предложить некоторое его обобщение. Как недавно стало известно автору, комплексы такого вида рассматривались Кристенсенем в работе [10], и большинство излагаемых в этой части результатов известно.

Во второй части этой работы рассматриваются альтернативные, через совокупность модулей нулевой размерности, подходы к определению размерности, характеризующей полное пересечение. В результате получается расширение класса модулей конечной CI -размерности, удовлетворяющее свойству V. Также приводится более простое, чем в [11], доказательство теоремы о том, что локализация полного пересечения есть снова полное пересечение.

В третьей части рассматривается размерность, характеризующая кольца Коэна–Маколея. Пользуясь схемой, предложенной в определении 2.2, можно дать несколько определений такой размерности. Для предложенного здесь определения выполнены свойства I–IV, а также верно следующее утверждение: класс модулей конечной CM -размерности включает в себя класс модулей конечной G -размерности.

Автор выражает благодарность Е. С. Голоду за внимание к работе, проявленное на всех стадиях ее подготовки, и многочисленные ценные замечания.

1. G_I -размерность

Категорию всех комплексов R -модулей будем обозначать $\mathcal{C}(R)$, а дифференциал комплекса $\mathbf{X}$, действующий из члена X^n в X^{n+1} , через δ^n . Введем обозначения

$$\begin{aligned}\sup(\mathbf{I}) &= \sup\{n : H^n(\mathbf{I}) \neq 0\}, & \inf(\mathbf{I}) &= \inf\{n : H^n(\mathbf{I}) \neq 0\}, \\ \text{amp}(\mathbf{I}) &= \sup(\mathbf{I}) - \inf(\mathbf{I}).\end{aligned}$$

Полную подкатегорию в $\mathcal{C}(R)$ комплексов, для которых $\inf(\mathbf{I}) > -\infty$ (соответственно $\sup(\mathbf{I}) < \infty$, $\text{amp}(\mathbf{I}) < \infty$), будем обозначать $\mathcal{C}^+(R)$ (соответственно $\mathcal{C}^-(R)$, $\mathcal{C}^b(R)$). Через $\mathcal{C}_f(R)$ (соответственно $\mathcal{C}_f^-(R)$, $\mathcal{C}_f^+(R)$, $\mathcal{C}_f^b(R)$) будем обозначать полную подкатегорию в $\mathcal{C}(R)$ (соответственно $\mathcal{C}^-(R)$, $\mathcal{C}^+(R)$, $\mathcal{C}^b(R)$), объектами которой являются комплексы, все модули гомологий которых конечно порождены.

Перечислим необходимые для дальнейшего основные факты о G_K -размерности и G_K -совершенных модулях.

Зафиксируем модуль K . Для произвольного модуля P через P^* обозначим модуль $\text{Hom}_R(P, K)$. Будем называть модуль P K -рефлексивным, если канонический гомоморфизм $P \rightarrow P^{**}$ биективен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [4]. Для K -рефлексивных модулей P над кольцом R таких, что для любых $i > 0$ $\text{Ext}_R^i(P, K) = 0 = \text{Ext}_R^i(P^*, K)$, положим

$$\text{G}_K\text{-dim}_R P = 0,$$

$\text{G}_K\text{-dim}_R M = \inf\{n : \text{существует точная последовательность}$

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \text{ где } \text{G}_K\text{-dim}_R P_i = 0\}.$$

В случае, когда $\text{G}_K\text{-dim } M$ конечна, ее можно выразить следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 [4]. Если $\text{G}_K\text{-dim } M < \infty$, то $\text{G}_K\text{-dim } M = \sup\{n : \text{Ext}_R^n(M, K) \neq 0\}$.

Если $\text{G}_K\text{-dim}_R R = 0$, то модуль K называется *удобным*. Другими словами, K удобен тогда и только тогда, когда $\text{Hom}_R(K, K) \simeq R$ и для любого $i > 0$ $\text{Ext}_R^i(K, K) = 0$. Удобными модулями являются, например, свободный модуль ранга 1 (соответствующую размерность модуля M будем обозначать $\text{G-dim } M$, опуская индекс R), а также канонический модуль. Можно доказать, что для G_K -размерности относительно удобного модуля K выполнен аналог формулы Ауслендера–Буксбаума, а также верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Следующие утверждения равносильны:

- 1) K – канонический модуль;
- 2) для любого модуля M имеет место $\text{G}_K\text{-dim } M < \infty$;
- 3) $\text{G}_K\text{-dim } k < \infty$.

Напомним, что $\text{grade } M = \inf\{i : \text{Ext}_R^i(M, R) \neq 0\}$. Если I – идеал в R , то вместо $\text{grade } R/I$ обычно пишут $\text{grade } I$ (основанием для такой записи может служить то, что в этом случае $\text{grade } I = \{\text{длина максимальной } R\text{-регулярной последовательности в } I\}$).

Легко видеть, что $\text{grade } M \leq \text{G}_K\text{-dim } M$. Если $\text{grade } M = \text{G}_K\text{-dim } M$, то модуль M называется G_K -совершенным. Идеал I кольца R называется G_K -совершенным, если R/I – G_K -совершенный модуль. Смысл понятия G_K -совершенного идеала раскрывает следующая

ТЕОРЕМА 1.4 [4; предложение 5]. Пусть I – G_K -совершенный идеал, K – удобный R -модуль. Тогда $\text{Ext}_R^{\text{grade } I}(R/I, K)$ – удобный R/I -модуль и для любого R/I -модуля M выполнено следующее:

$$\text{G}_K\text{-dim}_R M < \infty \Leftrightarrow \text{G}_{K'}\text{-dim}_{R/I} M < \infty,$$

где положено $K' = \text{Ext}_R^{\text{grade } I}(R/I, K)$, и при условии конечности эти две размерности связаны соотношением:

$$\text{G}_K\text{-dim}_R M = \text{grade } I + \text{G}_{K'}\text{-dim}_{R/I} M.$$

Ниже (см. замечание 1.16) мы дадим доказательство этой теоремы, отличное от данного в [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть в ситуации, описанной в условии теоремы 1.4, $K' \simeq R/I$. В этом случае будем называть идеал I G_K -горнштейновым.

