Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Лекишвили, А. Н. Данелиа, О деформации некоторых функциональных классов в пространствах $C(T^m)$ и $L(T^m)$, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 8, 123–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm589>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:32:18

УДК 517.51

М. М. Лекишвили, А. Н. Данелиа

О деформации некоторых функциональных классов в пространствах $C(T^m)$ и $L(T^m)$

Изучается проблема нарушения инвариантности функциональных классов $H(\omega_1, \dots, \omega_m; C(T^m))$ и $H(\omega_1, \dots, \omega_m; L(T^m))$ ($m \geq 2$) относительно действующего на них многомерного оператора сопряжения $\tilde{f}_B$ в том случае, когда модули непрерывности ω_i ($i = 1, \dots, m$) удовлетворяют условию Зигмунда. Получены прямые оценки и установлена точность этих оценок.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Некоторые обозначения и определения

Пусть $\mathbb{R}^m$ ($m = 1, 2, \dots$; $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$) обозначает m -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_m)$ с действительными координатами. Рассмотрим множество $M = \{1, \dots, m\}$ и будем считать, что B – его произвольное непустое подмножество. Символом $|B|$ обозначим число элементов множества B , а x_B – такую точку из $\mathbb{R}^m$, у которой координаты с индексами, составляющими множество $M \setminus B$, непременно нули.

Далее, $C(T^m)$, где $T = [-\pi, \pi]$, как обычно, означает пространство непрерывных 2π -периодических по каждой переменной функций $f: T^m \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(T^m)} = \max_{x \in T^m} |f(x)|,$$

а $L^p(T^m)$ ($1 \leq p < \infty$) – пространство p -суммируемых по Лебегу 2π -периодических по каждой переменной функций $f: T^m \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{L^p(T^m)}^p = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} |f(x)|^p dx.$$

Будем считать, что $L^\infty(T^m) = C(T^m)$ и $L^1(T^m) = L(T^m)$.

Если $f \in L(T^m)$, то выражение

$$\tilde{f}_B(x) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{|B|} \int_{T^{|B|}} f(x + s_B) \prod_{i \in B} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_B,$$

следуя Л. В. Жижиашвили [1; с. 182], назовем *сопряженной функцией* m переменных по совокупности тех из них, индексы которых составляют множество B ($\tilde{f}_B \equiv \tilde{f}$ при $m = 1$).

Пусть $f \in L^p(T^m)$ ($1 \leq p \leq \infty$), $1 \leq i \leq m$ и $h \in T$. Тогда для всех $x \in T^m$ положим

$$\Delta_i(h) f(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)$$

и определим частный модуль непрерывности функции f по i -й переменной равенством

$$\omega_i(f; \delta)_{L^p(T^m)} = \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_i(h) f\|_{L^p(T^m)} \quad (0 < \delta \leq \pi).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Следуя С. Н. Бернштейну [2], мы будем называть функцию φ *почти возрастающей* (соответственно *почти убывающей*) на $[a, b]$, если существует такое постоянное число A , что $\varphi(t_1) \leq A\varphi(t_2)$ для $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ (соответственно $\varphi(t_1) \geq A\varphi(t_2)$ для $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Неубывающую непрерывную и полуаддитивную на $[0, \pi]$ функцию ω , которая в нуле равна нулю, называют *модулем непрерывности* [3].

Пусть ω_i ($i = 1, \dots, m$) – модули непрерывности. Тогда через $H_i(\omega_i; L^p(T^m))$ ($1 \leq p \leq \infty$, $m \geq 2$, $i = 1, \dots, m$) обозначим множество всех тех функций $f \in L^p(T^m)$, для каждой из которых

$$\omega_i(f; \delta)_{L^p(T^m)} = O(\omega_i(\delta)) \quad (\delta \rightarrow 0+, i = 1, \dots, m).$$

Положим

$$H(\omega_1, \dots, \omega_m; L^p(T^m)) = \bigcap_{i=1}^m H_i(\omega_i; L^p(T^m)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) и $m = 1$, то класс $H(\delta^\alpha; L^p(T))$ ($1 \leq p \leq \infty$) обозначим символом $\text{Lip}(\alpha; L^p(T))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Скажем, что модуль непрерывности ω *удовлетворяет условию Зигмунда*, если

$$\int_0^\delta \frac{\omega(u)}{u} du + \delta \int_\delta^\pi \frac{\omega(u)}{u^2} du = O(\omega(\delta)) \quad (\delta \rightarrow 0+).$$

§ 2. Некоторые известные результаты и вспомогательные утверждения

В теории функции вещественной переменной хорошо известна теорема И. И. Привалова (см., например, [4; гл. VIII, §13]) об инвариантности класса функций $\text{Lip}(\alpha; C(T))$ ($0 < \alpha < 1$) относительно оператора $\tilde{f}$. Г. Харди и Дж. Литтлвуд [5] показали, что и класс $\text{Lip}(\alpha; L(T))$ ($0 < \alpha < 1$) инвариантен относительно оператора $\tilde{f}$.

В дальнейшем вышеуказанные утверждения были обобщены в различных направлениях, и в результате исследований многих авторов (см., например, [6]–[9]) сложилась определенная проблематика, в которой в терминах модулей непрерывности различных порядков находятся прямые и обратные оценки сопряженной функции через те же характеристики плотности.

В связи с отмеченной проблематикой в работе [10] приведен окончательный результат, выясняющий полный характер нарушения инвариантности классов $\text{Lip}(\alpha; C(T^m))$ ($0 < \alpha < 1$) относительно оператора $\tilde{f}_B$. В дальнейшем в работах В. А. Окулова [11], [12] были получены оценки частных модулей непрерывности сопряженной функции многих переменных в пространстве $C(T^m)$ и соответствующими примерами показана точность этих оценок. В работе же [13] аналогичные вопросы изучены для пространства $L(T^m)$. В частности, в классе $H(\delta^{\alpha_j}, j \in M; L(T^m))$ ($0 < \alpha_j < 1, j \in M$) установлена точность приведенных теорем.

