Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Лог-канонические пороги на гиперповерхностях, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 8, 155–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm591>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:22:11

УДК 513.6

И. А. Чельцов

Лог-канонические пороги на гиперповерхностях

В работе найдена нижняя граница для глобальных лог-канонических порогов на гладких гиперповерхностях. Полученная оценка не может быть улучшена при фиксированной степени и размерности многообразия.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Данная работа обобщает результаты, полученные в [1].

Рассмотрим гладкую гиперповерхность X степени K в $\mathbb{P}^N$ для $N \neq 1$ и лог-пару

$$(X, B_X) = \left(X, \sum_{i=0}^n b_i B_i \right)$$

на гиперповерхности X , где все числа b_i вещественны и положительны, а все дивизоры B_i эффективны, неприводимы и приведены.

В работе многообразия подразумеваются комплексными и проективными, а границы нетривиальными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Наибольшее вещественное число λ такое, что особенности лог-пары $(X, \lambda B_X)$ являются лог-каноническими, называется *лог-каноническим порогом* лог-пары (X, B_X) и будет обозначаться далее как $\lambda(X, B_X)$.

Предположим также, что для некоторого $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$B_X \equiv rH, \quad (1.1)$$

где дивизор H является гиперплоским сечением гиперповерхности X .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Группа Пикара гиперповерхности X равна $\mathbb{Z}$, если $N \geq 4$. Таким образом, условие (1.1) выполнено для всех лог-пар на X в случае $N \neq 3$.

Основной результат работы состоит в доказательстве следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1.3. *Выполнено неравенство*

$$\lambda(X, B_X) \geq \min\left(\frac{N-1}{rK}, \frac{1}{r}\right).$$

Доказательство теоремы 1.3 будет приведено в §3, а в §7 мы применим теорему 1.3 для получения аналогичного утверждения о канонических порогах.

Заметим, что для всех возможных значений степени K и размерности N можно построить гладкие гиперповерхности с границей, удовлетворяющей условию (1.1), для которых неравенство в теореме 1.3 будет равенством.

ПРИМЕР 1.4. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ – гиперповерхность степени K , заданная уравнением

$$x_0^K = \sum_{i=1}^N x_i^K,$$

а $B_X = D$, где дивизор D – гиперплоское сечение $x_0 = x_1$ гиперповерхности X . Тогда выполнено равенство $\lambda(X, B_X) = \min((N-1)/K, 1)$.

Исходя из примера 1.4, можно сделать следующее предположение.

ГИПОТЕЗА 1.5. Равенство $\lambda(X, B_X) = \min((N-1)/(rK), 1/r)$ выполнено, если и только если

$$B_X = \begin{cases} rS, & \text{где } S \text{ – гиперплоское сечение,} \\ & \text{являющееся конусом степени } K \geq N, \\ rS, & \text{где } S \text{ – гиперплоское сечение} \\ & \text{гиперповерхности } X \text{ и } N > K, \\ rS + \Sigma, & \text{где } S \text{ – подмногообразие в } X, \\ & \Sigma \text{ – граница на } X, N \leq 3 \text{ и } N > K. \end{cases}$$

В данной работе доказательство гипотезы 1.5 будет приведено в следующих случаях: в §4 для $N = 3$ и $K \geq N$, в §5 для $N = 4$ и $K \geq N$, в §6 для всех $N > K$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Из результатов §5 следует, что в случае $N > 4$ и $K \geq N$ для доказательства гипотезы 1.5 можно считать, что $B_X = D$ для некоторого гиперплоского сечения D гиперповерхности X .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Можно обобщить методы, используемые в §5, и на многомерный случай, существенно используя при этом многомерную программу лог-минимальных моделей.

В следующем параграфе будет рассмотрен ряд понятий и результатов, которые будут использованы в доказательствах теоремы 1.3 и случаев гипотезы 1.5.

§2. Место лог-канонических особенностей

В этом параграфе будут рассмотрены свойства так называемого места лог-канонических особенностей, первоначально введенного В. В. Шокуровым.

Рассмотрим лог-пару

$$(X, B_X) = \left(X, \sum_{i=1}^n b_i B_i \right),$$

где все числа b_i вещественны и положительны, а все B_i являются эффективными, неприводимыми и приведенными дивизорами Вейля на X . Предположим также, что дивизор $K_X + B_X$ является $\mathbb{R}$ -Картье дивизором.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Собственное неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ называется *центром лог-канонических особенностей* лог-пары (X, B_X) , если существуют бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и дивизор E на многообразии W такие, что $f(E) = Y$ и выполнено неравенство $a(X, B_X, E) \leq -1$.

ПРИМЕР 2.2. Пусть $X \cong \mathbb{P}^2$ и $B_X = C$, где C – приведенная кубическая кривая на $\mathbb{P}^2$, имеющая одну особую точку O . Тогда точка O и сама кубика C являются центрами лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) .

Центр лог-канонических особенностей имеет локальные свойства. Тем не менее, можно рассмотреть его глобальный аналог.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Обозначим $\text{LCS}(X, B_X)$ множество всех центров лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) .

На множестве $\text{LCS}(X, B_X)$ можно ввести структуру схемы. Для этого возьмем такой бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$, что многообразие W гладко, а объединение всех собственных прообразов дивизоров B_i на W и всех f -исключительных дивизоров образует дивизор с нормальными пересечениями. Рассмотрим такую лог-пару (W, B^W) на многообразии W , что $f(B^W) = B_X$ и

$$K_W + B^W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Бирациональный морфизм f обычно принято называть лог-разрешением лог-пары (X, B_X) , а лог-пару (W, B^W) принято называть лог-прообразом лог-пары (X, B_X) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Подсхема, заданная пучком идеалов

$$\mathcal{I}(X, B_X) = f_*([-B^Y]),$$

называется *подсхемой лог-канонических особенностей* лог-пары (X, B_X) и в дальнейшем будет обозначаться $\mathcal{L}(X, B_X)$.