Приведем теперь основные определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Пусть $\mathbf{I} \in \mathcal{C}_f^b(R)$ – ограниченный слева инъективный комплекс. Будем называть его *удобным*, если естественный морфизм комплексов $R \xrightarrow{\alpha_R} \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(R, \mathbf{I}), \mathbf{I})$ – квазиизоморфизм.

Если в определении 1.6 наложить на комплекс $\mathbf{I}$ более жесткие ограничения, а именно потребовать, чтобы он был квазиизоморфен ограниченному инъективному комплексу, то мы получим определение *дуализирующего* комплекса (см., например, [12]). Примером удобного комплекса является также $\mathbf{I} = \mathbf{I}(K)$ – инъективная резольвента удобного модуля K .

Будем для краткости обозначать $\mathbf{M}^{**} = \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, \mathbf{I}), \mathbf{I})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Пусть $M \xrightarrow{\alpha_M} \mathbf{M}^{**}$ – квазиизоморфизм. Положим

$$G_I\text{-dim } M = \sup(\text{Hom}(M, \mathbf{I})) - \sup(\mathbf{I}).$$

Легко видеть, что G_I -размерность модуля не меняется при замене комплекса $\mathbf{I}$ на квазиизоморфный ему инъективный комплекс $\mathbf{I}'$.

Выясним связь данного определения с определением 1.1.

ЛЕММА 1.8. Пусть в короткой точной последовательности $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow K \rightarrow 0$ два из трех модулей имеют конечную G_I -размерность. Тогда и третий модуль тоже обладает этим свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все с очевидностью следует из точной последовательности $0 \rightarrow \text{Hom}(K, \mathbf{I}) \rightarrow \text{Hom}(N, \mathbf{I}) \rightarrow \text{Hom}(M, \mathbf{I}) \rightarrow 0$ и коммутативной и точной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & K \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_M & & \downarrow \alpha_N & & \downarrow \alpha_K \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{M}^{**} & \longrightarrow & \mathbf{N}^{**} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{**} \longrightarrow 0 \end{array}.$$

ЛЕММА 1.9. Пусть в короткой точной последовательности $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow K \rightarrow 0$ $G_I\text{-dim } N = 0$ и $0 < G_I\text{-dim } K < \infty$. Тогда $G_I\text{-dim } M = G_I\text{-dim } K - 1$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

ТЕОРЕМА 1.10. Пусть $\mathbf{I}$ – инъективная резольвента удобного модуля K . Тогда для любого модуля M $G_I\text{-dim } M = G_K\text{-dim } M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем проводить индукцию по той из этих размерностей, которая конечна. Легко видеть, что $G_K\text{-dim } M = 0 \Leftrightarrow G_I\text{-dim } M = 0$. Действительно, когда одна из этих размерностей равна 0, имеем $\text{Ext}_R^n(M, K) = 0$ при $n > 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\alpha_M} \mathbf{M}^{**} \text{ – квазиизоморфизм} \\ \Leftrightarrow &\text{ канонический гомоморфизм } M \rightarrow M^{**} \text{ – изоморфизм,} \end{aligned}$$

что и требовалось. Пусть теперь какая-нибудь из этих размерностей модуля M конечна и больше 0. Накроем тогда модуль M свободным и применим к ядру этого накрытия предположение индукции и лемму 1.9.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Из леммы 1.8, в частности, следует, что если $\text{pd } M < \infty$, то $G_I\text{-dim } M < \infty$ для любого удобного комплекса $\mathbf{I}$.

Удобные комплексы, не являющиеся резольвентами удобных модулей, встречаются лишь в кольцах, достаточно сильно отличающихся от регулярных. Точнее говоря, верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.12. Пусть $\mathbf{I}$ – удобный комплекс над R , $\text{amp}(\mathbf{I}) > 0$. Тогда R не является кольцом Коэна–Маколея.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим в условиях предложения, что R коэн–маколеево. Если x – R -регулярный элемент, то из точной последовательности комплексов $0 \rightarrow \text{Hom}_R(R/xR, \mathbf{I}) \rightarrow \mathbf{I} \xrightarrow{x} \mathbf{I} \rightarrow 0$ видно, что $\text{amp}(\text{Hom}_R(R/xR, \mathbf{I})) \geq \text{amp}(\mathbf{I})$. Применив индукцию по глубине, можем считать R артиновым. Комплекс $\text{Hom}(\mathbf{I}, \mathbf{I})$ квазиизоморфен $\text{Hom}(\mathbf{P}(\mathbf{I}), \mathbf{I})$. Имеем

$$0 = H^{n - \text{amp}(\mathbf{I})}(\mathbf{P}(\mathbf{I}), \mathbf{I}) = \text{Hom}(H^{n \sup(\mathbf{I})}(\mathbf{I}), H^{n \inf(\mathbf{I})}(\mathbf{I})),$$

причем $\text{amp}(\mathbf{I}) \neq 0$. Получили противоречие, так как над артиновым кольцом $\text{Hom}(M, N) \neq 0$.

Следующее техническое утверждение будет нами многократно использоваться.

ЛЕММА 1.13 [12; лемма 3.4(ii)]. Пусть $\mathbf{I} \in \mathcal{C}_f(R)$ – ограниченный слева инъективный комплекс, M – конечно порожденный модуль. Тогда $\text{Hom}(M, \mathbf{I}) \in \mathcal{C}_f(R)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.14. Пусть $\mathbf{I}$ – удобный комплекс над S , R – конечная (конечно порожденная как S -модуль) S -алгебра, $\mathbf{I}' = \text{Hom}_S(R, \mathbf{I})$. Тогда

$$G_I\text{-dim}_S R < \infty \Leftrightarrow \mathbf{I}' \text{ – удобный комплекс над } R.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_I\text{-dim}_S R < \infty$. Конечность числа ненулевых гомотопий $\mathbf{I}'$ обеспечивается конечностью $G_I\text{-dim}_S R$, а их конечная порожденность – леммой 1.13. Инъективность $\mathbf{I}'$ хорошо известна. Функтор $\text{Hom}_R(\cdot, \text{Hom}_S(R, \mathbf{I}))$ из категории $\mathcal{C}(R)$ в себя изоморфен функтору $\text{Hom}_S(\cdot, \mathbf{I})$. Отсюда и из квазиизоморфизма $R \rightarrow \text{Hom}_S(\text{Hom}_S(R, \mathbf{I}), \mathbf{I})$ следует R -удобность $\mathbf{I}'$. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Легко видеть, что в описанной ситуации для R -модуля M конечность G_I -размерности над кольцом S равносильна конечности $G_{I'}$ -размерности над кольцом R . Более того, верна следующая

