Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Сорокин, О линейной независимости значений обобщенных полилогарифмов,
Матем. сб., 2001, том 192, номер 8, 139–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm590>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:21:10

УДК 517.53+511.3

В. Н. Сорокин

О линейной независимости значений обобщенных полилогарифмов

Доказана линейная независимость значений в некоторых рациональных точках обобщенных полилогарифмов, порождающих алгебру всех аналитических функций с тремя логарифмическими точками ветвления. Используются аппроксимации Эрмита–Паде для системы Анжелеско–Никишина, заданной полным бинарным графом.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. В работе решается типичная для теории диофантовых приближений задача о линейной независимости значений некоторых G -функций [1]. В этом направлении имеется большое число работ, посвященных обобщенным гипергеометрическим функциям. В настоящей работе мы рассматриваем алгебру всех аналитических функций с чисто логарифмическими особенностями в точках $0, 1, \infty$, содержащую, в частности, всевозможные произведения полилогарифмов. Результаты работы легко обобщаются и на случай степенных особенностей, но мы этот случай не рассматриваем.

Изучаемый нами класс степенных рядов весьма широк, и, тем не менее, основная теорема работы получается достаточно простыми методами. Эта простота является следствием идей, полученных в работе [2] для так называемых обобщенных систем Никишина (систем марковских функций, определяемых произвольными графами-деревьями). В частности, лемма 12 о линейной независимости построенных в п. 13 аппроксимаций Эрмита–Паде является прямым следствием работы [2], в то время как прямое доказательство этой леммы представляет собой очень сложную задачу.

В пп. 2, 3 мы строим некоторое множество степенных рядов, в п. 4 формулируем для него основной результат работы. Далее, в пп. 5–13 мы изучаем свойства совместных аппроксимаций Паде, на основе которых в п. 14 завершаем доказательство основной теоремы.

2. Граф индексов. Построим по индукции множества $S^{(k)}$ для $k = 1, 2, 3, \dots$, элементами которых служат некоторые последовательности длины k , состоящие из трех символов: $-, 0, +$. Пусть $S^{(1)} = \{(0)\}$. При $k > 1$ полагаем

$$S^{(k)} = \{j = (j_1, \dots, j_{k-1}, j_k) \mid j' = (j_1, \dots, j_{k-1}) \in S^{(k-1)}, j_k \neq j_{k-1}\}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 99-01-01251, 00-15-96132, 01-01-00738) и фонда INTAS (грант № 2000-272).

Обозначим

$$S_r = \bigsqcup_{k=1}^r S^{(k)}.$$

Тогда S_r – множество вершин графа с направленными ребрами, идущими от вершины j' к вершине j (см. рис. 1). То есть S_r – полный бинарный граф. На нем определено отношение частичного порядка. Число вершин S_r равно

$$N_r := \#S_r = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{r-1} = 2^r - 1.$$

Обозначим также через

$$S = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} S^{(k)}$$

полный бесконечный бинарный граф.

Рис. 1

3. Алгебра степенных рядов. На множестве степенных рядов

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{z^n}$$

определим три оператора:

$$(\mathcal{R}_- F)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{n} F_n,$$

$$(\mathcal{R}_0 F)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} F_m,$$

$$(\mathcal{R}_+ F)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F_m.$$

Заметим, что

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_-.$$

Определим по индукции степенные ряды $f_j(z)$, $j \in S_r$. Положим

$$f_{(0)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{z^n}$$

и

$$f_j(z) = (\mathcal{R}_{j_k} f_{j'})(z).$$

Ряды $f_j(z)$ сходятся в области $|z| > 1$.

Добавив к графу S_r корневую вершину – пустую последовательность $\emptyset$, получим расширенный граф $\overline{S}_r$. Корневой вершине по определению соответствует функция $f_{\emptyset} = 1$.

Таким образом, произвольный ряд $f = f_j$, $j \in S_r$, имеет вид

$$f(z) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{z^{n_1}} \frac{1}{n_1^{s_1}} \sum_{n_2=1}^{n_1-\varepsilon_1} \frac{1}{n_2^{s_2}} \cdots \sum_{n_t=1}^{n_{t-1}-\varepsilon_{t-1}} \frac{1}{n_t^{s_t}},$$

где параметры $s_1, s_2, \dots, s_t$ могут принимать два значения 1 и 2, а параметры $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{t-1}$ – также два значения 0 и 1, но в соответствии со специальным правилом. А именно, если $s_l = 2$, то ε_l может быть как нулем, так и единицей, если же $s_l = 1$, то $\varepsilon_l = 0$, когда $\varepsilon_{l-1} = 1$, и $\varepsilon_l = 1$, когда $\varepsilon_{l-1} = 0$, при этом $\varepsilon_1 = 0$ (при $s_1 = 1$). Параметр $t = 1, 2, 3, \dots$ любой, лишь бы выполнялось неравенство

$$|s| := s_1 + s_2 + \cdots + s_t \leq r.$$

Легко видеть, что количество таких рядов с $|s| = r$ действительно равно 2^{r-1} .

