Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Поведение амплитуды рассеяния резонанса Гельмгольца вблизи резонанса, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 9, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm592>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:24:23

УДК 517.95

А. А. Арсеньев

Поведение амплитуды рассеяния резонатора Гельмгольца вблизи резонанса

Рассматривается рассеяние на резонаторе Гельмгольца и изучается поведение амплитуды рассеяния вблизи резонанса. Устанавливается связь между свойствами симметрии резонатора и свойствами симметрии амплитуды рассеяния.

Библиография: 7 названий.

§ 1. Введение

В теории рассеяния для одномерного уравнения Шрёдингера на оси известен следующий факт. Если потенциал имеет вид двойного барьера, например

$$V(x) = V_0 \left(\exp \left(-\frac{(x+l)^2}{a} \right) + \exp \left(-\frac{(x-l)^2}{b} \right) \right), \quad V_0 \gg 1,$$

то в случае симметричного потенциала ($a = b$) при резонансе на квазиуровне коэффициент прохождения скачком принимает значение единица, а если потенциал несимметричен ($a \gg b$), то модуль коэффициента прохождения мал для всех значений подбарьерных энергий, а в резонансе есть скачок только у коэффициентов отражения. Мы приводим соображения в пользу того, что для резонатора Гельмгольца ситуация аналогична. Резонатор Гельмгольца можно представить себе как шаровой слой с отверстиями. Если мы будем рассматривать оператор Шрёдингера как инфинитезимальный оператор процесса броуновского движения, то мы увидим, что случаи потенциала типа “двойного барьера” и шарового слоя с отверстиями похожи с математической точки зрения. Есть две области: внутренняя и внешняя, вероятность перехода между которыми мала. Принцип инвариантности волновых операторов позволяет сделать эту аналогию точной. На этой основе мы доказываем, что если резонатор Гельмгольца имеет центральную симметрию, то бесконечно малые отверстия в резонансе дают конечный вклад в скачок усредненной по углам амплитуды рассеяния вперед и такой же вклад в скачок усредненной по углам амплитуды рассеяния назад. Если резонатор не имеет центральной симметрии, то есть скачок амплитуды рассеяния назад, а аналогия с одномерным случаем позволяет сделать предположение, что скачка амплитуды рассеяния вперед нет.

Основные результаты работы сформулированы в теореме 1.

Перейдем к описанию обозначений. Точки d -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ мы обозначаем символами $x, y, \dots$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$ мы обозначаем символом $(\cdot, \cdot)$. Символ $L(A \rightarrow B)$ обозначает банахово пространство линейных непрерывных операторов из банахова пространства A в банахово пространство B .

§ 2. Постановка задачи

Пусть $\{D_n\}$ – последовательность открытых областей в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. каждая область D_n содержит внешность некоторого шара, имеет гладкую (класса C^2) границу ∂D_n и связна;
2. $D_{n+1} \subset D_n \subset D_0 = \mathbb{R}^d$;
3. область

$$D_\infty = \text{Int} \left(\overline{\bigcap_n D_n} \right)$$

имеет гладкую границу и состоит из двух областей:

$$D_\infty = D_\infty^{\text{out}} \cup D_\infty^{\text{int}}, \quad \text{dist}(D_\infty^{\text{out}}, D_\infty^{\text{int}}) > 0,$$

где область D_∞^{int} ограничена и связна, а область D_∞^{out} связна и содержит внешность шара;

4. $d(D_\infty, D_n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{mes}_d(D_n \setminus D_\infty) + \text{mes}_{d-1}(\partial D_\infty \setminus \partial D_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Резонатором Гельмгольца мы называем дополнение области D_n .

Пусть L_n – самосопряженное расширение оператора Лапласа $-\Delta$ в $L^2(D_n, dx)$ с нулевыми граничными условиями на ∂D_n . Пусть I_n – естественный оператор вложения:

$$I_n: L^2(\mathbb{R}^d, dx) \rightarrow L^2(D_n, dx), \quad I_n f(x) = f(x), \quad x \in D_n.$$

В дальнейшем нам будет удобно рассматривать I_n как оператор умножения на характеристическую функцию области D_n . Определим *волновые операторы*

$$W_\pm(L_n, L_0, I_n) = \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \exp(i\tau L_n) I_n \exp(-i\tau L_0)$$

и *оператор рассеяния*

$$S(L_n, L_0, I_n) = W_+(L_n, L_0, I_n)^* W_-(L_n, L_0, I_n).$$

Нужные нам свойства волновых операторов и оператора рассеяния для областей типа резонатора Гельмгольца получены в [1], [2]. Мы будем изучать матрицу оператора рассеяния вблизи точек спектра оператора $-\Delta$ в $L^2(D_\infty^{\text{int}}, dx)$ при больших n .

Положим

$$J(\lambda) = 1 - \exp(-\lambda t).$$

Из принципа инвариантности волновых операторов [3] следует равенство

$$S(L_n, L_0, I_n) = S(J(L_n), J(L_0), I_n). \quad (1)$$

Формула (1) сводит изучение оператора рассеяния к изучению функции Грина уравнения теплопроводности.