В настоящей статье изучается проблема нарушения инвариантности классов $H(\omega_1, \dots, \omega_m; C(T^m))$ и $H(\omega_1, \dots, \omega_m; L(T^m))$ ($m \geq 2$) относительно действующего на них многомерного оператора сопряжения $\tilde{f}_B$ в том случае, когда модули непрерывности ω_i ($i = 1, \dots, m$) удовлетворяют условию Зигмунда. Отметим, что случаи $\omega_i = \omega$ ($i = 1, \dots, m$) рассмотрены в работах [14] и [15].

Приведем утверждения, на которые будет опираться доказательство основных результатов.

ЛЕММА 1 (см. [1; с. 239]). а) Пусть функция $f \in L(T^m)$ и для некоторого $\beta \in [0, m-1]$

$$\sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} \left[\sum_{i=1}^m \omega_i \left(f; \frac{1}{p} \right)_{L(T^m)} \right] [\log(p+1)]^\beta < +\infty. \quad (1)$$

Тогда все функции $\tilde{f}_B$ с $|B| \in [1, \beta+1]$ интегрируемы на T^m .

б) Пусть $\beta \in [0, m-1]$ — некоторое число. Существует функция $f \in L(T^m)$, для которой с указанным β выполнено (1), однако функции $\tilde{f}_B$ с $|B| \in (\beta+1, m]$ не интегрируемы на T^m .

ЛЕММА 2 (см., например, [16; гл. 3, п. 3.2.4]). Для любого модуля непрерывности ω

$$\frac{\omega(u_2)}{u_2} \leq 2 \frac{\omega(u_1)}{u_1} \quad (u_1 < u_2),$$

а при условии выпуклости ω множитель 2 в правой части данного неравенства может быть опущен.

ЛЕММА 3 (см. [8]). Если модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда, то существует такое число α ($0 < \alpha < 1$), что $\frac{\omega(t)}{t^\alpha}$ почти убывает на $\left(0, \frac{1}{e^2}\right]$.

ЛЕММА 4 (см. [8]). Если модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда, то существует такое число β ($0 < \beta < 1$), что $\frac{\omega(t)}{t^\beta}$ почти возрастает на $\left(0, \frac{1}{e^2}\right]$.

ЛЕММА 5. Если $f \in H(\omega_1, \dots, \omega_m; L^p(T^m))$ ($p = 1$ или $p = \infty$), $m \geq 2$ и модули непрерывности ω_i ($i = 1, \dots, m$) удовлетворяют условию Зигмунда, то $\tilde{f}_{\{i\}} \in L^p(T^m)$ ($i = 1, \dots, m$; $p = 1$ или $p = \infty$) и справедливы оценки:

- а) $\omega_i(\tilde{f}_{\{i\}}; \delta)_{L^p(T^m)} = O(\omega_i(\delta))$, $\delta \rightarrow 0+$; $i = 1, \dots, m$, $p = 1$ или $p = \infty$;
 б) $\omega_k(\tilde{f}_{\{i\}}; \delta)_{L^p(T^m)} = O(\omega_k(\delta) |\ln \delta|)$, $\delta \rightarrow 0+$; $i, k = 1, \dots, m$, $i \neq k$, $p = 1$ или $p = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) доказывается точно так же, как и теорема Зигмунда (см., например, [17; гл. III, п. 13]), с соответствующим небольшим изменением, а что касается утверждения б), то его можно получить прямым путем, используя схему, которая содержится в работе [10].

Пусть $f \in L^p(T^m)$ ($p = 1$ или $p = \infty$), а $\omega_k(f; \delta)_{L^p(T^m)}$ ($1 \leq k \leq m$) – модуль непрерывности функции f по переменной x_k . Так как ω_i ($i = 1, \dots, m$) удовлетворяют условию Зигмунда, то по леммам 3 и 4 существуют такие числа α_i ($0 < \alpha_i < 1$) и β_i ($0 < \beta_i < 1$), что $A_i \delta^{\alpha_i} \leq \omega_i(\delta) \leq B_i \delta^{\beta_i}$. Если u_k – некоторое положительное число, $1 \leq i, k \leq m$ и $i \neq k$, то имеем

$$\begin{aligned} 2\pi[\tilde{f}_{\{i\}}(x + u_{\{k\}}) - \tilde{f}_{\{i\}}(x)] &= \int_0^{u_k^{\alpha_k/\beta_i}} [f(x + s_{\{i\}}) - f(x - s_{\{i\}})] \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\ &- \int_0^{u_k^{\alpha_k/\beta_i}} [f(x + s_{\{i\}} + u_{\{k\}}) - f(x - s_{\{i\}} + u_{\{k\}})] \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\ &- \int_{u_k^{\alpha_k/\beta_i}}^{\pi} [f(x + s_{\{i\}} + u_{\{k\}}) - f(x + s_{\{i\}})] \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\ &+ \int_{u_k^{\alpha_k/\beta_i}}^{\pi} [f(x - s_{\{i\}} + u_{\{k\}}) - f(x - s_{\{i\}})] \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i = \sum_{j=1}^4 I_j(x, u_{\{k\}}). \quad (2) \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) для $0 < u_k \leq \frac{1}{\pi}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|I_j(x, u_{\{k\}})\|_{L^p(T^m)} &\leq 2\pi \int_0^{u_k^{\alpha_k/\beta_i}} \frac{\omega_i(f; s_i)_{L^p(T^m)}}{s_i} ds_i \quad (j = 1, 2), \\ \|I_j(x, u_{\{k\}})\|_{L^p(T^m)} &\leq 2\pi \frac{\alpha_k}{\beta_i} \omega_k(f; u_k)_{L^p(T^m)} |\ln u_k| \quad (j = 3, 4), \\ p &= 1 \quad \text{или} \quad p = \infty. \end{aligned}$$

Полученные оценки совместно с равенством (2) доказывают справедливость утверждения б).