Обозначим через $\mathfrak{A}$ линейную оболочку функций f_j над полем комплексных чисел:

$$\mathfrak{A} := \langle f_j \mid j \in \overline{S} \rangle / \mathbb{C}.$$

(Можно также рассмотреть линейную оболочку над полем рациональных функций $\mathbb{C}(z)$.) Тогда система $\{f_j \mid j \in \overline{S}\}$ будет базисом линейного пространства $\mathfrak{A}$. Справедливо следующее замечательное и легко проверяемое свойство. Оказывается, $\mathfrak{A}$ – это градуированная алгебра (относительно обычного умножения и с естественной градуировкой, соответствующей этажам графа $\overline{S}$). Алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из всех функций, имеющих в точках $z = 0, 1, \infty$ чисто логарифмические особенности. А именно, пусть $f \in \mathfrak{A}$. Функция f аналитически продолжается вдоль любой кривой в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$. В проколотой окрестности точки $z = 0$ любой элемент функции f имеет следующее разложение:

$$\sum_{l=0}^L \alpha_l \ln^l z,$$

где α_l – некоторые функции, голоморфные в точке $z = 0$. Аналогичным образом устроены элементы f в окрестностях точек $z = 1$ и $z = \infty$.

Алгебра $\mathfrak{A}$ имеет естественную природу. В последнее десятилетие она интенсивно изучается специалистами по алгебре, теории чисел, анализу, комбинаторике, математической физике, алгебраической геометрии, дифференциальным уравнениям (см., например, [3], [4]). При этом в качестве стандартного базиса алгебры $\mathfrak{A}$ всегда используется базис из обобщенных полилогарифмов $\{Li_s(1/z)\}$. Это — хорошо известное в теории специальных функций обобщение полилогарифмов, а именно:

$$Li_s(z) = \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_t < \infty} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_t^{s_t}},$$

где $s = (s_1, s_2, \dots, s_t)$ — мультииндекс с положительными компонентами. Однако до сих пор не было получено ни одного арифметического результата для всей совокупности обобщенных полилогарифмов.

Легко видеть, что набор степенных рядов $f_j(z)$, когда $j \in S^{(r)}$, и набор степенных рядов $Li_s(1/z)$, когда $|s| = r$, связаны между собой невырожденным линейным преобразованием с рациональными коэффициентами. Поэтому сформулированный ниже арифметический результат в равной степени относится и к обобщенным полилогарифмам.

Сравнивая ряды Li_s с рядами f_j , видим, что ряды Li_s имеют, на первый взгляд, гораздо более простую и естественную структуру. Однако именно заложенная в рядах f_j структура бинарного графа позволяет построить для них аппроксимации Эрмита–Паде и, как следствие, получить арифметический результат.

4. Основная теорема. Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. *Если рациональное число p/q удовлетворяет условию*

$$|p/q| > (2qe^r)^{N_r},$$

то числа

$$f_j(p/q), \quad j \in \overline{S_r},$$

линейно независимы над полем рациональных чисел. При этом для любых целых рациональных a_j , $j \in \overline{S_r}$, таких, что

$$a := \max\{|a_j| : j \in S_r\} > 0,$$

справедлива оценка снизу соответствующей линейной формы

$$\left| \sum_{j \in \overline{S_r}} a_j f_j(p/q) \right| \geq \frac{c}{a^\mu},$$

где

$$\mu = \frac{\ln |p| + r + 4}{(1/N_r) \ln |p/q| - \ln q - r - 1},$$

а c — эффективно вычисляемая положительная постоянная.

5. Аппроксимации Эрмита–Паде. Поставим следующую задачу об аппроксимациях Эрмита–Паде второго типа.

ЗАДАЧА 1. Для данного целого неотрицательного числа n требуется найти ненулевой многочлен $Q_n(z)$ степени не выше nN_r такой, что для некоторых многочленов $P_{n,j}(z)$ выполняются следующие интерполяционные условия:

$$R_{n,j}(z) := Q_n(z)f_j(z) - P_{n,j}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

где $j \in S_r$.

Существование решения очевидно. Единственность докажем ниже. При этом мы будем применять методы, основанные на соотношениях ортогональности.

Сделаем обзор предшествующих результатов. При этом из всего многообразие работ мы остановимся только на тех, в которых, во-первых, изучаются именно фрагменты полного бинарного графа S (или аналогичные конструкции) и, во-вторых, основным методом исследования служат соотношения ортогональности.

