Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах,
Матем. сб., 2001, том 192, номер 9, 17–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 04:35:12

УДК 517.5

В. В. Волчков

Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах

Изучаются различные классы функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам фиксированного радиуса на римановом некомпактном симметрическом пространстве X ранга 1. Основной результат работы содержит точные условия на рост линейной комбинации нескольких функций, принадлежащих таким классам, из чего следует, в частности, равенство каждой из них нулю. Этот результат существенно уточняет известную теорему Беренштейна–Зальцмана о двух радиусах. В качестве одного из приложений получено описание множеств Помпейю на X в терминах аппроксимации их индикаторов в пространстве $L(X)$.

Библиография: 34 названия.

Введение

Функции с нулевыми интегралами по всем шарам из $\mathbb{R}^n$, радиусы которых принадлежат заданному множеству $E \subset (0, +\infty)$, изучались во многих работах (см. обзор [1] с обширной библиографией, а также [2; §3]). Одним из известных результатов в этой области является теорема Зальцмана о двух радиусах, утверждающая, что всякая функция с таким свойством равна нулю, если E состоит из двух положительных чисел r_1, r_2 , для которых число r_1/r_2 не является отношением корней функции Бесселя $J_{n/2}$ (см. [3]). Примеры показывают, что указанное условие для r_1/r_2 является необходимым (см. [3]).

Теорема о двух радиусах получила дальнейшее развитие и уточнение в ряде работ Л. Зальцмана, К. А. Беренштейна, Р. Гэя, Д. Смита и др. (см. [4]–[16] и библиографию в них). Одним из основных направлений в этих исследованиях является изучение функций с заданными шаровыми средними на различных классах однородных пространств с инвариантной мерой. В частности, были получены аналоги теоремы о двух радиусах для пространств постоянной кривизны [5], а затем для симметрических пространств ранга 1 и группы Гейзенберга, см. [6], [13]–[15].

Доказательства основных результатов из цитированных выше работ основаны на применении аппарата преобразования Фурье и соответствующей техники многомерного комплексного анализа (см., например, обзор [2]).

В последние годы автором настоящей статьи разработана принципиально новая методика, основанная на описании различных функциональных пространств в терминах разложений по специальным функциям, которая позволила получить

Работа выполнена при частичной поддержке ISF (грант № NU9D200), ISSEP (грант № NAPU071013) и МНОП (грант № NYSU081012).

окончательные результаты в ряде известных задач о шаровых средних на евклидовых и гиперболических пространствах (см. [17]–[26] и библиографию к этим работам). Среди них отметим окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах [17], полное решение проблемы Зальцмана о голоморфности функции с нулевыми интегралами по конформно-инвариантному семейству окружностей [18], решение проблемы носителя для шаровых средних [19], а также описание множеств инъективности преобразования Помпейю для широкого класса распределений с носителем на сфере [20]. В этих задачах прежние методы оказались либо неприменимыми, либо недостаточно тонкими, см., например, [8], [9], [11]–[13]. В связи с этим большой интерес представляет развитие техники, разработанной в [17]–[26], для более широкого класса однородных пространств.

В настоящей работе это делается для симметрических пространств некомпактного типа ранга 1. Основным результатом является теорема 1 (см. §1), которая существенно усиливает и обобщает известную теорему Беренштейна–Зальцмана о двух радиусах (см. [6; теорема 1]). Этот результат носит окончательный характер и имеет ряд приложений (см. §1). Многие из промежуточных утверждений, полученных в работе, представляют самостоятельный интерес (см., например, теоремы 4, 5, а также §5).

В §1 формулируется основной результат и его следствия. В §2 приводятся основные обозначения и некоторые вспомогательные утверждения об усреднении функций, используемые в дальнейшем. В §§3, 4 содержатся асимптотические оценки сферических функций при различных значениях параметров, а также свойства их нулевых множеств. В §5 доказываются теоремы существования и единственности для решений интегрального уравнения специального вида. В §6 изучаются свойства функций, имеющих нулевые интегралы по всем геодезическим шарам фиксированного радиуса. В частности, для некоторых классов таких функций получены описание и теорема единственности. Доказательство основного результата и его следствий содержится в §7.

Автор благодарит Л. Зальцмана и К. А. Беренштейна за обсуждения и предоставленную литературу.

§1. Формулировка основного результата

По поводу используемых ниже основных понятий и фактов из теории симметрических пространств см., например, [27], [28], а также [6].

Всюду в дальнейшем G – связная некомпактная полупростая группа Ли с конечным центром и вещественным рангом, равным единице, $K \subset G$ – максимальная компактная подгруппа и $X = G/K$ – соответствующее симметрическое пространство некомпактного типа ранга 1. Как обычно, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ – разложение Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в прямую сумму алгебры Ли $\mathfrak{k}$ группы K и ее ортогонального дополнения $\mathfrak{p}$ относительно формы Киллинга на $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ – максимальное абелево подпространство (в данном случае одномерное), γ – единственный положительный неделимый корень алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$, m_γ и $m_{2\gamma}$ – кратности корней γ и 2γ соответственно,

$$\alpha = \frac{1}{2}(m_\gamma + m_{2\gamma} - 1), \quad \beta = \frac{1}{2}(m_{2\gamma} - 1), \quad \rho = \alpha + \beta + 1.$$

Таблица возможных значений α, β с соответствующей классификацией симметрических пространств содержится в [6].

Форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ индуцирует G -инвариантную риманову структуру на X с соответствующей функцией расстояния $d(\cdot, \cdot)$ и римановой мерой dx . Через $L(X)$ и $L_{\text{loc}}(X)$ обозначим классы комплекснозначных функций на X , соответственно интегрируемых и локально интегрируемых по мере dx .

Пусть $o = \pi(e)$, где $\pi: G \rightarrow X$ – каноническая проекция и e – единица группы G . Следуя [6; с. 610], обозначим через $B_r(y) = \{x \in X : d(x, y) < r\}$ геодезический шар радиуса r с центром $y \in X$, $B_r = B_r(o)$, $B_\infty = X$ и $\overline{B_r}$ – замыкание B_r .

Для любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $t, \xi, \eta \geq 0$ положим

$$\varphi_\lambda^{\xi, \eta}(t) = (\text{ch } t)^{-i\lambda - \sigma} F\left(\frac{\sigma + i\lambda}{2}, \frac{\sigma + i\lambda}{2} - \eta, 1 + \xi, \text{th}^2 t\right), \quad (1)$$

где $\sigma = \xi + \eta + 1$ и F – гипергеометрическая функция. Пусть также

$$N(r) = \{\lambda > 0 : \varphi_\lambda^{\alpha+1, \beta+1}(r) = 0\}, \quad N(r_1, r_2) = N(r_1) \cap N(r_2).$$

Свойства этих множеств подробно изучены в §4. Для функции $f \in L_{\text{loc}}(X)$ обозначим

$$M_r(f) = \int_{B_r} |f(x)| e^{-\rho d(o, x)} dx, \\ \mathcal{L}(f) = \varliminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{M_r(f)}{r}.$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место следующие утверждения.*

1) Пусть $r_1, \dots, r_m > 0$ фиксированы и множество $\{1, \dots, m\}$ является объединением попарно непересекающихся множеств $A_1, \dots, A_s$ таких, что множества $N_k = \bigcup_{j \in A_k} N(r_j)$, $k = 1, \dots, s$, попарно не пересекаются. Пусть также $f_1, \dots, f_m \in L_{\text{loc}}(X)$ и для любого $g \in G$

$$\int_{g B_{r_j}} f_j(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Тогда если $\mathcal{L}(\sum_{j=1}^m f_j) = 0$, то $\sum_{j \in A_k} f_j = 0$ при всех $k = 1, \dots, s$.