ЛЕММА 6 (см. [18]). Пусть задана система попарно не пересекающихся интервалов $\{\Delta_k\}$, $\Delta_k \subset [0, 2\pi]$, $k = 1, 2, \dots$, и пусть $(f_k)_{k \geq 1}$ – последовательность периодических функций таких, что $f_k(x) = 0$ при $x \in [0, 2\pi] \setminus \Delta_k$. Если $\omega(f_k; \delta) \leq \omega(\delta)$ ($0 \leq \delta \leq \delta_0$, $k = 1, 2, \dots$) и функция f определена равенством

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

то $\omega(f; \delta) \leq 2\omega(\delta)$, $0 \leq \delta \leq \delta_0$.

§ 3. О деформации классов $H(\omega_1, \dots, \omega_m; C(T^m))$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1 (М. Лекишвили). а) Если функция $f \in H(\omega_1, \dots, \omega_m; C(T^m))$ ($m \geq 2$) и модули непрерывности ω_i ($i = 1, \dots, m$) удовлетворяют условию Зигмунда, то

$$\tilde{f}_B \in \left[\bigcap_{i \in B} H_i(\omega_i |\ln|^{B|-1}; C(T^m)) \right] \cap \left[\bigcap_{j \in M \setminus B} H_j(\omega_j |\ln|^{B|}; C(T^m)) \right];$$

б) существует функция $F \in H(\omega_1, \dots, \omega_m; C(T^m))$ ($m \geq 2$) такая, что

$$\begin{aligned} \omega_i(\tilde{F}_B; \delta)_{C(T^m)} &\geq C\omega_i(\delta) |\ln \delta|^{B|-1} && \text{при } 0 \leq \delta \leq \delta_0, \quad i \in B; \\ \omega_j(\tilde{F}_B; \delta)_{C(T^m)} &\geq C\omega_j(\delta) |\ln \delta|^{B|} && \text{при } 0 \leq \delta \leq \delta_0, \quad j \in M \setminus B, \end{aligned}$$

где C и δ_0 — положительные константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так как $f \in H(\omega_1, \dots, \omega_m; C(T^m))$ и модули непрерывности ω_i ($i = 1, \dots, m$) удовлетворяют условию Зигмунда, то $\tilde{f}_B \in C(T^m)$ (см. [19]), причем порядок сопряжения не имеет значения.

Справедливость утверждения а) с учетом вышесказанного вытекает из леммы 5.

б) Рассмотрим случай, когда размерность евклидова пространства равна m ($m \geq 2$), а количество сопряжений оператора $\tilde{f}_B$ равно $m - 1$.

Не нарушая общности рассуждений, доказательство утверждения б) при $|B| = m - 1$ приведем лишь для оператора

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\{1, \dots, m-1\}}(x_1, \dots, x_m) &= \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^{m-1} \int_{T^{m-1}} f(x_1 + u_1, \dots, x_{m-1} + u_{m-1}, x_m) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{u_i}{2} du_1 \cdots du_{m-1}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если ω — модуль непрерывности, то найдется такая выпуклая вверх функция ω_1 с непрерывной производной в $(0, 1)$, что $\ln 2\omega(\delta) \leq \omega_1(\delta) \leq 2\omega(\delta)$ для $0 \leq \delta \leq 1$ (см. [20]).

В силу сказанного мы будем рассматривать только выпуклые модули непрерывности ω_i ($i = 1, \dots, m$), и это не нарушит общность наших рассуждений.

Итак, пусть ω_i ($i = 1, \dots, m$) — заданные условием теоремы 1 выпуклые модули непрерывности. Тогда в некоторой положительной окрестности нуля для ω_i ($i = 1, \dots, m$) существует обратная функция, которую обозначим через ω_i^{-1} .

Рассмотрим строго убывающую последовательность положительных чисел $(b_n)_{n \geq 1}$ такую, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < 1 \quad (b_0 = 0).$$

Положим

$$\tau_{n,i} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \omega_i^{-1}(b_k), \quad \tau_{n,i}^* = \tau_{n,i} + \omega_i^{-1}(b_n) \quad (i = 1, \dots, m; n = 1, 2, \dots).$$

Пусть

$$\begin{aligned} A_i &= \{x \in T^m : |x_j| \leq \pi, j = 1, \dots, m, j \neq i, -\pi \leq x_i \leq 0\}, \\ B_i &= \left\{x \in T^m : |x_j| \leq \pi, j = 1, \dots, m, j \neq i, 2 \sum_{k=0}^{\infty} \omega_i^{-1}(b_k) \leq x_i \leq \pi\right\}, \\ &\quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Далее, для любых $i = 1, \dots, m$ и $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим множества

$$\begin{aligned} Q_{n,i} &= \{x \in T^m : |x_j| \leq \pi, j = 1, \dots, m, j \neq i, x_i = \tau_{n,i}^*\}; \\ R_{n,i} &= \{x \in T^m : |x_j| \leq \pi, j = 1, \dots, m, j \neq i, x_i = \tau_{n,i}\}; \\ V_{n,i} &= \{x \in T^m : |x_j| \leq \pi, j = 1, \dots, m, j \neq i, \tau_{n,i} < x_i < \tau_{n,i}^*\}; \\ W_{n,i} &= \{x \in T^m : |x_j| \leq \pi, j = 1, \dots, m, j \neq i, \tau_{n,i}^* < x_i < \tau_{n+1,i}\}; \\ C_{n,i} &= \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \{x \in T^m : |x_j| \leq \pi, j = 1, \dots, m, j \neq i, j \neq k, \\ &\quad -\pi \leq x_k \leq -{}^{m-1}\sqrt{b_n}, \tau_{n,i} \leq x_i \leq \tau_{n+1,i}\}; \\ q_{n,j}^1 &= \{x_j \in T : -\pi \leq x_j < -{}^{m-1}\sqrt{b_n}\}; \\ q_{n,j}^2 &= \{x_j \in T : -{}^{m-1}\sqrt{b_n} \leq x_j < 0\}; \\ q_{n,j}^3 &= \{x_j \in T : 0 \leq x_j < \pi - {}^{m-1}\sqrt{b_n}\}; \\ q_{n,j}^4 &= \{x_j \in T : \pi - {}^{m-1}\sqrt{b_n} \leq x_j \leq \pi\} \quad (j = 1, \dots, m, j \neq i) \end{aligned}$$