Отметим, несмотря на то, что это очевидно, что каждый центр лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) содержится в носителе подсхемы $\mathcal{L}(X, B_X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Носитель подсхемы $\mathcal{L}(X, B_X)$ называется *местом лог-канонических особенностей* лог-пары (X, B_X) и обозначается $\text{LCS}(X, B_X)$.

Отметим, что в принятых обозначениях $\text{LCS}(X, B_X)$ является и подмногообразием и множеством подмногообразий одновременно. Изложение статьи таково, что последнее не должно внести путаницы.

Следующий результат известен как теорема Шокурова об обращении в нуль.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть H – численно эффективный и объемный дивизор на многообразии X такой, что дивизор $K_X + B_X + H$ численно эквивалентен некоторому дивизору Картье D . Тогда $H^i(X, \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D) = 0$ для всех $i > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль для $i > 0$

$$R^i f_*(f^*(D) + [-B^W]) = 0.$$

Следовательно, из вырождения спектральной последовательности

$$E_2^{p,q} = H^p(R^q f_*(f^*(D) + [-B^W])) \implies E^{p,q} = H^{p+q}(f_*(f^*(D) + [-B^W]))$$

и

$$f_*(f^*(D) + [-B^W]) = \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D$$

следует, что для всех i

$$H^i(X, \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D) = H^i(W, f^*(D) + [-B^W]).$$

С другой стороны, для всех $i > 0$

$$H^i(W, f^*(D) + [-B^W]) = 0$$

по теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль.

Для любого дивизора Картье D на многообразии X имеется точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{L}(X, B_X)}(D) \rightarrow 0.$$

Применение к ней теоремы 2.7 влечет следующий результат, который хорошо известен также как теорема о связности Шокурова.

ТЕОРЕМА 2.8. *Предположим, что дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен. Тогда место канонических особенностей $\text{LCS}(X, B_X)$ связно.*

Относительная форма теоремы 2.8 выглядит так.

ТЕОРЕМА 2.9. *Пусть $g: X \rightarrow Z$ – морфизм со связными слоями такой, что дивизор $-(K_X + B_X)$ является g -численно эффективным и g -объемным. Тогда место лог-канонических особенностей $\text{LCS}(X, B_X)$ связно в окрестности любого слоя g .*

Одним из возможных применений теоремы 2.9 является индуктивная связь между центрами лог-канонических и просто канонических особенностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Собственное неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ называется *центром канонических особенностей* лог-пары (X, B_X) в том случае, если существуют бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и f -исключительный дивизор E на многообразии W такие, что $f(E) = Y$ и выполнено неравенство $a(X, M_X, E) \leq 0$.

В § 7 будет описано применение теоремы 1.3 для получения нижней границы канонических порогов лог-пар на гладких поверхностях. Для этого понадобится следующий результат – частный случай так называемого *обращения присоединения*.

ТЕОРЕМА 2.11. *Пусть Z – центр канонических особенностей лог-пары (X, B_X) , а H – эффективный неприводимый и гладкий дивизор Картье на X , который содержит Z и не содержится в носителе границы B_X . Тогда $\text{LCS}(H, B_X|_H) \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторое лог-разрешение $f: W \rightarrow X$ лог-пары $(X, B_X + H)$ и положим $\hat{H} = f^{-1}(H)$. На многообразии W выполнено соотношение

$$K_W + \hat{H} \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X + H) + \sum_{E \neq \hat{H}} a(X, B_X + H, E)E.$$

Заметим, что

$$\{Z, H\} \subset \text{LCS}(X, B_X + H).$$

Таким образом, применение теоремы 2.9 к лог-прообразу лог-пары $(X, B_X + H)$ на многообразии W дает

$$\hat{H} \cap E \neq \emptyset$$

для некоторого дивизора $E \neq \hat{H}$ на W такого, что $a(X, B_X, E) \leq -1$. Необходимое утверждение теперь следует из

$$K_{\hat{H}} \sim (K_W + \hat{H})|_{\hat{H}} \sim_{\mathbb{Q}} f|_{\hat{H}}^*(K_H + B_X|_H) + \sum_{E \neq \hat{H}} a(X, B_X + H, E)E|_{\hat{H}}.$$

§ 3. Доказательство основного результата

В этом параграфе доказывается теорема 1.3.

Рассмотрим произвольную гладкую гиперповерхность X степени K в $\mathbb{P}^N$ для $N \neq 1$ и такую лог-пару (X, B_X) , что $B_X \equiv H$, где H – гиперплоское сечение гиперповерхности X . Возьмем любое положительное число μ , строго меньшее, чем $\min((N-1)/K, 1)$.

ЛЕММА 3.1. *Особенности лог-пары $(X, \mu B_X)$ лог-терминальны.*

Отметим, что из леммы 3.1 следует неравенство

$$\lambda(X, B_X) \geq \min\left(\frac{N-1}{K}, 1\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Теорема 1.3 следует из леммы 3.1.

Нам понадобится следующий результат А. В. Пухликова (см. [2]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Пусть C – некоторая кривая на гиперповерхности X . Тогда выполнено неравенство $\text{mult}_C(B_X) \leq r$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R_C – достаточно общий конус над кривой C . Тогда

$$R_C \cap X = C \cup \tilde{C}$$

для некоторой кривой $\tilde{C}$ степени $(K-1) \deg(C)$ на гиперповерхности X .

В силу общности выбора конуса R_C пересечение $C \cap \tilde{C}$ трансверсально и состоит ровно из $(K-1) \deg(C)$ различных точек (см. [2]). С другой стороны, по тем же соображениям кривая $\tilde{C}$ не содержится в носителе границы B_X . Таким образом,

$$(K-1) \deg(C) \text{mult}_C(B_X) \leq B_X \cdot \tilde{C} = rH \cdot \deg(\tilde{C}) = r(K-1) \deg(S).$$

Следовательно, выполнено неравенство $\text{mult}_C(B_X) \leq r$.