2) Для любых $r_1, \dots, r_m > 0$ существуют линейно независимые функции $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(X)$, удовлетворяющие (2), для которых

$$M_r\left(\sum_{j=1}^m f_j\right) = O(r), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что без предположения о том, что множества N_k , $k = 1, \dots, s$, попарно не пересекаются, утверждение 1), вообще говоря, неверно (см. §7). Появление множеств, связанных с нулями гипергеометрических функций, можно объяснить на эвристическом уровне, если перейти в условии (2) к (обобщенному) преобразованию Фурье. Тогда при дополнительных ограничениях на рост каждой

из функций f_j из (2) следует, что носитель преобразования Фурье f_j содержится в множестве нулей преобразования Фурье индикатора B_{r_j} , которое выражается через гипергеометрические функции, см. [6; с. 611]. Отметим некоторые частные случаи теоремы 1, представляющие самостоятельный интерес.

Пусть $m = s = 1$, тогда $A_1 = \{1\}$ и условия утверждения 1) выполнены. В этом случае из утверждений 1), 2) получаем точную теорему единственности для функций с нулевыми интегралами по всем геодезическим шарам фиксированного радиуса.

Далее, пусть $m = s > 1$ и $A_k = \{k\}$ при всех $k = 1, \dots, s$. Полагая $f_j = f$ при $j = 1, \dots, m-1$ и $f_m = (1-m)f$, из утверждения 1) имеем теорему “об m радиусах” для функции f . В частности, при $m = 2$ отсюда получаем теорему Беренштейна–Зальцмана (см. [6; теорема 1]).

Рассмотрим теперь некоторые уточнения теоремы Беренштейна–Зальцмана, вытекающие из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $r_1, r_2 > 0$ фиксированы, $f_1, f_2 \in L_{\text{loc}}(X)$ и

$$\int_{gB_{r_1}} f_1(x) dx = \int_{gB_{r_2}} f_2(x) dx = 0 \quad (4)$$

для всех $g \in G$. Тогда если

$$\mathcal{L}(f_1 - f_2) = 0 \quad (5)$$

и $N(r_1, r_2) = \emptyset$, то $f_1 = f_2 = 0$. Если выполнено (5) и $N(r_1, r_2) \neq \emptyset$, то $f_1 = f_2$, и при этих условиях существуют ненулевые функции $f_1, f_2 \in C^\infty(X)$, удовлетворяющие (4).

Утверждение 2) теоремы 1 показывает, что условие (5) в следствии 1 также нельзя ослабить.

Следующий результат касается случая, когда условие вида (4) для одного из радиусов можно заменить верхней оценкой шарового среднего, но, тем не менее, утверждение теоремы Беренштейна–Зальцмана сохраняется.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $r_1, r_2 > 0$ фиксированы, $f \in L_{\text{loc}}(X)$ и

$$\int_{gB_{r_1}} f(x) dx = 0 \quad \text{для любого } g \in G. \quad (6)$$

Пусть также для функции $\varphi(x) = \int_{B_{r_2}(x)} f(y) dy$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}(\varphi) = 0. \quad (7)$$

Тогда если $N(r_1, r_2) = \emptyset$, то $f = 0$, а при $N(r_1, r_2) \neq \emptyset$ существует ненулевая функция $f \in C^\infty(X)$, для которой выполнены (6) и (7). Кроме того, для любых $r_1, r_2 > 0$ существует ненулевая функция $f \in C^\infty(X)$, удовлетворяющая (6), для которой $M_r(\varphi) = O(r)$ при $r \rightarrow +\infty$.

Для $\lambda > 0$ обозначим $\mathcal{N}_\lambda = \{r > 0 : \varphi_\lambda^{\alpha+1, \beta+1}(r) = 0\}$. Это множество может быть представлено в виде возрастающей последовательности положительных чисел (см. §4).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\lambda > 0$ фиксировано и $\mathcal{N}_\lambda = \{r_1, r_2, \dots\}$. Пусть также $f_j \in L_{\text{loc}}(X)$ и $\int_{g B_{r_j}} f_j(x) dx = 0$ для всех $g \in G$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда если $\mathcal{L}(f_j - f_{j+1}) = 0$ при любом j , то все f_j совпадают и

$$\Delta f_j = -(\lambda^2 + \rho^2) f_j \quad (8)$$

(здесь Δ – оператор Лапласа–Бельтрами на X и равенство (8) понимается в смысле распределений).

Отметим, что имеет место и обратное утверждение: всякая функция, удовлетворяющая (8) на X , имеет нулевые интегралы по всем шарам, радиусы которых принадлежат $\mathcal{N}_\lambda$. Это следует из теоремы о среднем для собственных функций оператора Δ (см. [6; с. 610]). Подобный результат ранее был получен автором в евклидовом случае и использован для описания множеств Помпейю на $\mathbb{R}^n$, см. [22]. Здесь мы получим аналогичное утверждение для пространства X .

Непустое открытое относительно компактное множество $\Omega \subset X$ называется *множеством Помпейю* на X , если для любой функции $f \in L_{\text{loc}}(X)$ из условия $\int_{g\Omega} f(x) dx = 0$ при всех $g \in G$ следует, что $f = 0$. Классическая проблема Помпейю об описании таких множеств Ω изучалась многими авторами (см. обзоры [1], [2; §3], а также [22], [29], [30]). Отметим, что в настоящее время автор обзора [1] профессор Л. Зальцман (Bar-Ilan University, Израиль, e-mail: zalsman@macs.biu.ac.il) имеет более полную библиографию по данному вопросу, которая может быть выслана желающим.

Одним из приложений теоремы 1 является следующее описание множеств Помпейю в терминах аппроксимации их индикаторов в пространстве $L(X)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть Ω – непустое открытое относительно компактное подмножество X со связным дополнением, χ_Ω – характеристическая функция (индикатор) множества Ω . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) Ω не является множеством Помпейю на X ;
- 2) существует $\lambda = \lambda(\Omega) > 0$ такое, что функция χ_Ω является пределом сходящейся в $L(X)$ последовательности линейных комбинаций индикаторов геодезических шаров с радиусами $r \in \mathcal{N}_\lambda$.

По поводу других результатов, связанных с проблемой Помпейю на симметрических пространствах, см. [31], [32].