и функцию $g_n: T \rightarrow \mathbb{R}$ следующего вида:

$$g_n(u) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq u < -{}^{m-1}\sqrt{b_n}; \\ u + {}^{m-1}\sqrt{b_n}, & -{}^{m-1}\sqrt{b_n} \leq u < 0; \\ {}^{m-1}\sqrt{b_n}, & 0 \leq u < \pi - {}^{m-1}\sqrt{b_n}; \\ \pi - u, & \pi - {}^{m-1}\sqrt{b_n} \leq u \leq \pi. \end{cases}$$

Построим отображение $G_i: T^m \rightarrow \mathbb{R}$. Для этого при любом $n = 1, 2, \dots$ положим

$$G_i(x) = G_i(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m g_n(x_j), & x \in Q_{n,i}; \\ 0, & x \in A_i \cup B_i \cup C_{n,i} \cup R_{n,i}. \end{cases}$$

Для множеств $V_{n,i}$ и $W_{n,i}$ ($i = 1, \dots, m; n = 1, 2, \dots$) функцию G_i определяем линейной интерполяцией по переменной x_i . Построенную функцию G_i продолжим 2π -периодически на все пространство $\mathbb{R}^m$.

Докажем справедливость включения

$$G_i \in \left[\bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m H_k(\delta; C(T^m)) \right] \cap H_i(\omega_i; C(T^m)).$$

Для фиксированного $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим множество

$$\bar{V}_{n,i} = \{x \in T^m : |x_j| \leq \pi, j = 1, \dots, m, j \neq i, \tau_{n,i} \leq x_i \leq \tau_{n,i}^*\}$$

и разложим его на подмножества

$$\begin{aligned} \Pi_{n,i}^k &= q_{n,1}^{k_1} \times \dots \times q_{n,i-1}^{k_{i-1}} \times \{x_i \in T : \tau_{n,i} \leq x_i \leq \tau_{n,i}^*\} \times q_{n,i+1}^{k_{i+1}} \times \dots \times q_{n,m}^{k_m} \\ &(k = 1, \dots, 4^{m-1}; k_j = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, m, j \neq i). \end{aligned}$$

Запишем аналитическое выражение функции G_i для каждого множества $\Pi_{n,i}^k$ ($n = 1, 2, \dots; k = 1, \dots, 4^{m-1}$). Имеем

$$G_i(x) = \frac{1}{\omega_i^{-1}(b_n)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m g_n(x_j)(x_i - \tau_{n,i}) \quad (x \in \Pi_{n,i}^k, k = 1, \dots, 4^{m-1}, n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда следует, что для всех внутренних точек множества $\Pi_{n,i}^k$ ($n = 1, 2, \dots; k = 1, \dots, 4^{m-1}$)

$$\left| \frac{\partial G_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{x_i - \tau_{n,i}}{\omega_i^{-1}(b_n)} \leq \frac{\tau_{n,i}^* - \tau_{n,i}}{\omega_i^{-1}(b_n)} = 1 \quad (j = 1, \dots, m, j \neq i). \quad (3)$$

Непрерывная функция $G_i: T^m \rightarrow \mathbb{R}$ на множестве $A_i \cup B_i \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,i})$ равна нулю. Значит, в силу (3) можно заключить, что $G_i \in H_j(\delta; C(T^m))$ ($j = 1, \dots, m, j \neq i$).

Изучим теперь характер гладкости функции G_i относительно координатного направления x_i .

Для всех внутренних точек множества $\Pi_{n,i}^k$ ($n = 1, 2, \dots; k = 1, \dots, 4^{m-1}$)

$$\left| \frac{\partial G_i(x)}{\partial x_i} \right| = \frac{1}{\omega_i^{-1}(b_n)} \left| \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m g_n(x_j) \right| \leq \frac{b_n}{\omega_i^{-1}(b_n)} = \frac{\omega_i(\tau_{n,i}^* - \tau_{n,i})}{\tau_{n,i}^* - \tau_{n,i}}.$$

Для всех различных точек $(x_1, \dots, x_m)$ и $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_m)$, принадлежащих $V_{n,i}$ ($n = 1, 2, \dots$), имеем

$$\begin{aligned} &|G_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_m) - G_i(x_1, \dots, x_m)| \\ &\leq \left| \frac{\partial G_i(x)}{\partial x_i} \right| |h| = \frac{\omega_i(\tau_{n,i}^* - \tau_{n,i})}{\tau_{n,i}^* - \tau_{n,i}} |h|. \end{aligned}$$

Но так как $0 < |h| \leq \tau_{n,i}^* - \tau_{n,i}$, то отсюда в силу леммы 2 получим

$$|\Delta_i(h) G_i(x)| \leq \omega_i(|h|) \quad (x \in V_{n,i}).$$

Наконец, используя лемму 6, приходим к выводу, что

$$G_i \in H_i(\omega_i; C(T^m)),$$

причем данное включение является точным. Действительно, если $0 \leq x_j < \pi - \sqrt[m-1]{b_n}$ ($n = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, m, j \neq i$), то

$$\begin{aligned} & |G_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \tau_{n,i}^*, x_{i+1}, \dots, x_m) - G_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \tau_{n,i}, x_{i+1}, \dots, x_m)| \\ &= G(x_1, \dots, x_{i-1}, \tau_{n,i}^*, x_{i+1}, \dots, x_m) = b_n. \end{aligned}$$

Резюмируя вышесказанное, заключаем, что справедливо включение

$$G_i \in \left[\bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m H_k(\delta; C(T^m)) \right] \cap H_i(\omega_i; C(T^m))$$

и оно является точным.