Е. М. Никишин одним из первых начал эффективно применять соотношения ортогональности в теории диофантовых приближений. Так, например, в работе [5] им, в частности, рассмотрена последовательность полилогарифмов, которая определяется графом (вместо символа j_k используем символ Δ_{j_k})

$$\Delta_0 \longrightarrow \Delta_- \longrightarrow \Delta_- \longrightarrow \dots$$

В работе [6] мы построили аппроксимации Эрмита–Паде второго типа для классической системы последовательных степеней логарифма, начало исследования которой положил К. Малер [7]. Эта система соответствует графу

$$\Delta_0 \longrightarrow \Delta_0 \longrightarrow \Delta_0 \longrightarrow \dots$$

В работе [8], используя граф

$$\Delta_0 \longrightarrow \Delta_- \longrightarrow \Delta_0 \longrightarrow \Delta_- \longrightarrow \dots,$$

нам удалось несколько улучшить результат К. Малера о мере трансцендентности числа π .

В работе [9] мы предложили новое доказательство теоремы Апери об иррациональности числа $\zeta(3)$, использующее граф

$$\Delta_0 \longrightarrow \Delta_+ \longrightarrow \Delta_-.$$

Ряд интересных результатов для полилогарифмов получил М. Хата (см., например, [10]).

Все перечисленные выше системы функций сводятся к системе Никишина. В следующем пункте мы дадим определение более общей смешанной системы Анжелеско–Никишина.

6. Система Анжелеско–Никишина. Для графа S_r построим смешанную систему Анжелеско–Никишина [2]. Пусть

$$\Delta_- = (-\infty, 0], \quad \Delta_0 = [0, 1], \quad \Delta_+ = [1, +\infty)$$

– попарно не перекрывающиеся промежутки вещественной оси. Определим три интегральных оператора

$$\begin{aligned} \frac{(T_-g)(z)}{1-z} &= \int_{-\infty}^0 \frac{g(x)}{z-x} \frac{dx}{1-x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_-, \\ (T_0g)(z) &= \int_0^1 \frac{g(x)}{z-x} dx, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_0, \\ \frac{(T_+g)(z)}{z} &= \int_1^{+\infty} \frac{g(x)}{x-z} \frac{dx}{x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_+. \end{aligned}$$

Для

$$j = (j_1, j_2, \dots, j_k) \in S_r$$

полагаем

$$g_j = T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_k} 1.$$

ЛЕММА 1. Для любого $j \in S^{(r)}$ имеет место включение

$$g_j - f_j \in \langle f_d \mid d \in S_{r-2} \rangle.$$

Следствием леммы 1 является следующая

ЛЕММА 2. Справедливо равенство

$$\langle g_j \mid j \in S_r \rangle = \langle f_j \mid j \in S_r \rangle.$$

Таким образом, задача 1 равносильна аналогичной задаче для функций $\{g_j\}$. В работе [2] было доказано, что решение этой задачи для функций $\{g_j\}$ единственно (с точностью до нормировки).

7. Эквивалентность двух систем. Докажем леммы 1 и 2. Непосредственно проверим, что для $j \in S_2$ выполняются равенства $g_j = f_j$. Далее применим индукцию.

Определим действие дробно-линейного отображения $\Phi(z) = 1/(1-z)$ на функциях следующим образом:

$$(\Phi g)(z) = g(\Phi^{-1}(z)).$$

Тогда

$$T_- \circ \Phi = \Phi \circ T_0, \quad T_0 \circ \Phi = \Phi \circ (-T_+), \quad T_+ \circ \Phi = \Phi \circ (-T_-).$$

Обозначим $\varphi_j = \Phi^{-1} f_j$. Из определения этих рядов вытекают формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dx} \varphi_j(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1-x} \varphi_{j'}(x), & \text{если } j_k = -, \\ -\frac{1}{x} \varphi_{j'}(x), & \text{если } j_k = 0, \\ -\frac{1}{x(1-x)} \varphi_{j'}(x), & \text{если } j_k = +. \end{cases}$$

Пусть $g = g_j$ для некоторого $j = (j_1, \dots, j_k) \in S^{(k)}$ с $k \geq 3$. По определению

$$g(z) = \int_0^1 \frac{q(x)}{z-x} dx,$$

где $q = T_{j_2} \cdots T_{j_k} 1$. Рассмотрим два случая: $j_2 = -$ и $j_2 = +$.