Отметим, что утверждение 3.3 влечет следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Никакое подмногообразие гиперповерхности X , имеющее положительную размерность, не может быть центром лог-канонических особенностей лог-пары $(X, \mu B_X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Допустим, что особенности лог-пары $(X, \mu B_X)$ не терминальны. Покажем, что это приводит к противоречию.

Сделанное предположение и следствие 3.4 влекут существование точки O на гиперповерхности X , являющейся изолированным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(X, \mu B_X)$. Выберем такую проекцию $\gamma: X \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$, что морфизм γ этален в окрестности точки O и для всех дивизоров B_i , содержащих точку O , ограничения проекции γ

$$\gamma|_{B_i}: B_i \rightarrow \gamma(B_i)$$

взаимно однозначны в окрестности точки $O \in B_i$. Положим

$$(\mathbb{P}^{N-1}, B_{\mathbb{P}^{N-1}}) = \left(\mathbb{P}^{N-1}, \sum_{i=0}^n b_i \gamma(B_i) \right).$$

Тогда точка $\gamma(O)$ является изолированным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(\mathbb{P}^{N-1}, \mu B_{\mathbb{P}^{N-1}})$.

Возьмем подсхему лог-канонических особенностей $\mathcal{L}$ лог-пары $(\mathbb{P}^{N-1}, \mu B_{\mathbb{P}^{N-1}})$ и пучок идеалов $\mathcal{I}$, ассоциированный с подсхемой $\mathcal{L}$. Тогда для произвольного дивизора Картье D на $\mathbb{P}^{N-1}$ точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \otimes D \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(D) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(D) \rightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность групп

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{I} \otimes D) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(D)) \rightarrow H^1(\mathcal{I} \otimes D) \rightarrow \dots$$

Причем $H^0(\mathcal{L}(D)) \neq 0$, поскольку точка $\gamma(O)$ является носителем одной изолированной компоненты подсхемы $\mathcal{L}$.

Теперь пусть $D = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(-1)$. Тогда из неравенства $\mu < \min((N-1)/K, 1)$ следует, что для некоторого обильного дивизора L на $\mathbb{P}^{N-1}$

$$D \equiv K_{\mathbb{P}^{N-1}} + \mu B_{\mathbb{P}^{N-1}} + L.$$

Таким образом, по теореме 2.7 отображение

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(D))$$

сюръективно. Значит, $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(-1)) \neq 0$.

§4. Прямые на гладких поверхностях в $\mathbb{P}^3$

В этом параграфе доказывается гипотеза 1.5 для поверхностей степени больше 2.

Пусть X — гладкая поверхность степени $K \geq 3$ в $\mathbb{P}^3$. Рассмотрим лог-пару (X, B_X) на X такую, что

$$B_X = \sum_{i=0}^n b_i B_i \equiv rH,$$

где все $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$, все кривые B_i неприводимы и приведены, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, а H обозначает гиперплоское сечение поверхности X .

ТЕОРЕМА 4.1. *Равенство $\lambda(X, B_X) = 2/(rK)$ имеет место, если и только если $B_X = r \sum_{i=1}^K L_i$ для различных прямых L_i на поверхности X , проходящих через некоторую точку O на X .*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Очевидно, что $\lambda(X, B_X) = 2/(rK)$ в случае, когда граница B_X пропорциональна сумме K прямых на поверхности X , проходящих через одну точку.

Таким образом, требуется доказать часть “только если” теоремы 4.1. Предположим, что особенности лог-пары $(X, (2/(rK))B_X)$ не терминальны. Покажем, что в этом случае граница B_X пропорциональна сумме K прямых на X , проходящих через одну точку.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Из следствия 3.4 вытекает, что никакая кривая на X не может быть центром лог-канонических особенностей лог-пары $(X, (2/(rK))B_X)$.

Следовательно, существует точка O на X , являющаяся центром лог-канонических особенностей лог-пары $(X, (2/(rK))B_X)$.

ЛЕММА 4.4. *Все кривые B_i содержатся в пересечении $X \cap T$, где T — гиперплоскость в $\mathbb{P}^3$, касающаяся поверхности X в точке O .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное — какая-то кривая B_j не является компонентой пересечения $X \cap T$. Тогда существует такая проекция $\gamma: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ из некоторой точки на кривой B_j , что рациональное отображение γ этально в окрестности точки O и для всех кривых B_i , содержащих точку O , все ограничения

$$\gamma|_{B_i}: B_i \dashrightarrow \gamma(B_i)$$

взаимно однозначны в окрестности точки O .

Пусть

$$B_{\mathbb{P}^2} = \sum_{i=0}^n b_i \gamma(B_i).$$

Тогда точка $\gamma(O)$ является изолированным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(\mathbb{P}^2, (2/(rK))B_{\mathbb{P}^2})$ и

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \equiv K_{\mathbb{P}^2} + \frac{2}{rK} B_{\mathbb{P}^2} + L$$

для некоторого обильного дивизора L на $\mathbb{P}^2$.

Рассмотрим теперь подсхему лог-канонических особенностей $\mathcal{L}$ лог-пары $(\mathbb{P}^2, (2/(rK))B_{\mathbb{P}^2})$ и пучок идеалов $\mathcal{I}$, ассоциированный с подсхемой $\mathcal{L}$. Точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(-1) \rightarrow 0$$

влечет такую точную последовательность групп когомологий

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(-1)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}(-1)) \rightarrow \dots,$$

что $H^0(\mathcal{L}(-1)) = H^0(\mathcal{L}) \neq 0$, поскольку точка $\gamma(O)$ является носителем изолированной компоненты подсхемы $\mathcal{L}$. Из теоремы 2.7 следует, что $H^1(\mathcal{I}(-1)) = 0$.