ТЕОРЕМА 1.15. Для R -модуля M $G_I\text{-dim}_S M < \infty$ тогда и только тогда, когда $G_{I'}\text{-dim}_R M < \infty$. При этом $G_I\text{-dim}_S M = G_{I'}\text{-dim}_R M + G_I\text{-dim}_S R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\text{sup}(\mathbf{I}) - \text{sup}(\mathbf{I}') = G_I\text{-dim}_S R$. Также $\text{sup}(\text{Hom}_S(M, \mathbf{I})) = \text{sup}(\text{Hom}_R(M, \mathbf{I}'))$. Вычитая второе равенство из первого, получаем требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.16. Положим $\mathbf{I} = \mathbf{I}(K)$ – инъективная резольвента удобного модуля K , $\mathfrak{a}$ – G_K -совершенный идеал. Легко видеть, что в этом случае $\mathbf{I}' = \mathbf{I}(K')$ будет инъективной резольventой $R/\mathfrak{a}$ -удобного модуля K' . Применив теорему 1.15, получим утверждение теоремы 1.4.

Опишем удобные комплексы $\mathbf{I}$ такие, что для любого R -модуля M имеем $G_1\text{-dim } M < \infty$.

Введем аналог чисел Басса $\mu^i(\mathfrak{p}, \mathbf{I}) = \dim_{k(\mathfrak{p})} (H^i(\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(k(\mathfrak{p}), \mathbf{I}_{\mathfrak{p}})))$, где $k(\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Нам понадобится некоторое обобщение леммы 3.1 из работы [13].

ЛЕММА 1.17. Пусть $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ – различные простые идеалы такие, что между ними нет других простых идеалов. Пусть $\mathbf{I} \in \mathcal{C}_f(R)$ – ограниченный слева инъективный комплекс. Тогда имеем

$$\mu^i(\mathfrak{q}, \mathbf{I}) > 0 \Rightarrow \mu^{i+1}(\mathfrak{p}, \mathbf{I}) > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Локализацией утверждение сводится к случаю $R = R_{\mathfrak{p}}$. Пусть $x \in \mathfrak{p}$, $x \notin \mathfrak{q}$, положим $S = R/\mathfrak{q}$, $T = S/xS = R/(x, \mathfrak{q})$. Длина модуля T конечна, а x – регулярный элемент в S . Из точной последовательности $0 \rightarrow S \xrightarrow{x} S \rightarrow T \rightarrow 0$ получаем, что следующая последовательность точна

$$H^i(\text{Hom}_R(S, \mathbf{I})) \xrightarrow{x} H^i(\text{Hom}_R(S, \mathbf{I})) \rightarrow H^{i+1}(\text{Hom}_R(T, \mathbf{I})).$$

По предположению $H^i(\text{Hom}_R(S, \mathbf{I})_{\mathfrak{q}}) \neq 0$. По лемме 1.13 модуль $H^i(\text{Hom}_R(S, \mathbf{I}))$ конечно порожден. Отсюда, применяя лемму Накаямы, получаем

$$H^{i+1}(\text{Hom}_R(T, \mathbf{I})) \neq 0.$$

Предположив теперь, что $H^{i+1}(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{p}, \mathbf{I})) = 0$, индукцией по длине модуля T с использованием полноточности $H^{i+1}(\text{Hom}_R(\cdot, \mathbf{I}))$ получим, что

$$H^{i+1}(\text{Hom}_R(T, \mathbf{I})) = 0,$$

– противоречие.

ТЕОРЕМА 1.18. Пусть $\mathbf{I}$ – удобный комплекс над кольцом R , $G_1\text{-dim } k < \infty$. Тогда $\mathbf{I}$ – дуализирующий комплекс и для любого R -модуля M $G_1\text{-dim}_R M < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 1.14 имеем, что $\text{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, \mathbf{I})$ – удобный комплекс над векторным пространством k , а значит, существует лишь одно значение $i = i_0$, при котором $\mu^i(\mathfrak{m}, \mathbf{I})$ не равно 0. Теперь из леммы 1.17 видно, что $\mu^i(\mathfrak{p}, \mathbf{I}) = 0$ при $i \geq i_0$. Отсюда заключаем, что $\mathbf{I}$ является прямой суммой ациклического и ограниченного инъективных комплексов, а значит, является дуализирующим.

При исследовании поведения G_1 -размерности при локализации возникают трудности, связанные с бесконечной порожденностью инъективных модулей. Обойти указанные трудности помогает следующая

ЛЕММА 1.19. Пусть $\mathbf{I} \in \mathcal{C}(R)$ – ограниченный слева инъективный комплекс. Рассмотрим морфизм функторов

$$\xi: \text{Hom}_R(\cdot, \mathbf{I}) \otimes R_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(\cdot \otimes R_{\mathfrak{p}}, \mathbf{I} \otimes R_{\mathfrak{p}})$$

из категории $\mathcal{C}(R)$ в $\mathcal{C}(R_{\mathfrak{p}})$. Если $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_f^-(R)$, то $\xi(\mathbf{X})$ – квазиизоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что это верно в случае, когда $\mathbf{X}$ ацикличен или состоит из одного модуля. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_{>n}(\mathbf{X}) &\text{ – это комплекс } \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{im } d_{\mathbf{X}}^n \rightarrow X^{n+1} \rightarrow X^{n+2} \rightarrow \cdots; \\ \sigma'_{\geq n}(\mathbf{X}) &\text{ – это комплекс } \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{coker } d_{\mathbf{X}}^{n-1} \rightarrow X^{n+1} \rightarrow X^{n+2} \rightarrow \cdots. \end{aligned}$$