§2. Обозначения и вспомогательные конструкции

Далее, как обычно, $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ – множество C^∞ -функций с компактными носителями на бесконечно дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$. Символами $\mathcal{D}_K(B_R)$, $C_K^\infty(B_R)$, $0 < R \leq \infty$, обозначаются соответственно множества функций из $\mathcal{D}(B_R)$ и $C^\infty(B_R)$, инвариантных относительно группы K .

Пусть $G = NAK$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} + \mathfrak{a} + \mathfrak{f}$ – соответствующие разложения Ивасава и $\|\cdot\|$ – норма на $\mathfrak{p}$, индуцированная формой Киллинга на $\mathfrak{g}$. Тогда для любого $g \in G$ имеем

представление $g = n(g) \exp H(g)k(g)$, в котором элементы $n(g) \in N$, $H(g) \in \mathfrak{a}$, $k(g) \in K$ определяются однозначно и

$$\|H(g)\| \leq d(o, go). \quad (9)$$

При этом знак равенства в (9) имеет место тогда и только тогда, когда $g \in AK$ (см. [28; гл. 4, § 10]). Пусть $\mathfrak{e}$ — фиксированный вектор в $\mathfrak{a}$, для которого $\|\mathfrak{e}\| = 1$. Рассмотрим функцию $h: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, заданную следующим образом: если $x \in X$ и $x = go$, $g \in G$, то $h(x)\mathfrak{e} = H(g)$. Очевидно, в этом определении $h(x)$ не зависит от выбора g с условием $x = go$. Кроме того, из (9) и определения h имеем

$$|h(x)| \leq d(o, x), \quad (10)$$

$$h(nx) = h(x) \quad \text{для любого } n \in N. \quad (11)$$

Пусть $\mathfrak{a}^*$ и $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ — соответственно множества всех вещественнозначных и комплекснозначных линейных функционалов на $\mathfrak{a}$. Поскольку $\mathfrak{a}$ одномерно, мы можем отождествить $\mathfrak{a}^*$ с $\mathbb{R}^1$ и $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ с $\mathbb{C}$. Тогда сферическая функция на X имеет вид

$$\varphi_{\lambda}(x) = \varphi_{\lambda}^{\alpha, \beta}(d(o, x)) = \int_K e^{(i\lambda + \rho)h(kx)} dk, \quad (12)$$

где $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и dk — нормированная мера Хаара на K (см. [28; гл. 4, теорема 4.3], а также [6]). Для K -инвариантной функции $f \in L(X)$ с компактным носителем $\text{supp } f$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим через

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_X f(x) \varphi_{-\lambda}(x) dx \quad (13)$$

сферическое преобразование f . Положим $A_{\xi, \eta}(t) = (\text{sh } t)^{1+2\xi} (\text{ch } t)^{1+2\eta}$. При $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$ это выражение с точностью до постоянного множителя равно площади геодезической сферы радиуса t на X (см. [6; § 6]). Далее, пусть

$$c(\lambda, \xi, \eta) = \frac{2^{\sigma - i\lambda} \Gamma(1 + \xi) \Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{\sigma + i\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\xi - \eta + 1 + i\lambda}{2}\right)}, \quad (14)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Тогда функция Хариш-Чандры $\mathbf{c}(\lambda)$ для пространства X имеет вид $\mathbf{c}(\lambda) = c(\lambda, \alpha, \beta)$, см. [28; гл. 4, § 6, теорема 6.4].

Нам потребуются также следующие простые утверждения об усреднениях функций на группах K и G .

ЛЕММА 1. Пусть $g \in G$, $f \in C(X)$, $\mathcal{L}(f) = 0$ и

$$\mathcal{F}_g(x) = \int_K f(gkx) dk, \quad x \in X. \quad (15)$$

Тогда $\mathcal{L}(\mathcal{F}_g) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r > 0$. Используя G -инвариантность расстояния d и неравенство треугольника, для всех $k \in K$, $x \in X$ получаем

$$d(o, kx) = d(o, x), \quad (16)$$

$$d(o, g^{-1}x) \geq d(o, x) - d(o, go), \quad (17)$$

а также

$$gB_r \subset B_{r+d(o, go)}. \quad (18)$$

Из (15) и (16) имеем

$$M_r(\mathcal{F}_g) \leq \int_K \int_{B_r} |f(gkx)| e^{-\rho d(o, x)} dx dk = \int_{gB_r} |f(x)| e^{-\rho d(o, g^{-1}x)} dx.$$

Тогда из (17), (18) вытекает

$$M_r(\mathcal{F}_g) \leq e^{\rho d(o, go)} M_{r+d(o, go)}(f).$$

Отсюда и из условия леммы следует, что $\mathcal{L}(\mathcal{F}_g) = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(X)$, $\psi \in \mathcal{D}(G)$ и

$$\mathcal{F}(x) = \int_G \psi(g) f(gx) dg, \quad x \in X, \quad (19)$$

где dg – мера Хаара на G . Тогда если $\mathcal{L}(f) = 0$, то $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $R(\psi) = \max\{d(o, go) : g \in \text{supp } \psi\}$. Из (19) имеем

$$M_r(\mathcal{F}) \leq \int_G |\psi(g)| \int_{gB_r} |f(x)| e^{-\rho d(o, g^{-1}x)} dx dg.$$

Отсюда и из (17), (18) получаем оценку

$$M_r(\mathcal{F}) \leq e^{\rho R(\psi)} M_{R(\psi)+r}(f) \int_G |\psi(g)| dg,$$

из которой следует утверждение леммы 2.

§ 3. Асимптотические оценки сферических функций

Используя K -инвариантность расстояния d , из (12) и (10) получаем

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq e^{(\rho + |\text{Im } \lambda|)d(o, x)}, \quad x \in X, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (20)$$

Далее нам потребуется более точная информация о поведении сферических функций при различных значениях параметров. Из [33; гл. 2, п. 2.1.1, формула (1)], [33; гл. 2, п. 2.1.2, формула (7)], [33; гл. 2, п. 2.1.4, формула (22)] и определения $\varphi_\lambda^{\xi, \eta}$ имеем равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(A_{\xi, \eta}(t) \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\lambda^{\xi, \eta}(t) \right) = -(\sigma^2 + \lambda^2) A_{\xi, \eta}(t) \varphi_\lambda^{\xi, \eta}(t) \quad (21)$$

(определение $A_{\xi, \eta}$ см. в §2 после формулы (13)),

$$4(1 + \xi) \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\lambda}^{\xi, \eta}(t) = -(\sigma^2 + \lambda^2) \operatorname{sh}(2t) \varphi_{\lambda}^{1+\xi, 1+\eta}(t). \quad (22)$$

Пусть $i\lambda \notin \mathbb{R}^1$. Положим $\Gamma_0(\lambda, \xi, \eta) = 1$ и рассмотрим последовательность функций $\{\Gamma_m(\lambda, \xi, \eta)\}_{m=0}^{\infty}$, заданную при $m \geq 1$ рекуррентным соотношением

$$\Gamma_m(\lambda, \xi, \eta) = \sum_{k=1}^m \frac{(i\lambda - \sigma - 2(m-k))(2\xi + 1 + (-1)^k(2\eta + 1))}{2m(i\lambda - 2m)} \Gamma_{m-k}(\lambda, \xi, \eta). \quad (23)$$