Пусть $j_2 = -$. Положим $Q = \Phi q$. Тогда

$$Q = \pm T_{\widehat{j}_2} \cdots T_{\widehat{j}_k} 1,$$

где используется подстановка

$$\frown: (-, 0, +) \mapsto (0, +, -),$$

а знак $+$ или $-$ определяется четностью числа нулей и плюсов в последовательности $'j = (j_2, \dots, j_k)$. По предположению индукции

$$g_{r\widehat{j}} := \pm Q = f_{r\widehat{j}} + \widetilde{f}, \quad \widetilde{f} \in \langle f_d \mid d \in S_{k-3} \rangle.$$

Следовательно,

$$\pm q = \varphi_{r\widehat{j}} + \widetilde{\varphi}, \quad \widetilde{\varphi} \in \langle \varphi_d \mid d \in S_{k-3} \rangle.$$

Запишем

$$\pm g = G + \widetilde{g}, \quad G = T_0 \varphi_{r\widehat{j}}, \quad \widetilde{g} = T_0 \widetilde{\varphi}.$$

По предположению индукции

$$\widetilde{g} \in T_0 \Phi^{-1} \langle f_d \mid d \in S_{k-3} \rangle = T_0 \Phi^{-1} \langle g_d \mid d \in S_{k-3} \rangle \subset \langle g_d \mid d \in S_{k-2} \rangle.$$

Далее,

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{z^n}, \quad G_n = \int_0^1 x^{n-1} \varphi_{r\widehat{j}}(x) dx.$$

Отметим, что $\varphi_{r\widehat{j}}(1) = 0$. Рассмотрим три случая: $\widehat{j}_k = -, 0, +$.

Пусть $\widehat{j}_k = -$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$G_n = \frac{x^n}{n} \varphi_{r\widehat{j}}(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{n} \frac{\varphi_{r\widehat{j}'}(x)}{1-x} dx = \frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{\infty} h_m,$$

где

$$h_m = \int_0^1 x^{m-1} \varphi_{r\widehat{j}'}(x) dx.$$

Обозначим

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{z^n}.$$

Тогда

$$G_n = \frac{1}{n} h(1) - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n h_m.$$

По предположению индукции

$$h = T_0 \varphi_{\hat{j}} = T_0 \Phi^{-1} f_{\hat{j}} = T_0 \Phi^{-1} (g_{\hat{j}} + \bar{g}),$$

где

$$\bar{g} \in \langle g_d \mid d \in S_{k-4} \rangle.$$

Следовательно,

$$-h = \pm f_{\hat{j}} + \bar{f}, \quad \bar{f} \in \langle f_d \mid d \in S_{k-3} \rangle.$$

Окончательно получим

$$\pm G = \pm h(1) f_{(0)} \pm \mathcal{R}_+ \bar{f} + \mathcal{R}_+ f_{\hat{j}},$$

при этом $\mathcal{R}_+ f_{\hat{j}} = f_j$ и $\mathcal{R}_+ \bar{f} \in \langle f_d \mid d \in S_{k-2} \rangle$, что и требовалось доказать.

В случае $\hat{j}_k = 0$ или $+$ рассуждения аналогичны. При этом в первом случае мы пользуемся следующей формулой интегрирования по частям:

$$G_n = \frac{x^n}{n} \varphi_{\hat{j}}(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} \varphi_{\hat{j}}(x) dx = \frac{1}{n} h_n,$$

а во втором –

$$G_n = \frac{x^n}{n} \varphi_{\hat{j}}(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} \frac{\varphi_{\hat{j}}(x)}{1-x} dx = \frac{1}{n} \sum_{m=n}^{\infty} h_m = \frac{1}{n} h(1) - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} h_m.$$

Случай $j_2 = +$ сводится к случаю $j_2 = -$ заменой $z \mapsto 1 - z$. Леммы 1 и 2 доказаны.

8. Формула Родрига. Найдем явный вид решения задачи 1. Рассмотрим следующий дифференциальный оператор:

$$D_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^n (1-x)^n.$$

ЛЕММА 3. *Справедлива формула Родрига*

$$Q_n = D_n D_{2n} D_{4n} \cdots D_{2^{r-1}n} 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлен Q_n в формулировке леммы имеет степень nN_r . Из условий задачи 1 и леммы 1 следует, что многочлен Q_n единственным образом (с точностью до нормировки) определяется следующими соотношениями ортогональности

$$\int_0^1 Q_n(x) x^m g_{\hat{j}}(x) dx = 0, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad j \in S_r.$$

Из доказательства леммы 1 вытекает, что эти соотношения ортогональности равносильны следующим:

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q_n(x)x^m dx &= 0, \\ \int_0^1 Q_n(x)x^m \varphi_j(x) dx &= 0, \\ \int_0^1 Q_n(x)x^m \varphi_j^*(x) dx &= 0,\end{aligned}$$

где $j \in S_{r-1}$ и $m = 0, \dots, n-1$. При этом $\varphi_j^*(x) = f_j(1/x)$ и $\varphi_j(x) = \varphi_j^*(1-x)$.