§ 3. Вспомогательные оценки

Пусть $G_n(t)$ – функция Грина задачи

$$\begin{aligned} \partial_t G_n(x, y, t) &= \Delta_x G_n(x, y, t), \quad x, y \in D_n, \quad t > 0, \\ G_n(x, y, t) &= 0, \quad x \in \partial D_n, \quad G_n(x, y, +0) = \delta(x - y). \end{aligned}$$

Доопределим функцию $G_n(x, y, t)$ нулем, если хотя бы один из ее аргументов x, y не принадлежит области D_n :

$$G_n(x, y, t) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad (x \notin D_n) \vee (y \notin D_n). \quad (2)$$

Пусть $G_n(t)$ – интегральный оператор в $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ с ядром $G_n(x, y, t)$. Определим оператор

$$A_n: L^2(\mathbb{R}^d, dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d, dx), \quad A_n = E - G_n(t).$$

Из (1) следует равенство

$$S(L_n, L_0, I_n) = S(A_n, A_0, I_n). \quad (3)$$

ЛЕММА 1. *Относительно оператора A_0 оператор отождествления I_n эквивалентен единичному оператору и поэтому*

$$S(A_n, A_0, I_n) = S(A_n, A_0). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы пользуемся данным в [3; определение 2.1.8] определением эквивалентности операторов отождествления. Зададим преобразование Фурье равенством

$$\widehat{f}(k) = \int \exp(-i(k, x)) f(x) dx.$$

Справедливо равенство

$$\exp(i\tau A_0) f(x) = (2\pi)^{-d} \int \exp(i\tau(1 - \exp(-k^2 t)) + i(k, x)) \widehat{f}(k) dk. \quad (5)$$

Если $f \in C_0^\infty$, то при $\tau \rightarrow \infty$ правая часть (5) стремится к нулю равномерно по x на каждом компакте, что согласно формуле (2.1.21) из [3] доказывает лемму.

Итак, наша задача свелась к изучению оператора A_n в гильбертовом пространстве

$$H = L^2(\mathbb{R}^d, dx).$$

Скалярное произведение и норму в H мы будем обозначать символами $\langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|$. Скалярное произведение линейно по второму аргументу. Введем гильбертовы пространства

$$H_\pm = L^2(\mathbb{R}^d, \exp(\mp|x|) dx).$$

Установим двойственность между H_+ и H_- с помощью продолжения формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Положим

$$V_n = A_n - A_0 = G_0(t) - G_n(t).$$

ЛЕММА 2. 1. *Справедливы оценки*

- 1) $0 \leq G_{n+1}(x, y, t) \leq G_n(x, y, t);$
- 2) $0 \leq V_n(x, y, t) \leq a \exp(-b(x^2 + y^2)),$

где константы a и b зависят только от t .

2. Оператор V_n ядерный в H и H_+ , вполне непрерывен в $L(H_+ \rightarrow H_-)$ и при $n \rightarrow \infty$ сходится к оператору V_∞ в ядерной топологии пространства $L(H \rightarrow H)$ и в равномерной операторной топологии пространства $L(H_+ \rightarrow H_-)$.

3. Справедлива оценка

$$\|(V_n - V_\infty) | L(H_+ \rightarrow H_-)\| \leq d(D_\infty, D_n)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение есть следствие принципа максимума для уравнения теплопроводности. Положим

$$\varphi_n(x, t) = \int [G_n(x, y, t) - G_\infty(x, y, t)] dy.$$

В силу принципа максимума справедлива оценка

$$0 \leq \varphi_n(x, t) \leq 1.$$

Из определения (2) следует, что

$$\varphi_n(x, t) = 0, \quad x \notin D_n,$$

поэтому

$$\int \varphi_n(x, t) dx \leq \text{mes}_d(D_n \setminus D_\infty) + \int_{D_\infty} \varphi_n(x, t) dx. \quad (6)$$

В области $D_\infty \times [0, t]$ мы применим формулу Грина к функциям $\varphi_n(x, \tau)$ и $G_\infty(x, y, t - \tau)$. Получим

$$\varphi_n(x, t) = - \int_0^t d\tau \int_{\partial D_\infty} \varphi_n(y, \tau) \partial_t G_\infty(x, y, t - \tau) d\sigma_y.$$

Но

$$\begin{aligned} \varphi_n(y, t) &= 0, \quad y \in \partial D_\infty \cap \partial D_n, \\ |\partial_t G_\infty(x, y, t)| &< \text{const} \cdot t^{-(d/2+1)} |x - y| \exp\left(-a \frac{|x - y|^2}{t}\right), \end{aligned}$$

поэтому

$$\int_{D_\infty} \varphi_n(x, t) dx < \text{const} \cdot \text{mes}_{d-1}(\partial D_\infty \setminus \partial D_n).$$

Итак,

$$\int \varphi_n(x, t) dx \leq \text{const} \cdot d(D_\infty, D_n).$$

Используя вторую оценку леммы, мы получаем

$$\begin{aligned} \|(V_n - V_\infty) | L(H_+ \rightarrow H_-)\|^2 &\leq \int (V_n - V_\infty)(x, y, t)^2 \exp(|x| + |y|) dx dy \\ &\leq \text{const} \cdot \int \varphi_n(x, t) dx \leq \text{const} \cdot d(D_\infty, D_n). \end{aligned}$$

