Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Сокращение факториалов, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 8, 95–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:31:16

УДК 511.3+519.11+517.588

В. В. Зудилин

Сокращение факториалов

В работе изучается арифметическое свойство, позволяющее усиливать некоторые теоретико-числовые оценки. Известные ранее результаты носили, как правило, качественный характер. Приложение полученных в работе количественных результатов к классу обобщенных гипергеометрических G -функций расширяет множество иррациональных чисел, являющихся значениями этих функций.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Вынесенный в название статьи термин возник совсем недавно, хотя некоторые проявления эффекта “сокращения факториалов” стали уже классическими и в настоящее время относятся к разряду школьных задач.

ПРИМЕР 1. Оператор $D = d/dz$ дифференцирования по переменной z переводит кольцо многочленов $\mathbb{Z}[z]$ с целыми коэффициентами в себя; следовательно, этим же свойством обладают и операторы D^n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Как несложно показать (см., например, [1; гл. 4, лемма 7]), под действием операторов $D^n/n!$ кольцо $\mathbb{Z}[z]$ также переходит в себя:

$$\frac{1}{n!} D^n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} : \mathbb{Z}[z] \rightarrow \mathbb{Z}[z], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ПРИМЕР 2. Последовательность многочленов

$$\langle \lambda \rangle_0 = 1, \quad \langle \lambda \rangle_n = \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

содержится в кольце $\mathbb{Z}[\lambda]$; значит, при целых λ многочлены (1) принимают целые значения. На самом деле, этим свойством также обладают многочлены

$$\Delta_n(\lambda) = \frac{\langle \lambda \rangle_n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

(см., например, [2; отд. 8, гл. 2, задача 84]), не принадлежащие при $n \geq 2$ кольцу $\mathbb{Z}[\lambda]$. Многочлены (2) называются *целозначными*.

Пусть поле $\mathbb{K}$ – некоторое алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ – кольцо целых поля $\mathbb{K}$. Вместо кольца $\mathbb{Z}[z]$ в примере 1 можно рассматривать кольцо $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$:

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} : \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z] \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00181) и объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № IR-97-1904).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что оператор $D: \mathbb{K}[z] \rightarrow \mathbb{K}[z]$ удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $\Psi \geq 1$, если существует последовательность натуральных чисел $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$\psi_k \frac{D^n}{n!}: \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z] \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \psi_k^{1/k} \leq \Psi.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Для любого алгебраического расширения $\mathbb{K}$ поля $\mathbb{Q}$ оператор $d/dz: \mathbb{K}[z] \rightarrow \mathbb{K}[z]$ удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной 1.

Выбирая в примере 2 $\lambda = a/b \in \mathbb{Q}$, где $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$ взаимно просты, заметим, что общий знаменатель чисел

$$b^n \frac{\langle \lambda \rangle_n}{n!} = \frac{a(a-b)(a-2b) \cdots (a-(n-1)b)}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots, k, \quad (3)$$

равен $\prod_{p|b} p^{\tau_p(k)}$ (см. [1; гл. 1, лемма 8] или [3; гл. I, приложение]), где

$$\tau_p(k) = \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p^3} \right\rfloor + \cdots \leq \frac{k}{p-1} \quad (4)$$

— степень вхождения простого числа p в $k!$; здесь и далее $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть числа. Таким образом, общий знаменатель чисел (3) не превосходит $e^{k\chi(b)}$, где

$$\chi(b) = \sum_{p|b} \frac{\log p}{p-1}, \quad b \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

т.е. имеет геометрический порядок роста при $k \rightarrow \infty$.

Разумеется, в качестве области определения многочленов (1) можно рассматривать алгебраическое расширение $\mathbb{K}$ поля $\mathbb{Q}$ (или даже кольцо квадратных матриц с коэффициентами из $\mathbb{K}$, см. далее п. 4). Определим сразу знаменатель $\text{den } \lambda$ числа $\lambda \in \mathbb{K}$ как наименьшее натуральное b такое, что $b\lambda \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что элемент λ поля $\mathbb{K}$ удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $\Psi \geq 1$, если существует последовательность натуральных чисел $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$\psi_k \frac{\langle \lambda \rangle_n}{n!} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \psi_k^{1/k} \leq \Psi,$$

где символ $\langle \cdot \rangle_n$ определяется формулой (1).

Подытожим сказанное к примеру 2 в виде следующего утверждения.

ЛЕММА 2. Рациональное число λ удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $be^{\chi(b)}$, где $b = \text{den } \lambda$, а функция $\chi(\cdot)$ определяется формулой (5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Рациональность числа λ в лемме 2 существенна. Рассматривая поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\lambda)$ конечной степени $\varkappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \geq 2$ и полагая в основной лемме работы [4] $a_1 = -\lambda - 1$, $b_1 = 0$, $m = m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $\tau = 1 - 1/\varkappa$, $\varepsilon = 1/6$, получаем следующее утверждение: для любой последовательности натуральных чисел $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такой, что

$$\psi_k \frac{\langle \lambda \rangle_n}{n!} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N},$$

выполняется неравенство

$$\psi_k \geq C k^{(\tau - \varepsilon)\varkappa k} \geq C k^{2k/3}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

где положительная постоянная C зависит только от числа λ . Оценка (6) означает, что в случае иррационального λ рост общих знаменателей последовательности (2) при $k \rightarrow \infty$ по крайней мере факториальный и говорить о сокращении факториалов не имеет смысла.

2. История вопроса. Примеры, приведенные в п. 1, можно считать классическими. На самом деле, понятие *сокращение факториалов* появилось в статье А. И. Галочкина [5] и было связано с сокращением коэффициентов линейных приближающих форм (приближений Паде) для так называемых G -функций в методе Зигеля–Шидловского. Намек на это обстоятельство содержится в работе К. Зигеля [6], с которой и берет начало указанный метод. Во всех работах, связанных с применением метода Зигеля–Шидловского к классу G -функций и опубликованных до появления [5], были получены оценки линейных форм и многочленов от значений этих функций в рациональных точках, величина которых зависела от высоты рассматриваемых форм (см., например, [7]). И именно условие сокращения факториалов позволило получить для одного подкласса G -функций оценки модулей многочленов от их значений в точках, величина которых уже не зависела от высоты многочленов. В [5] была сформулирована теорема об эффективной оценке линейной формы от G -функций из одного класса, доказательство которой опубликовано в работе [8]. В статье [9] была вычислена постоянная, с которой происходит сокращение факториалов для гауссовой гипергеометрической функции, что позволило получить ряд результатов об иррациональности и линейной независимости значений этой функции и ее производной. Наконец, в 1985 г. Д. В. Чудновский и Г. В. Чудновский [10] доказали, что условие сокращения факториалов, сформулированное в [5], выполняется для однородных систем линейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют G -функции. В [3; гл. VI, § 4] несложное обобщение конструкции Чудновских позволило распространить это условие на неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений.

Несмотря на положительное решение проблемы сокращения факториалов для G -функций, постоянная, с которой происходит это сокращение, является достаточно грубой. Это обстоятельство связано с тем, что конструкция Чудновских использует неявные построения с помощью принципа Дирихле. В настоящей работе приводится новое решение указанной проблемы для обобщенных гипергеометрических G -функций, сформулированное в статье [11; § 12] в качестве гипотезы. Наше доказательство опирается на явные построения и поэтому дает более

точную оценку постоянной, с которой происходит сокращение факториалов. Теоретико-числовое применение полученного результата расширяет множество иррациональных чисел, являющихся значениями гипергеометрических G -функций.

Определим класс G -функций, имеющих рациональные коэффициенты в разложении Тейлора в окрестности нуля. Скажем, что *совокупность функций*

$$f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{jn} z^n, \quad j = 1, \dots, m, \quad f_{jn} \in \mathbb{Q}, \quad j = 1, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

принадлежит классу $\mathbf{G}(C, \Phi)$, если функции (7) аналитичны в круге $|z| < C$ и существует последовательность натуральных чисел $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$\varphi_k f_{jn} \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \varphi_k^{1/k} \leq \Phi.$$

Сформулируем теперь условие сокращения факториалов для систем линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} y_l = Q_{l0} + \sum_{j=1}^m Q_{lj} y_j, \quad l = 1, \dots, m, \quad (8)$$

$$Q_{lj} = Q_{lj}(z) \in \mathbb{Q}(z), \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m,$$

которым удовлетворяют G -функции (7).