Имеем точную последовательность комплексов

$$0 \rightarrow \{-n\}H^n(\mathbf{X}) \rightarrow \sigma'_{\geq n}(\mathbf{X}) \rightarrow \sigma_{>n}(\mathbf{X}) \rightarrow 0.$$

Убывающей индукцией по n докажем, что $\xi(\sigma_{>n}(\mathbf{X}))$ – изоморфизм. Для $n \gg 0$ это верно, так как комплекс $\xi(\sigma_{>n}(\mathbf{X}))$ в этом случае ацикличен. Обозначив для краткости $F(\cdot) = \text{Hom}_R(\cdot, \mathbf{I}) \otimes R_{\mathfrak{p}}$ и $G(\cdot) = \text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(\cdot \otimes R_{\mathfrak{p}}, \mathbf{I} \otimes R_{\mathfrak{p}})$, имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(\sigma_{>n}(\mathbf{X})) & \longrightarrow & F(\sigma'_{\geq n}(\mathbf{X})) & \longrightarrow & F(\{-n\}H^n(\mathbf{X})) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \xi(\sigma_{>n}(\mathbf{X})) & & \downarrow \xi(\sigma'_{\geq n}(\mathbf{X})) & & \downarrow \xi(\{-n\}H^n(\mathbf{X})) \\ 0 & \longrightarrow & G(\sigma_{>n}(\mathbf{X})) & \longrightarrow & G(\sigma'_{\geq n}(\mathbf{X})) & \longrightarrow & G(\{-n\}H^n(\mathbf{X})) \longrightarrow 0 \end{array},$$

где строки – точные тройки комплексов, $\xi(\sigma_{>n}(\mathbf{X}))$ – квазиизоморфизм по предположению индукции, $\xi(\{-n\}H^n(\mathbf{X}))$ – квазиизоморфизм, так как модуль $H^n(\mathbf{X})$ конечно порожден. Применяя теперь 5-лемму для морфизмов соответствующих длинных точных последовательностей гомологий, получаем, что $\xi(\sigma'_{\geq n}(\mathbf{X}))$ тоже квазиизоморфизм. Комплекс $\sigma'_{\geq n}(\mathbf{X})$, однако, квазиизоморфен $\sigma_{>n-1}(\mathbf{X})$, а значит, $\xi(\sigma_{>n}(\mathbf{X}))$ – квазиизоморфизм для любого n . Отсюда следует утверждение леммы для случая, когда комплекс $\mathbf{X}$ ограничен слева, так как при этом $\sigma_{>n}(\mathbf{X}) \simeq \mathbf{X}$ для $n \ll 0$. Рассмотрим теперь случай произвольного комплекса $\mathbf{X}$. Заметим, что комплекс $F(\mathbf{X})$ (соответственно $G(\mathbf{X})$) представляется в виде возрастающего объединения комплексов $F(\sigma_{>n}(\mathbf{X}))$ (соответственно $G(\sigma_{>n}(\mathbf{X}))$), причем по доказанному $\xi(\sigma_{>n}(\mathbf{X}))$ – квазиизоморфизм для любого n .

Докажем, что отображение в гомологиях, индуцируемое $\xi(\mathbf{X})$, есть изоморфизм.

Инъективность. Пусть образ цикла x комплекса $F(\mathbf{X})$ является границей y комплекса $G(\mathbf{X})$, тогда y является границей уже в $G(\sigma_{>n}(\mathbf{X}))$ для $n < n_0$, а x принадлежит комплексам $F(\sigma_{>m}(\mathbf{X}))$ для $m < m_0$. Таким образом, $\xi(\sigma_{>k}(\mathbf{X}))$ не является квазиизоморфизмом для $k < \min(n_0, m_0)$.

Сюръективность очевидна.

Следующее утверждение является обобщением леммы 1.13.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.20. Пусть $\mathbf{I} \in \mathcal{C}_f(R)$ – ограниченный слева инъективный комплекс, $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_f^-(R)$. Тогда $\text{Hom}(\mathbf{X}, \mathbf{I}) \in \mathcal{C}_f^+(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству 1.19. Используем усечения комплекса $\mathbf{X}$, убывающую индукцию и тот факт, что если в точной последовательности $N' \rightarrow N \rightarrow N''$ модули N' и N'' конечно порождены, то N также конечно порожден.

ТЕОРЕМА 1.21. Пусть $\mathbf{I}$ – удобный комплекс над кольцом R , M – R -модуль. Тогда $\mathbf{I}_p$ – удобный комплекс над кольцом R_p и из конечности $G_I\text{-dim}_R M$ следует конечность $G_{\mathbf{I}_p}\text{-dim}_{R_p} M_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства требуют лишь свойства, связанные с рефлексивностью: R_p -удобность комплекса $\mathbf{I}_p$ следует из леммы 1.19, где положено $\mathbf{X} = \mathbf{I}$, а из этой же леммы, примененной к комплексу $\mathbf{X} = \text{Hom}(M, \mathbf{I})$, следует возможность получить локализацией квазиизоморфизма $M \rightarrow \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, \mathbf{I}), \mathbf{I})$ необходимый нам квазиизоморфизм $M_p \rightarrow \text{Hom}_{R_p}(\text{Hom}_{R_p}(M_p, \mathbf{I}_p), \mathbf{I}_p)$.

Докажем теперь аналог формулы Ауслендера–Буксбаума для G_I -размерности.