Рассмотрим функцию G_m . Тогда для всех натуральных n имеем

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{m-1} |(\tilde{G}_m)_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_{n,m}^*) - (\tilde{G}_m)_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_{n,m})| \\ &= \left| \int_{T^{m-1}} (G_m(u_1, \dots, u_{m-1}, \tau_{n,m}^*) - G_m(u_1, \dots, u_{m-1}, \tau_{n,m})) \right. \\ & \quad \times \left. \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{u_i}{2} du_1 \cdots du_{m-1} \right|. \end{aligned}$$

По построению функции G_m получим

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{m-1} |(\tilde{G}_m)_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_{n,m}^*) - (\tilde{G}_m)_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_{n,m})| \\ &= \left| \int_{T^{m-1}} G_m(u_1, \dots, u_{m-1}, \tau_{n,m}^*) \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{u_i}{2} du_1 \cdots du_{m-1} \right| \\ &\geq b_n \left(\int_{\pi - \sqrt[m-1]{b_n}}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \right)^{m-1} \geq \frac{1}{4^{m-1}} b_n |\ln b_n|^{m-1} \end{aligned}$$

для всех n , начиная с некоторого номера n_0 .

Отсюда на основании леммы 4 с учетом соотношения $b_n = \omega_m(\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m})$ следует, что при любом n , начиная с некоторого номера n_1 ,

$$\begin{aligned} & |(\tilde{G}_m)_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_{n,m}^*) - (\tilde{G}_m)_{\{1, \dots, m-1\}}(0, \dots, 0, \tau_{n,m})| \\ &\geq A \omega_m(\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}) |\ln(\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m})|^{m-1}, \end{aligned}$$

где $A = \text{const}$.

Значит,

$$\omega_m((\tilde{G}_m)_{\{1, \dots, m-1\}}; \delta) \geq A_1 \omega_m(\delta) |\ln \delta|^{m-1}, \quad A_1 = \text{const}.$$

Функцию G_i ($i = 1, \dots, m$) от m переменных обозначим символом $\Lambda_i(m, e_i)$ и назовем *функцией типа Λ размерности m* по координатному направлению e_i .

Функция $\Lambda_i(m, e_i)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\Lambda_i(m, e_i) \in H_i(\omega_i; C(T^m))$,
- 2) $(\tilde{\Lambda}_i(m, e_i))_{\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}} \in H_i(\omega_i |\ln|^{m-1}; C(T^m))$,

причем эти включения являются точными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассмотрим функцию

$$g_i(u) = \begin{cases} \omega_i(u), & 0 \leq u \leq 1, \\ \frac{\omega_i(1)}{1-2\pi}(u-1) + \omega_i(1), & 1 < u \leq 2\pi, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m,$$

и продолжим ее по непрерывности на всю прямую. Очевидно, что $g_i \in C(T)$ ($i = 1, \dots, m$) и $\omega(g_i; \delta)_{C(T)} = \omega_i(\delta)$ ($0 \leq \delta \leq \pi$). Обозначим данную функцию символом $\Lambda_i(1, e_1)$ и назовем ее *функцией типа Λ размерности один*.

Далее, рассмотрим функцию

$$F = \sum_{k=1}^{m-1} \Lambda_k(m-1, e_k) + \Lambda_m(m, e_m),$$

которая задана всюду на $\mathbb{R}^m$.

F принадлежит $H(\omega_1, \dots, \omega_m; C(T^m))$ и

$$\omega_i(\tilde{F}_{\{1, \dots, m-1\}}; \delta)_{C(T^m)} \geq C\omega_i(\delta) |\ln \delta|^{m-2} \quad (i = 1, \dots, m-1, \delta \rightarrow 0+),$$

$$\omega_m(\tilde{F}_{\{1, \dots, m-1\}}; \delta)_{C(T^m)} \geq C\omega_m(\delta) |\ln \delta|^{m-1} \quad (\delta \rightarrow 0+), \quad C = \text{const.}$$

Итак, справедливость утверждения б) теоремы 1 нами доказана в том случае, когда количество сопряжений оператора $\tilde{f}_B$ равно $m-1$.

Пусть всюду на $\mathbb{R}^m$

$$K(x) = \sum_{k=1}^m \Lambda_k(m, e_k)(x).$$

Ясно, что $K \in H(\omega_1, \dots, \omega_m; C(T^m))$ и

$$\omega_i(\tilde{K}_{\{1, \dots, m\}}; \delta)_{C(T^m)} \geq C\omega_i(\delta) |\ln \delta|^{m-1} \quad (i = 1, \dots, m, \delta \rightarrow 0+), \quad C = \text{const.}$$

Значит, K является той в некотором смысле “экстремальной функцией”, которая подтверждает справедливость утверждения б) теоремы 1 для оператора $\tilde{f}_{\{1, \dots, m\}}$.

Теорема 1 доказана.

§ 4. О деформации классов $H(\omega_1, \dots, \omega_m; L(T^m))$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2 (А. Данелиа). а) Пусть функция $f \in H(\omega_1, \dots, \omega_m; L(T^m))$ ($m \geq 2$) и модули непрерывности ω_i ($i = 1, \dots, m$) удовлетворяют условию Зигмунда. Тогда

$$\tilde{f}_B \in \left[\bigcap_{i \in B} H_i(\omega_i |\ln|^{B|-1}; L(T^m)) \right] \cap \left[\bigcap_{j \in M \setminus B} H_j(\omega_j |\ln|^{B|}; L(T^m)) \right];$$

б) существует функция $F \in H(\omega_1, \dots, \omega_m; L(T^m))$ ($m \geq 2$) такая, что

$$\omega_i(\tilde{F}_B; \delta)_{L(T^m)} \geq C\omega_i(\delta) |\ln \delta|^{B|-1} \quad \text{при } 0 \leq \delta \leq \delta_0, \quad i \in B;$$

$$\omega_j(\tilde{F}_B; \delta)_{L(T^m)} \geq C\omega_j(\delta) |\ln \delta|^{B|} \quad \text{при } 0 \leq \delta \leq \delta_0, \quad j \in M \setminus B,$$

где C и δ_0 – положительные константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так как модули непрерывности ω_i ($i = 1, \dots, m$) удовлетворяют условию Зигмунда, то $\tilde{f}_B \in L(T^m)$ (см. лемму 1), причем порядок сопряжения не имеет значения. Справедливость утверждения а) с учетом сказанного вытекает из леммы 2.