Для любого $b > 0$ обозначим $E_b = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| < b |\operatorname{Re} \lambda|\}$. Нетрудно видеть, что существуют $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, зависящие только от ξ, η, b , такие, что для всех $m \geq 1$, $\lambda \in E_b$

$$|\Gamma_m(\lambda, \xi, \eta)| \leq \gamma_1 m^{\gamma_2}, \quad (24)$$

см. [28; доказательство леммы 4.17 введения]. Далее, при фиксированном $b > 0$ из (14) и формулы Стирлинга получаем (как обычно, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция)

$$|c(\lambda, \xi, \eta)| = \Gamma(1 + \xi) 2^{\xi + \sigma} |\lambda|^{-1/2 - \xi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \right) \quad (25)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in E_b$. Кроме того, при $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $\lambda \neq 0$ из (14) и (23) имеем

$$c(-\lambda, \xi, \eta) = \overline{c(\lambda, \xi, \eta)}, \quad \Gamma_m(-\lambda, \xi, \eta) = \overline{\Gamma_m(\lambda, \xi, \eta)}, \quad (26)$$

где, как обычно, черта означает знак комплексного сопряжения.

ЛЕММА 3. При всех $t > 0$, $\lambda \notin i\mathbb{R}^1$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda}^{\xi, \eta}(t) &= c(\lambda, \xi, \eta) e^{(i\lambda - \sigma)t} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2mt} \Gamma_m(\lambda, \xi, \eta) \\ &\quad + c(-\lambda, \xi, \eta) e^{(-i\lambda - \sigma)t} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-2mt} \Gamma_m(-\lambda, \xi, \eta), \end{aligned} \quad (27)$$

в котором ряды сходятся равномерно по t , λ на $(\varepsilon, +\infty) \times E_b$ для любых $\varepsilon, b > 0$.

Доказательство проводится стандартными рассуждениями (см., например, [28; доказательство теоремы 4.15 введения]) с использованием уравнения (21) и оценки (24).

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\lambda > 0$, $t > \varepsilon > 0$. Тогда при всех $q = 1, 2, \dots$ имеет место равенство

$$\varphi_{\lambda}^{\xi, \eta}(t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{q-1} c(\lambda, \xi, \eta) \Gamma_m(\lambda, \xi, \eta) e^{(i\lambda - \sigma - 2m)t} + O(e^{-(2q + \sigma)t}), \quad (28)$$

где постоянная в знаке O зависит только от $\varepsilon, \xi, \eta, q$.

Доказательство следует из равенств (26), (27) и оценки (24).

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\lambda > 0$. Тогда

$$M_r(\varphi_\lambda) = O(r) \quad \text{при} \quad r \rightarrow +\infty. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $r > 0$ имеем

$$M_r(\varphi_\lambda) = \frac{2\pi^{1+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^r |\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(t)| A_{\alpha,\beta}(t) e^{-\rho t} dt,$$

см. [6; с. 608, 609]. При $r > 1$ последнее выражение не превосходит

$$c_1 \int_1^r |\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(t)| dt + c_2,$$

где постоянные $c_1, c_2 > 0$ не зависят от r (см. определение $A_{\alpha,\beta}$ и оценку (20)). Используя (27) и (24), отсюда получаем (29).

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $t > 0$ фиксировано, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$, $|\operatorname{Im} \lambda| = |\operatorname{Re} \lambda|$, имеет место асимптотическое равенство

$$|\varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(t)| \sim \tau e^{t|\operatorname{Im} \lambda|} |\lambda|^{-\alpha-3/2}, \quad (30)$$

где $\tau > 0$ и не зависит от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (23) следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Gamma_m(\lambda, 1+\alpha, 1+\beta)$ существует и неотрицателен при всех m . Используя (24) и (25), (26), отсюда и из леммы 3 получаем (30).

Отметим, что другое доказательство следствия 7 можно получить, используя асимптотику Ватсона [33; гл. 2, п. 2.3.2, формула (17)] и [33; гл. 2, п. 2.1.4, формула (22)].

ЛЕММА 4. При любых $t \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $s = 1, 2, \dots$ имеет место оценка

$$\frac{\partial^s}{\partial t^s}(\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(t)) \leq (\rho^2 + |\lambda|^2)^{\gamma_s} e^{(\rho + |\operatorname{Im} \lambda|)t}, \quad (31)$$

где постоянная $\gamma_s > 0$ и не зависит от t и λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $t < \min(1/2, \lambda^{-2})$, неравенство (31) следует из разложения функции $\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}$ в гипергеометрический ряд, см. (1), а также [33; гл. 2, п. 2.1.1, формула (2)]. Поэтому достаточно доказать лемму 4 при условии

$$t \geq \min\left(\frac{1}{2}, \lambda^{-2}\right). \quad (32)$$

Из (21) и определения $A_{\alpha,\beta}$ находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(t)) = -\frac{\rho^2 + \lambda^2}{A_{\alpha,\beta}(t)} \int_0^t A_{\alpha,\beta}(u) \varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(u) du. \quad (33)$$

Учитывая (32) и (20), отсюда имеем (31) для $s = 1$. При $s > 1$ утверждение леммы получается индукцией с использованием (33), (32) и (20).

ЛЕММА 5. Пусть $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ – возрастающая последовательность положительных чисел и

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \varphi_\lambda(x), \quad (34)$$

где $b_\lambda \in \mathbb{C}$ и $\sum_{\lambda \in \Lambda} |b_\lambda| < \infty$. Тогда если $\mathcal{L}(f) = 0$, то $b_\lambda = 0$ при всех $\lambda \in \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (20) и условия для коэффициентов b_λ имеем равномерную сходимость ряда (34) на компактных подмножествах X . Для $r > 1$, $\mu \in \Lambda$ положим

$$I(r, \mu) = \int_{B_r \setminus B_1} f(x) e^{-\rho d(o, x)} \cos(\mu d(o, x) + \theta_\mu) dx, \quad (35)$$

где $\theta_\mu = \arg c(\mu, \alpha, \beta)$ (главное значение аргумента). Тогда

$$I(r, \mu) \leq M_r(f). \quad (36)$$

Используя (25) и (28) при $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $q = 1$, из равенств (34), (35) находим (см. [6; с. 608, 609])

$$\begin{aligned} I(r, \mu) &= \frac{8\pi^{1+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda |c(\lambda, \alpha, \beta) c(\mu, \alpha, \beta)| \\ &\quad \times \int_1^r \cos(\lambda t + \theta_\lambda) \cos(\mu t + \theta_\mu) A_{\alpha, \beta}(t) e^{-2\rho t} dt + O(1) \end{aligned}$$

(постоянная в знаке O не зависит от r). Отсюда

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{I(r, \mu)}{r} = \frac{4\pi^{1+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} b_\mu |c(\mu, \alpha, \beta)|^2.$$

Учитывая, что $\mathcal{L}(f) = 0$, из последнего равенства и (36) получаем утверждение леммы 5.