Таким образом, мы доказали, что все кривые B_i являются неприводимыми и приведенными компонентами пересечения $X \cap T$, где T — гиперплоскость в $\mathbb{P}^3$, касающаяся поверхности X в точке O . Отметим, что из утверждения 3.3 следует, что

$$T \cap X = \sum_{i=0}^n B_i.$$

ЛЕММА 4.5. *Для всех B_j форма пересечения кривых $\bigcup_{l \neq j} B_l$ на X полуотрицательно определена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D = \sum_{l=0}^n B_l$. Тогда для всех $B_i \neq B_j$ на поверхности X

$$(D - B_j) \cdot B_i = \deg(B_i) - B_j \cdot B_i,$$

а на поверхности $T \cong \mathbb{P}^2$

$$B_j \cdot B_i = \deg(B_j) \deg(B_i).$$

Однако обе поверхности T и X гладкие, откуда следует, что

$$(B_j \cdot B_i)_X = (B_j \cdot B_i)_T,$$

и на X выполнены равенства

$$\left(\sum_{l \neq j} B_l \right) \cdot B_i = (D - B_j) \cdot B_i = \deg(B_i) - B_j \cdot B_i = \deg(B_i)(1 - \deg(B_j)) \leq 0.$$

Необходимое утверждение следует теперь из работы [3].

Применим лемму 4.5 к доказательству следующего свойства границы B_X .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.6. *Имеет место равенство $B_X = r \sum_{i=0}^n B_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению $B_X \equiv r \sum_{i=0}^n B_i$. Следовательно,

$$\sum_{b_i > r} (b_i - r) B_i \equiv \sum_{b_l < r} (r - b_l) B_l.$$

Значит, если какое-то из чисел $b_i \neq r$, то

$$\left(\sum_{b_i > r} (b_i - r) B_i \right)^2 = \sum_{b_i > r > b_l} (b_i - r)(r - b_l) B_i \cdot B_l > 0.$$

Однако из леммы 4.5 следует, что число $\left(\sum_{b_i > r} (b_i - r) B_i \right)^2$ неположительно.

Рассмотрим все кривые B_i и точку O в качестве подмногообразий плоскости $T \cong \mathbb{P}^2$ и обозначим границу $\sum_{i=0}^n B_i$ буквой S . Отметим, что точка O является изолированным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(\mathbb{P}^2, (2/K)S)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Из теоремы 1.3 следует, что лог-пара $(X, (2/(rK))B_X)$ имеет лог-канонические особенности. Значит, лог-пара $(\mathbb{P}^2, (2/K)S)$ также имеет лог-канонические особенности.

Пусть $\mathcal{L}$ – подсхема лог-канонических особенностей лог-пары $(\mathbb{P}^2, (2/K)S)$. Тогда естественное отображение

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}})$$

сюръективно по теореме 2.7.

СЛЕДСТВИЕ 4.8. Точка O является единственным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(\mathbb{P}^2, (2/K)S)$.

Рассмотрим такой бирациональный морфизм $f: V \rightarrow \mathbb{P}^2$, что f бирегулярен вне точки O , поверхность V гладкая и

$$K_V + \frac{2}{K} \tilde{S} \equiv f^* \left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{2}{K} S \right) - E + G,$$

где $\tilde{S} = f^{-1}(S)$, дивизоры E и G эффективны и f -исключительны, а $[E] \neq 0$.

Заметим, что из отрицательности формы пересечения кривых, содержащихся в носителе дивизора G , и строгого неравенства $K_V \cdot G < 0$ следует, что по крайней мере одна из компонент дивизора G может быть стянута в гладкую точку. Поэтому можно считать, что $G = \emptyset$.

Пусть C – f -исключительная кривая на V , не являющаяся компонентой носителя дивизора E и имеющая нетривиальное пересечение с E . Тогда $K_V \cdot C < 0$. Следовательно, кривая C может быть стянута в гладкую точку.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Можно считать, что бирациональный морфизм $f: V \rightarrow \mathbb{P}^2$ является изоморфизмом вне точки O , поверхность V гладкая и

$$K_V + \frac{2}{K}\tilde{S} \equiv f^*\left(K_{\mathbb{P}^2} + \frac{2}{K}S\right) - E$$

для такого эффективного f -исключительного дивизора E на V , что $[E] \neq 0$, а носитель дивизора E содержит все f -исключительные дивизоры на поверхности V .

Особенности лог-пары $(V, (2/K)\tilde{S} + E)$ лог-каноничны, а дивизор

$$K_V + \frac{2}{K}\tilde{S} + E \equiv f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1))$$

не численно эффективен. Значит, применение к лог-паре $(V, (2/K)\tilde{S} + E)$ программы лог-минимальных моделей влечет существование такого морфизма $g: V \rightarrow W$, что дивизор $-(K_V + (2/K)\tilde{S} + E)$ g -обилен, а сам морфизм g является либо $\mathbb{P}^1$ -расслоением, либо стягиванием неприводимой гладкой рациональной кривой.

ЛЕММА 4.10. *Кривые B_i являются прямыми, проходящими через точку O , если морфизм g является $\mathbb{P}^1$ -расслоением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что g — $\mathbb{P}^1$ -расслоение. Рассмотрим достаточно общий слой C расслоения g . Тогда

$$\left(K_V + \frac{2}{K}\tilde{S}\right) \cdot C = (f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)) - E) \cdot C = -\deg(f(C)) - E \cdot C \leq -\deg(f(C)) - 1,$$

поскольку $[E] \cap C \neq \emptyset$. С другой стороны,

$$\left(K_V + \frac{2}{K}\tilde{S}\right) \cdot C = -2 + \frac{2}{K}\tilde{S} \cdot C.$$

Следовательно, $f(C)$ — прямая на $\mathbb{P}^2$, проходящая через точку O , а все компоненты дивизора $\tilde{S}$ являются слоями расслоения g . В частности, все кривые B_i — прямые на поверхности X , проходящие через точку O .