б) Рассмотрим случай, когда размерность евклидова пространства равна m ($m \geq 2$), а количество сопряжений оператора $\tilde{f}_B$ равно $m - 1$.

Не нарушая общности рассуждений, доказательство утверждения б) при $|B| = m - 1$ приведем лишь для оператора

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\{1, \dots, m-1\}}(x_1, \dots, x_m) &= \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{m-1} \int_{T^{m-1}} f(x_1 + u_1, \dots, x_{m-1} + u_{m-1}, x_m) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{u_i}{2} du_1 \cdots du_{m-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим строго убывающую последовательность положительных чисел $(b_n)_{n \geq 1}$ такую, что:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < 1, b_0 = 0$;
- 2) $\sum_{i=n+1}^{\infty} b_i < b_n$;
- 3) для любого i ($i = 1, \dots, m$)

$$\omega_i^{-1}(b_{n+1}) < [\omega_i^{-1}(b_n)]^{1/(1-\alpha_i)},$$

где α_i ($0 < \alpha_i < 1, i = 1, \dots, m$) удовлетворяют условию леммы 3.

Положим

$$\begin{aligned} \tau_{n,i} &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \omega_i^{-1}(b_k), \quad i = 1, \dots, m; \quad n = 1, 2, \dots \\ \tau_{n,i}^* &= \tau_{n,i} + \omega_i^{-1}(b_n), \end{aligned}$$

Далее, для любого $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим функцию $g_{n,i}: T \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) следующего вида:

$$g_{n,i}(u) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_{n,i}^* - \tau_{n,i}}, & u \in [0, \tau_{n,i}^* - \tau_{n,i}]; \\ 0, & u \in T \setminus [0, \tau_{n,i}^* - \tau_{n,i}]. \end{cases}$$

При любом $n = 1, 2, \dots$ положим

$$G_n(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} \frac{b_n}{\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}} g_{n,1}(x_1) \cdots g_{n,m-1}(x_{m-1}) \omega_m(x_m), \\ \quad x_i \in T (i = 1, \dots, m-1), x_m \in [\tau_{n,m}, \tau_{n,m}^*]; \\ 0, \quad x_i \in T (i = 1, \dots, m-1), x_m \in T \setminus [\tau_{n,m}, \tau_{n,m}^*]. \end{cases}$$

Далее, определим функцию $G: T^m \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$G(x) = G(x_1, \dots, x_m) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x_1, \dots, x_m).$$

Построенную функцию G продолжим 2π -периодически на все пространство $\mathbb{R}^m$.
Очевидно, что $G \in L(T^m)$.

Докажем, что $G \in H(\omega_1, \dots, \omega_m; L(T^m))$.

Пусть $0 < h < \omega_m^{-1}(b_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} & (2\pi)^m \|G(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + h) - G(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{T^m} |G_n(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + h) - G_n(x_1, \dots, x_m)| dx_1 \cdots dx_m \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(h). \end{aligned}$$

Оценим интегралы $I_n(h)$ ($n = 1, 2, \dots$) по отдельности.

Существует такой номер N , что $h \in [\tau_{N+1,m}^* - \tau_{N+1,m}, \tau_{N,m}^* - \tau_{N,m})$.

Если $n = 1, \dots, N$, то по построению функции G_n будем иметь

$$\begin{aligned} I_n(h) & \leq \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}}^{\tau_{n,m}^* - h} |G_n(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + h) \\ & \quad - G_n(x_1, \dots, x_m)| dx_1 \cdots dx_m \\ & \quad + \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m} - h}^{\tau_{n,m}} G_n(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + h) dx_1 \cdots dx_m \\ & \quad + \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}^* - h}^{\tau_{n,m}^*} G_n(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m \\ & \leq \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}}^{\tau_{n,m}^* - h} [\omega_m(x_m + h) - \omega_m(x_m)] \\ & \quad \times \frac{b_n}{\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}} g_{n,1}(x_1) \cdots g_{n,m-1}(x_{m-1}) dx_1 \cdots dx_m \\ & \quad + \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m} - h}^{\tau_{n,m}} \frac{b_n}{\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}} \omega_m(x_m + h) \\ & \quad \times g_{n,1}(x_1) \cdots g_{n,m-1}(x_{m-1}) dx_1 \cdots dx_m \\ & \quad + \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}^* - h}^{\tau_{n,m}^*} \frac{b_n}{\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}} \omega_m(x_m) \\ & \quad \times g_{n,1}(x_1) \cdots g_{n,m-1}(x_{m-1}) dx_1 \cdots dx_m \\ & \leq b_n \omega_m(h) + \frac{2b_n}{\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}} h \omega_m(\tau_{n,m}^*). \end{aligned}$$

При $n = N + 1, \dots$ имеем

$$I_n(h) \leq 2\omega_m(\tau_{n,m}^*) b_n.$$

То есть

$$\begin{aligned} & (2\pi)^m \|G(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + h) - G(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \\ & \leq \sum_{n=1}^N b_n \omega_m(h) + \sum_{n=1}^N \frac{2b_n}{\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}} h \omega_m(\tau_{n,m}^*) + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2\omega_m(\tau_{n,m}^*) b_n. \end{aligned}$$

Если $\tau_{N+1,m}^* - \tau_{N+1,m} \leq h \leq (\tau_{N,m}^* - \tau_{N,m})^{1/(1-\alpha_m)}$, то в силу леммы 3 и по построению последовательности $(b_n)_{n \geq 1}$ будем иметь

$$\begin{aligned} & (2\pi)^m \|G(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + h) - G(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \\ & \leq \sum_{n=1}^N b_n \omega_m(h) + 2 \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}} \omega_m(\tau_{n,m}^*) h^{\alpha_m} h^{1-\alpha_m} + 2\omega_m(\pi) \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \\ & \leq A_1 \omega_m(h), \end{aligned}$$

если же $(\tau_{N,m}^* - \tau_{N,m})^{1/(1-\alpha_m)} < h < \tau_{N,m}^* - \tau_{N,m}$, то, принимая во внимание леммы 2 и 3 и свойства последовательности $(b_n)_{n \geq 1}$, получим

$$\begin{aligned} & (2\pi)^m \|G(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + h) - G(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \\ & \leq \sum_{n=1}^N b_n \omega_m(h) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{b_n}{\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}} \omega_m(\tau_{n,m}^*) h^{\alpha_m} h^{1-\alpha_m} \\ & \quad + 2 \frac{b_N}{\tau_{N,m}^* - \tau_{N,m}} h \omega_m(\tau_{N,m}^*) + 2\omega_m(\pi) \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \leq A_2 \omega_m(h), \end{aligned}$$

где A_1 и A_2 — положительные константы.