Для доказательства ядерности оператора $V_n(t)$ мы воспользуемся равенством

$$V_n(2t) = [(G_0(t) - G_n(t))C^{-1}][CG_0(t)] + [G_n(t)C][C^{-1}(G_0(t) - G_n(t))], \quad (7)$$

где C – оператор умножения на $\exp(-c|x|)$. При достаточно большом c каждый оператор, заключенный в квадратные скобки в равенстве (7), есть оператор Гильберта–Шмидта, что и доказывает ядерность оператора $V_n(2t)$. Остальные утверждения леммы очевидны.

ЛЕММА 3. *В достаточно малой комплексной окрестности каждой точки интервала $(0, 1)$ функция*

$$\lambda \rightarrow R(\lambda, A_0) = (\lambda E - A_0)^{-1} \in L(H \rightarrow H),$$

рассматриваемая как функция от λ со значениями в $L(H_- \rightarrow H_+)$, имеет аналитическое продолжение из верхней полуплоскости в нижнюю (мы обозначим это продолжение символом $R^+(\lambda, A_0)$) и из нижней полуплоскости в верхнюю (мы обозначим это продолжение символом $R^-(\lambda, A_0)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью преобразования Фурье мы получаем формулу для интегрального ядра оператора $R(\lambda, A_0)$, из которой следует утверждение леммы.

Положим

$$\Gamma_n^\pm(\lambda) = R^\pm(\lambda, A_0)V_n. \quad (8)$$

ЛЕММА 4. *В достаточно малой комплексной окрестности каждой точки интервала $(0, 1)$ оператор (8) ядерный в H_+ , аналитичен по λ и при $n \rightarrow \infty$ сходится к оператору $\Gamma_\infty^\pm(\lambda)$ в ядерной топологии пространства H_+ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем формулу (7) и замечаем, что операторы

$$R(\lambda, A_0)[(G_0(t) - G_n(t))C^{-1}], \quad R(\lambda, A_0)[G_n(t)C], \quad [CG_0(t)], \quad [C^{-1}(G_0(t) - G_n(t))]$$

есть операторы Гильберта–Шмидта в H_+ .

Пусть $\{\nu_\infty, \psi_\infty\}$ – простое собственное значение и простая собственная функция задачи

$$-\Delta_x \psi_\infty(x) = \nu_\infty \psi_\infty(x), \quad x \in D_\infty^{\text{int}}; \quad \psi_\infty(x) = 0, \quad x \in \partial D_\infty^{\text{int}}. \quad (9)$$

Продолжим функцию $\psi_\infty(x)$ на все пространство $\mathbb{R}^d$ нулем. Положим

$$\lambda_\infty = 1 - \exp(-\nu_\infty t).$$

ЛЕММА 5. Если функция $\psi_\infty(x)$ есть решение задачи (9), то она является решением каждого из уравнений

$$\psi_\infty = \Gamma_\infty^\pm(\lambda_\infty)\psi_\infty. \quad (10)$$

Если функция $\psi_\infty(x)$ удовлетворяет одному из уравнений (10), то она есть решение задачи (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО стандартно и дословно повторяет доказательство соответствующего утверждения для оператора Шрёдингера [4].

Справедливо равенство

$$\langle \psi_\infty, V_\infty \psi_\infty \rangle = \int \exp(-k^2 t) |\widehat{\psi}_\infty(k)|^2 dk - \exp(-\nu_\infty t),$$

поэтому без ограничения общности мы можем считать, что параметр t в определении оператора A_∞ выбран так, что

$$\langle \psi_\infty, V_\infty \psi_\infty \rangle \neq 0. \quad (11)$$

ЛЕММА 6. Если выполнено неравенство (11), то число $\mu = 1$ есть полупростое собственное значение оператора $\Gamma_\infty^\pm(\lambda_\infty)$ в пространстве H_+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi \in H_+$, то функция

$$\lambda \rightarrow \langle (\lambda E - A_0)\psi_\infty, R(\lambda, A_0)V_\infty \varphi \rangle$$

аналитична в окрестности точки λ_∞ и при $\text{Im } \lambda > 0$ удовлетворяет равенству

$$\langle (\lambda E - A_0)\psi_\infty, R(\lambda, A_0)V_\infty \varphi \rangle = \langle \psi_\infty, V_\infty \varphi \rangle.$$

Если φ есть решение уравнения

$$(E - \Gamma_\infty^+(\lambda_\infty))\varphi = \psi_\infty, \quad \varphi \in H_+, \quad (12)$$

то

$$\langle (\lambda E - A_0)\psi_\infty, (E - \Gamma_\infty^+(\lambda_\infty))\varphi \rangle = \langle V_\infty \psi_\infty, \psi_\infty \rangle = \langle V_\infty \psi_\infty, \varphi \rangle - \langle \psi_\infty, V_\infty \varphi \rangle = 0,$$

что противоречит (11). Следовательно, все нильпотенты оператора $\Gamma_\infty^+(\lambda_\infty)$ равны нулю.