Докажем эти соотношения ортогональности индукцией по r . При $r = 1$ получаем многочлены Лежандра. Пусть $r > 1$. Запишем $Q_n = D_n \tilde{Q}_n$. Соотношения первой группы проверяются интегрированием по частям. Далее,

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q_n(x)x^m \varphi_j(x) dx &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n (1-x)^n \tilde{Q}_n(x) \frac{d^n}{dx^n} \{x^m \varphi_j(x)\} dx \\ &= \int_0^1 \tilde{Q}_n(x) \sum_{l=0}^{r-1} \pi_l(x) \varphi_{(j_1, \dots, j_l)}(x) dx,\end{aligned}$$

где $\pi_l(x)$ — некоторые многочлены степени не выше $2n-1$. Тогда соотношения второй группы выполняются по индукции (с заменой n на $2n$). Соотношения третьей группы справедливы в силу инвариантности многочлена $Q_n(x)$ относительно замены $x \mapsto 1-x$.

Лемма 3 доказана.

9. Арифметические свойства. Из формулы Родрига и условий задачи 1 вытекают арифметические свойства коэффициентов многочленов Q_n и $P_{n,j}$. Обозначим через ω_N наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, N$.

ЛЕММА 4. *Многочлены*

$$Q_n(x), \quad \omega_{nN_r}^m P_{n,j}(x), \quad j \in S^{(m)}, \quad m = 1, \dots, r,$$

имеют целые рациональные коэффициенты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого целого неотрицательного числа N дифференциальный оператор

$$\frac{1}{N!} \left(\frac{d}{dx} \right)^N$$

переводит многочлен с целыми рациональными коэффициентами снова в многочлен с целыми рациональными коэффициентами. Следовательно, в силу формулы Родрига многочлен Q_n имеет целые рациональные коэффициенты.

Далее, из условий задачи 1 следует, что многочлен $P_{n,j}$ равен полиномиальной части произведения двух степенных рядов $Q_n f_j$, первый из которых, как мы только что показали, имеет целые рациональные коэффициенты. Рассмотрим коэффициенты ряда $f = f_j$, выписанного в явном виде в п. 3. Пусть $j \in S^{(m)}$, т.е. $s_1 + s_2 + \dots + s_t = m$. Тогда, умножая первые N коэффициентов этого ряда на ω_N^m , получим целые рациональные числа, откуда и следует лемма 4.

10. Риманова поверхность. Сделаем замечание об асимптотическом поведении решений задачи 1 при $n \rightarrow \infty$.

Построим 2^r -листную риманову поверхность $\mathfrak{R}$ с листами $\mathfrak{R}_j$, $j \in \overline{S}_r$. Склеим $\mathfrak{R}_\emptyset$ с $\mathfrak{R}_{(0)}$ по разрезу Δ_0 и $\mathfrak{R}_{j'}$ с $\mathfrak{R}_j$ по разрезу Δ_{j_k} , где $j = (j', j_k)$. (Строго говоря, поверхность $\mathfrak{R}$ склеивается из верхних и нижних полуплоскостей.) Поверхность $\mathfrak{R}$ имеет род нуль, но ее структура достаточно сложна.

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 1. Если $r = 1$, то $z = 0, 1$ – точки ветвления второго порядка, а в бесконечности находятся две правильные точки.

ПРИМЕР 2. Если $r = 2$, то локальная структура поверхности во всех трех точках $z = 0, 1, \infty$ одинаковая, а именно: есть одна точка ветвления третьего порядка и одна правильная точка.

ПРИМЕР 3. Если $r = 3$, то при $z = 0, 1$ имеем одну точку ветвления четвертого порядка, одну точку ветвления третьего порядка и одну правильную точку, а в бесконечности – точку ветвления пятого порядка и три правильные точки.

ПРИМЕР 4. Если $r = 4$, то при $z = 0, 1$ имеем две точки ветвления пятого порядка, одну точку ветвления третьего порядка и три правильные точки. При $z = \infty$ имеем одну точку ветвления седьмого порядка, две точки ветвления третьего порядка и три правильные точки.

Из результатов работы [2] следует, что асимптотическое поведение многочленов Q_n и функций второго рода $R_{n,j}$ описывается в терминах некоторой мероморфной функции на поверхности $\mathfrak{R}$.

Пусть

$$\Psi: \mathfrak{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

– мероморфная функция. Укажем ее дивизор. В бесконечно удаленной точке на листе $\mathfrak{R}_\emptyset$ функция Ψ имеет полюс порядка N_r :

$$\Psi(z) \asymp z^{N_r}, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathfrak{R}_\emptyset.$$

В бесконечно удаленной точке на любом другом листе функция Ψ имеет “нуль первого порядка”:

$$\Psi(z) \asymp \frac{1}{z}, \quad z \rightarrow \infty, \quad z \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}_\emptyset$$

(порядок нуля мы заключили в кавычки, потому что в бесконечности есть точки ветвления и, строго говоря, порядок нуля равен порядку ветвления). Никаких других нулей и полюсов функция Ψ не имеет. Такая функция существует и единственна (с точностью до нормировки, которая должна быть согласована с нормировкой решения задачи 1).