§4. Свойства множеств $N(r)$ и $\mathcal{N}_\lambda$

Пусть $x \in X$, $r > 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда имеет место равенство

$$\int_{B_r(x)} \varphi_\lambda(y) dy = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} (\operatorname{sh} r)^n (\operatorname{ch} r)^{2\beta+2} \varphi_\lambda(x) \varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(r), \quad (37)$$

см. [6; с. 611]. В частности, при $x = 0$ отсюда получаем

$$\tilde{\chi}_{B_r}(\lambda) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} (\operatorname{sh} r)^n (\operatorname{ch} r)^{2\beta+2} \varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(r), \quad (38)$$

где χ_{B_r} – индикатор шара B_r . Из (38) и теоремы Пэли–Винера для сферического преобразования (см. [6; п. 5]) следует, что $\varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(r)$ является четной целой функцией экспоненциального типа r по переменной λ . Кроме того, из (30) вытекает, что $\varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(r) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ по вещественной оси. Отсюда и из теоремы

Адамара заключаем (см. [34; гл. 1, теорема 13]), что функция $\varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(r)$ имеет бесконечно много корней.

ЛЕММА 6. *При любом $r > 0$ все корни функции $\varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(r)$ являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\lambda = 0$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{\lambda \in N(r)} \lambda^{-1-\varepsilon} < \infty. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о вещественности корней известно, см. [32]. Симметрия корней следует из четности функции $\varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(r)$. Условие (39) вытекает из известной связи между порядком целой функции и показателем сходимости ее корней, см. [34; гл. 1, теорема 6]. Далее, из равенств (21), (22) при $\lambda = \mu, \nu$ получаем

$$\begin{aligned} & 4(1+\alpha) \int_0^r A_{\alpha, \beta}(t) \varphi_\mu^{\alpha, \beta}(t) \varphi_\nu^{\alpha, \beta}(t) dt \\ &= \frac{A_{\alpha, \beta}(r) \operatorname{sh}(2r)}{\mu^2 - \nu^2} ((\rho^2 + \mu^2) \varphi_\mu^{1+\alpha, 1+\beta}(r) \varphi_\nu^{\alpha, \beta}(r) \\ &\quad - (\rho^2 + \nu^2) \varphi_\nu^{1+\alpha, 1+\beta}(r) \varphi_\mu^{\alpha, \beta}(r)). \end{aligned} \quad (40)$$

Предположим, что $\nu \in N(r)$ и кратность ν больше 1. Тогда при $\mu \rightarrow \nu$ из (40) находим

$$\int_0^r A_{\alpha, \beta}(t) (\varphi_\nu^{\alpha, \beta}(t))^2 dt = 0.$$

Последнее равенство противоречиво, поскольку $\varphi_\nu^{\alpha, \beta}$ является вещественной на $(0, r)$ (см., например, (26), (27)). Таким образом, все корни $\varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(r)$ являются простыми и лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. *При любом $\lambda > 0$ множество $\mathcal{N}_\lambda$ является счетным и не имеет конечных предельных точек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (28) $\xi = 1 + \alpha$, $\eta = 1 + \beta$, $q = 1$, $t = t_m = (\pi/4 + \pi m - \zeta_\lambda)/\lambda$, где

$$\zeta_\lambda = \arg c(\lambda, 1 + \alpha, 1 + \beta) \quad (41)$$

(главное значение аргумента) и $m = 1, 2, \dots$. Тогда при достаточно больших m из (28) имеем

$$\varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(t_m) (-1)^m < 0 < \varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}\left(t_m + \frac{\pi}{2\lambda}\right) (-1)^m.$$

Следовательно, при таких m

$$\left(t_m, t_m + \frac{\pi}{2\lambda}\right) \cap \mathcal{N}_\lambda \neq \emptyset. \quad (42)$$

Поскольку функция $\varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(z)$ голоморфна в окрестности вещественной оси по переменной z (см. (1), а также [33; гл. 2, п. 2.1.1, формула (2)]), из (42) следует утверждение леммы 7.

ЛЕММА 8. Пусть $\lambda, \mu > 0$ и $\varphi_\mu^{1+\alpha, 1+\beta}(r) = 0$ при всех достаточно больших $r \in \mathcal{N}_\lambda$. Тогда $\lambda = \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{r_1, r_2, \dots\}$ — последовательность всех элементов $\mathcal{N}_\lambda$, перенумерованных в порядке возрастания (см. лемму 7). Тогда

$$\varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(r_m) = 0 = \varphi_\mu^{1+\alpha, 1+\beta}(r_m) \quad (43)$$

при достаточно больших m . Обозначим $\sigma_1 = (\xi - \eta)(\sigma - 2)$, $\sigma_2 = \sigma(\sigma - 4)/2$ и предположим, что $\xi \neq \eta$. Используя (28) при $q = 2$, из (41) и левого равенства в (43) имеем

$$\lambda r_m + \zeta_\lambda = \frac{\pi}{2} + \pi p_m - \frac{\sigma_1 \lambda}{\lambda^2 + 4} e^{-2r_m} + O(e^{-4r_m}), \quad (44)$$

где p_m — целое, а постоянная в знаке O не зависит от m . Отсюда и из (42) $p_{m+1} - p_m = 1$ для бесконечного множества индексов m . Кроме того, при таких m из (44) находим

$$\lambda(r_{m+1} - r_m) = \pi - \frac{\sigma_1 \lambda}{\lambda^2 + 4} (e^{-2r_{m+1}} - e^{-2r_m}) + O(e^{-4r_m}). \quad (45)$$

Аналогично, используя (28) при $q = 2$ и правое равенство в (43), получаем

$$\mu(r_{m+1} - r_m) = \pi q_m - \frac{\sigma_1 \mu}{\mu^2 + 4} (e^{-2r_{m+1}} - e^{-2r_m}) + O(e^{-4r_m}), \quad (46)$$

где q_m — целое, а постоянная в знаке O не зависит от m . Из (45) и (46) вытекает

$$\pi(\mu - \lambda q_m)(\lambda^2 + 4)(\mu^2 + 4) = \sigma_1 \lambda \mu (\mu^2 - \lambda^2) (e^{-2r_{m+1}} - e^{-2r_m}) + O(e^{-4r_m})$$

для бесконечного множества индексов m , для которых выполнено (45). Учитывая, что $\sigma \neq 2$ (см. [6; с. 609]), при $m \rightarrow \infty$ из последнего равенства и (45) получаем $\lambda = \mu$.

Пусть теперь $\xi = \eta$ (это равенство выполнено в случае, когда X — вещественное гиперболическое пространство размерности $\sigma + 1$, см. [6; с. 609]). Предположим, что $\sigma \neq 4$. Используя (28) при $q = 3$, из (43) имеем

$$\lambda r_m + \zeta_\lambda = \frac{\pi}{2} + \pi p_m - \frac{\sigma_2 \lambda}{\lambda^2 + 16} e^{-4r_m} + O(e^{-6r_m}), \quad (47)$$

где, как и выше, p_m — целое, а постоянная в знаке O не зависит от m . Повторяя изложенные выше рассуждения, в которых вместо (44) используется (47), получаем $\lambda = \mu$.