Заметим, что для оператора Шрёдингера условие, аналогичное (11), хорошо известно [5].

Определим отображения

$$l_j: H_+ \rightarrow H_+, \quad l_1 f(x) = \bar{f}(x), \quad l_2 f(x) = \bar{f}(-x). \quad (13)$$

Заметим, что

$$l_j^{-1} = l_j. \quad (14)$$

Очевидна

ЛЕММА 7. *Равенство*

$$l_j(\bar{\mu}E - \Gamma_n^-(\bar{\lambda})) = (\mu E - \Gamma_n^+(\lambda))l_j \quad (15)$$

справедливо при $j = 1$, а если область D_n инвариантна относительно центральной симметрии: $x \rightarrow -x$, то равенство (15) справедливо и при $j = 2$.

Зафиксируем достаточно малые $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и рассмотрим проектор

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|1-\mu|=\varepsilon} R(\mu, \Gamma_n^+(\lambda)) d\mu, \quad |\lambda - \lambda_\infty| < \delta. \quad (16)$$

Из лемм 5, 6 следует, что при $n = \infty$, $\lambda = \lambda_\infty$ проектор (16) одномерен. Из леммы 4 вытекает, что он одномерен при $n \geq n_0$ и аналитичен по λ . Следовательно, проектор (16) удовлетворяет равенству

$$\Gamma_n^+(\lambda)P_n(\lambda) = P_n(\lambda)\Gamma_n^+(\lambda) = \mu_n^+(\lambda)P_n(\lambda), \quad (17)$$

в котором функция

$$\lambda \rightarrow \mu_n^+(\lambda)$$

аналитична по λ в окрестности точки λ_∞ , непрерывна по n в окрестности $n = \infty$ и удовлетворяет равенству

$$\mu_\infty^+(\lambda_\infty) = 1.$$

ЛЕММА 8. *В окрестности точки λ_∞ проектор $P_n(\lambda)$ может быть записан в виде*

$$P_n(\lambda)f = c_n(\lambda)\langle V_n l(\psi_n(\lambda)), f \rangle \psi_n(\lambda), \quad (18)$$

где $\psi_n(\lambda)$ – собственная функция задачи

$$\begin{aligned} \mu_n^+(\lambda)\psi_n(\lambda) &= \Gamma_n^+(\lambda)\psi_n(\lambda), \quad \psi_n(\lambda) \in H_+, \\ c_n(\lambda) &= \langle V_n l(\psi_n(\lambda)), \psi_n(\lambda) \rangle^{-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

l – любое сопряженно-линейное отображение, которое удовлетворяет равенствам (15), (14). Функция

$$\lambda \rightarrow \psi_n(\lambda) \in H_+$$

аналитична по λ в окрестности точки λ_∞ , непрерывна по n в окрестности $n = \infty$ и при $\lambda = \lambda_\infty$, $n = \infty$ является собственной функцией задачи (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 следует, что существует такая функция $f_0 \in H_+$, что

$$P_\infty(\lambda_\infty)f_0 = \psi_\infty,$$

где ψ_∞ – собственная функция задачи (9). Положим

$$\psi_n(\lambda) = P_n(\lambda)f_0.$$

Функция $\psi_n(\lambda)$ есть решение задачи (19). Так как проектор $P_n(\lambda)$ одномерен, он может быть записан в виде

$$P_n(\lambda)f = \langle \varphi_n(\lambda), f \rangle \psi_n(\lambda), \quad \varphi_n(\lambda) \in H_-.$$

Из (17) следует, что

$$V_n R^-(\bar{\lambda}, A_0) \varphi_n(\lambda) = \bar{\mu}_n^+(\lambda) \varphi_n(\lambda).$$

Положим

$$\eta_n(\lambda) = R^-(\bar{\lambda}, A_0) \varphi_n(\lambda).$$

Из (17) следует равенство

$$\bar{\mu}_n^+(\lambda) \eta_n(\lambda) = \Gamma_n^-(\bar{\lambda}) \eta_n(\lambda),$$

поэтому

$$\mu_n^+(\lambda) l(\eta_n(\lambda)) = \Gamma_n^+(\lambda) l(\eta_n(\lambda)).$$

Следовательно,

$$l(\eta_n(\lambda)) = \alpha \psi_n(\lambda), \quad \eta_n(\lambda) = \bar{\alpha} l(\psi_n(\lambda)).$$

Но

$$\varphi_n(\lambda) = (\bar{\lambda}E - A_0) \eta_n(\lambda) = V_n \eta_n(\lambda),$$

поэтому

$$\varphi_n(\lambda) = \bar{\alpha} V_n l(\psi_n(\lambda)).$$

Множитель α определяется из условия нормировки проектора. Формула (18) доказана. Остальные утверждения леммы тривиальны.