Таким образом, можно считать, что морфизм g является стягиванием неприводимой гладкой рациональной кривой C .

ЛЕММА 4.11. *Образ $f(C)$ есть прямая на $\mathbb{P}^2$, проходящая через точку O , кривая C содержится в $\tilde{S}$ и либо $C^2 = -1$, либо $K = 3$ и $C^2 = -2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из

$$\left(K_V + \frac{2}{K}\tilde{S}\right) \cdot C = -\deg(f(C)) - E \cdot C < -\deg(f(C))$$

и

$$\left(K_V + \frac{2}{K}\tilde{S}\right) \cdot C = -2 - C^2 + \frac{2}{K}\tilde{S} \cdot C \geq \begin{cases} -2 - C^2, & \text{если } C \not\subset \tilde{S}, \\ -2 - \frac{K-2}{K}C^2, & \text{если } C \subset \tilde{S}. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. Будем далее считать, что выполнено неравенство $K \geq 4$, поскольку в случае $K = 3$ завершение доказательства теоремы 4.1 очевидно.

Положим $\rho = f \circ g^{-1}$, $\bar{S} = g(\bar{S})$, $\bar{E} = g(E)$ и $\bar{D} = g(D)$ для достаточно общей неприводимой и приведенной кривой D в линейной системе $|f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.13. Множество $\{W, \rho, \bar{S}, \bar{E}, \bar{D}\}$ обладает следующим набором свойств:

$$\Lambda(W, \rho, \bar{S}, \bar{E}, \bar{D}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{поверхность } W \text{ гладкая;} \\ K_W + \frac{2}{K}\bar{S} \equiv -\bar{D} - \bar{E}; \\ \bar{D} - \text{неприводимая и приведенная кривая с } D^2 > 0; \\ \bar{D} \cdot Z \neq 0 \text{ для всех неприводимых кривых на } W \text{ с } Z^2 = -1; \\ \bar{D} \cdot Z \geq \deg(\rho(Z)) \text{ для всех кривых } Z \text{ на } W; \\ \left(W, \frac{2}{K}\bar{S}\right) \text{ имеет лог-канонические особенности;} \\ \bar{S} - \text{приведенная кривая;} \\ Z \cap \bar{E} \neq \emptyset \text{ для каждой неприводимой кривой } Z \subset W \\ \text{с } Z^2 < 0; \\ \bar{E} \text{ эффективен, } [\bar{E}] \neq \emptyset \text{ и } f \circ g^{-1}(E) = O; \\ \text{носитель } \bar{E} \text{ содержит все } \rho\text{-исключительные кривые на } W; \\ \text{носитель } \bar{E} \text{ не содержит компонент дивизора } \bar{S}; \\ Z^2 < -1 \text{ для каждой кривой } Z \text{ в носителе } [\bar{E}]. \end{array} \right.$$

Из свойств $\Lambda(W, \rho, \bar{S}, \bar{E}, \bar{D})$ следует существование морфизма $h: W \rightarrow U$ такого, что дивизор $-(K_W + (2/K)\bar{S})$ h -обилен и h является либо $\mathbb{P}^1$ -расслоением, либо стягиванием неприводимой гладкой рациональной кривой.

ЛЕММА 4.14. *Из набора свойств $\Lambda(W, \rho, \bar{S}, \bar{E}, \bar{D})$ следует, что все компоненты дивизора $\bar{S}$ являются прямыми на $\mathbb{P}^2$, проходящими через точку O , в случае, когда морфизм h не бирационален.*

Утверждение леммы элементарно следует из доказательства леммы 4.10 и выполнения свойств $\Lambda(W, \rho, \bar{S}, \bar{E}, \bar{D})$.

ЛЕММА 4.15. *Предположим, что морфизм h стягивает одну гладкую рациональную кривую Z . Тогда $Z^2 = -1$, $Z \cap [E] = \emptyset$ и либо кривая Z содержится в носителе дивизора $\bar{E}$, либо кривая Z является компонентой дивизора $\bar{S}$ и $f \circ g^{-1}(Z)$ является прямой, проходящей через точку O .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда кривая Z не содержится в носителе дивизора $\bar{E}$,

$$\left(K_W + \frac{2}{K}\bar{S}\right) \cdot Z \leq -\deg(f \circ g^{-1}(Z)) - \bar{E} \cdot Z$$

и

$$\left(K_W + \frac{2}{K}\bar{S}\right) \cdot Z = -2 - Z^2 + \frac{2}{K}\bar{S} \cdot Z \geq \begin{cases} -2 - Z^2, & \text{если } Z \not\subset \bar{S}, \\ -2 - \frac{K-2}{K}Z^2, & \text{если } Z \subset \bar{S}. \end{cases}$$

Следовательно, $Z \cap [\overline{E}] = \emptyset$, $f \circ g^{-1}(Z)$ является прямой на $\mathbb{P}^2$, проходящей через точку O , кривая Z содержится в $\overline{S}$ и $Z^2 = -1$.

В случае, когда кривая Z содержится в носителе дивизора $\overline{E}$,

$$\left(K_W + \frac{2}{K}\overline{S}\right) \cdot Z = -2 - Z^2 + \frac{2}{K}\overline{S} \cdot Z \geq -2 - Z^2.$$

Значит, $Z^2 = -1$ и

$$\left(K_W + \frac{2}{K}\overline{S}\right) \cdot Z \geq -1.$$

С другой стороны,

$$\left(K_W + \frac{2}{K}\overline{S}\right) \cdot Z = -\overline{D} \cdot Z - [\overline{E}] \cdot Z - \{\overline{E}\} \cdot Z < -1 - [\overline{E}] \cdot Z - Z^2 = -[\overline{E}] \cdot Z.$$

Следовательно, в этом случае $Z \cap [E] \neq \emptyset$ приводит к противоречию.