Пусть многочлен $T(z) \in \mathbb{Q}[z]$ – знаменатель рациональных функций со старшим коэффициентом, равным 1:

$$T(z) Q_{lj}(z) \in \mathbb{Q}[z], \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m. \quad (9)$$

Из (8) следует, что для производных порядка n , $n = 1, 2, \dots$, имеют место соотношения

$$\frac{d^n}{dz^n} y_l = Q_{l0}^{[n]} + \sum_{j=1}^m Q_{lj}^{[n]} y_j, \quad l = 1, \dots, m, \quad (10)$$

$$Q_{lj}^{[n]} = Q_{lj}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}(z), \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m.$$

Несложные выкладки показывают справедливость следующих рекуррентных соотношений:

$$Q_{lj}^{[n]}(z) = \frac{d}{dz} Q_{lj}^{[n-1]}(z) + \sum_{r=1}^m Q_{lr}^{[n-1]}(z) Q_{rj}(z), \quad (11)$$

$$l = 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad n = 1, 2, \dots;$$

поэтому

$$\begin{aligned} T^n(z) Q_{lj}^{[n]}(z) &= T(z) \frac{d}{dz} (T^{n-1}(z) Q_{lj}^{[n-1]}(z)) - (n-1) T'(z) \cdot T^{n-1}(z) Q_{lj}^{[n-1]}(z) \\ &\quad + \sum_{r=1}^m T^{n-1}(z) Q_{lr}^{[n-1]}(z) \cdot T(z) Q_{rj}(z), \\ &l = 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$T^n(z) Q_{lj}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}[z], \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m, \quad n = 1, 2, \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что *система линейных дифференциальных уравнений (8) удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $\Psi \geq 1$* , если существуют натуральные числа $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такие, что

$$\psi_k \frac{T^n(z) Q_{lj}^{[n]}(z)}{n!} \in \mathbb{Z}[z], \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m, \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \psi_k^{1/k} \leq \Psi.$$

Условие сокращения факториалов для системы (8) выполняется, вообще говоря, только если ей удовлетворяет набор линейно независимых над $\mathbb{C}(z)$ G -функций. Подобные системы относятся к классу систем дифференциальных уравнений фуксовского типа. С точностью до мероморфного преобразования пространства решений матрица коэффициентов $Q(z) = (Q_{lj}(z))_{l,j}$ системы (8) фуксовского типа имеет вид

$$Q(z) = \frac{1}{z - \gamma_1} A_1 + \dots + \frac{1}{z - \gamma_s} A_s, \quad (12)$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ – регулярные особенности системы (8), $A_1, \dots, A_s$ – числовые матрицы (см. [12; замечание к §2.4]). В случае (12) знаменатель соответствующей системы (8) равен $T(z) = (z - \gamma_1) \dots (z - \gamma_s)$.

3. Сокращение факториалов для дифференциальных операторов. В этом пункте мы исследуем одно обобщение оператора дифференцирования d/dz , для которого также выполнено условие сокращения факториалов.

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D = \frac{d}{dz} + \frac{\lambda}{z}, \quad \lambda \in \mathbb{Q}. \quad (13)$$

Оператор $T(z)D$, где $T(z) = z$, переводит кольцо $\mathbb{K}[z]$ в себя, в то время как сам оператор D отображает $\mathbb{K}[z]$ в $\mathbb{K}(z)$. Поэтому мы несколько расширим область действия определения 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1'. *Знаменателем* произвольного (не обязательно линейного) дифференциального оператора $D: \mathbb{K}(z) \rightarrow \mathbb{K}(z)$ мы назовем нетривиальный многочлен $T(z) \in \mathbb{K}[z]$ наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным 1, для которого $T(z)D: \mathbb{K}[z] \rightarrow \mathbb{K}[z]$. Будем говорить, что *оператор D удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $\Psi \geq 1$* , если существует последовательность натуральных чисел $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$\psi_k \frac{T^n(z) D^n}{n!}: \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z] \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \psi_k^{1/k} \leq \Psi.$$

ЛЕММА 3. Для дифференциального оператора (13) справедливы тождества

$$D^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\langle \lambda \rangle_l}{z^l} \frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

где символ $\langle \cdot \rangle_l$ определяется формулой (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ формула (14) совпадает с определением (13) оператора D . Полагая, что формула (14) справедлива для некоторого натурального n , имеем

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= \left(\frac{d}{dz} + \frac{\lambda}{z} \right) D^n = \frac{d}{dz} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\langle \lambda \rangle_l}{z^l} \frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}} + \frac{\lambda}{z} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\langle \lambda \rangle_l}{z^l} \frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}} \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\langle \lambda \rangle_l}{z^l} \frac{d^{n-l+1}}{dz^{n-l+1}} - \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{l \cdot \langle \lambda \rangle_l}{z^{l+1}} \frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}} + \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\lambda \cdot \langle \lambda \rangle_l}{z^{l+1}} \frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}} \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\langle \lambda \rangle_l}{z^l} \frac{d^{n+1-l}}{dz^{n+1-l}} + \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\langle \lambda \rangle_{l+1}}{z^{l+1}} \frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}} \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{\langle \lambda \rangle_l}{z^l} \frac{d^{n+1-l}}{dz^{n+1-l}} + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} \frac{\langle \lambda \rangle_l}{z^l} \frac{d^{n+1-l}}{dz^{n+1-l}} \\ &= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} \frac{\langle \lambda \rangle_l}{z^l} \frac{d^{n+1-l}}{dz^{n+1-l}}. \end{aligned}$$

Тем самым, формула (14) справедлива и для $n + 1$. Согласно принципу математической индукции она верна для всех натуральных n . Лемма доказана.

Пользуясь определением биномиальных коэффициентов, из леммы 3 получаем тождество

$$z^n \frac{D^n}{n!} = \sum_{l=0}^n z^{n-l} \cdot \frac{\langle \lambda \rangle_l}{l!} \cdot \frac{1}{(n-l)!} \frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Применяя теперь условия сокращения факториалов для оператора d/dz (лемма 1) и рационального числа λ (лемма 2), получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Дифференциальный оператор (13) удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $be^{\chi(b)}$, где $b = \text{den } \lambda$, а функция $\chi(\cdot)$ определяется формулой (5).

Лемма 3 легко обобщается на случай дифференциального оператора

$$D = \frac{d}{dz} + \frac{\lambda_1}{z - \gamma_1} + \cdots + \frac{\lambda_s}{z - \gamma_s}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_s, \gamma_1, \dots, \gamma_s \in \mathbb{Q}, \quad (15)$$

со знаменателем $T(z) = (z - \gamma_1) \cdots (z - \gamma_s)$. Укажем соответствующие тождества без доказательства.

ЛЕММА 4. Для дифференциального оператора (15) справедливы тождества

$$D^n = \sum_{\substack{n_0, n_1, \dots, n_s \geq 0 \\ n_0 + n_1 + \dots + n_s = n}} \frac{n!}{n_0! n_1! \dots n_s!} \frac{\langle \lambda_1 \rangle_{n_1}}{(z - \gamma_1)^{n_1}} \dots \frac{\langle \lambda_s \rangle_{n_s}}{(z - \gamma_s)^{n_s}} \frac{d^{n_0}}{dz^{n_0}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Согласно лемме 4 выполнено

$$\begin{aligned} \frac{T^n(z)D^n}{n!} &= \sum_{\substack{n_0, n_1, \dots, n_s \geq 0 \\ n_0 + n_1 + \dots + n_s = n}} (z - \gamma_1)^{n-n_1} \dots (z - \gamma_s)^{n-n_s} \\ &\quad \times \frac{\langle \lambda_1 \rangle_{n_1}}{n_1!} \dots \frac{\langle \lambda_s \rangle_{n_s}}{n_s!} \cdot \frac{1}{n_0!} \frac{d^{n_0}}{dz^{n_0}}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

а значит, дифференциальный оператор (15) также удовлетворяет условию сокращения факториалов.

ТЕОРЕМА 2. Дифференциальный оператор (15) удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $qbe^{\chi(b)}$, где q – произведение знаменателей чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, $b = \text{den}(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ – наименьший общий знаменатель чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, а функция $\chi(\cdot)$ определяется формулой (5).

4. Сокращение факториалов для квадратных матриц. Числовую квадратную матрицу A размера m можно подставить в любой многочлен; в частности,

$$\langle A \rangle_0 = E, \quad \langle A \rangle_n = A(A - E) \dots (A - (n-1)E), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где E – единичная матрица размера m . Если все элементы матрицы A принадлежат алгебраическому расширению $\mathbb{K}$ поля $\mathbb{Q}$, то вполне естественным является следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2'. Скажем, что матрица A с элементами из $\mathbb{K}$ удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $\Psi \geq 1$, если существуют натуральные числа $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такие, что элементы матриц

$$\psi_k \frac{\langle A \rangle_n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N},$$

принадлежат $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ и

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \psi_k^{1/k} \leq \Psi.$$

ЛЕММА 5. Если матрица A удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной Ψ , то тем же свойством обладает матрица GAT^{-1} , где G – произвольная невырожденная матрица, элементы которой – алгебраические числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на применении элементарного тождества

$$(TAT^{-1})^n = TA^nT^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда, в частности, следует, что

$$\frac{\langle TAT^{-1} \rangle_n}{n!} = T \frac{\langle A \rangle_n}{n!} T^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Если t_1, t_2 – наименьшие общие знаменатели элементов матриц T, T^{-1} соответственно, а $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательность из определения 2' для матрицы A , то в качестве соответствующей последовательности для матрицы TAT^{-1} можно взять $\{t_1 t_2 \psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Осталось заметить, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (t_1 t_2 \psi_k)^{1/k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \psi_k^{1/k}.$$

Лемма доказана.

Из леммы 5 следует, что сокращение факториалов и вычисление постоянной, с которой оно происходит, достаточно доказать для матрицы, имеющей жорданову нормальную форму.