ЛЕММА 9. *Справедливо равенство*

$$\left. \frac{d\mu_\infty^+(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_\infty} = -\langle \psi_\infty, V_\infty \psi_\infty \rangle^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнение (19) на $(\lambda E - A_0)$, мы получаем:

$$\mu_\infty^+(\lambda)(\lambda E - A_0)\psi_\infty(\lambda) = V_\infty \psi_\infty(\lambda), \quad \text{Im } \lambda > 0.$$

Скалярно умножим это уравнение на $\psi_\infty(\lambda_\infty)$ и продифференцируем по λ . Получим:

$$\begin{aligned} & \langle \psi_\infty(\lambda_\infty), (\lambda E - A_0)\psi_\infty(\lambda) \rangle \frac{d\mu_\infty^+(\lambda)}{d\lambda} + \mu_\infty^+(\lambda) \left\langle \psi_\infty(\lambda_\infty), (\lambda E - A_0) \frac{d\psi_\infty(\lambda)}{d\lambda} \right\rangle \\ & + \mu_\infty^+(\lambda) \langle \psi_\infty(\lambda_\infty), \psi_\infty(\lambda) \rangle = \left\langle \psi_\infty(\lambda_\infty), V_\infty \frac{d\psi_\infty(\lambda)}{d\lambda} \right\rangle. \end{aligned}$$

Теперь мы положим $\lambda = \lambda_\infty + \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$, и получим нужную формулу.

СЛЕДСТВИЕ. При достаточно большом n уравнение

$$\mu_n^+(\lambda) = 1$$

имеет в круге $|\lambda - \lambda_\infty| < \delta$ единственный корень λ_n :

$$\mu_n^+(\lambda_n) = 1. \quad (20)$$

Так как уравнение

$$\psi_n(\lambda) = \Gamma_n^+(\lambda)\psi_n(\lambda)$$

при $n < \infty$, $\text{Im } \lambda > 0$ не имеет нетривиальных решений из $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$, то

$$\text{Im } \lambda_n < 0, \quad n < \infty. \quad (21)$$

Пусть Ω – единичная сфера в $\mathbb{R}^d$ с обычной мерой $d\omega$:

$$\int_{\Omega} d\omega = 1.$$

Пусть h – гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций со значениями в $L^2(\Omega, d\omega)$:

$$h = L^2([0, \infty) \rightarrow L^2(\Omega, d\omega), d\lambda), \quad \|f\|_h^2 = \int_0^\infty \left[\int_{\Omega} |f(\lambda, \omega)|^2 d\omega \right] d\lambda.$$

Отображение

$$U: L^2(\mathbb{R}^d, dx) \rightarrow h, \quad Uf(\lambda, \omega) = 2^{-1/2} (2\pi)^{-d/2} \lambda^{d/2-1} \hat{f}(\omega \sqrt{\lambda})$$

унитарно:

$$\langle f, g \rangle = \langle Uf, Ug \rangle_h,$$

и диагонализует оператор $-\Delta$:

$$\langle f, (-\Delta)g \rangle = \int_0^\infty \lambda \langle Uf(\lambda), Ug(\lambda) \rangle_{\Omega} d\lambda.$$

(Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ – скалярное произведение в $L^2(\Omega, d\omega)$.) Если $f \in H_-$, то функция

$$\lambda \rightarrow Uf(\lambda, \omega)$$

аналитична по λ в малой комплексной окрестности точки $\lambda \in (0, \infty)$ и непрерывна по ω .

Обратное отображение U^{-1} в пространстве h действует как интегральный оператор с ядром $U^{-1}(\cdot | \lambda, \omega)$, причем функция

$$\lambda \rightarrow U^{-1}(\cdot | \lambda, \omega) \in H_+$$

аналитична по λ и непрерывна по ω .

Если

$$J(\lambda) = 1 - \exp(-\lambda t),$$

то оператор

$$U_J: U_J f(\lambda, \omega) = J'(J^{-1}(\lambda)^{-1/2}) Uf(J^{-1}(\lambda), \omega)$$

унитарен и диагонализует оператор $J(-\Delta)$ в $L^2([0, 1] \rightarrow L^2(\Omega, d\omega), d\lambda)$.

Определим два отображения единичной сферы в себя:

$$p_1(\omega) = -\omega, \quad p_2(\omega) = \omega. \quad (22)$$

ЛЕММА 10. При $\text{Im } \lambda = 0$, $j = 1$ для решения уравнения (19) справедливо равенство:

$$|\langle V_n l_j(\psi_n(\lambda)), U_J^{-1}(\cdot | \lambda, p_j(\omega)) \rangle| = |U_J(V_n \psi_n(\lambda))(\lambda, \omega)|. \quad (23)$$

Если область D_n инвариантна относительно центральной симметрии, то равенство (23) верно при $j = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в прямой выкладке с учетом того факта, что при центральной симметрии выполнено равенство

$$V_n(-x, -y, t) = V_n(x, y, t).$$

ЛЕММА 11. Для решения уравнения (19) при $\text{Im } \lambda = 0$ справедливо равенство

$$\text{Im } \mu_n^+(\lambda) \langle \psi_n(\lambda), V_n \psi_n(\lambda) \rangle = -\pi \langle U_J(\psi_n(\lambda))(\lambda), U_J(\psi_n(\lambda))(\lambda) \rangle_\Omega. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (19) следует, что

$$\begin{aligned} \mu_n^+(\lambda + i\varepsilon) \langle V_n \psi_n(\lambda + i\varepsilon), \psi_n(\lambda + i\varepsilon) \rangle - \bar{\mu}_n^+(\lambda + i\varepsilon) \langle \psi_n(\lambda + i\varepsilon), V_n \psi_n(\lambda + i\varepsilon) \rangle \\ = \langle V_n \psi_n(\lambda + i\varepsilon), [R(\lambda + i\varepsilon, A_0) - R(\lambda - i\varepsilon, A_0)] V_n \psi_n(\lambda + i\varepsilon) \rangle. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получаем равенство (24).