Таким образом, из выполнения свойств $\Lambda(W, \rho, \overline{S}, \overline{E}, \overline{D})$ следует существование такого морфизма $h: W \rightarrow U$, что либо h является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, либо h бирационален. Более того, как утверждается в лемме 4.15, из свойств $\Lambda(W, \rho, \overline{S}, \overline{E}, \overline{D})$ и предположения о небирациональности морфизма h вытекает теорема 4.1. С другой стороны, в случае, когда морфизм h бирационален, лемма 4.16 утверждает, что из выполнения свойств $\Lambda(W, \rho, \overline{S}, \overline{E}, \overline{D})$ следует выполнение свойств

$$\Lambda(U, \rho \circ h^{-1}, h(\overline{S}), h(\overline{E}), h(\overline{D}))$$

для набора $\{U, \rho \circ h^{-1}, h(\overline{S}), h(\overline{E}), h(\overline{D})\}$. Иными словами, бирациональный морфизм, индуцированный набором свойств Λ , сохраняет свойства Λ . Следовательно, повторение описанной конструкции конечное число раз докажет теорему 4.1.

§ 5. Конусы на гладких трехмерных многообразиях в $\mathbb{P}^4$

В этом параграфе будет доказана гипотеза 1.5 для трехмерных многообразий степени не меньше 4.

Рассмотрим гладкую гиперповерхность X степени K в $\mathbb{P}^4$ для $K \geq 4$ и лог-пару

$$(X, B_X) = \left(X, \sum_{i=0}^n b_i B_i\right)$$

такую, что все $b_i \in \mathbb{R}_{>0}$, а все дивизоры B_i неприводимы и приведены.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из равенства групп $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ следует, что $B_X \equiv rH$ для некоторого $r \in \mathbb{R}_{>0}$ и гиперплоского сечения H гиперповерхности X .

ТЕОРЕМА 5.2. *Равенство $\lambda(X, B_X) = 3/(rK)$ имеет место, если и только если $B_X = rS$ для гиперплоского сечения S многообразия X , которое является конусом над некоторой плоской гладкой кривой степени K .*

Следует отметить, что часть “если” теоремы 5.2 тривиальна. Поэтому для доказательства части “только если” предположим, что

$$\lambda(X, B_X) = \frac{3}{rK}.$$

В частности, особенности лог-пары $(X, (3/(rK))B_X)$ не лог-терминальны. Нужно показать, что тогда $B_X = rS$ для конуса S на многообразии X , поскольку все остальные свойства S следуют из утверждения 3.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Из утверждения 3.3 следует, что каждый центр лог-канонических особенностей лог-пары $(X, (3/(rK))B_X)$ является точкой на X .

Таким образом, будем считать, что существует такая точка O на X , которая является изолированным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(X, (3/(rK))B_X)$.

ЛЕММА 5.4. *Имеет место равенство $B_X = rS$ для особого в точке O гиперплоского сечения S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем такую проекцию $\gamma: X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$, что рациональное отображение γ étально в окрестности точки O и для всех дивизоров B_i , содержащих точку O , все ограничения

$$\gamma|_{B_i}: B_i \dashrightarrow \gamma(B_i)$$

взаимно однозначны в окрестности точки $O \in B_i$. Пусть

$$B_{\mathbb{P}^3} = \sum_{i=0}^n b_i \gamma(B_i).$$

Тогда точка $\gamma(O)$ является изолированным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(\mathbb{P}^3, (3/(rK))B_{\mathbb{P}^3})$.

Рассмотрим теперь подсхему лог-канонических особенностей $\mathcal{L}$ лог-пары $(\mathbb{P}^3, (3/(rK))B_{\mathbb{P}^3})$ и пучок идеалов $\mathcal{I}$, ассоциированный с $\mathcal{L}$. Для любого дивизора Картье D на X точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \otimes D \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(D) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{L}}(D) \rightarrow 0$$

влечет точную последовательность групп

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{I} \otimes D) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}}(D)) \rightarrow H^1(\mathcal{I} \otimes D) \rightarrow \dots.$$

Заметим, что точка $\gamma(O)$ является носителем изолированной компоненты подсхемы $\mathcal{L}$. Следовательно,

$$H^0(\mathcal{L}(D)) \neq 0.$$

Пусть теперь $D = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$. Тогда

$$D \equiv K_{\mathbb{P}^3} + \frac{3}{rK} B_{\mathbb{P}^3}$$

в случае, когда все ограничения $\gamma|_{B_i}$ регулярны. Однако если одно из рациональных отображений $\gamma|_{B_i}$ не является морфизмом, то

$$D \equiv K_{\mathbb{P}^3} + \frac{3}{rK} B_{\mathbb{P}^3} + L$$

для некоторого обильного дивизора L на $\mathbb{P}^3$. По теореме 2.7 $H^1(\mathcal{I} \otimes D) = 0$ и отображение

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D))$$

сюръективно, что противоречит $H^0(\mathcal{L}(D)) \neq 0$.

Положим $S = X \cap T$ для гиперплоскости T в $\mathbb{P}^4$, касающейся гиперповерхности X в точке O . Отметим, что поверхность S неприводима, поскольку $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$.

Предположим, что $B_i \neq S$. Тогда проекцию γ можно считать проекцией из некоторой точки P на B_i . Действительно, если $P \notin S$, то проекция из P будет этальна в окрестности точки O и можно выбрать точку P на B_i таким образом, что все ограничения $\gamma|_{B_i}$ взаимно однозначны в окрестности точки O для всех поверхностей B_i , содержащих точку O . Следовательно, из предыдущих аргументов и $B_X \equiv rH$ следует, что $B_X = rS$.