Равномерно на компактах вне отрезка $[0, 1]$ справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_n(z)|^{1/n} = |\Psi_\emptyset(z)|,$$

где $\Psi_\emptyset$ – однозначная ветвь функции Ψ на листе $\mathfrak{R}_\emptyset$. Используя другие ветви функции Ψ , можно написать асимптотические формулы для других величин, связанных с решением задачи 1, например, для функций второго рода.

В силу симметрии построенной нами системы Анжелеско–Никишина отсутствует так называемый эффект столкновения зарядов. Это означает, что риманова поверхность $\mathfrak{R}$ строится по исходным отрезкам Δ_j , а не по некоторым меньшим отрезкам. Отсюда в качестве следствия, используя второй принцип максимума для супергармонических функций, получим следующее свойство монотонности

$$|\Psi_j| \leq |\Psi_{j'}|,$$

причем неравенство строгое вне вещественной оси.

Как следует из леммы 4, арифметические результаты могут быть получены только при больших z . Поэтому в следующих пунктах мы ограничимся лишь оценками многочленов Q_n и функций второго рода.

11. Асимптотика знаменателей. По теореме Ролля все нули $x_{n,l}$ многочлена $Q_n(x)$ лежат на интервале $(0, 1)$. Обозначим через $\pm q_n$ модуль старшего коэффициента этого многочлена, $q_n > 0$. Тогда

$$|Q_n(z)| = \left| \pm q_n \prod_{l=1}^{nN_r} (z - x_{n,l}) \right| < q_n (|z| + 1)^{nN_r}.$$

Далее,

$$q_n x^{nN_r} = \prod_{l=1}^r \left\{ \frac{1}{(2^{l-1}n)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2^{l-1}n} x^{2^l n} \right\} 1 = x^{nN_r} \prod_{l=0}^{r-1} \binom{2^r n}{2^l n}.$$

По формуле Стирлинга при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$q_n^{1/n} \rightarrow \varkappa = \prod_{l=0}^{r-1} \frac{(2^r)^{2^r}}{(2^l)^{2^l} (2^r - 2^l)^{(2^r - 2^l)}} = \prod_{l=0}^{r-1} \frac{(2^r)^{2^r}}{(2^l)^{2^l}} \frac{(2^r)^{2^l}}{(2^r)^{2^r}} \frac{(1 - 1/2^{r-l})^{2^l}}{(1 - 1/2^{r-l})^{2^r}}.$$

Имеем

$$\prod_{l=0}^{r-1} 2^{(r-l)2^l} = \exp \left\{ \ln 2 \sum_{l=0}^{r-1} (r-l)2^l \right\} = \exp \{ \ln 2 (2^{r+1} - r - 2) \}.$$

Далее,

$$\prod_{l=0}^{r-1} (1 - 1/2^{r-l}) > \prod_{l=1}^{\infty} (1 - 1/2^l) = \exp \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \ln(1 - 1/2^l) \right\}.$$

При этом

$$-\sum_{l=1}^{\infty} \ln(1 - 1/2^l) < -\int_0^{\infty} \ln(1 - 1/2^x) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \ln \frac{1}{1-y} \frac{dy}{y} = \frac{\zeta(2)}{\ln 2} = \frac{\pi^2}{6 \ln 2}.$$

И, наконец,

$$\prod_{l=0}^{r-1} (1 - 1/2^{r-l})^{2^l} < 1/2^{2^{r-1}}.$$

Окончательно получим

$$\varkappa < \exp \left\{ \left(\frac{\pi^2}{6 \ln 2} + \frac{3}{2} \ln 2 \right) 2^r \right\}.$$

Из полученных оценок вытекает

ЛЕММА 5. Если $|z| > 2^{N_r}$, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |Q_n(z)|^{1/n} \leq |z|^{N_r} e^{4N_r}.$$

12. Асимптотика остатков. Оценим функции второго рода. Введем обозначения

$$A_r = \frac{|z|^{2^{-r}} (|z|^{2^{-r}} + 1)^{2^r n}}{(|z|^{2^{1-r}} - |z|^{2^{-r}})^{2^{r-1}n+1}}, \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Положим $\Phi_0 = 1$ и $\Phi_r = \Phi_{r-1} A_r$ для $r \geq 1$.

ЛЕММА 6. При $|z| > 1$ выполняются неравенства

$$|R_{n,j}(z)| \leq \frac{\Phi_{r-1} 2^{-2^r n}}{(|z|^{2^{1-r}} - 1)^{2^{r-1}n+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим лишь случай $j = (0)$. Для остальных индексов доказательство аналогично.