ЛЕММА 6. Пусть матрица A состоит из жордановых клеток $A_1, \dots, A_s$, расположенных вдоль главной диагонали и отвечающих (не обязательно различным) собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ соответственно. Тогда матрица $\Delta_n(A) = \langle A \rangle_n / n!$ состоит только из клеток $\Delta_n(A_1), \dots, \Delta_n(A_s)$, расположенных вдоль главной диагонали, причем

$$\Delta_n(A_l) = \begin{pmatrix} \Delta_n(\lambda_j) & \frac{1}{1!} \Delta_n^{(1)}(\lambda_j) & \frac{1}{2!} \Delta_n^{(2)}(\lambda_j) & \frac{1}{3!} \Delta_n^{(3)}(\lambda_j) & \dots \\ 0 & \Delta_n(\lambda_j) & \frac{1}{1!} \Delta_n^{(1)}(\lambda_j) & \frac{1}{2!} \Delta_n^{(2)}(\lambda_j) & \dots \\ 0 & 0 & \Delta_n(\lambda_j) & \frac{1}{1!} \Delta_n^{(1)}(\lambda_j) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta_n(\lambda_j) \end{pmatrix},$$

$$l = 1, \dots, s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение хорошо известно. Более того, оно остается верным, если заменить многочлен $\Delta_n(\cdot)$ на любую другую функцию аналитическую в круге $|z| < C$, содержащем собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (см., например, [13; гл. 5, §1, пример 2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как следует из леммы 6, на главной диагонали матрицы $\Delta_n(A)$ стоят числа $\Delta_n(\lambda_1), \dots, \Delta_n(\lambda_s)$; в соответствии с замечанием к лемме 2 о сокращении факториалов для матрицы A можно говорить лишь в случае рациональных $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением *рациональных квадратных матриц*, собственные значения которых рациональны. *Знаменателем* $\text{den } A$ рациональной матрицы A назовем наименьший общий знаменатель ее собственных значений. При этом матрица bA не обязательно имеет целочисленные элементы; примером служит матрица

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

знаменатель которой равен 1 (ее собственные значения 0, 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для каждого собственного значения λ_l рациональной матрицы A определим натуральное число r_l как максимальный размер жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ_l , в нормальной форме матрицы A . Отметим, что

$$(\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_j \leq \lambda_l, \quad j \neq l, \quad (17)$$

называется *минимальным многочленом* матрицы A ; он делит любой многочлен $P(\lambda)$ такой, что $P(A) = 0$. В частности, согласно теореме Гамильтона–Кэли минимальный многочлен делит характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$ матрицы A . Кроме того, если tA – матрица, транспонированная к матрице A , то минимальные (характеристические) многочлены матриц tA и A совпадают.

ЛЕММА 7. Пусть $\lambda \in \mathbb{Q}$, $b = \text{den } \lambda \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}$. Тогда наименьший общий знаменатель ψ_k , $k \in \mathbb{N}$, чисел

$$\frac{\Delta_n^{(j)}(\lambda)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots, r-1, \quad n = 0, 1, \dots, k,$$

делит

$$b^k d_k^{r-1} \prod_{p|b} p^{\tau_p(k)},$$

где d_k – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, k$, а $\tau_p(k)$ – степень вхождения простого числа p в $k!$ (см. (4)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в теореме работы [14] $L = H = k$, $Q = b$, $x = -b\lambda$, $M = r-1$, $\Lambda = 1$, получаем требуемое.

Из леммы 7 непосредственно следует

ЛЕММА 8. Пусть $b = \text{den}(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ – наименьший общий знаменатель чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{Q}$; $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}$, $r = \max_l \{r_l\}$. Тогда наименьший общий знаменатель ψ_k , $k \in \mathbb{N}$, чисел

$$\frac{\Delta_n^{(j)}(\lambda_l)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots, r_l-1, \quad l = 1, \dots, s, \quad n = 0, 1, \dots, k,$$

делит

$$b^k d_k^{r-1} \prod_{p|b} p^{\tau_p(k)},$$

где d_k – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, k$, а $\tau_p(k)$ – степень вхождения простого числа p в $k!$.

Объединяя результаты лемм 5, 6 и 8, получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 9. Пусть (17) – минимальный многочлен рациональной матрицы A ; $r = \max_l \{r_l\}$; $b = \text{den } A$; t_1, t_2 – наименьшие общие знаменатели элементов матриц T, T^{-1} соответственно, где T – матрица перехода от A к ее жордановой нормальной форме. Тогда наименьший общий знаменатель ψ_k , $k \in \mathbb{N}$, элементов матриц

$$\Delta_n(A), \quad n = 0, 1, \dots, k,$$

делит

$$t_1 t_2 b^k d_k^{r-1} \prod_{p|b} p^{\tau_p(k)},$$

где d_k – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, k$, а $\tau_p(k)$ – степень вхождения простого числа p в $k!$.

С учетом предельных соотношений

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} d_k^{1/k} = e, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{p|b} p^{\tau_p(k)} \right)^{1/k} = e^{\chi(b)} \quad (18)$$

и замечания 2 к лемме 6 получаем следующее окончательное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть многочлен

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{Q}, \quad \lambda_j \neq \lambda_l, \quad j \neq l, \quad (19)$$

аннулирует матрицу A (например, $P(\lambda)$ – минимальный или характеристический многочлен); b – наименьший общий знаменатель чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (знаменатель матрицы A); $r = \max_l \{r_l\}$ – максимальная кратность корней многочлена (19). Тогда матрица A удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $b e^{\chi(b)+r-1}$, где функция $\chi(\cdot)$ определяется формулой (5).

5. Сокращение факториалов для систем дифференциальных уравнений фуксовского типа. Вернемся к вопросу, обсуждавшемуся в п. 2.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений (8) фуксовского типа и соответствующие системы (10) для производных порядка n , $n = 1, 2, \dots$; многочлен $T(z) = (z - \gamma_1) \dots (z - \gamma_s)$ выберем в соответствии с (9). Дополним матрицы неоднородных систем до квадратных нулевыми строками:

$$Q(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q_{10}(z) & Q_{11}(z) & \dots & Q_{1m}(z) \\ Q_{20}(z) & Q_{21}(z) & \dots & Q_{2m}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{m0}(z) & Q_{m1}(z) & \dots & Q_{mm}(z) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$Q^{[n]}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ Q_{10}^{[n]}(z) & Q_{11}^{[n]}(z) & \dots & Q_{1m}^{[n]}(z) \\ Q_{20}^{[n]}(z) & Q_{21}^{[n]}(z) & \dots & Q_{2m}^{[n]}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{m0}^{[n]}(z) & Q_{m1}^{[n]}(z) & \dots & Q_{mm}^{[n]}(z) \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и перепишем рекуррентные соотношения (11) в матричном виде:

$$Q^{[n]}(z) = \frac{d}{dz}Q^{[n-1]}(z) + Q^{[n-1]}(z)Q(z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда

$$\begin{aligned} {}^tQ^{[n]}(z) &= \frac{d}{dz} {}^tQ^{[n-1]}(z) + {}^tQ(z) {}^tQ^{[n-1]}(z) = \left(\frac{d}{dz} + {}^tQ(z) \right) {}^tQ^{[n-1]}(z) \\ &= \left(\frac{d}{dz} + {}^tQ(z) \right)^n E, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

где E — единичная матрица размера $m+1$.

Используя разложение (12), рассмотрим дифференциальный оператор

$$D = \frac{d}{dz} + \frac{1}{z - \gamma_1} {}^tA_1 + \dots + \frac{1}{z - \gamma_s} {}^tA_s, \quad (22)$$

где $A_1, \dots, A_s$ — рациональные матрицы. Определим условие сокращения факториалов для оператора (22), заменяя кольцо $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ на $(\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z])^{(m+1) \times (m+1)}$ в определении 1'.

ЛЕММА 10. *Если оператор (22) удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной Ψ , то система дифференциальных уравнений (8) также удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной Ψ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно соотношениям (21) выполнено

$${}^tQ^{[n]}(z) = D^n E, \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Если $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность из определения сокращения факториалов для оператора D , то из (23) следует, что матрицы

$$\psi_k \frac{T^n(z) {}^tQ^{[n]}(z)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N},$$

имеют целочисленные элементы. Отсюда получаем утверждение леммы.

К сожалению, лемма 4 неприменима к дифференциальному оператору (22) для произвольных матриц $A_1, \dots, A_s$; тождества

$$\begin{aligned} \frac{T^n(z) D^n}{n!} &= \sum_{\substack{n_0, n_1, \dots, n_s \geq 0 \\ n_0 + n_1 + \dots + n_s = n}} (z - \gamma_1)^{n-n_1} \dots (z - \gamma_s)^{n-n_s} \\ &\quad \times \frac{\langle {}^tA_1 \rangle_{n_1}}{n_1!} \dots \frac{\langle {}^tA_s \rangle_{n_s}}{n_s!} \cdot \frac{1}{n_0!} \frac{d^{n_0}}{dz^{n_0}}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (24)$$

справедливы только в случае *попарно коммутирующих* матриц $A_1, \dots, A_s$.