В случае $\xi = \eta$, $\sigma = 4$ доказательство леммы 8 проводится аналогично с использованием (43) и (28) при $q = 5$.

ЛЕММА 9. Пусть $\lambda \in N(r)$ и

$$s(\lambda) = \int_0^r A_{\alpha, \beta}(t) (\varphi_\lambda^{\alpha, \beta}(t))^2 dt. \quad (48)$$

Тогда существуют не зависящие от λ константы $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ такие, что

$$s(\lambda) > \gamma_1 \lambda^{-\gamma_2}. \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение достаточно доказать при достаточно больших $\lambda \in N(r)$. В частности, при $\lambda^2 > 1/r$ из (48) и очевидного неравенства $A_{\alpha,\beta}(t) \geq t^{1+2\alpha}$ имеем

$$s(\lambda) > \int_0^{1/\lambda^2} t^{1+2\alpha} (\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(t))^2 dt. \quad (50)$$

Используя разложение функции $\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}$ в гипергеометрический ряд (см. (1), а также [33; гл. 2, п. 2.1.1, формула (2)]), получаем, что при достаточно больших $\lambda \in N(r)$ и всех $t \in [0, \lambda^{-2}]$ выполнено неравенство $|\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(t)| > \gamma_3$, где $\gamma_3 > 0$ и не зависит от λ и t . Отсюда и из (50) следует утверждение леммы 9.

§ 5. Теоремы существования и единственности для решений некоторых интегральных уравнений

ТЕОРЕМА 2. Пусть u — четная функция класса $C^2[-R, R]$, удовлетворяющая уравнению

$$\int_K u(h(kx)) e^{\rho h(kx)} dk = 0 \quad (51)$$

при любом $x \in B_R$. Тогда $u = 0$.

Для доказательства потребуется

ЛЕММА 10. Для любой функции $u \in C[-r, r]$ имеет место равенство

$$\int_{B_r} u(h(x)) dx = \int_{-r}^r u(t) e^{-\rho t} \varkappa_r(t) dt, \quad (52)$$

где $\varkappa_r \in C[-r, r]$ — неотрицательная четная функция, не зависящая от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости положим $F(\lambda) = \tilde{\chi}_{B_r}(\lambda)$ (см. (38)). Тогда (см. начало § 4) функция F является четной целой функцией экспоненциального типа r . Кроме того, из (38) и (30) следует, что

$$F(\lambda) = O(|\lambda|^{-\alpha-3/2}) \quad (53)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ по вещественной оси. Для $t \in \mathbb{R}^1$ положим

$$\varkappa_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} F(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \quad (54)$$

Из (53), (54) получаем, что $\varkappa_r \in C(\mathbb{R}^1)$ и является четной. По теореме Пэли–Винера $\text{supp } \varkappa_r \subset [-r, r]$ и

$$\pm r \in \text{supp } \varkappa_r. \quad (55)$$

Далее, из инвариантности B_r относительно K и из (12) вытекает

$$F(\lambda) = \int_{B_r} \int_K e^{(i\lambda + \rho)h(kx)} dk dx = \int_{B_r} e^{(i\lambda + \rho)h(x)} dx. \quad (56)$$

Используя формулу обращения для преобразования Фурье, из (54) и (56) получаем равенство (52) для $u(t) = e^{(i\lambda+\rho)t}$. Поскольку система функций $\{e^{(i\lambda+\rho)t}\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, замкнута в пространстве $C[-r, r]$, отсюда имеем (52) и в общем случае. Докажем теперь, что $\varkappa_r \geq 0$. Действительно, в противном случае существует интервал $E \subset [-r, r]$, на котором $\varkappa_r(t) < 0$. Тогда для любой ненулевой неотрицательной функции u такой, что $\text{supp } u \subset E$, интегралы в левой и правой частях равенства (52) имеют разные знаки. Таким образом, $\varkappa_r(t) \geq 0$ и лемма 10 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Не ограничивая общности, можно считать u вещественнозначной. Используя лемму 10 и K -инвариантность B_r , из (51) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^r u(t) \varkappa_r(t) dt &= \int_{B_r} u(h(x)) e^{\rho h(x)} dx \\ &= \int_{B_r} \int_K u(h(kx)) e^{\rho h(kx)} dk dx = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

при всех $r \in (0, R)$. Из неотрицательности $\varkappa_r$ и (57) следует, что $u(t) = 0$ при некотором $t \in (0, R)$. Обозначим

$$t_0 = \sup\{t \in (0, R) : u(t) = 0\} \quad (58)$$

и докажем, что $u(t) = 0$ для любого $t \in [-t_0, t_0]$. Предположим противное, тогда на некотором интервале $E \subset (0, t_0)$ функция u не имеет нулей. Пусть δ — ненулевая четная неотрицательная функция из класса $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\text{supp } \delta \subset (-E) \cup E$. Тогда функция

$$\widehat{\delta}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^1} \delta(t) e^{-i\lambda t} dt$$

является целой функцией экспоненциального типа не выше t_0 и для любого $m > 0$

$$\widehat{\delta}(\lambda) = O(|\lambda|^{-m}) \quad (59)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ по вещественной оси. Используя теорему Пэли–Винера и ее аналог для сферического преобразования [28; гл. 4, § 7, п. 2], из (59) получаем, что $\widehat{\delta} = \widehat{\psi}$ для некоторой функции $\psi \in \mathcal{D}(B_{t_0})$. Кроме того, из нашего предположения и свойств δ следует, что

$$\int_{-t_0}^{t_0} u(t) \delta(t) dt \neq 0. \quad (60)$$

Пусть $\varepsilon(t) = u(t)$ при всех $t \in [-t_0, t_0]$ и $\varepsilon(t) = 0$ при $|t| > t_0$. Поскольку $u \in C^2[-R, R]$ и $u(\pm t_0) = 0$, для преобразования Фурье функции ε имеем оценку $\widehat{\varepsilon}(\lambda) = O(|\lambda|^{-2})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ по вещественной оси. Используя (12) и формулу обращения для преобразования Фурье, при $x \in B_{t_0}$ находим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} \widehat{\varepsilon}(\lambda) \varphi_\lambda(x) d\lambda &= \int_K e^{\rho h(kx)} \int_{\mathbb{R}^1} \widehat{\varepsilon}(\lambda) e^{i\lambda h(kx)} d\lambda dk \\ &= \int_K e^{\rho h(kx)} u(h(kx)) dk = 0. \end{aligned}$$

Умножая последнее равенство на $\psi(x)$ и интегрируя по X , из (13) имеем

$$\int_{\mathbb{R}^1} \widehat{\varepsilon}(\lambda) \widetilde{\psi}(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbb{R}^1} \widehat{\varepsilon}(\lambda) \widehat{\delta}(\lambda) d\lambda = 0.$$