СЛЕДСТВИЕ. Справедливо равенство

$$U_J(V_\infty \psi_\infty(\lambda_\infty))(\lambda_\infty, \omega) \equiv 0. \quad (25)$$

Определим оператор

$$T_n^+(\lambda) = V_n + V_n R^+(\lambda, A_n) V_n.$$

ЛЕММА 12. В окрестности точки λ_∞ оператор $T_n^+(\lambda)$ может быть записан в виде

$$T_n^+(\lambda) = r(\lambda) + T_{n,\text{reg}}^+(\lambda), \quad (26)$$

где оператор $T_{n,\text{reg}}^+(\lambda)$ аналитичен по λ как функция со значениями в $L(H_+ \rightarrow H_+)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\lambda - \lambda_\infty| < \delta} \|T_{n,\text{reg}}^+(\lambda) - T_{\infty,\text{reg}}^+(\lambda) | L(H_+ \rightarrow H_+)\| = 0,$$

а оператор $r(\lambda)$ дается формулой

$$r(\lambda)f = \frac{c_n(\lambda)\mu_n^+(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} \langle V_n l(\psi_n(\lambda)), f \rangle V_n \psi_n(\lambda). \quad (27)$$

Входящие в (27) величины описаны в лемме 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности точки λ_∞ справедливо равенство

$$(E - \Gamma_n^+(\lambda))^{-1} = \frac{P_n(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} + S_{n,\text{reg}}(\lambda), \quad (28)$$

где $S_{n,\text{reg}}(\lambda)$ – оператор, аналитичный по λ и непрерывный по n . Но

$$R^+(\lambda, A_n) = (E - \Gamma_n^+(\lambda))^{-1} R^+(\lambda, A_0)$$

и поэтому

$$T_n^+(\lambda) = \frac{V_n P_n(\lambda) \Gamma_n^+(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} + T_{n,\text{reg}}^+(\lambda),$$

где

$$T_{n,\text{reg}}^+(\lambda) = V_n + V_n S_{n,\text{reg}}(\lambda) \Gamma_n^+(\lambda).$$

Далее мы имеем:

$$\begin{aligned} V_n P_n(\lambda) \Gamma_n^+(\lambda) f &= c_n(\lambda) \langle V_n l(\psi_n(\lambda)), R^+(\lambda, A_0) V_n f \rangle V_n \psi_n(\lambda) \\ &= c_n(\lambda) \langle R^-(\bar{\lambda}, A_0) V_n l(\psi_n(\lambda)), V_n f \rangle V_n \psi_n(\lambda) \\ &= c_n(\lambda) \langle \Gamma^-(\bar{\lambda}) l(\psi_n(\lambda)), V_n f \rangle V_n \psi_n(\lambda) \\ &= c_n(\lambda) \mu_n^+(\lambda) \langle l(\psi_n(\lambda)), V_n f \rangle V_n \psi_n(\lambda) \\ &= c_n(\lambda) \mu_n^+(\lambda) \langle V_n l(\psi_n(\lambda)), f \rangle V_n \psi_n(\lambda). \end{aligned}$$

Положим

$$t^+(A_n, A_0 \mid \lambda, \omega, \omega') = U_J(T_n^+(\lambda) U_J^{-1}(\cdot \mid \lambda, \omega'))(\lambda, \omega). \quad (29)$$

Из леммы 12 следует, что

$$\begin{aligned} &t^+(A_n, A_0 \mid \lambda, \omega, \omega') \\ &= \frac{c_n(\lambda) \mu_n^+(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} \langle V_n l(\psi_n(\lambda)), U_J^{-1}(\cdot \mid \lambda, \omega') \rangle U_J(V_n \psi_n(\lambda))(\lambda, \omega) + t_{\text{reg}}^+(A_n, A_0 \mid \lambda, \omega), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$t_{\text{reg}}^+(A_n, A_0 \mid \lambda, \omega) = U_J(T_{n,\text{reg}}^+(\lambda) U_J^{-1}(\cdot \mid \lambda, \omega'))(\lambda, \omega). \quad (31)$$

Из леммы 12 следует

ЛЕММА 13. *Равномерно по $\omega, \omega' \in \Omega$, $|\lambda - \lambda_\infty| < \delta$:*

$$t_{\text{reg}}^+(A_n, A_0 \mid \lambda, \omega, \omega') \rightarrow t_{\text{reg}}^+(A_\infty, A_0 \mid \lambda, \omega, \omega'), \quad n \rightarrow \infty.$$