Учитывая (24), лемму 9 и оценки (18), получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $s = 1$ или матрицы $A_1, \dots, A_s$ попарно коммутируют в случае $s \geq 2$; $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{Q}$ – собственные значения рациональных матриц $A_1, \dots, A_s$; $b = \text{den}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$; $r_{jl} \geq 0$, $j = 1, \dots, p$, $l = 1, \dots, s$, – кратность собственного значения λ_j в минимальном (характеристическом) многочлене матрицы A_l ; $r = \max_{j,l} \{r_{jl}\}$ – максимальная кратность собственных значений. Тогда оператор (22) удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $be^{\chi(b)+r-1}$, где функция $\chi(\cdot)$ определена формулой (5).

Согласно лемме 10 из теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть матрица (20) системы линейных дифференциальных уравнений (8) имеет вид (12), где $A_1, \dots, A_s$ – рациональные попарно коммутирующие матрицы. Обозначим через b наименьший общий знаменатель собственных значений матриц $A_1, \dots, A_s$, через r максимальную кратность этих собственных значений в минимальных (характеристических) многочленах данных рациональных матриц. Тогда система (8) удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $be^{\chi(b)+r-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае рациональных, но не коммутирующих попарно матриц $A_1, \dots, A_s$ вопрос о вычислении постоянной, с которой происходит сокращение факториалов для дифференциального оператора (22), остается открытым. Чтобы получить обобщение тождеств (16) для оператора

$$D = \frac{d}{dz} + \frac{A_1}{z - \gamma_1} + \dots + \frac{A_s}{z - \gamma_s} \quad (25)$$

определим матрицы $\langle A_1, \dots, A_s \rangle_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_s)$, по индукции, полагая

$$\langle A_1, A_2, \dots, A_s \rangle_{n_1, n_2, \dots, n_s} = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{n} \notin (\mathbb{Z}_+)^s, \\ E, & \text{если } \mathbf{n} = \mathbf{0}, \\ (A_1 - n_1 + 1) \langle A_1, A_2, \dots, A_s \rangle_{n_1-1, n_2, \dots, n_s} \\ \quad + (A_2 - n_2 + 1) \langle A_1, A_2, \dots, A_s \rangle_{n_1, n_2-1, \dots, n_s} + \dots \\ \quad + (A_s - n_s + 1) \langle A_1, A_2, \dots, A_s \rangle_{n_1, n_2, \dots, n_s-1}, & \text{если } \mathbf{n} \in (\mathbb{Z}_+)^s. \end{cases}$$

Если матрицы $A_1, \dots, A_s$ попарно коммутируют, то

$$\langle A_1, \dots, A_s \rangle_{n_1, \dots, n_s} = \frac{(n_1 + \dots + n_s)!}{n_1! \dots n_s!} \cdot \langle A_1 \rangle_{n_1} \dots \langle A_s \rangle_{n_s}, \quad (26)$$

$$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_s) \in (\mathbb{Z}_+)^s.$$

Индукцией по k несложно доказать тождества

$$\langle A_1 + \dots + A_s \rangle_k = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in (\mathbb{Z}_+)^s \\ |\mathbf{n}|=k}} \langle A_1, \dots, A_s \rangle_{\mathbf{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $|\mathbf{n}| = n_1 + \dots + n_s$, и

$$D^k = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \left(\sum_{\substack{\mathbf{n} \in (\mathbb{Z}_+)^s \\ |\mathbf{n}|=k-l}} \frac{\langle A_1, \dots, A_s \rangle_{\mathbf{n}}}{(z - \gamma_1)^{n_1} \dots (z - \gamma_s)^{n_s}} \right) \frac{d^l}{dz^l}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

для дифференциального оператора (25). В частности,

$$D^k E = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in (\mathbb{Z}_+)^s \\ |\mathbf{n}|=k}} \frac{\langle A_1, \dots, A_s \rangle_{\mathbf{n}}}{(z - \gamma_1)^{n_1} \dots (z - \gamma_s)^{n_s}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

6. Приложение к обобщенным гипергеометрическим функциям. Обобщенная гипергеометрическая функция

$$f(z) = F \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_m \\ \beta_1 + 1, \dots, \beta_m + 1 \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle -\alpha_1 \rangle_n \dots \langle -\alpha_m \rangle_n}{\langle -\beta_1 - 1 \rangle_n \dots \langle -\beta_m - 1 \rangle_n} z^n, \quad (28)$$

$$\beta_1, \dots, \beta_m \notin \{-1, -2, \dots\},$$

удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению [15; гл. 5, §1, лемма 1 при $t = 1$]

$$((\delta + \beta_1) \dots (\delta + \beta_m) - z(\delta + \alpha_1) \dots (\delta + \alpha_m))y = \beta_1 \dots \beta_m, \quad \delta = z \frac{d}{dz},$$

порядка m .

Для функций

$$f_1(z) = f(z), \quad f_2(z) = \delta f_1(z), \quad \dots, \quad f_m(z) = \delta f_{m-1}(z) \quad (29)$$

получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} y_l &= \frac{1}{z} y_{l+1}, \quad l = 1, \dots, m-1, \\ \frac{d}{dz} y_m &= \frac{\sigma_1(\beta) - z\sigma_1(\alpha)}{z(z-1)} y_m + \frac{\sigma_2(\beta) - z\sigma_2(\alpha)}{z(z-1)} y_{m-1} + \dots \\ &\quad + \frac{\sigma_m(\beta) - z\sigma_m(\alpha)}{z(z-1)} y_1 - \frac{\sigma_m(\beta)}{z(z-1)}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\sigma_l(\cdot)$, $l = 1, \dots, m$, — симметрические многочлены Виета степени l , т.е.

$$\begin{aligned} (z + \alpha_1)(z + \alpha_2) \dots (z + \alpha_m) &= z^m + \sigma_1(\alpha) z^{m-1} + \dots + \sigma_{m-1}(\alpha) z + \sigma_m(\alpha), \\ (z + \beta_1)(z + \beta_2) \dots (z + \beta_m) &= z^m + \sigma_1(\beta) z^{m-1} + \dots + \sigma_{m-1}(\beta) z + \sigma_m(\beta). \end{aligned} \quad (31)$$

С учетом

$$\frac{\sigma_l(\beta) - z\sigma_l(\alpha)}{z(z-1)} = \frac{\sigma_l(\beta) - \sigma_l(\alpha)}{z-1} - \frac{\sigma_l(\beta)}{z}, \quad l = 1, \dots, m,$$

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

перепишем систему дифференциальных уравнений (30) в матричном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{pmatrix} &= \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \sigma_m(\beta) \end{pmatrix} + \frac{1}{z-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\sigma_m(\beta) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\sigma_m(\beta) & -\sigma_{m-1}(\beta) & \dots & -\sigma_2(\beta) & -\sigma_1(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{z-1} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_m(\beta) - \sigma_m(\alpha) & \dots & \sigma_2(\beta) - \sigma_2(\alpha) & \sigma_1(\beta) - \sigma_1(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (32)$$

Теорема 5 к системе (32) неприменима, так как отвечающие регулярным особенностям $z = 0$ и $z = 1$ матрицы не коммутируют. Но мы и не ставим цели *сократить факториалы* для системы (32). Точное вычисление постоянной, с которой происходит сокращение факториалов для гипергеометрического дифференциального уравнения, после работы [10] стало неактуальным: использование приближений Паде второго рода (вместо первого) в качестве приближающих функциональных форм дает возможность сокращать факториалы без дополнительных усилий (см. [10] и [16]). Наша цель – посчитать постоянную, с которой происходит сокращение факториалов для системы линейных дифференциальных уравнений, сопряженной к однородной части системы (30); это даст возможность воспользоваться основной теоремой из [17] и получить оценки меры иррациональности значений гипергеометрической функции (28) (без последовательных производных) в рациональных точках.

Сопряженная система для общего случая (8) получается транспонированием и сменой знака матрицы $(Q_{lj}(z))_{l,j=1,\dots,m}$; в нашем случае сопряженная система имеет вид

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{z} A_1 + \frac{1}{z-1} A_2 \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_m(\beta) \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{m-1}(\beta) \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \sigma_{m-2}(\beta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \sigma_2(\beta) \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \sigma_1(\beta) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \sigma_m(\alpha) - \sigma_m(\beta) \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{m-1}(\alpha) - \sigma_{m-1}(\beta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_2(\alpha) - \sigma_2(\beta) \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_1(\alpha) - \sigma_1(\beta) \end{pmatrix}.$$

Первые $m-1$ столбцов матрицы A_2 нулевые, т.е. ранг этой матрицы равен $m-1$. Следовательно, $m-1$ собственных значений $\lambda = 0$ матрицы A_2 входят с кратностью 1 в минимальный многочлен. Оставшееся собственное значение совпадает со следом матрицы A_2 и равно $\gamma = \sigma_1(\alpha) - \sigma_1(\beta) = \alpha_1 + \dots + \alpha_m - \beta_1 - \dots - \beta_m$.

Матрица A_1 с точностью до знака является *клеткой Фробениуса* (см. [13; гл. 6, § 6]); ее характеристический многочлен равен

$$\begin{aligned} \det(A_1 - \lambda E) &= (-1)^m (\lambda^m - \sigma_1 \lambda^{m-1} + \sigma_2 \lambda^{m-2} + \dots + (-1)^m \sigma_m) \\ &= (-1)^m (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2) \dots (\lambda - \beta_m). \end{aligned}$$

Поэтому собственные значения матрицы A_1 равны $\beta_1, \dots, \beta_m$.