ТЕОРЕМА 1.22. Пусть $\mathbf{I}$ – удобный комплекс над кольцом R , $G_I\text{-dim}_R M < \infty$. Тогда $G_I\text{-dim}_R M + \text{depth } M = \text{depth } R$. В частности, при условии конечности численное значение $G_I\text{-dim } M$ не зависит от выбора удобного комплекса $\mathbf{I}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \text{depth } M &= \inf(\text{Hom}(\mathbf{P}(k), M)) = \inf(\text{Hom}(\mathbf{P}(k), \text{Hom}(\text{Hom}(M, \mathbf{I}), \mathbf{I}))) \\ &= \inf(\text{Hom}(\mathbf{P}(k) \otimes \text{Hom}(M, \mathbf{I}), \mathbf{I})) = \inf(\text{Hom}(k \otimes \mathbf{P}(\text{Hom}(M, \mathbf{I})), \mathbf{I})). \end{aligned}$$

Комплекс $k \otimes \mathbf{P}(\text{Hom}(M, \mathbf{I}))$ является комплексом векторных пространств над полем k , причем $\sup(k \otimes \mathbf{P}(\text{Hom}(M, \mathbf{I}))) = \sup(\text{Hom}(M, \mathbf{I}))$. Отсюда получаем, что $\text{depth } M = \inf(\text{Hom}(k \otimes \mathbf{P}(\text{Hom}(M, \mathbf{I})), \mathbf{I})) = \inf(\text{Hom}(k, \mathbf{I})) - \sup(\text{Hom}(M, \mathbf{I}))$. Аналогично, $\text{depth } R = \inf(\text{Hom}(k, \mathbf{I})) - \sup(\mathbf{I})$, следовательно,

$$\text{depth } R - \text{depth } M = G_I\text{-dim } M.$$

Рассмотрим следующую ситуацию: кольцо R является конечной S -алгеброй конечной проективной размерности, M – R -модуль конечной R -проективной размерности. Тогда легко видеть, что проективная размерность M над S также конечна и выполнено равенство: $\text{pd}_S M = \text{pd}_R M + \text{pd}_S R$. В [14; замечание 4.8] было высказано предположение, что верен и аналог этого утверждения для G -размерности. Используя теорему 1.15, можно предложить следующую, возможно, более общую постановку.

ГИПОТЕЗА 1.23. Пусть $\mathbf{I}$ – удобный комплекс над кольцом R . Тогда

$$G_I\text{-dim } M \leq G\text{-dim } M,$$

причем при условии конечности правой части достигается равенство.

Покажем, как из справедливости этой гипотезы для удобных комплексов некоторого специального вида следует нужное нам утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.24. Пусть R – конечная S -алгебра, $\text{G-dim}_S R < \infty$, M – R -модуль. Тогда в предположении справедливости для кольца R гипотезы 1.23 верно следующее: $\text{G-dim}_R M < \infty \Rightarrow \text{G-dim}_S M < \infty$, и при условии конечности эти размерности связаны соотношением $\text{G-dim}_S M = \text{G-dim}_R M + \text{G-dim}_S R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим комплекс $\mathbf{I}' = \text{Hom}_S(R, \mathbf{I})$, где $\mathbf{I}$ – инъективная резольвента кольца S как модуля над собой. По предложению 1.14 $\mathbf{I}'$ – R -удобный комплекс, а значит, при условии справедливости гипотезы 1.23

$$\text{G}_{\mathbf{I}'} \dim_R M < \infty.$$

Применив теперь теорему 1.15, получаем, что $\text{G}_{\mathbf{I}} \dim_S M < \infty$. Равенство

$$\text{G}_{\mathbf{I}} \dim_S M = \text{G}_{\mathbf{I}'} \dim_R M + \text{G}_{\mathbf{I}} \dim_S R$$

с очевидностью следует из теоремы 1.22.

Представляет интерес также следующий

ВОПРОС 1.25. Верно ли, что все удобные комплексы над кольцом R исчерпываются следующими: $\mathbf{I} = \text{Hom}_S(R, \mathbf{I}(S))$, где R есть факторкольцо S ?

Как будет показано в третьей части работы, для случая, когда комплекс $\mathbf{I}$ является инъективной резольventой удобного модуля, ответ на этот вопрос положителен.

2. CI-размерность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [6]. Квазидеформацией кольца R называется диаграмма локальных гомоморфизмов $R \rightarrow R' \leftarrow Q$, где $R \rightarrow R'$ – плоское расширение, а $R' \leftarrow Q$ – деформация, т.е. гомоморфизм факторизации по идеалу I , порожденному регулярной последовательностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [6]. $\text{CI-dim}_R M = \inf \{ \text{pd}_Q(M \otimes_R R') - \text{pd}_Q R' : R \rightarrow R' \leftarrow Q \text{ – квазидеформация} \}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Рассмотрим модули M над кольцом R такие, что

$$\text{G-dim}_R M = 0,$$

и обладающие тем свойством, что их числа Бетти $\beta_n^R(M)$ ограничены некоторым полиномом от n . Для таких модулей положим $\text{PCI-dim}_R M = 0$. Для произвольных модулей положим

$\text{PCI-dim}_R M = \inf \{ n : \text{существует точная последовательность}$

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \text{ где } \text{PCI-dim}_R P_i = 0 \}$$

Следующее утверждение хорошо известно [15], но здесь приводится более простое доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Если R – полное пересечение, то для любого R -модуля M его числа Бетти $\beta_n^R(M)$ ограничены некоторым полиномом от n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сведем сначала это утверждение к случаю $\text{depth } M = \text{depth } R$. Положим $n = \text{depth } R - \text{depth } M$. Обозначим $\text{Syz}_n^R(M) = \text{coker } \delta_{n+1}$, где $(\mathbf{F}, \delta)$ – минимальная свободная резольвента M над R . При $i \gg 0$ имеем $\beta_i^R(\text{Syz}_n^R(M)) = \beta_{i+n}^R(M)$. С другой стороны, $\text{G-dim}_R M = \text{depth } R - \text{depth } M$, отсюда $\text{G-dim}_R \text{Syz}_n^R(M) = 0$, а значит, $\text{depth } \text{Syz}_n^R(M) = \text{depth } R$. Теперь положим $\text{depth } M = \text{depth } R$. Выберем R - и M -регулярную последовательность $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_{\text{depth } R})$. Так как в этом случае $\text{Tor}_i^R(R/(x), M) = 0$, имеем $\beta_i^R(M) = \beta_i^{R/(x)}(M/(x))$. Таким образом, утверждение свелось к случаю артинова кольца. Будем доказывать его по длине модуля M . Для поля вычетов k это классическое утверждение из [16]. Индукционный переход получается очевидным образом из точной последовательности $0 \rightarrow k \rightarrow M \rightarrow M/k \rightarrow 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Если R – полное пересечение, то $\text{PCI-dim}_R M < \infty$ для любого R -модуля M . И обратно, если $\text{PCI-dim}_R k < \infty$, то R – полное пересечение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – полное пересечение. Возьмем произвольный R -модуль M и построим для него резольвенту из модулей нулевой PCI -размерности. Положим $n = \text{depth } R - \text{depth } M$. Обозначим $\text{Syz}_n^R(M) = \text{coker } \delta_{n+1}$, где $(\mathbf{F}, \delta)$ – минимальная свободная резольвента M над R . Так как $\text{G-dim } M$ конечна из-за горнштейновости кольца R , $\text{G-dim}_R \text{Syz}_n^R(M) = 0$. При $i \gg 0$ имеем $\beta_i^R(\text{Syz}_n^R(M)) = \beta_{i+n}^R(M)$. Отсюда и из того, что числа Бетти любого модуля над полным пересечением ограничены полиномом (предложение 2.4), мы получаем, что $\text{PCI-dim}_R \text{Syz}_n^R(M) = 0$.