Определим по индукции рациональные функции $H_r(x)$, где $r = 0, 1, 2, \dots$. Положим

$$H_0(x) = \frac{1}{(z-x)^{n+1}}$$

и для $r \geq 1$

$$H_r(x) = \frac{1}{(2^r n)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2^r n} \{ x^{2^{r-1}n} (1-x)^{2^{r-1}n} H_{r-1}(x) \}.$$

Для функции $R_n = R_{n,(0)}$ имеем следующее интегральное представление

$$R_n(z) = \int_0^1 \frac{Q_n(x)}{z-x} dx.$$

Используя формулу Родрига и выполняя интегрирование по частям, получаем

$$R_n(z) = (-1)^n \int_0^1 x^{2^{r-1}n} (1-x)^{2^{r-1}n} H_{r-1}(x) dx.$$

Докажем по индукции, что при $|x| < |z|^{2^{-r}}$ справедливо неравенство

$$|H_r(x)| \leq \frac{\Phi_r}{(|z|^{2^{-r}} - |x|)^{2^r n+1}}.$$

При $r = 0$ неравенство очевидно. Пусть $r \geq 1$. По формуле Коши имеем

$$H_r(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{\xi^{2^{r-1}n} (1-\xi)^{2^{r-1}n} H_{r-1}(\xi) d\xi}{(\xi-x)^{2^r n+1}},$$

где $|x| < R < |z|^{2^{1-r}}$. Оценим интеграл, используя предположение индукции:

$$|H_r(x)| \leq \frac{R(R+1)^{2^r n}}{(R-|x|)^{2^r n+1}} \Phi_{r-1} \frac{1}{(|z|^{2^{1-r}} - R)^{2^{r-1}n+1}}.$$

Полагая $|x| < R = |z|^{2^{-r}}$, получим требуемый результат.

В частности,

$$\|H_r\| := \max_{0 \leq x \leq 1} |H_r(x)| \leq \frac{\Phi_r}{(|z|^{2^{-r}} - 1)^{2^r n+1}}.$$

Тогда

$$|R_n(z)| \leq \|H_{r-1}\| \int_0^1 x^{2^{r-1}n} (1-x)^{2^{r-1}n} dx < \|H_{r-1}\| 2^{-2^r n},$$

откуда и следует лемма 6.

В качестве следствия из леммы 6 получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 7. Если $|z| > 2^{N_r}$, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |R_{n,j}(z)|^{1/n} \leq \frac{2^{N_r}}{|z|}.$$

13. Независимая система аппроксимаций. Рассмотрим следующее обобщение задачи 1.

ЗАДАЧА 2. Для данного целого неотрицательного числа n и целого числа s , $0 \leq s \leq N_r$, требуется найти ненулевой многочлен $Q_n^{(s)}(z)$ степени не выше $nN_r + s$ такой, что

$$Q_n^{(s)}(z) = O(z^s), \quad z \rightarrow 0,$$

и для некоторых многочленов $P_{n,j}^{(s)}(z)$ выполняются следующие интерполяционные условия

$$R_{n,j}^{(s)}(z) := Q_n^{(s)}(z) f_j(z) - P_{n,j}^{(s)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

где $j \in S_r$.

При $s = 0$ эта задача совпадает с задачей 1.

Аналогично лемме 3 доказывается

ЛЕММА 8. Многочлен $Q_n^{(s)}(x)$, удовлетворяющий задаче 2, может быть определен формулой Родрига

$$Q_n^{(s)}(x) = D_n \cdots D_{2^{r-1}n} x^s.$$

Справедлив следующий аналог леммы 4.

ЛЕММА 9. *Многочлены*

$$Q_n^{(s)}(x), \quad \omega_{nN_r+s}^m P_{n,j}^{(s)}(x), \quad j \in S^{(m)},$$

где $m = 1, \dots, r$, $s = 0, \dots, N_r$, имеют целые рациональные коэффициенты.

Аналогично лемме 5 доказывается

ЛЕММА 10. *Если $|z| > 2^{N_r}$, то для всех $s = 0, \dots, N_r$ имеем*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |Q_n^{(s)}(z)|^{1/n} \leq |z|^{N_r} e^{4N_r}.$$

Аналогично лемме 7 доказывается

ЛЕММА 11. *Если $|z| > 2^{N_r}$, то для всех $s = 0, \dots, N_r$ и для всех $j \in S_r$ имеем*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |R_{n,j}^{(s)}(z)|^{1/n} \leq \frac{2^{N_r}}{|z|}.$$

Другими словами, многочлены $Q_n^{(s)}$ и функции второго рода $R_{n,j}^{(s)}$ имеют такую же логарифмическую асимптотику, как многочлены Q_n и функции второго рода $R_{n,j}$ соответственно.