При $\lambda \neq \lambda_\infty$ равномерно по $\omega, \omega' \in \Omega$:

$$t^+(A_n, A_0 \mid \lambda, \omega, \omega') \rightarrow t^+(A_\infty, A_0 \mid \lambda, \omega, \omega'), \quad n \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 14. *Если отображения $\{l_j, p_j\}$ удовлетворяют равенству (23), то*

$$\lim_{|\lambda - \lambda_\infty| \rightarrow +0} \sup_{\omega \in \Omega} |t_{\text{reg}}^+(A_\infty, A_0 \mid \lambda, \omega, p_j(\omega)) - t^+(A_\infty, A_0 \mid \lambda, \omega, p_j(\omega))| = 0. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 5 и 10 справедливо равенство

$$\begin{aligned} & |t_{\text{reg}}^+(A_n, A_0 \mid \lambda, \omega, p_j(\omega)) - t^+(A_n, A_0 \mid \lambda, \omega, p_j(\omega))| \\ &= |c_n(\lambda) \mu_n^+(\lambda) (1 - \mu_n^+(\lambda))^{-1}| \cdot |W_n(\lambda, \omega)|^2, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$W_n(\lambda, \omega) = U_J(V_n \psi_n(\lambda))(\lambda, \omega).$$

В силу равенства (25) функция

$$\lambda \rightarrow W_\infty(\lambda, \omega) \in C(\Omega)$$

аналитична и имеет нуль в точке λ_∞ . Функция

$$\lambda \rightarrow 1 - \mu_\infty^+(\lambda)$$

в точке λ_∞ имеет нуль первого порядка, что и доказывает наше утверждение.

Положим по определению

$$\text{v.p. } t^+(A_\infty, A_0 \mid \lambda_\infty, \omega, p_j(\omega)) = \lim_{|\lambda - \lambda_\infty| \rightarrow +0} t^+(A_\infty, A_0 \mid \lambda, \omega, p_j(\omega)).$$

ЛЕММА 15. Пусть числа λ_n определены равенством (20) и при некотором $\varepsilon > 0$ действительные числа β_n удовлетворяют условию

$$|\beta_n - \text{Re } \lambda_n| = O(|\text{Im } \lambda_n|^{1+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0.$$

Если при всех $n \geq n_0$ отображения $\{l_j, p_j\}$ удовлетворяют равенству (23), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |t^+(A_n, A_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega)) - \text{v.p. } t^+(A_\infty, A_0 \mid \lambda_\infty, \omega, p_j(\omega))| d\omega = \frac{1}{\pi}, \quad (34)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |t^+(A_n, A_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega)) - t^+(A_\infty, A_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega))| d\omega = \frac{1}{\pi}. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что утверждения (34) и (35) эквивалентны в силу леммы 14. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} & t^+(A_n, A_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega)) - t^+(A_\infty, A_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega)) \\ &= [t^+(A_n, A_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega)) - t_{\text{reg}}^+(A_n, A_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega))]_1 \\ &\quad + [t_{\text{reg}}^+(A_n, A_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega)) - t_{\text{reg}}^+(A_\infty, A_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega))]_2 \\ &\quad + [t_{\text{reg}}^+(A_\infty, A_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega)) - t^+(A_\infty, A_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega))]_3. \end{aligned} \quad (36)$$

Из леммы 13 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_\omega |[\cdot]_2| = 0.$$

Из леммы 14 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_\omega |[\cdot]_3| = 0.$$

Из (33), (23), (24) следует, что

$$\begin{aligned} \int |[\cdot]_1| d\omega &= \left| \frac{c_n(\beta_n)}{1 - \mu_n^+(\beta_n)} \right| \cdot \int |W(\beta_n, \omega)|^2 d\omega \\ &= \left| \frac{c_n(\beta_n)}{\pi(1 - \mu_n^+(\beta_n))} \right| \cdot |\operatorname{Im} \mu_n^+(\beta_n) \langle \psi_n(\beta_n), V_n \psi_n(\beta_n) \rangle|. \end{aligned} \quad (37)$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} 1 - \mu_n^+(\beta_n) &= \mu_n^+(\lambda_n) - \mu_n^+(\beta_n) = i \frac{d\mu_n^+(\beta_n)}{d\lambda} \operatorname{Im} \lambda_n + O(|\operatorname{Im} \lambda_n|^{1+\varepsilon}); \\ \operatorname{Im} \mu_n^+(\beta_n) &= \operatorname{Im} \left(i \frac{d\mu_n^+(\beta_n)}{d\lambda} \operatorname{Im} \lambda_n \right) + O(|\operatorname{Im} \lambda_n|^{1+\varepsilon}), \end{aligned}$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(1 - \mu_n^+(\beta_n))^{-1} \operatorname{Im} \mu_n^+(\beta_n)| = 1.$$

Далее мы замечаем, что в силу простоты собственного значения ν_∞ выполнено равенство $l(\psi_\infty) = \psi_\infty$ и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n(\beta_n) \langle \psi_n(\beta_n), V_n \psi_n(\beta_n) \rangle| = \left| \frac{\langle \psi_\infty(\lambda_\infty), V_\infty \psi_\infty(\lambda_\infty) \rangle}{\langle l(\psi_\infty(\lambda_\infty)), V_\infty \psi_\infty(\lambda_\infty) \rangle} \right| = 1.$$

Лемма доказана.