Таким образом, показано, что $B_X = rS$ для особого в точке O гиперплоского сечения S многообразия X .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Из утверждения 3.3 следует, что поверхность S имеет изолированные гиперповерхностные особенности. Следовательно, S нормальна.

Рассмотрим поверхность S и точку O как подмногообразия в $\mathbb{P}^3$. Точка O является изолированным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(\mathbb{P}^3, (3/K)S)$. Более того, лог-пара $(\mathbb{P}^3, (3/K)S)$ имеет лог-канонические особенности по теореме 1.3.

Пусть $\mathcal{L}$ – подсхема лог-канонических особенностей лог-пары $(\mathbb{P}^3, (3/K)S)$. Тогда отображение

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}})$$

сюръективно по теореме 2.7.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. Точка O является единственным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(\mathbb{P}^3, (3/K)S)$.

Воспользуемся лог-обобщением основной идеи работы [4] для завершения доказательства теоремы 5.2.

Возьмем лог-терминальную модификацию $h: Y \rightarrow \mathbb{P}^3$ лог-пары $(\mathbb{P}^3, (3/K)S)$, а затем рассмотрим терминальную модификацию $t: V \rightarrow Y$ многообразия Y . Бирациональный морфизм $f = h \circ t$ бирегулярен вне точки O , трехмерное многообразие V имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, и выполнено соотношение

$$K_V + \frac{3}{K} \tilde{S} \equiv f^* \left(K_{\mathbb{P}^3} + \frac{3}{K} S \right) - E,$$

где $\tilde{S} = f^{-1}(S)$. Причем f -исключительный дивизор E эффективен, а его носитель совпадает с тем множеством, которое стягивается бирациональным морфизмом f в точку O . Более того, $[E] \neq 0$.

Особенности лог-пары $(V, (3/K)\tilde{S} + E)$ лог-каноничны и, в частности, к ней можно применить программу лог-минимальных моделей. Таким образом, из соотношения

$$K_V + \frac{3}{K}\tilde{S} + E \equiv f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1))$$

сразу следует существования экстремального стягивания $g: V \rightarrow W$ такого, что дивизор $-(K_V + (3/K)\tilde{S} + E)$ g -обилен. Отметим, что многообразие W не может быть точкой.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. На многообразии V нет кривых, которые стягиваются обоими морфизмами g и f в точку.

ЛЕММА 5.8. *Экстремальное стягивание g не может быть расслоением на поверхности дель Пеццо и стягиванием дивизора в точку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что g является либо расслоением на поверхности дель Пеццо, либо стягиванием дивизора в точку. Пусть F — поверхность, стягиваемая морфизмом g в точку. Тогда

$$F \cap E \neq \emptyset.$$

Из $\mathbb{Q}$ -факториальности многообразия V следует, что пересечение $F \cap E$ содержит кривую, которая стягивается обоими морфизмами f и g .

ЛЕММА 5.9. *Морфизм g не может быть малым стягиванием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что g является малым стягиванием. Возьмем кривую C , которая стягивается морфизмом g . Хорошо известно, что выполнено неравенство $K_V \cdot C > -1$ (см. [5]). С другой стороны,

$$\left(K_V + \frac{3}{K}\tilde{S}\right) \cdot C = (f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)) - E) \cdot C < -1.$$

Следовательно, $C \subset \tilde{S}$ и $\tilde{S} \cdot C < 0$. Из последнего следует неравенство

$$(K_V + \tilde{S}) \cdot C < \left(K_V + \frac{3}{K}\tilde{S}\right) \cdot C.$$

Рассмотрим нормализацию $h: \hat{S} \rightarrow \tilde{S}$ поверхности $\tilde{S}$. Как следует из формулы присоединения (см. [6]),

$$K_{\hat{S}} + \text{Diff}_{\tilde{S}}(0) \equiv h^*((K_V + \tilde{S})|_{\tilde{S}}).$$

Однако поверхность $\tilde{S}$ неособа в общей точке кривой C и, в частности, кривая C не содержится в $\text{Diff}_{\tilde{S}}(0)$. Следовательно, выполнено неравенство

$$K_{\hat{S}} \cdot h^{-1}(C) < -1.$$

С другой стороны, кривая $h^{-1}(C)$ стягивается на поверхности $\hat{S}$. Из последнего легко следует, что $K_{\hat{S}} \cdot h^{-1}(C) \geq -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. Показано, что морфизм g является либо стягиванием поверхности на кривую, либо расслоением на коники.

Пусть C – достаточно общий слой морфизма g . Тогда

$$\left(K_V + \frac{3}{K}\tilde{S}\right) \cdot C = (f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)) - E) \cdot C = -\deg(f(C)) - E \cdot C < -\deg(f(C)).$$

Предположим, что g является расслоением на коники. Тогда

$$[E] \cap C \neq \emptyset,$$

поскольку компоненты дивизора E не могут лежать в слоях расслоения g . Таким образом,

$$\left(K_V + \frac{3}{K}\tilde{S}\right) \cdot C \leq -\deg(f(C)) - E \cdot C \leq -\deg(f(C)) - 1.$$

С другой стороны, выполнено равенство

$$\left(K_V + \frac{3}{K}\tilde{S}\right) \cdot C = -2 + \frac{3}{K}\tilde{S} \cdot C.$$

Следовательно, кривая $f(C)$ является прямой, проходящей через точку O , а поверхность $\tilde{S}$ лежит в слоях расслоения на коники g . Из последнего сразу следует, что поверхность S является конусом в $\mathbb{P}^3$.