Обозначим $P_{n,\emptyset}^{(s)} = Q_n^{(s)}$ и рассмотрим следующий определитель 2^r -го порядка

$$P_n(z) = \det(P_{n,j}^{(s)}(z) \mid s = 0, \dots, N_r, j \in \overline{S_r}).$$

Тогда $P_n(z)$ — многочлен априори высокой степени. Однако из результатов работы [2] вытекает слабая совершенность системы Анжелеско–Никишина $\{g_j\}$, а из лемм 1 и 2 следует, что системы $\{f_j\}$ и $\{g_j\}$ связаны невырожденным линейным преобразованием. Выражая решения задачи 2 через так называемые step-line-решения и применяя соответствующую лемму об определителе (см. [11]), получаем следующий результат.

ЛЕММА 12. *Определитель $P_n(z)$ есть отличная от нуля константа:*

$$P_n(z) = P_n(0) \neq 0.$$

14. Доказательство теоремы 1. Положим

$$\Lambda = \sum_{j \in \overline{S_r}} a_j f_j(p/q).$$

Умножим обе части равенства на $\Omega_{n,r} Q_n^{(s)}(p/q)$, где $\Omega_{n,r} = q^{nN_r + N_r} \omega_{nN_r + N_r}^r$. Получим

$$\Omega_{n,r} Q_n^{(s)}(p/q) \Lambda = \Omega_{n,r} \sum_{j \in \overline{S_r}} a_j P_{n,j}^{(s)}(p/q) + \Omega_{n,r} \sum_{j \in S_r} a_j R_{n,j}^{(s)}(p/q).$$

Согласно лемме 9 первое слагаемое в правой части равенства есть целое число. Согласно лемме 12 найдется такое s , что это число не равно нулю и, следовательно, по модулю не меньше единицы. Хорошо известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n^{1/n} = e.$$

Тогда согласно лемме 10 для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$|\Omega_{n,r} Q_n^{(s)}(p/q)| \leq \alpha^{nN_r},$$

где $\alpha = e^{r+4}|p|$.

Согласно лемме 11 для всех достаточно больших n справедлива оценка

$$\left| \Omega_{n,r} \sum_{j \in S_r} a_j R_{n,j}^{(s)}(p/q) \right| \leq a \beta^{nN_r},$$

где

$$\beta = \frac{2qe^r}{|p/q|^{1/N_r}}.$$

Окончательно получаем неравенство

$$\alpha^{nN_r} |\Lambda| \geq 1 - a \beta^{nN_r}.$$

По условию теоремы $\beta < 1$, следовательно, $\Lambda \neq 0$. Тем самым, линейная независимость чисел $\{f_j(p/q)\}$ доказана.

Далее, в неравенстве

$$|\Lambda| \geq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{nN_r} - a \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{nN_r}$$

возьмем

$$n = \left\lceil \frac{\ln(a \frac{\ln(\beta/\alpha)}{\ln(1/\alpha)})}{N_r \ln 1/\beta} \right\rceil$$

и получим

$$|\Lambda| \geq \frac{c}{a^\mu}$$

с постоянной $\mu = \ln \alpha / \ln \frac{1}{\beta}$, что и требовалось доказать.

Выражаю свою искреннюю благодарность руководителям семинара по теории чисел в МГУ Ю. В. Нестеренко и А. Б. Шидловскому и всем участникам семинара за проявленный ими интерес к результатам этой работы и активное обсуждение моего доклада. Особая благодарность В. В. Зудилину за многочисленные замечания, направленные на улучшение текста статьи.

Список литературы

1. *Шидловский А. Б.* Диофантовы приближения и трансцендентные числа. М.: Изд-во МГУ, 1982.
2. *Гончар А. А., Ратманов Е. А., Сорокин В. Н.* Аппроксимации Эрмита–Паде для систем функций марковского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 5. С. 33–58.
3. *Minh H. N., Petitot M.* Lyndon words, polylogarithms and Riemann ζ function // Discrete Math. 2000. V. 217. № 1–3. P. 273–292. Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Vienna, 1997).
4. *Minh H. N., Petitot M., Van Der Hoeven J.* Shuffle algebra and polylogarithms // Preprint, 1998. Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Toronto, June 1998).
5. *Никишин Е. М.* Об иррациональности значений функций $F(x, s)$ // Матем. сб. 1979. Т. 109 (151). № 3. С. 410–418.
6. *Сорокин В. Н.* Аппроксимации Эрмита–Паде последовательных степеней логарифма и их арифметические приложения // Изв. вузов. Сер. матем. 1991. № 11. С. 66–74.
7. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus // J. Reine Angew. Math. 1932. V. 166. P. 118–150.
8. *Сорокин В. Н.* О мере трансцендентности числа π^2 // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 87–120.
9. *Сорокин В. Н.* О теореме Аперри // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1998. № 3. С. 48–53.
10. *Hata M.* Rational approximations to the dilogarithm // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 336. № 1. P. 363–387.
11. *Mahler K.* Perfect systems // Compositio Math. 1968. V. 19. P. 95–166.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
29.01.2001