ЛЕММА 11. Пусть параметры $\beta_1, \dots, \beta_m$ попарно различны и $\gamma \neq 0$, b — наименьший общий знаменатель чисел $\gamma, \beta_1, \dots, \beta_m$. Тогда система (33) удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $b\epsilon^{\chi(b)+2}$, где функция $\chi(\cdot)$ определяется формулой (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственному значению β_j матрицы A_1 отвечает собственный вектор

$$\begin{pmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \dots \\ t_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{m-1}(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_m) \\ \sigma_{m-2}(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_m) \\ \dots \\ \sigma_1(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_m) \\ \sigma_0(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_m) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $\sigma_l(\cdot)$ — коэффициент при z^{m-1-l} в многочлене

$$(z + \beta_1) \dots (z + \beta_{j-1})(z + \beta_{j+1}) \dots (z + \beta_m).$$

Для матрицы перехода $T = (t_{lj})_{l,j=1,\dots,m}$ положим $\tilde{T} = T^{-1} = (\tilde{t}_{lj})_{l,j=1,\dots,m}$. Тогда

$$\tilde{t}_{lj} = (-1)^{m+j} \beta_l^{j-1} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m \frac{1}{\beta_l - \beta_k}, \quad l, j = 1, \dots, m,$$

матрица $\tilde{A}_1 = T^{-1}A_1T$ диагональная, $\tilde{A}_1 = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_m)$, а матрица $\tilde{A}_2 = T^{-1}A_2T$ имеет вид

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} (1 \dots 1), \quad a_j = -(\beta_j - \alpha_j) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{\beta_j - \alpha_k}{\beta_j - \beta_k}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Запишем матрицы $Q^{[n]}(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, из определения 3 для системы дифференциальных уравнений (33). Согласно (23) и (27) имеем

$$\begin{aligned} {}^tQ^{[n]}(z) &= \left(\frac{d}{dz} + \frac{1}{z} {}^tA_1 + \frac{1}{z-1} {}^tA_2 \right)^n E \\ &= \sum_{\substack{n_1, n_2 \geq 0 \\ n_1 + n_2 = n}} \frac{\langle {}^tA_1, {}^tA_2 \rangle_{n_1, n_2}}{z^{n_1} (z-1)^{n_2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\langle {}^tA_1, {}^tA_2 \rangle_{n_1, n_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n_1 < 0 \text{ или } n_2 < 0, \\ E, & \text{если } n_1 = n_2 = 0, \\ ({}^tA_1 - n_1 + 1) \langle {}^tA_1, {}^tA_2 \rangle_{n_1-1, n_2} \\ + ({}^tA_2 - n_2 + 1) \langle {}^tA_1, {}^tA_2 \rangle_{n_1, n_2-1} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(см. замечание к теореме 5). Отметим также, что разложения в сумму простейших

$$\frac{1}{z^{n_1+1}(1-z)^{n_2+1}} = \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1+n_2-k}{n_2} \frac{1}{z^{k+1}} + \sum_{k=0}^{n_2} \binom{n_1+n_2-k}{n_1} \frac{1}{(1-z)^{k+1}}, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad (35)$$

и перегруппировка слагаемых в тождествах (34) не позволяют вычислить постоянную, с которой происходит сокращение факториалов для системы (33), ввиду некоммутативности матриц ${}^tA_1, {}^tA_2$.

Полагая

$$B_1 = {}^t\tilde{A}_1 = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_m), \quad B_2 = {}^t\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} (a_1 \dots a_m),$$

из (34) получаем

$${}^t(T^{-1}Q^{[n]}(z)T) = \sum_{\substack{n_1, n_2 \geq 0 \\ n_1 + n_2 = n}} \frac{\langle B_1, B_2 \rangle_{n_1, n_2}}{z^{n_1} (z-1)^{n_2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

Зафиксируем теперь пару целых неотрицательных n_1, n_2 . В случае $n_2 = 0$ знаменатель матрицы

$$\frac{\langle B_1, B_2 \rangle_{n_1, n_2}}{(n_1 + n_2)!} = \frac{\langle B_1 \rangle_{n_1}}{n_1!}$$

согласно лемме 9 делит $b_0^k \prod_{p|b_0} p^{\tau_p(k)}$ для любого $k \geq n_1 = n_1 + n_2$; здесь $b_0 = \text{den}(\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Пусть, далее, $n_2 > 0$. Согласно рекуррентным соотношениям для $\langle B_1, B_2 \rangle_{n_1, n_2}$ (и формуле (26) в случае, когда матрицы коммутируют) заключаем, что матрица $\langle B_1, B_2 \rangle_{n_1, n_2}$ представляет собой сумму $N = (n_1 + n_2)! / (n_1! n_2!)$ слагаемых, каждое из которых с точностью до порядка множителей совпадает с $\langle B_1 \rangle_{n_1} \langle B_2 \rangle_{n_2}$:

$$\langle B_1, B_2 \rangle_{n_1, n_2} = \sum_{r=1}^N B^{(r)}. \quad (37)$$

Сразу отметим, что если хотя бы одна из квадратных матриц X_1 и X_2 диагональна, то главные диагонали матриц $X_1 X_2$ и $X_2 X_1$ совпадают. Поскольку матрицы $B_1 - lE$, $l = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, диагональны, главная диагональ каждого слагаемого в (37) совпадает с главной диагональю матрицы $\langle B_1 \rangle_{n_1} \langle B_2 \rangle_{n_2}$. Матрица B_2 удовлетворяет соотношению

$$B_2^2 = (a_1 + \dots + a_m) B_2 = \text{Tr } B_2 \cdot B_2 = \gamma B_2,$$

откуда $\langle B_2 \rangle_{n_2} = \langle \gamma - 1 \rangle_{n_2-1} B_2$ и

$$\langle B_1 \rangle_{n_1} \langle B_2 \rangle_{n_2} = \langle \gamma - 1 \rangle_{n_2-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \langle \beta_1 \rangle_{n_1} & a_2 \langle \beta_1 \rangle_{n_1} & \dots & a_m \langle \beta_1 \rangle_{n_1} \\ a_1 \langle \beta_2 \rangle_{n_1} & a_2 \langle \beta_2 \rangle_{n_1} & \dots & a_m \langle \beta_2 \rangle_{n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 \langle \beta_m \rangle_{n_1} & a_2 \langle \beta_m \rangle_{n_1} & \dots & a_m \langle \beta_m \rangle_{n_1} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Рассмотрим любое из слагаемых $B = B^{(r)}$, $1 \leq r \leq N$, входящих в (37). Множитель $B_1 - jE$ в этом слагаемом появляется левее (т.е. позднее) множителя $B_1 - lE$ тогда и только тогда, когда $j > l$; то же самое можно сказать о порядке появления в B множителей $B_2 - jE$ и $B_2 - lE$. Выделяя первое (и единственное) появление множителя B_2 в слагаемом B , находим

$$\begin{aligned} B &= X \cdot B_2 \cdot \langle B_1 \rangle_s = X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} (a_1 \dots a_m) \cdot \text{diag}(\langle \beta_1 \rangle_s, \dots, \langle \beta_m \rangle_s) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} (a_1 \langle \beta_1 \rangle_s \ a_2 \langle \beta_2 \rangle_s \ \dots \ a_m \langle \beta_m \rangle_s) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \langle \beta_1 \rangle_s x_1 & a_2 \langle \beta_2 \rangle_s x_1 & \dots & a_m \langle \beta_m \rangle_s x_1 \\ a_1 \langle \beta_1 \rangle_s x_2 & a_2 \langle \beta_2 \rangle_s x_2 & \dots & a_m \langle \beta_m \rangle_s x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 \langle \beta_1 \rangle_s x_m & a_2 \langle \beta_2 \rangle_s x_m & \dots & a_m \langle \beta_m \rangle_s x_m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (39)$$

Сравнение главных диагоналей матриц (38) и (39) дает

$$x_l = \langle \gamma - 1 \rangle_{n_2-1} \cdot \langle \beta_l - s \rangle_{n_1-s}, \quad l = 1, \dots, m.$$

Таким образом, каждое слагаемое, входящее в (37), имеет вид

$$B = \langle \gamma - 1 \rangle_{n_2-1} \cdot \left(a_j \langle \beta_j \rangle_s \langle \beta_l - s \rangle_{n_1-s} \right)_{l,j=1,\dots,m}$$

для некоторого $s, 0 \leq s < n_1$. Полагая $a = \text{den}(a_1, \dots, a_m)$, $b = \text{den}(\gamma, \beta_1, \dots, \beta_m)$, g_k – наименьшее общее кратное чисел

$$\frac{k!}{k_0! k_1! k_2!}, \quad k_0, k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad k_0 + k_1 + k_2 = k, \quad (40)$$

и учитывая условие $\gamma \neq 0$, согласно лемме 9 получаем, что наименьший общий знаменатель элементов матрицы

$$\frac{\gamma B}{(n_1 + n_2)!} = \frac{s! (n_1 - s)! n_2!}{(n_1 + n_2)!} \cdot \frac{\gamma B}{s! (n_1 - s)! n_2!}$$

делит

$$g_k \cdot ab^k \prod_{p|b} p^{\tau_p(k)} \quad (41)$$

для любого $k \geq n_1 + n_2$; ввиду произвольности выбора слагаемого B в сумме (37) заключаем, что наименьший общий знаменатель элементов матрицы

$$\frac{\gamma \langle B_1, B_2 \rangle_{n_1, n_2}}{(n_1 + n_2)!} = \sum_{r=1}^N \frac{\gamma B^{(r)}}{(n_1 + n_2)!}$$

также делит число (41) для любого $k \geq n_1 + n_2$.