Значит,

$$\begin{aligned} & (2\pi)^m \|G(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + h) - G(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \leq A \omega_m(h), \\ & A = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Для $0 < h < \omega_k^{-1}(b_1)$ ($k = 1, \dots, m-1$) имеем

$$\begin{aligned} & (2\pi)^m \|G(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_m) - G(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}}^{\tau_{n,m}^*} |G_n(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_m) \\ & \quad - G_n(x_1, \dots, x_m)| dx_1 \cdots dx_m \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}}^{\tau_{n,m}^*} \frac{b_n}{\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}} \omega_m(x_m) \\ & \quad \times g_{n,1}(x_1) \cdots g_{n,k-1}(x_{k-1}) g_{n,k+1}(x_{k+1}) \cdots g_{n,m-1}(x_{m-1}) \\ & \quad \times |g_{n,k}(x_k + h) - g_{n,k}(x_k)| dx_1 \cdots dx_m \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_m(\tau_{n,m}^*) \int_T |g_{n,k}(x_k + h) - g_{n,k}(x_k)| dx_k. \end{aligned}$$

Существует такой номер N , что $h \in [\tau_{N+1,k}^* - \tau_{N+1,k}, \tau_{N,k}^* - \tau_{N,k})$.

При $n = 1, \dots, N$ имеем

$$\int_T |g_n(x_k + h) - g_n(x_k)| dx_k = \frac{2h}{\tau_{n,k}^* - \tau_{n,k}},$$

а при $n = N + 1, \dots$ имеем

$$\int_T |g_n(x_k + h) - g_n(x_k)| dx_k \leq 2.$$

То есть

$$\begin{aligned} & (2\pi)^m \|G(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_m) - G(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \\ & \leq 2 \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{\tau_{n,k}^* - \tau_{n,k}} \omega_m(\tau_{n,m}^*) h + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \omega_m(\tau_{n,m}^*). \end{aligned}$$

Если $\tau_{N+1,k}^* - \tau_{N+1,k} \leq h \leq (\tau_{N,k}^* - \tau_{N,k})^{1/(1-\alpha_k)}$, то по лемме 3 и по построению последовательности $(b_n)_{n \geq 1}$ будем иметь

$$(2\pi)^m \|G(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_m) - G(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \leq B_1 \omega_k(h).$$

Если же $(\tau_{N,k}^* - \tau_{N,k})^{1/(1-\alpha_k)} < h < \tau_{N,k}^* - \tau_{N,k}$, то

$$\begin{aligned} & (2\pi)^m \|G(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_m) - G(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \\ & \leq 2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{b_n}{\tau_{n,k}^* - \tau_{n,k}} \omega_m(\tau_{n,m}^*) h + 2 \frac{b_N}{\tau_{N,k}^* - \tau_{N,k}} \omega_m(\tau_{N,m}^*) h \\ & \quad + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \omega_m(\tau_{n,m}^*) \leq B_2 \omega_k(h), \end{aligned}$$

где B_1 и B_2 — положительные константы.

Значит,

$$\begin{aligned} & (2\pi)^m \|G(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_m) - G(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \leq B \omega_k(h), \\ & B = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

То есть

$$G \in H(\omega_1, \dots, \omega_m; L(T^m)).$$

Оценим теперь $\omega_k(\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}; \delta)_{L(T^m)}$ ($k = 1, \dots, m$) снизу.

Для $h = \tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}$ ($n = 2, 3, \dots$) согласно (4) и по построению функции G получим

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{2m-1} \|\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + h) - \tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \\ & \geq \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}}^{\tau_{n,m}^*} \left| \int_{T^{m-1}} \frac{b_n}{\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}} \omega_m(x_m) g_{n,1}(x_1 + u_1) \right. \\ & \quad \times \dots \times g_{n,m-1}(x_{m-1} + u_{m-1}) \prod_{i=1}^{m-1} \text{ctg} \frac{u_i}{2} du_1 \dots du_{m-1} \Big| dx_1 \dots dx_m \\ & \geq b_n \omega_m(\tau_{n,m}) \int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,1}(x_1 + u_1) \text{ctg} \frac{u_1}{2} du_1 \right| dx_1 \\ & \quad \times \dots \times \int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,m-1}(x_{m-1} + u_{m-1}) \text{ctg} \frac{u_{m-1}}{2} du_{m-1} \right| dx_{m-1}. \end{aligned}$$

Для любого k ($k = 1, \dots, m-1$) оценим интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,k}(x_k + u_k) \operatorname{ctg} \frac{u_k}{2} du_k \right| dx_k$$

снизу. Получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,k}(x_k + u_k) \operatorname{ctg} \frac{u_k}{2} du_k \right| dx_k \\ & \geq \int_{\tau_{n,k}^* - \tau_{n,k}}^{\pi/2} \left[\int_{x_k - (\tau_{n,k}^* - \tau_{n,k})}^{x_k} \frac{1}{\tau_{n,k}^* - \tau_{n,k}} \cdot \frac{1}{u_k} du_k \right] dx_k \\ & \geq \frac{1}{\tau_{n,k}^* - \tau_{n,k}} \int_{\tau_{n,k}^* - \tau_{n,k}}^{\pi/2} \frac{\tau_{n,k}^* - \tau_{n,k}}{x_k} dx_k \geq |\ln b_n| \geq C_1 |\ln(\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m})|, \end{aligned}$$

где $C_1 = \text{const} > 0$.