Если же $\text{PCI-dim}_R k < \infty$, то $\beta_i^R(k)$ ограничены полиномом, а значит, кольцо R – полное пересечение [17].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Имеет место неравенство $\text{PCI-dim}_R M \leq \text{CI-dim}_R M$, причем если $\text{CI-dim}_R M$ конечна, то достигается равенство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{CI-dim}_R M < \infty$ то согласно [6; теорема 1.4] имеет место $\text{G-dim}_R M < \infty$. Положим $n = \text{depth } R - \text{depth } M$. Обозначим $\text{Syz}_n^R(M) = \text{coker } \delta_{n+1}$, где $(\mathbf{F}, \delta)$ – минимальная свободная резольвента M над R . Из конечности $\text{G-dim } M$ следует $\text{G-dim}_R \text{Syz}_n^R(M) = 0$. При $i \gg 0$ имеем $\beta_i^R(\text{Syz}_n^R(M)) = \beta_{i+n}^R(M)$. Отсюда и из того, что числа Бетти любого модуля конечной CI -размерности ограничены полиномом [6; лемма 1.5], мы получаем, что

$$\text{PCI-dim}_R \text{Syz}_n^R(M) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Если $\text{PCI-dim } M < \infty$, то $\text{PCI-dim } M + \text{depth } M = \text{depth } R$.*

Доказательство очевидно, так как в этих предположениях

$$\text{PCI-dim } M = \text{G-dim } M,$$

а для G -размерности соответствующая формула верна.

Аналогичным способом для PCI-размерности можно доказать некоторые другие свойства, имеющие место для CI-размерности. Основным моментом здесь является тот факт, что если числа Бетти двух модулей в короткой точной последовательности ограничены полиномом, то это верно и для третьего модуля. Более того, из свойств G-размерности очевидно, что верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Если два модуля в короткой точной последовательности имеют конечную PCI-размерность, то и третий тоже обладает этим свойством.*

Однако неизвестно, обладает ли аналогичным свойством CI-размерность.

Как показывает предложение 2.6, класс модулей конечной PCI-размерности содержит класс модулей конечной CI-размерности, в связи с чем возникает такой вопрос: верно ли, что эти классы совпадают?

Отрицательный ответ на него дан О. Величе [18]. Было установлено следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9 [18]. *Пусть Q – кольцо, содержащее поле, $\text{depth } Q \geq 4$. Тогда существует совершенный идеал $I \subset Q$ такой, что $\text{grade } I = 4$, и над кольцом $R = Q/I$ существует модуль M , для которого*

$$0 = \text{PCI-dim}_R M < \text{CI-dim}_R M = \infty.$$

Докажем теперь, что локализация модуля конечной PCI-размерности снова обладает этим свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. *Для любых M и $\mathfrak{p}$ имеем $\beta_i^{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \beta_i^R(M)$. В частности, если правая часть ограничена полиномом от i , то и левая тоже обладает этим свойством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем минимальную свободную резольвенту M над R и умножим ее тензорно на $(R\text{-плоский})$ модуль $R_{\mathfrak{p}}$. Получившийся комплекс есть комплекс свободных $R_{\mathfrak{p}}$ модулей, являющийся прямой суммой минимальной резольвенты $M_{\mathfrak{p}}$ над $R_{\mathfrak{p}}$ и некоторого количества комплексов вида $0 \rightarrow R_{\mathfrak{p}} \rightarrow R_{\mathfrak{p}} \rightarrow 0$. Так как i -е число Бетти равно рангу i -го свободного модуля в минимальной резольвенте, предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. $\text{PCI-dim}_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \leq \text{PCI-dim}_R M$.

Доказательство с очевидностью следует из соответствующего свойства для G-размерности и предложения 2.10.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12 [11]. *Если R – полное пересечение, то $R_{\mathfrak{p}}$ – полное пересечение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если R – полное пересечение, то согласно предложению 2.4 $\beta_n^R(R/\mathfrak{p})$ ограничены полиномом. По предложению 2.10 $\beta_i^{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ тоже ограничены полиномом. Но $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ – поле вычетов кольца $R_{\mathfrak{p}}$, и из ограниченности его чисел Бетти полиномом следует [17], что $R_{\mathfrak{p}}$ – полное пересечение.

3. СМ-размерность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *G-квазидеформацией* кольца R называется диаграмма локальных гомоморфизмов $R \rightarrow R' \leftarrow Q$, где $R \rightarrow R'$ – плоское расширение, а $R' \leftarrow Q$ – *G-деформация*, т.е. гомоморфизм факторизации по *G*-совершенному идеалу I .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. $\text{СМ-dim}_R M = \inf \{ \text{G-dim}_Q(M \otimes_R R') - \text{G-dim}_Q R' : R \rightarrow R' \leftarrow Q \text{ — } G\text{-квазидеформация} \}$.

Докажем, что из конечности G_K -размерности модуля M относительно удобного модуля K [4] следует конечность его СМ-размерности.