Степень вхождения простого p в каждое число (40) согласно (4) равна

$$\tau_p(k) - \tau_p(k_0) - \tau_p(k_1) - \tau_p(k_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{k}{p^m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k_0}{p^m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k_1}{p^m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k_2}{p^m} \right\rfloor \right), \quad (42)$$

$$k_0, k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad k_0 + k_1 + k_2 = k.$$

Суммирование в (42) происходит только по $m \leq \lfloor \log k / \log p \rfloor$; кроме того,

$$\lfloor \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \rfloor - \lfloor \xi_1 \rfloor - \lfloor \xi_2 \rfloor - \lfloor \xi_3 \rfloor \leq 2, \quad \xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, для всех простых $p \leq k$ выполнено

$$\tau_p(k) - \tau_p(k_0) - \tau_p(k_1) - \tau_p(k_2) \leq 2 \left\lfloor \frac{\log k}{\log p} \right\rfloor \leq 2 \frac{\log k}{\log p},$$

$$k_0, k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad k_0 + k_1 + k_2 = k.$$

Эти неравенства дают оценку

$$g_k \leq \prod_{p \leq k} p^{2 \log k / \log p} = e^{2\pi(k) \log k},$$

где $\pi(k)$ – количество простых, не превосходящих k , откуда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} g_k^{1/k} \leq e^2. \quad (43)$$

С учетом полученного предельного соотношения, тождеств (36) и леммы 5 мы получаем, что система однородных дифференциальных уравнений (33) удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $be^{\chi(b)+2}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Повторяя приведенные рассуждения в случае $\gamma = 0$, для любого слагаемого в (37) получаем

$$B = (-1)^{n_2-1} (n_2 - 1)! \cdot \left(a_j \langle \beta_j \rangle_s \langle \beta_l - s \rangle_{n_1-s} \right)_{l,j=1,\dots,m}$$

с некоторым s , $0 \leq s < n_1$, откуда наименьший общий знаменатель элементов матрицы

$$\frac{\langle B_1, B_2 \rangle_{n_1, n_2}}{(n_1 + n_2)!}$$

для любого $k \geq n_1 + n_2$ делит

$$d_k g_k \cdot ab^k \prod_{p|b} p^{\tau_p(k)},$$

где d_k – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, k$. С учетом предельных соотношений (18) и (43) сокращение факториалов в этом случае происходит с постоянной $be^{\chi(b)+3}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказательство леммы 11 годится для подсчета (той же самой) постоянной, с которой происходит сокращение факториалов у исходной неоднородной системы (32) в случае попарно различных параметров $\beta_1, \dots, \beta_m$.

Следующие утверждения относятся к арифметическим и алгебраическим свойствам функций (29).

ЛЕММА 12. Пусть b_1, b_2 – знаменатели чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}$; b – наименьшее общее кратное чисел b_1, b_2 . Обозначим через $\varphi_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, наименьший общий знаменатель рациональных чисел

$$\frac{\langle -\alpha \rangle_n}{\langle -\beta \rangle_n}, \quad n = 0, 1, \dots, k.$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \varphi_k^{1/k} \leq \Phi = e^{\rho(b_2)} \frac{b_1}{b},$$

где

$$\rho(b) = \frac{b}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leq n \leq b \\ (n, b)=1}} \frac{1}{n}, \quad \varphi(b) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq b \\ (n, b)=1}} 1, \quad b \in \mathbb{N}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наименьшие общие знаменатели чисел

$$\langle -\alpha \rangle_n, \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad \langle -\beta \rangle_n, \quad n = 0, 1, \dots, k,$$

равны соответственно b_1^k и b_2^k . Наименьший общий знаменатель чисел

$$\frac{1}{\langle -\beta \rangle_n}, \quad n = 0, 1, \dots, k,$$

равен наименьшему общему кратному d_k чисел

$$-a + b_2(n-1), \quad n = 1, \dots, k, \quad a = b_2\beta \in \mathbb{Z}.$$

Согласно [17; лемма 3.2] справедлива оценка

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log d_k}{k} \leq \rho(b_2),$$

где функция $\rho(\cdot)$ определяется равенством (44). Это доказывает лемму.

ЛЕММА 13. Пусть q_1, q_2 – произведения знаменателей чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \dots, \beta_m$ соответственно; b – наименьшее общее кратное чисел q_1, q_2 ; $b_1, \dots, b_m$ – знаменатели чисел $\beta_1, \dots, \beta_m$ соответственно. Тогда функция (28) принадлежит классу $\mathbf{G}(1, \Phi)$, где $\Phi = e^{\rho(b_1) + \dots + \rho(b_m)} q_1 / b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка величины Φ вытекает из леммы 12. Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\langle -\lambda \rangle_n}{n!} \right|^{1/n} = 1, \quad \lambda \notin \{-1, -2, \dots\},$$

область сходимости ряда (28) – круг $|z| < 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 14. Если $f(z) \in \mathbf{G}(C, \Phi)$, то $\delta f(z) \in \mathbf{G}(C, \Phi)$, где $\delta = z \frac{d}{dz}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение очевидно. Если ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

функции $f(z)$ сходится в круге $|z| < C$, то в этом же круге сходится ряд

$$\delta f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n z^n.$$

Если последовательность натуральных чисел $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ выбрана так, что

$$\varphi_k f_n \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N},$$

то

$$\varphi_k n f_n \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, $\delta f(z) \in \mathbf{G}(C, \Phi)$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть q_1, q_2 – произведения знаменателей чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \dots, \beta_m$ соответственно; b – наименьшее общее кратное чисел q_1, q_2 ; $b_1, \dots, b_m$ – знаменатели чисел $\beta_1, \dots, \beta_m$ соответственно. Тогда совокупность функций (29) принадлежит классу $\mathbf{G}(1, \Phi)$, где $\Phi = e^{\rho(b_1) + \dots + \rho(b_m)} q_1 / b$.

ЛЕММА 15. Вронскиан (определитель матрицы фундаментальной системы решений) $W(z)$ линейного однородного дифференциального уравнения

$$((\delta + \beta_1) \cdots (\delta + \beta_m) - z(\delta + \alpha_1) \cdots (\delta + \alpha_m))y = 0, \quad \delta = z \frac{d}{dz}, \quad (45)$$

порядка m удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$((\delta + \beta) - z(\delta + \alpha))y = 0, \quad \alpha = \sigma_1(\alpha), \quad \beta = \sigma_1(\beta), \quad (46)$$

и, следовательно, для рациональных α, β является алгебраической функцией:

$$W(z) = C z^{-\beta} (1 - z)^{\alpha - \beta}, \quad C \in \mathbb{C}. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вронсиан $W(z)$ дифференциального уравнения (45) совпадает с вронсианом системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} y_l &= \frac{1}{z} y_{l+1}, \quad l = 1, \dots, m-1, \\ \frac{d}{dz} y_m &= \frac{\sigma_1(\beta) - z\sigma_1(\alpha)}{z(z-1)} y_m + \frac{\sigma_2(\beta) - z\sigma_2(\alpha)}{z(z-1)} y_{m-1} + \dots + \frac{\sigma_m(\beta) - z\sigma_m(\alpha)}{z(z-1)} y_1. \end{aligned} \quad (48)$$

Согласно теореме Лиувилля [18; гл. 3, § 27, п. 6] он удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dz} y = \text{Tr } Q(z) \cdot y, \quad (49)$$

где $\text{Tr } Q(z) = (\beta - z\alpha)/(z(z-1))$ — след матрицы системы (48). Уравнение (49) можно переписать в виде (46). Его решение (47) находится непосредственным интегрированием.