Для завершения доказательства предположим, что морфизм g является стягиванием некоторой поверхности на кривую. В этом случае из неравенства

$$-1 \leq K_V \cdot C = \left(K_V + \frac{3}{K}\tilde{S}\right) \cdot C - \frac{3}{K}\tilde{S} \cdot C < -\deg(f(C)) - \frac{3}{K}\tilde{S} \cdot C$$

следует, что g стягивает поверхность $\tilde{S}$. Таким образом,

$$-\deg(f(C)) > \left(K_V + \frac{3}{K}\tilde{S}\right) \cdot C = (K_V + \tilde{S}) \cdot C - \frac{K-3}{K}\tilde{S} \cdot C \geq -2 + \frac{K-3}{K}.$$

Следовательно, $f(C)$ – прямая на поверхности S , а S , таким образом, является конусом в $\mathbb{P}^3$.

§ 6. Гиперповерхности малых степеней

В этом параграфе гипотеза 1.5 будет доказана для всех гиперповерхностей, степень которых не превышает их размерности.

Пусть X – гладкая гиперповерхность степени K в $\mathbb{P}^N$ и $K < N$, а (X, B_X) – лог-пара на X такая, что $B_X \equiv rH$ для некоторого $r \in \mathbb{R}_{>0}$, где H – гиперплоское сечение гиперповерхности X .

ТЕОРЕМА 6.1. Равенство $\lambda(X, B_X) = 1/r$ имеет место, если и только если

$$B_X = \begin{cases} rS, & \text{где } S \text{ – гиперплоское сечение гиперповерхности } X \text{ и } N > K, \\ rS + \Sigma, & \text{где } S \text{ – подмногообразие } X, \Sigma \text{ – граница, } N \leq 3 \text{ и } N > K. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 3.3 следует, что лог-пара $(X, (1/r)B_X)$ не может иметь центров лог-канонических особенностей положительной размерности, кроме компонент границы B_X . Более того, если никакая из компонент границы B_X не является центром лог-канонических особенностей лог-пары $(X, (1/r)B_X)$, то можно дословно повторить доказательство леммы 3.1 и получить лог-терминальность особенностей лог-пары $(X, (1/r)B_X)$.

Таким образом, либо $\lambda(X, B_X) > 1/r$, либо $B_X = rS + \Sigma$ для некоторого подмногообразия S гиперповерхности X и границы Σ .

Для завершения доказательства нужно показать, что $\Sigma = \emptyset$, если $N \geq 4$, но последнее сразу следует из равенства групп $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ в этом случае.

§ 7. Канонические пороги

Пусть X — гладкая гиперповерхность степени N в $\mathbb{P}^N$ для $N \geq 4$, (X, B_X) — лог-пара на X , а r — положительное вещественное число такое, что $B_X \equiv rH$ для гиперплоского сечения H гиперповерхности X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Наибольшее вещественное число μ такое, что особенности лог-пары $(X, \mu B_X)$ каноничны, называется *каноническим порогом* лог-пары (X, B_X) и будет обозначается $\mu(X, B_X)$.

ТЕОРЕМА 7.2. *Выполнено неравенство*

$$\mu(X, B_X) \geq \frac{N-2}{rN}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что верно обратное. Тогда для некоторого положительного числа μ , меньшего, чем $(N-2)/(rN)$, особенности лог-пары $(X, \mu B_X)$ не являются терминальными. Из утверждения 3.3 следует существование такой точки O на X , что O является центром канонических особенностей лог-пары $(X, \mu B_X)$.

Пусть H — достаточно общее гиперплоское сечение гиперповерхности X , проходящее через точку O . Тогда O является центром лог-канонических особенностей лог-пары $(H, \mu B_X|_H)$ по теореме 2.11. Последнее невозможно по теореме 1.3.

Отметим, что теорема 7.2 представляет интерес ввиду связи между бирациональной жесткостью и каноническими порогами подвижных лог-пар (см. [7]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.3. *Предположим, что для всех подвижных лог-пар (X, M_X) на гиперповерхности X с $K_X + M_X \equiv 0$ обязательно $\mu(X, M_X) \geq 1$. Тогда*

$$\text{Bir}(X) = \text{Aut}(X)$$

и гиперповерхность X бирационально не изоморфна никакому расслоению Мори, небирегулярному X .

Утверждение следует из теоремы 4.2 работы [8].

Доказано, что канонический порог каждой подвижной лог-пары (X, M_X) , удовлетворяющей численному условию $K_X + M_X \equiv 0$, больше единицы или равен

единице в случае, когда $N = 4, 5, 6, 7, 8$ (см. [9]–[11]), и для всех $N \geq 4$ в предположении общности гиперповерхности X (см. [12]).

Автор благодарит В. А. Исковских, А. В. Пухликова и В. В. Шокурова за плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. *Cheltsov I. A., Park J.* Log canonical thresholds and generalized Eckardt points // Preprint, 2000; math.AG/0003121.
2. *Пухликов А. В.* Замечание о теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартике // Труды МИАН. 1995. Т. 208. С. 278–289.
3. *Artin M.* On isolated rational singularities of surfaces // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 129–136.
4. *Чельцов И. А.* Трехмерные многообразия, обладающие дивизором с численно тривиальным каноническим классом // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 177–178.
5. *Mori S.* Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. № 1. P. 117–253.
6. *Шокуров В. В.* Трехмерные лог-перестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–203.
7. *Cheltsov I. A.* Log models of birationally rigid varieties // J. Math. Sci. 2000. V. 102. P. 3843–3875.
8. *Corti A.* Factorizing birational maps of threefolds after Sarkisov // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
9. *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86 (128). № 1. С. 140–166.
10. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of four-dimensional quintic // Invent. Math. 1987. V. 87. P. 303–329.
11. *Чельцов И. А.* О гладкой четырехмерной квинтике // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 139–160.
12. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. P. 401–426.

Москва
E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступила в редакцию
26.12.2000