§ 4. Основные результаты

Как известно [3], оператор рассеяния $S(L_n, L_0)$ коммутирует с оператором L_0 и может быть записан в виде

$$S(L_n, L_0) = \int_0^\infty S(L_n, L_0)(\mu) dE(\mu, L_0),$$

где $E(\mu, L_0)$ – спектральная функция оператора Лапласа, а $S(L_n, L_0)(\mu)$ – матрица рассеяния. Используя преобразование U , матрицу рассеяния $S(L_n, L_0)(\mu)$ можно представить как операторную функцию со значениями в $L(L^2(\Omega, d\omega) \rightarrow L^2(\Omega, d\omega))$:

$$S(L_n, L_0)(\mu) = \operatorname{id} - 2\pi i t^+(L_n, L_0 | \lambda),$$

где id – тождественный оператор в $L^2(\Omega, d\omega)$, а $t^+(L_n, L_0 | \lambda)$ – интегральный оператор с ядром

$$t^+(L_n, L_0 | \lambda, \omega, \omega') = U(t^+(L_n, L_0 | \lambda) U^{-1}(\cdot | \lambda, \omega'))(\lambda, \omega).$$

Заметим, что амплитуда рассеяния (измеряемая на опыте величина) отличается от $t^+(L_n, L_0 | \lambda, \omega, \omega')$ зависящим от λ множителем (см. [1], [2]). В силу принципа инвариантности волновых операторов (см. [3]) справедливо равенство

$$t^+(L_n, L_0 | \lambda, \omega, \omega') = t^+(A_n, A_0 | 1 - \exp(-\lambda t), \omega, \omega').$$

Пусть числа $\{\lambda_n\}$ определены из (20) и

$$\nu_n = -\frac{\ln(1 - \lambda_n)}{t}. \quad (38)$$

Положим по определению

$$\text{v.p. } t^+(L_\infty, L_0 \mid \nu_\infty, \omega, p_j(\omega)) = \text{v.p. } t^+(A_\infty, A_0 \mid 1 - \exp(-\nu_\infty t), \omega, p_j(\omega)).$$

Из леммы 15 следует

ТЕОРЕМА 1. Пусть числа ν_n определены равенством (38) и при некотором $\varepsilon > 0$ действительные числа β_n удовлетворяют условию

$$|\beta_n - \operatorname{Re} \nu_n| = O(|\operatorname{Im} \nu_n|^{1+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0.$$

Если при всех $n \geq n_0$ отображения $\{l_j, p_j\}$ удовлетворяют равенству (23), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |t^+(L_n, L_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega)) - \text{v.p. } t^+(L_\infty, L_0 \mid \nu_\infty, \omega, p_j(\omega))| d\omega = \frac{1}{\pi}, \quad (39)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |t^+(L_n, L_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega)) - t^+(L_\infty, L_0 \mid \beta_n, \omega, p_j(\omega))| d\omega = \frac{1}{\pi}. \quad (40)$$

В рассматриваемом нами случае величина $\text{v.p. } t^+(L_\infty, L_0 \mid \nu_\infty, \omega, -\omega)$ есть амплитуда рассеяния назад, а $\text{v.p. } t^+(L_\infty, L_0 \mid \nu_\infty, \omega, \omega)$ — амплитуда рассеяния вперед.

Из леммы 2 следует оценка

$$|\operatorname{Im} \nu_n| < \operatorname{const} \cdot \rho,$$

где ρ — характерный размер отверстий. Известна (см. [6], [7]) более точная оценка:

$$|\operatorname{Im} \nu_n| < \operatorname{const} \cdot \exp(-a\rho^{-\alpha}).$$

Список литературы

1. Shenk N., Thoe D. Eigenfunction expansions and scattering theory for perturbation of $-\Delta$ // J. Math. Anal. Appl. 1971. V. 36. P. 313–351.
2. Shenk N., Thoe D. Resonant states and poles of the scattering matrix for perturbation of $-\Delta$ // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 37. P. 467–491.
3. Яфаев Д. Р. Математическая теория рассеяния. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1994.
4. Арсеньев А. А. Резонансные свойства матрицы рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера с ловушечным потенциалом // Матем. сб. 1996. Т. 187. №6. С. 3–20.
5. Albeverio S., Høegh-Kron R. Perturbations of resonances in quantum mechanics // J. Math. Anal. Appl. 1989. V. 101. P. 491–513.
6. Hislop P. D., Martinez A. Scattering resonances of a Helmholtz resonator // Indiana Univ. Math. J. 1991. V. 40. №2. P. 767–788.
7. Fernandez C. A. Resonances in scattering by a resonator // Indiana Univ. Math. J. 1985. V. 34. №1. P. 115–125.