Сформулируем некоторые достаточные условия из [19] на параметры функции (28) для того, чтобы функции (29) были алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$:

- 1) *линейная неприводимость*: $\alpha_l - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ для всех $l, j = 1, \dots, m$;
- 2) *неприводимость Белого* [19; гл. 3, лемма 3.5.3]: для любой пары натуральных чисел $m_1, m_2, m_1 + m_2 = m$, не существует чисел $u, v \in \mathbb{Q}$ таких, что либо

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) &\sim \left(\frac{u}{m_1}, \frac{u+1}{m_1}, \dots, \frac{u+m_1-1}{m_1}, \frac{v}{m_2}, \frac{v+1}{m_2}, \dots, \frac{v+m_2-1}{m_2} \right), \\ (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) &\sim \left(\frac{u+v}{m}, \frac{u+v+1}{m}, \dots, \frac{u+v+m-1}{m} \right), \end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) &\sim \left(\frac{u+v}{m}, \frac{u+v+1}{m}, \dots, \frac{u+v+m-1}{m} \right), \\ (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) &\sim \left(\frac{u}{m_1}, \frac{u+1}{m_1}, \dots, \frac{u+m_1-1}{m_1}, \frac{v}{m_2}, \frac{v+1}{m_2}, \dots, \frac{v+m_2-1}{m_2} \right); \end{aligned}$$

- 3) *куммеровская неприводимость* [19; гл. 3, лемма 3.5.6]: не существует делителя $m_0 \geq 2$ числа m такого, что

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) &\sim \left(\alpha_1 + \frac{1}{m_0}, \alpha_2 + \frac{1}{m_0}, \dots, \alpha_m + \frac{1}{m_0} \right), \\ (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) &\sim \left(\beta_1 + \frac{1}{m_0}, \beta_2 + \frac{1}{m_0}, \dots, \beta_m + \frac{1}{m_0} \right); \end{aligned}$$

- 4) $2\gamma \notin \mathbb{Z}$, где $\gamma = \alpha_1 + \dots + \alpha_m - \beta_1 - \dots - \beta_m$.

Запись $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \sim (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ означает, что для некоторой перестановки $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ при всех $l = 1, \dots, m$ выполнено $\lambda_l - \lambda'_{\sigma(l)} \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 16. Пусть числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ удовлетворяют условиям 1)–4). Тогда функции (29), где $f(z)$ определяется рядом (28), алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [19; гл. 3, теорема 3.5.8] в случае выполнения условий 1)–4) группа Галуа однородного линейного дифференциального уравнения (45) порядка m изоморфна группе $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$. Это означает, что функции, входящие в фундаментальную систему решений уравнения (45), связаны единственным алгебраическим соотношением над полем $\mathbb{C}(z)$ – определитель этой фундаментальной системы решений является алгебраической функцией (лемма 15). Следовательно, если $g(z)$ – любое нетривиальное решение уравнения (45), то функции $g(z), \delta g(z), \dots, \delta^{m-1}g(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Из теоремы Нестеренко [20; теорема 2] (см. также [15; гл. 9, § 6, теорема 2]) следует, что либо функции (29) алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, либо все они принадлежат $\mathbb{C}(z)$. Второй случай невозможен, поскольку функция (28) не является рациональной. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \dots, \beta_m$ функции (28) удовлетворяют условиям 1)–4), $\beta_1, \dots, \beta_m$ попарно различны, ξ – некоторое рациональное число, $\xi = a_1/a_2 \neq 0$, $a_2 = \mathrm{den} \xi \in \mathbb{N}$, и $\varepsilon < 1/(m+2)$ – произвольная положительная постоянная. Обозначим через b_0 наименьший общий знаменатель чисел $\gamma, \beta_1, \dots, \beta_m$, через q_1 и q_2 произведения знаменателей чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \dots, \beta_m$ соответственно, через b наименьшее общее кратное чисел q_1, q_2 , через H максимум модуля коэффициентов многочленов (31). Положим $\Phi = e^{\rho(\mathrm{den} \beta_1) + \dots + \rho(\mathrm{den} \beta_m)} q_1/b$,

$$C_0 = (8b_0 H e^{\chi(b_0)+3})^{\varepsilon(1-\log \varepsilon)} \Phi^{1+\varepsilon+(2-(m-1)\varepsilon)/(\varepsilon^m(m-1)!)},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+\varepsilon) \log a_2 + \log C_0}{(1-(m+2)\varepsilon) \log a_2 - \log C_0 - (2-(m+1)\varepsilon) \log |a_1|},$$

где функции $\chi(\cdot)$ и $\rho(\cdot)$ определяются формулами (5) и (44) соответственно. Если для заданного ξ выполнено условие $\eta_0 > 0$, иными словами, если

$$a_2^{1-(m+2)\varepsilon} > C_0 |a_1|^{2-(m+1)\varepsilon},$$

то число $f(\xi)$ иррационально. Более того, для любого $\eta > \eta_0$ и произвольных $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(\xi, \varepsilon, \eta)$, справедлива оценка

$$\left| f(\xi) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_0(z) = bT(z) = bz(z-1)$ – общий знаменатель системы дифференциальных уравнений (32), которой удовлетворяют совокупность функций (29) из класса $\mathbf{G}(1, \Phi)$ (см. следствие из леммы 14); при этом

$$T_0(z)Q_{lj}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad l = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m.$$

Тогда

$$\max\left\{\deg T_0 - 1, \max_{l,j}\{\deg T_0 Q_{lj}\}\right\} = 1, \quad \max\left\{H(T_0), \max_{l,j}\{H(T_0 Q_{lj})\}\right\} = bH.$$

Из условия 4) следует, что $\gamma \neq 0$. Согласно лемме 11 сокращение факториалов для системы дифференциальных уравнений (33), сопряженной к однородной части системы (32), происходит с постоянной $\Psi = b_0 e^{\chi(b_0)+2}$ (с постоянной $\Psi = b_0 e^{\chi(b_0)+2}/b$, если в определении 3 многочлен $T(z)$ заменить на $T_0(z)$). Из леммы 16 следует алгебраическая независимость функций (29) над полем $\mathbb{C}(z)$. Применяя теперь основную теорему и неравенства (0.9) из работы [17], получаем требуемое утверждение.

7. Сокращение факториалов для линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} y_l = \sum_{j=1}^m A_{lj} y_j, \quad l = 1, \dots, m, \quad A_{lj} \in \mathbb{C}, \quad l, j = 1, \dots, m, \quad (50)$$

и связанный с ней дифференциальный оператор

$$\mathcal{A} = [A] = \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m A_{lj} y_j \frac{\partial}{\partial y_l}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Таким образом, с каждой матрицей A можно связать дифференциальный оператор $[A]$ согласно формуле (51). Отметим, прежде всего, свойство линейности

$$[\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2] = \lambda_1 [A_1] + \lambda_2 [A_2], \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},$$

для любых квадратных матриц A_1 и A_2 размера m .

Для дифференциальных операторов $[A]$ и $[B]$ введем операции формального умножения

$$\begin{aligned} [A] \cdot [B] &= \left(\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m A_{lj} y_j \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m B_{ik} y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m A_{lj} y_j \right) \left(\sum_{k=1}^m B_{ik} y_k \right) \frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_i} = [B] \cdot [A] \end{aligned}$$

и композиции

$$\begin{aligned} [B] \circ [A] &= \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m B_{ik} y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \circ \left(\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m A_{lj} y_j \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m B_{ik} y_k \sum_{l=1}^m A_{li} \frac{\partial}{\partial y_l} + \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m B_{ik} y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m A_{lj} y_j \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m A_{li} B_{ik} y_k \frac{\partial}{\partial y_l} + \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m A_{lj} y_j \right) \left(\sum_{k=1}^m B_{ik} y_k \right) \frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_i} \\ &= [AB] + [A] \cdot [B]. \end{aligned}$$

Помимо очевидной ассоциативности каждая из этих операций дистрибутивна относительно сложения. Коммутативность имеет место только для операции формального умножения, хотя порядок множителей в композиции

$$\mathcal{A}_n = ([A] - n + 1) \circ ([A] - n + 2) \circ \cdots \circ ([A] - 1) \circ [A] \quad (52)$$

не имеет значения. Отметим также “дифференциальное свойство” операции композиции:

$$[B] \circ ([A_1] \cdot [A_2]) = ([B] \circ [A_1]) \cdot [A_2] + [A_1] \cdot ([B] \circ [A_2]).$$

Под $[A]^n$ будем понимать формальное произведение n операторов $[A]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Скажем, что *дифференциальный оператор* (51) (или *система уравнений* (50)), отвечающий матрице A , *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $\Psi \geq 1$, если существует последовательность натуральных чисел $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что операторы

$$\psi_k \frac{1}{n!} \mathcal{A}_n, \quad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (53)$$

переводят кольцо $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m]$ в себя и

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \psi_k^{1/k} \leq \Psi.$$

ЛЕММА 17. Для дифференциального оператора (52) выполнено тождество

$$\frac{1}{n!} \mathcal{A}_n = \sum_{\substack{s_1, s_2, \dots, s_n \geq 0 \\ s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n}} \frac{1}{s_1!} [A]^{s_1} \cdot \frac{1}{s_2!} \left[\frac{\langle A \rangle_2}{2!} \right]^{s_2} \cdots \frac{1}{s_n!} \left[\frac{\langle A \rangle_n}{n!} \right]^{s_n}, \quad (54)$$

где символ $\langle \cdot \rangle_n$ определяется формулой (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n . База индукции $n = 1$ очевидна. Пусть тождество (54) справедливо для заданного n . Положим

$$U(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{1}{s_1!} [A]^{s_1} \cdot \frac{1}{s_2!} \left[\frac{\langle A \rangle_2}{2!} \right]^{s_2} \cdots \frac{1}{s_n!} \left[\frac{\langle A \rangle_n}{n!} \right]^{s_n} \quad (55)$$