То есть

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{2m-1} \|\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m + (\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m})) \\ & - \tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \\ & \geq C_2 \omega_m(\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}) |\ln(\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m})|^{m-1}, \quad C_2 = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\omega_m(\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}; \delta)_{L(T^m)} \geq C_3 \omega_m(\delta) |\ln \delta|^{m-1}, \quad \delta \rightarrow 0+, \quad C_3 = \text{const}.$$

Пусть теперь $h = \tau_{n,k}^* - \tau_{n,k}$ ($k = 1, \dots, m-1$; $n = 2, 3, \dots$). По построению функции G имеем

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{2m-1} \|\tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_m) \\ & - \tilde{G}_{\{1, \dots, m-1\}}(x_1, \dots, x_m)\|_{L(T^m)} \\ & \geq \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}}^{\tau_{n,m}^*} \left| \int_{T^{m-1}} \frac{b_n}{\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m}} \omega_m(x_m) g_{n,1}(x_1 + u_1) \right. \\ & \quad \times \dots \times g_{n,k-1}(x_{k-1} + u_{k-1}) g_{n,k+1}(x_{k+1} + u_{k+1}) \\ & \quad \times \dots \times g_{n,m-1}(x_{m-1} + u_{m-1}) (g_{n,k}(x_k + u_k + h) - g_{n,k}(x_k + u_k)) \\ & \quad \times \prod_{i=1}^{m-1} \operatorname{ctg} \frac{u_i}{2} du_1 \dots du_{m-1} \Big| dx_1 \dots dx_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq b_n \omega_m(\tau_{n,m}) \int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,1}(x_1 + u_1) \operatorname{ctg} \frac{u_1}{2} du_1 \right| dx_1 \\
&\quad \times \cdots \times \int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,k-1}(x_{k-1} + u_{k-1}) \operatorname{ctg} \frac{u_{k-1}}{2} du_{k-1} \right| dx_{k-1} \\
&\quad \times \int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,k+1}(x_{k+1} + u_{k+1}) \operatorname{ctg} \frac{u_{k+1}}{2} du_{k+1} \right| dx_{k+1} \\
&\quad \times \cdots \times \int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,m-1}(x_{m-1} + u_{m-1}) du_{m-1} \right| dx_{m-1} \\
&\quad \times \int_0^{\pi/2} \left| \int_T (g_{n,k}(x_k + u_k + h) - g_{n,k}(x_1 + u_k)) \operatorname{ctg} \frac{u_k}{2} du_k \right| dx_k \\
&\geq C_4 \omega_k(\tau_{n,k}^* - \tau_{n,k}) |\ln(\tau_{n,k}^* - \tau_{n,k})|^{m-2}, \quad C_4 = \text{const.}
\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
\omega_k(\tilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}; \delta)_{L(T^m)} &\geq C_5 \omega_k(\delta) |\ln \delta|^{m-2}, \\
\delta &\rightarrow 0+, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad C_5 = \text{const.}
\end{aligned}$$

Для функции $\tilde{G}_{\{1,\dots,m\}}$ можно заключить, что

$$\omega_m(\tilde{G}_{\{1,\dots,m\}}; \delta)_{L(T^m)} \geq C \omega_m(\delta) |\ln \delta|^{m-1}, \quad \delta \rightarrow 0+, \quad C = \text{const.}$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. *Жижиаишвили Л. В.* Некоторые вопросы теории тригонометрических рядов Фурье и их сопряженных. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1993.
2. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. II. Конструктивная теория функций (1931-1953). М.: Изд-во АН СССР, 1960.
3. *Никольский С. М.* Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. №3. С. 191-194.
4. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
5. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* A convergence criterion for Fourier series // Math. Z. 1928. V. 28. P. 612-634.
6. *Cesari L.* Sulle serie di Fourier delle funzioni Lipschitziane di più variabili // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1938. V. 7. №2. P. 279-295.
7. *Жак И. Е.* По поводу одной теоремы Л. Чезари о сопряженных функциях двух переменных // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87. №6. С. 877-880.
8. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды ММО. 1956. Т. 5. С. 484-522.
9. *Бари Н. К.* О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. №5. С. 285-302.
10. *Лекишвили М. М.* О сопряженных функциях многих переменных в классе $\text{Lip } \alpha$ // Матем. заметки. 1978. Т. 23. №3. С. 361-372.
11. *Окулов В. А.* Многомерный аналог одной теоремы Привалова // Матем. сб. 1995. Т. 186. №2. С. 93-104.
12. *Окулов В. А.* Многомерный аналог одной теоремы Зигмунда // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №5. С. 717-727.

13. *Окулов В. А.* Некоторые структурные свойства сопряженных функций в пространстве $L(T^N)$ // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 5. С. 87–114.
14. *Лекишвили М. М.* О сопряженных функциях многих переменных // Сообщ. АН ГССР. 1979. Т. 94. № 1. С. 21–23.
15. *Danelia A.* Conjugated functions of multiple variables and deformation of $H(\omega; L(T^m))$ classes // Bull. Georgian Acad. Sci. 1997. V. 156. № 2. P. 199–201.
16. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
17. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
18. *Осколков К. И.* Неусилимость оценки Лебега для приближения функций с заданным модулем непрерывности суммами Фурье // Труды МИАН. 1971. Т. 62. С. 337–345.
19. *Жижиашвили Л. В.* Интегрируемость и непрерывность сопряженных функций многих переменных // Сообщ. АН ГССР. 1980. Т. 97. № 1. С. 17–20.
20. *Стороженко Э. А.* О некоторых теоремах вложения // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 2. С. 187–200.

Тбилисский государственный
университет им. И. Джавахишвили
E-mail: annadanelia@hotmail.com

Поступила в редакцию
21.08.2000