Согласно равенству Парсеваля это означает, что интеграл в левой части (60) равен нулю. Полученное противоречие показывает, что $u = 0$ на $[-t_0, t_0]$. Предположим теперь, что $t_0 < R$. Из (57) получаем, что при любом $r \in (t_0, R)$

$$\int_{t_0}^r u(t) \varkappa_r(t) dt = 0. \quad (61)$$

Из (58) вытекает, что u сохраняет знак на (t_0, R) . Поскольку $\varkappa_r \geq 0$, отсюда и из (55) следует, что равенство (61) невозможно. Таким образом, $t_0 = R$ и теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие четности u в теореме 2 существенно: из равенства (52) следует, что всякая нечетная функция $u \in C[-R, R]$ удовлетворяет (51).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in \mathcal{D}_K(X)$. Тогда существует четная функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющая уравнению

$$\int_K u(h(kx)) e^{\rho h(kx)} dk = f(x), \quad x \in X. \quad (62)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что $\widetilde{f}(\lambda)$ — четная целая функция экспоненциального типа и для любого $m > 0$

$$\widetilde{f}(\lambda) = O(|\lambda|^{-m}) \quad (63)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ по вещественной оси (см., например, [6; п. 5]). Кроме того, при вещественных λ из (14) и формулы Стирлинга имеем

$$|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} = O((1 + |\lambda|)^{2\alpha+1}), \quad (64)$$

где постоянная в знаке O не зависит от λ . Для $t \in \mathbb{R}^1$ положим

$$u(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}^1} \widetilde{f}(\lambda) e^{i\lambda t} |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda. \quad (65)$$

Из (63) и (64) вытекает, что u — четная функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Используя (12), из (65) находим

$$\int_K u(h(kx)) e^{\rho h(kx)} dk = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}^1} \widetilde{f}(\lambda) \varphi_\lambda(x) |\mathbf{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda. \quad (66)$$

Из формулы обращения для сферического преобразования (см. [6; с. 606]) получаем, что выражение в правой части (66) совпадает с $f(x)$ при всех $x \in X$. Теорема 3 доказана.

§ 6. Свойства функций класса $V_r(B_R)$

Пусть $r > 0$ фиксировано и $r < R \leq \infty$. Обозначим через $V_r(B_R)$ множество функций $f \in C_K^\infty(B_R)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{gB_r} f(x) dx = 0 \quad (67)$$

для всех $g \in G$ таких, что $g\overline{B_r} \subset B_R$. В этом параграфе мы получим теорему единственности для функций класса $V_r(B_R)$ и описание класса $V_r(B_R)$ в виде разложений по сферическим функциям.

ЛЕММА 11. Пусть $f \in V_r(B_R)$ и $f(x) = \Phi(d(o, x))$ для всех $x \in B_R$. Тогда $\Delta f \in V_r(B_R)$ и $\Phi'(r) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $S_t(x) = \{y \in X : d(x, y) = t\}$. Тогда для любой $u \in C(\overline{B_r}(x))$

$$\int_{B_r(x)} u(y) dy = \int_0^r \int_{S_t(x)} u(s) d\omega(s) dt, \quad (68)$$

где $d\omega$ — элемент площади на сфере $S_t(x)$ (см. [6; с. 608]). Пусть $g \in G$ и $g\overline{B_r} \subset B_R$. Полагая в (68) $x = go$, $(\Delta f)(gy) = u(y)$, получаем

$$\int_{B_r(x)} (\Delta f)(y) dy = \int_{B_r} (\Delta f)(gy) dy = \int_0^r \int_{S_t(o)} (\Delta f)(gs) d\omega(s) dt.$$

Поскольку оператор Δ коммутирует с операторами сферических средних [28; гл. 2, предложение 4.12] и инвариантен относительно G , последнее выражение равно $\Delta\left(\int_{B_r(x)} f(y) dy\right) = 0$. Таким образом, $\Delta f \in V_r(B_R)$. Далее, полагая

$$(\Delta f)(x) = (\Delta_0 \Phi)(d(o, x)), \quad (69)$$

для оператора Δ_0 имеем равенство

$$(\Delta_0 \Phi)(t) = \Phi''(t) + \frac{A'_{\alpha, \beta}(t)}{A_{\alpha, \beta}(t)} \Phi'(t) \quad (70)$$

(см., например, [6; с. 609]). Проинтегрируем Δf на B_r с использованием (68)–(70). Учитывая, что $\Delta f \in V_r(B_R)$ и $\int_{S_t(o)} d\omega(s) = A_{\alpha, \beta}(t)$ (см. [6; с. 608]), получаем $\Phi'(r) = 0$.

ТЕОРЕМА 4. Имеют место следующие утверждения:

- 1) если $f \in V_r(B_R)$ и $f = 0$ в B_r , то $f = 0$ в B_R ;
- 2) для любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует ненулевая функция $f \in V_r(X)$ такая, что $f = 0$ в $B_{r-\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Обозначим

$$\zeta = \sup\{t > 0 : f = 0 \text{ в } B_t\} \quad (71)$$

и предположим, что $\zeta < R$. Пусть $\delta \in (0, R - \zeta)$ фиксировано. Рассмотрим функцию $w \in \mathcal{D}_K(X)$ такую, что $w = 1$ в $B_{R-\delta}$. Положим $f_\delta = wf$, тогда по теореме 3 существует четная функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ такая, что

$$\int_K u(h(kx))e^{\rho h(kx)} dk = f_\delta(x), \quad x \in X. \quad (72)$$

Из (71), (72) и теоремы 2 имеем

$$u = 0 \text{ на } [-\zeta, \zeta]. \quad (73)$$

Далее, пусть

$$I(x) = \int_{B_r(x)} u(h(y))e^{\rho h(y)} dy, \quad (74)$$

тогда $I(nx) = I(x)$ для любого $n \in N$. Это означает, что существует функция $\psi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $\psi(h(x)) = I(x)$ для всех $x \in X$. Учитывая, что $h(ay) = h(y) + h(ao)$ при любых $a \in A$, $y \in X$ (см. [28; гл. 4, § 4, п. 2, формула (4)]), из (74) и (52) находим

$$\psi(h(ao)) = e^{\rho h(ao)} \int_{-r}^r u(t + h(ao))\varkappa_r(t) dt \quad (75)$$

для всех $a \in A$. Из (75) и четности u , $\varkappa_r$ вытекает, что функция $\psi(t)e^{-\rho t}$ является четной и $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. При $x \in B_{R-r-\delta}$ из (74) получаем

$$\begin{aligned} \int_K \psi(h(kx)) dk &= \int_K \int_{B_r(kx)} u(h(y))e^{\rho h(y)} dy dk \\ &= \int_{B_r(x)} \int_K u(h(ky))e^{\rho h(ky)} dk dy, \end{aligned} \quad (76)$$

поскольку $B_r(kx) = kB_r(x)$ для любого $k \in K$. Так как $f_\delta = f$ в $B_{R-\delta}$, последнее выражение равно $\int_{B_r(x)} f(y) dy = 0$ (см. (72)). Тогда из (76) и теоремы 2 имеем $\psi = 0$ на $[r + \delta - R, R - r - \delta]$. Далее, из (73) следует, что $\zeta \geq t_0$, где t_0 определяется равенством (58). Отсюда и из (73), (75) вытекает, что

$$\int_0^z u(\zeta + t)\varkappa_r(z - t - r) dt = 0 \quad (77)$$

при $0 \leq z \leq \min(2r, R - \zeta - \delta)$. Поскольку $(-r) \in \text{supp } \varkappa_r$ (см. (55)), из (77) и теоремы Титчмарша [34; приложение 7, п. 12] следует, что существует $\theta > 0$ такое, что $u = 0$ на $[-\zeta - \theta, \zeta + \theta]$. Тогда в силу (72) $f_\delta = 0$ в $B_{\zeta+\theta}$. Отсюда $f = 0$ в $B_{\zeta+\theta}$, что противоречит (71). Таким образом, $\zeta = R$ и утверждение 1) доказано.