Следующая конструкция в похожем контексте рассматривалась в [19] для случая, когда K – канонический модуль. Пусть K – удобный модуль над кольцом R . Зададим на R -модуле $S = R \oplus K$ умножение по формуле $(a_1, r_1) * (a_2, r_2) = (a_1 * a_2, a_1 * r_2 + a_2 * r_1)$. Очевидно, что таким образом на S вводится структура кольца. Заметим, что имеется сюръективный гомоморфизм колец φ из S в R , так что R можно рассматривать как S -модуль. Ядро этого гомоморфизма есть идеал K .

ЛЕММА 3.3. *R рефлексивен как S -модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{Hom}_R(K, K) = R$, имеем $\text{Ann}_R(K) = 0$, значит, $\text{Ann}_S(K) = K$. Отсюда $\text{Hom}_S(R, S) \simeq K$, так как единица кольца R должна переходить в элемент, аннулируемый идеалом K .

Аналогично, $\text{Hom}_S(K, S) \simeq R$. Таким образом, естественное отображение S -модулей $R \rightarrow R^{**}$ – изоморфизм.

ЛЕММА 3.4. $\text{Ext}_S^1(R, S) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем точную последовательность S -модулей: $0 \rightarrow K \rightarrow S \rightarrow R \rightarrow 0$. Достаточно доказать, что любой гомоморфизм из K в S продолжается до гомоморфизма из S в S . Так как образ любого гомоморфизма из K в S должен аннулировать идеалом K , то этот образ обязан принадлежать $\text{Ann}_S(K) = K$. Однако автоморфизмы модуля K суть в точности гомоморфизмы умножения на элементы из R . Теперь если наш гомоморфизм задается умножением на элемент x кольца R , то его можно продолжить на все S как гомоморфизм умножения на $(x, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Из точной последовательности S -модулей $0 \rightarrow K \rightarrow S \rightarrow R \rightarrow 0$ при $i > 0$ очевидным образом имеем изоморфизм

$$\text{Ext}_S^{i+1}(R, S) \simeq \text{Ext}_S^i(K, S).$$

ЛЕММА 3.6. $\text{G-dim}_S R = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. S -рефлексивность уже доказана, остается лишь убедиться в том, что $\text{Ext}_S^i(R, S) = 0$ и $\text{Ext}_S^i(R^*, S) \simeq \text{Ext}_S^i(K, S) = 0$ при $i > 0$. По замечанию 3.5 достаточно доказать, что при $i > 0$ $\text{Ext}_S^i(R, S) = 0$. Будем доказывать это индукцией по i . В качестве базы индукции примем утверждение леммы 3.4. Пусть известно, что $\text{Ext}_S^i(R, S) = 0$ при $0 < i \leq n$ (соответственно $\text{Ext}_S^i(K, S) = 0$ при $0 < i \leq n - 1$). Рассмотрим спектральную последовательность замены колец:

$$\text{E}_2^{pq} = \text{Ext}_R^p(K, \text{Ext}_S^q(R, S)) \Rightarrow \text{Ext}_S^{p+q}(K, S).$$

По предположению индукции имеем $E_2^{pq} = 0$ при $p+q = n, q > 0$. Однако $E_2^{n,0} = 0$, так как $\text{Ext}_R^n(K, K) = 0$ при $n > 0$. Отсюда получаем, что $\text{Ext}_S^n(K, S) = 0$, а значит, $\text{Ext}_S^{n+1}(R, S) = 0$.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть $G_K\text{-dim } M < \infty$ для некоторого удобного модуля K , тогда $\text{CM-dim } M < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим G -кваздеформацию $R \rightarrow R \leftarrow S$, где в качестве S берется кольцо $R \oplus K$, рассматривавшееся выше. По теореме 1.4 $G_K\text{-dim}_R M = G\text{-dim}_S M$.

Теперь можно дать еще одно определение CM -размерности, равносильное определению 3.2, но более удобное технически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2'. $\text{CM-dim}_R M = \inf\{G_K\text{-dim}_{R'}(M \otimes_R R') : R \rightarrow R' \text{ — плоское расширение, } K \text{ — удобный } R'\text{-модуль}\}$.

В частности, теперь очевидно, что $\text{CM-dim } M \geq 0$. Воспользуемся этим определением и докажем, что CM -размерность действительно характеризует кольца Коэна–Маколея.

ТЕОРЕМА 3.8. Если $\text{CM-dim}_R M < \infty$, то $\text{CM-dim}_R M + \text{depth } M = \text{depth } R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из соответствующего равенства для G -размерности:

$$\begin{aligned} \text{CM-dim}_R M &= G\text{-dim}_Q M' - G\text{-dim}_Q R' \\ &= (\text{depth } Q - \text{depth}_Q M') - (\text{depth } Q - \text{depth}_Q R') \\ &= \text{depth}_Q R' - \text{depth}_Q M' = \text{depth } R' - \text{depth}_{R'}(M \otimes_R R') \\ &= \text{depth } R - \text{depth } M. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3.9. Если кольцо R является кольцом Коэна–Маколея, то для любого R -модуля M $\text{CM-dim}_R M < \infty$. И обратно, если $\text{CM-dim}_R k < \infty$, то R — кольцо Коэна–Маколея.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если кольцо R является кольцом Коэна–Маколея, то его пополнение R' является факторкольцом регулярного кольца S по G -совершенному идеалу, и утверждение следует из того, что все модули над регулярным кольцом имеют конечную G - (даже проективную) размерность. В обратную сторону: пусть $\text{CM-dim}_R k < \infty$, $R \rightarrow R'$ — соответствующее плоское расширение, а K — удобный модуль. Пусть $(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{\text{depth } R})$ — максимальная R -регулярная последовательность. Тогда $\text{CM-dim}_{R/(\mathbf{x})} k < \infty$. Действительно, так как $R \rightarrow R'$ — плоское расширение, то $(\mathbf{x})$ является R' -регулярной последовательностью, $R/(\mathbf{x}) \rightarrow R'/(\mathbf{x})$ — тоже плоское расширение, а удобность $R'/(\mathbf{x})$ модуля $K/(\mathbf{x})K$ и равенство

$$G_{K/(\mathbf{x})K} \dim_{R'/(\mathbf{x})}(k \otimes R'/(\mathbf{x})) = G_K \text{-dim}_{R'}(k \otimes R') - \text{depth } R$$

следуют из теоремы 1.4. Таким образом, без ограничения общности $\text{depth } R = 0$. Докажем, что в этом случае R артиново. Если это не так, то для любого n идеал $\mathfrak{m}^n$ ненулевой. Для любого n имеем вложение $0 \rightarrow \text{Hom}(k, \mathfrak{m}^n) \rightarrow \text{Hom}(k, R)$.