и перепишем (54) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \mathcal{A}_n &= \sum_{\substack{s_1, s_2, \dots, s_n \geq 0 \\ s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n}} U(s_1, s_2, \dots, s_n) \\ &= \sum_{\substack{s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1} \geq 0 \\ s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n + (n+1)s_{n+1} = n}} U(s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}) \end{aligned}$$

(здесь, очевидно, $s_{n+1} = 0$). Поскольку

$$([A] - i) \circ [\langle A \rangle_i] = [A] \cdot [\langle A \rangle_i] + [\langle A \rangle_{i+1}],$$

имеем

$$\begin{aligned}
& ([A] - n) \circ U(s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}) \\
&= (s_1 + 1)U(s_1 + 1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}) \\
&\quad + 2(s_2 + 1)U(s_1 - 1, s_2 + 1, s_3, \dots, s_n, s_{n+1}) \\
&\quad + 3(s_3 + 1)U(s_1, s_2 - 1, s_3 + 1, s_4, \dots, s_n, s_{n+1}) + \dots \\
&\quad + (n + 1)(s_{n+1} + 1)U(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n - 1, s_{n+1} + 1), \\
& s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1} \geq 0, \quad s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n + (n + 1)s_{n+1} = n.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)!} \mathcal{A}_{n+1} &= \frac{[A] - n}{n+1} \circ \frac{1}{n!} \mathcal{A}_n \\
&= \sum_{\substack{s_1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1} \geq 0 \\ s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n + (n+1)s_{n+1} = n}} \frac{s_1 + 1}{n+1} U(s_1 + 1, s_2, \dots, s_n, s_{n+1}) \\
&\quad + \frac{2(s_2 + 1)}{n+1} U(s_1 - 1, s_2 + 1, s_3, \dots, s_n, s_{n+1}) + \dots \\
&\quad + \frac{(n+1)(s_{n+1} + 1)}{n+1} U(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n - 1, s_{n+1} + 1) \\
&= \sum_{\substack{s'_1, s'_2, \dots, s'_{n+1} \geq 0 \\ s'_1 + 2s'_2 + \dots + (n+1)s'_{n+1} = n+1}} \frac{s'_1 + 2s'_2 + \dots + (n+1)s'_{n+1}}{n+1} U(s'_1, s'_2, \dots, s'_{n+1}) \\
&= \sum_{\substack{s'_1, s'_2, \dots, s'_{n+1} \geq 0 \\ s'_1 + 2s'_2 + \dots + (n+1)s'_{n+1} = n+1}} U(s'_1, s'_2, \dots, s'_{n+1}),
\end{aligned}$$

что означает справедливость тождества (54) для $n + 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 18. *Если коэффициенты матрицы B целочисленны, то дифференциальный оператор $[B]^s/s!$ переводит кольцо $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m]$ в себя.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем дифференциальный оператор $[B]$ в виде

$$[B] = \sum_{l=1}^m b_l \frac{\partial}{\partial y_l}, \quad b_l = \sum_{j=1}^m B_{lj} y_j \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m].$$

Тогда дифференциальный оператор

$$\frac{1}{s!} [B]^s = \frac{1}{s!} \left(\sum_{l=1}^m b_l \frac{\partial}{\partial y_l} \right)^s = \sum_{\substack{l_1, \dots, l_m \geq 0 \\ l_1 + \dots + l_m = s}} \frac{b_1^{l_1}}{l_1!} \frac{\partial^{l_1}}{\partial y_1^{l_1}} \dots \frac{b_m^{l_m}}{l_m!} \frac{\partial^{l_m}}{\partial y_m^{l_m}}$$

переводит кольцо $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m]$ в себя, так как этим свойством обладают операторы

$$\frac{1}{l_j!} \frac{\partial^{l_j}}{\partial y_j^{l_j}}, \quad j = 1, \dots, m$$

(пример 1), и, кроме того,

$$b_j^{l_j} \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m], \quad j = 1, \dots, m.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 19. Пусть $s_1, s_2, \dots, s_k$ — целые неотрицательные числа, p — простое число. Тогда

$$s_1 \tau_p(1) + s_2 \tau_p(2) + \dots + s_k \tau_p(k) \leq \tau_p(s_1 + 2s_2 + \dots + ks_k), \quad (56)$$

где $\tau_p(k)$ — степень вхождения числа p в $k!$ (см. (4)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, прежде всего, что для действительных $\xi_1, \dots, \xi_k$ имеет место неравенство

$$\lfloor \xi_1 \rfloor + \dots + \lfloor \xi_k \rfloor \leq \lfloor \xi_1 + \dots + \xi_k \rfloor$$

(см. [2; отд. 8, гл. 1, § 1, задача 7]). Отсюда следует, что

$$s_1 \lfloor \xi_1 \rfloor + s_2 \lfloor \xi_2 \rfloor + \dots + s_k \lfloor \xi_k \rfloor \leq \lfloor s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2 + \dots + s_k \xi_k \rfloor. \quad (57)$$

Последовательно подставляя в (57) значения

$$\xi_n = \frac{n}{p}, \frac{n}{p^2}, \frac{n}{p^3}, \dots, \quad n = 1, \dots, k,$$

и суммируя полученные неравенства, согласно формуле (4) получаем (56). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть дифференциальный оператор (51) отвечает рациональной матрице A , $\det A = b$, минимальный многочлен которой не имеет кратных корней; t_1, t_2 — наименьшие общие знаменатели элементов матриц T и T^{-1} соответственно, где T — матрица перехода от A к ее жордановой нормальной форме. Тогда оператор $[A]$ удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $t_1 t_2 b e^{\chi(b)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k — произвольное натуральное число. Согласно лемме 9 матрицы

$$t_1 t_2 b^n \prod_{p|b} p^{\tau_p(n)} \cdot \frac{\langle A \rangle_n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, k,$$

имеют целочисленные элементы. Поэтому из леммы 18 следует, что дифференциальный оператор (55) после умножения на

$$(t_1 t_2)^n b^n \prod_{p|b} p^{s_1 \tau_p(1) + s_2 \tau_p(2) + \dots + s_n \tau_p(n)} \quad (58)$$

переводит кольцо $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m]$ в себя. Поскольку $s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = n \leq k$, из леммы 19 следует, что число (58) делит

$$\psi_k = (t_1 t_2)^k b^k \prod_{p|b} p^{\tau_p(k)}.$$

Применим тождество леммы 17. Для последовательности $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ операторы (53) переводят кольцо $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m]$ в себя. Оценка (18) завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. С системой дифференциальных уравнений (8), (12) фуксовского типа связан дифференциальный оператор

$$D = \frac{d}{dz} + \frac{1}{z - \gamma_1} [A_1] + \dots + \frac{1}{z - \gamma_s} [A_s].$$

Это обстоятельство позволяет с помощью теоремы 7 дать другое доказательство теоремы 5 в случае попарно коммутирующих матриц $A_1, \dots, A_s$, минимальный многочлен каждой из которых не имеет кратных корней. При этом, однако, получается несколько худшая (по сравнению с теоремой 5) постоянная Ψ .

Список литературы

1. Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б. Введение в теорию чисел. М.: Изд-во МГУ, 1995.
2. Поля Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. 3 изд. М.: Наука, 1978.
3. André Y. *G*-functions and geometry. Aspects Math. (A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn). V. E13. Braunschweig: Vieweg, 1989.
4. Галочкин А. И. О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу *E*-функций // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 1. С. 3–14.
5. Галочкин А. И. Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса // Матем. сб. 1974. Т. 95 (137). № 3. С. 396–417.
6. Siegel C. L. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929–1930. № 1. P. 1–70.
7. Нурмагомедов М. С. Об арифметических свойствах значений *G*-функций // Матем. сб. 1971. Т. 85 (127). № 3. С. 339–365.
8. Галочкин А. И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых *G*-функций // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 4. С. 541–552.
9. Beukers F., Matalo-aho T., Väinänen K. Remarks on the arithmetic properties of the values of hypergeometric functions // Acta Arith. 1983. V. 42. P. 281–289.

10. *Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V.* Applications of Padé approximations to Diophantine inequalities in values of G -functions // *Lecture Notes in Math.* 1985. V. 1135. P. 9–51.
11. *Chudnovsky G. V.* Measures of irrationality, transcendence and algebraic independence. Recent progress // *Number Theory Days, 1980 (Exeter, 1980)*. London Math. Soc. Lecture Notes Ser. V. 56. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982. P. 11–82.
12. *Yoshida M.* Fuchsian differential equations. *Aspects Math.* (A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn). V. E11. Braunschweig: Vieweg, 1987.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1983.
14. *Матвеев Е. М.* Об арифметических свойствах значений обобщенных биномиальных многочленов // *Матем. заметки.* 1993. Т. 54. № 4. С. 76–81.
15. *Шидловский А. Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
16. *Галочкин А. И.* Оценки снизу линейных форм от значений G -функций // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1996. № 3. С. 23–29.
17. *Зудилин В. В.* О мере иррациональности значений G -функций // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1996. Т. 60. № 1. С. 87–114.
18. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
19. *Katz N. M.* Exponential sums and differential equations. *Ann. of Math. Stud.* V. 124. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1990.
20. *Нестеренко Ю. В.* Об алгебраической независимости значений E -функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям // *Матем. заметки.* 1969. Т. 5. № 5. С. 587–598.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Поступила в редакцию
17.01.2000