Так как $\bigcap \mathfrak{m}^n = 0$, то при $n \gg 0$ имеем $\text{Hom}(k, \mathfrak{m}^n) = 0$, откуда $\text{depth } \mathfrak{m}^n \neq 0$. С другой стороны, для R -модулей M конечной длины индукцией по длине с использованием леммы 1.8 показывается, что $G_K\text{-dim}_{R'} M \otimes R' < \infty$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}^n \otimes_R R' \rightarrow R' \rightarrow R/\mathfrak{m}^n \otimes_R R' \rightarrow 0.$$

Так как длина модуля $R/\mathfrak{m}^n$ конечна, $G_K\text{-dim}_{R'} R/\mathfrak{m}^n \otimes R' < \infty$, и из леммы 1.8 получаем $G_K\text{-dim}_{R'} \mathfrak{m}^n \otimes_R R' < \infty$, а значит, $\text{CM-dim}_R \mathfrak{m}^n < \infty$. Получили противоречие с утверждением теоремы 3.8:

$$0 < \text{depth } \mathfrak{m}^n + \text{CM-dim}_R \mathfrak{m}^n = \text{depth } R = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. $\text{CM-dim}_{R_p} M_p \leq \text{CM-dim}_R M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно считать $\text{CM-dim}_R M$ конечной. Пусть $R \rightarrow R' \leftarrow Q$ — соответствующая G -квазидеформация. Так как $R \rightarrow R'$ — плоское расширение, то существует $\mathfrak{p}' \subset R'$ такой, что $R \cap \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{q} \subset Q$ — прообраз $\mathfrak{p}'$. Легко видеть, что диаграмма $R_p \rightarrow R'_{p'} \leftarrow Q_q$ является G -квазидеформацией. Имеем

$$\begin{aligned} G\text{-dim}_Q M \otimes_R R' &\geq G\text{-dim}_{Q_q} (M \otimes_R R')_q = G\text{-dim}_{Q_q} M_p \otimes_{R_p} R'_{p'}, \\ G\text{-dim}_Q R' &= G\text{-dim}_{Q_q} R'_{p'}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. Из теоремы 3.8 и утверждения 3.10 получаем, что для модулей M конечной CM -размерности и для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ выполнено следующее неравенство: $\text{depth } R - \text{depth } M \geq \text{depth } R_p - \text{depth } M_p$. Последнее условие на модуль M использовалось в [9], в частности, авторы указывают [9; замечание 5], что оно выполнено при $G\text{-dim } M < \infty$. Таким образом, получили некоторое расширение класса модулей, для которых заведомо выполнены условия [9; следствие 4].

Список литературы

1. *Peskine C., Szpiro L.* Dimension projective finie et cohomologie locale // Publ. Math. IHES. 1972. V. 42. P. 47–119.
2. *Auslander M., Bridger M.* Stable module theory // Mem. Amer. Math. Soc. 1969. V. 94.
3. *Foxby H.-B.* Gorenstein modules and related modules // Math. Scand. 1973. V. 31. P. 267–284.
4. *Голод Е. С.* G -размерность и обобщенные совершенные идеалы // Труды МИАН. 1984. Т. 165. С. 62–66.
5. *Avramov L. L.* Modules of finite virtual projective dimension // Invent. Math. 1989. V. 96. №1. P. 71–101.
6. *Avramov L. L., Gasharov V. N., Peeva I. V.* Complete intersection dimension // Publ. Math. IHES. 1997. V. 86. P. 67–114.
7. *Iyengar S.* Depth for complexes, and intersection theorems // Math. Z. 1999. V. 230. №3. P. 545–567.

8. *Araya T., Yoshino Y.* Remarks on a depth formula, a grade inequality and a conjecture of Auslander // *Comm. Algebra*. 1998. V. 26. №11. P. 3793–3806.
9. *Choi S., Iyengar S.* On a depth formula for modules over local rings // *Comm. Algebra*. (to appear).
10. *Christensen L. W.* Semi-dualizing complexes and their Auslander categories // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2001. V. 353. №5. P. 1839–1883.
11. *Абрамов Л. Л.* Плоские морфизмы плоских пересечений // *Докл. АН СССР*. 1975. Т. 225. С. 11–14.
12. *Sharp R. Y.* Dualizing complexes for commutative Noetherian rings // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1975. V. 78. P. 369–386.
13. *Bass H.* On the ubiquity of Gorenstein rings // *Math. Z.* 1963. V. 82. P. 8–28.
14. *Avramov L. L., Foxby H.-B.* Ring homomorphisms and finite Gorenstein dimension // *Proc. London Math. Soc.* (3). 1997. Ser. 75. №2. P. 241–270.
15. *Gulliksen T. H.* A change of the ring theorem, with applications to Poincaré series and intersection multiplicity // *Math. Scand.* 1974. V. 34. P. 167–183.
16. *Tate J.* Homology of noetherian rings and local rings // *Illinois J. Math.* 1957. V. 1. P. 14–25.
17. *Gulliksen T. H.* A homological characterization of local complete intersections // *Compositio Math.* 1971. V. 23. P. 251–255.
18. *Veliche O.* Construction of modules with finite homological dimension // <http://www.math.purdue.edu/~oveliche/Hdim.ps>.
19. *Абрамов Л. Л., Строгалов С. С., Тодоров А. Н.* Модули Горенштейна // *УМН*. 1972. Т. 27. №4. С. 199–200.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: gerko@mccme.ru

Поступила в редакцию
24.08.2000