2) Пусть $f \in \mathcal{D}_K(B_r)$ – ненулевая функция такая, что $\text{supp } f \cap \overline{B}_{r-\varepsilon} = \emptyset$ и $\int_{B_r} f(x) dx = 0$. Докажем, что f можно продолжить на X так, что полученная функция принадлежит $V_r(X)$. Из свойств f следует, что существует четная функция $\Phi \in C^\infty(-r, r)$ такая, что $\Phi(d(o, x)) = f(x)$ в B_r . Для $\lambda \in N(r)$ положим

$$c_\lambda = \frac{1}{s(\lambda)} \int_0^r \Phi(t) A_{\alpha, \beta}(t) \varphi_\lambda^{\alpha, \beta}(t) dt, \quad (78)$$

где $s(\lambda)$ определяется равенством (48). Оценим $|c_\lambda|$ сверху при больших $\lambda \in N(r)$. Для этого проинтегрируем (78) по частям, используя (21). В результате для любого $m = 1, 2, \dots$ получаем

$$s(\lambda)(\lambda^2 + \rho^2)^m c_\lambda = (-1)^m \int_0^r (\Delta_0^m \Phi)(t) A_{\alpha, \beta}(t) \varphi_\lambda^{\alpha, \beta}(t) dt \quad (79)$$

(см. (70)). Используя (49) и (20), из (79) имеем $c_\lambda = O(\lambda^{-q})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $q > 0$. Тогда ряд $\sum_{\lambda \in N(r)} c_\lambda \varphi_\lambda(x)$ сходится равномерно на компактных подмножествах X к некоторой функции $F \in C_k^\infty(X)$ (см. (31), а также (39)). Кроме того, из (37) следует, что $F \in V_r(X)$. Докажем, что $F = f$ в B_r . Из определения F , (78) и соотношений ортогональности (40) находим

$$\int_0^r (\Phi(t) - \Phi_1(t)) A_{\alpha, \beta}(t) \varphi_\lambda^{\alpha, \beta}(t) dt = 0, \quad \lambda \in N(r),$$

где $\Phi_1(d(o, x)) = F(x)$ в B_r . Отсюда и из леммы 6 вытекает, что функция

$$w(\lambda) = \frac{1}{\varphi_\lambda^{1+\alpha, 1+\beta}(r)} \int_0^r (\Phi(t) + \Phi_1(r) - \Phi_1(t)) A_{\alpha, \beta}(t) \varphi_\lambda^{\alpha, \beta}(t) dt \quad (80)$$

является целой. Более того, из (20) и (38) следует, что w является целой функцией экспоненциального типа (см. начало § 4, а также [34; гл. 1, § 9]). Как и выше, проинтегрируем (80) по частям с использованием (21) и леммы 11. Тогда из (20) и (30) получим, что $w(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ по прямым $\text{Re } \lambda = \pm \text{Im } \lambda$. Из принципа Фрагмена–Линделёфа и теоремы Лиувилля имеем $w = 0$. В силу (80) это означает, что $\tilde{u}(\lambda) = 0$, где $u(x) = (f(x) + \Phi_1(r) - F(x)) \chi_{B_r}(x)$ (см. (13), а также [6; с. 608]). Таким образом, $f = F$ в B_r и утверждение 2) доказано.

Получим теперь описание функций класса $V_r(B_R)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < R \leq \infty$, $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ и $r \in (0, R)$ фиксировано. Тогда для того чтобы $f \in V_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$f(x) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_\lambda \varphi_\lambda(x), \quad (81)$$

в котором

$$c_\lambda = O(\lambda^{-q}) \quad (82)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $q > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Из (82) и леммы 4 следует, что ряд (81) сходится равномерно на компактных подмножествах B_R к функции класса $C_K^\infty(B_R)$ (см. (39)). Учитывая, что $\varphi_\lambda \in V_r(X)$ при любом $\lambda \in N(r)$ (см. (37)), отсюда получаем $f \in V_r(B_R)$.

Необходимость. Из условия следует, что существует четная функция

$$\Phi \in C^\infty(-R, R)$$

такая, что $\Phi(d(o, x)) = f(x)$ при всех $x \in B_R$. Рассмотрим последовательность c_λ , $\lambda \in N(r)$, определенную равенством (78). Проинтегрируем (78) по частям с использованием (21) и леммы 11. В результате получим (79) для любого $m = 1, 2, \dots$. Используя (49) и (20), из (79) имеем оценку (82). Повторяя рассуждения из доказательства утверждения 2) теоремы 4, получаем, что ряд в правой части (81) сходится равномерно на компактных подмножествах B_R к функции $F \in V_r(B_R)$, совпадающей с f в B_r . Отсюда и из первого утверждения теоремы 4 следует, что $f = F$ в B_R . Таким образом, имеет место (81) и теорема 5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $f \in V_r(B_R)$. Тогда f можно продолжить на X так, что продолженная функция принадлежит $V_r(X)$. Такое продолжение единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое продолжение определяется формулой (81) (см. лемму 4, (39) и (82)). Единственность следует из первого утверждения теоремы 4.

§ 7. Доказательство основного результата и его следствий

Прежде всего отметим, что первое утверждение теоремы 1, а также следствия 1–3 достаточно доказать для функций класса $C^\infty(X)$. Общий случай получается отсюда стандартным приемом сглаживания, при котором функции f_j заменяются свертками вида $\int_G \psi(g) f_j(g^{-1}x) dg$, где $\psi \in \mathcal{D}(G)$, dg – мера Хаара на G . Используя теорему Фубини, легко показать, что условие нулевого шарового среднего для всех центров и фиксированного радиуса, справедливое для f_j , выполняется и для свертки указанного вида. Условия роста M_r для них также сохраняются (см. лемму 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для $g \in G$, $x \in X$ положим $\mathcal{F}(x, g) = \sum_{j=1}^m \mathcal{F}_j(x, g)$, где

$$\mathcal{F}_j(x, g) = \int_K f_j(gkx) dk. \quad (83)$$

Из (2) следует, что $\mathcal{F}_j \in V_{r_j}(X)$ при каждом фиксированном $g \in G$ и всех $j = 1, \dots, m$. По теореме 5 имеет место равенство

$$\mathcal{F}_j(x, g) = \sum_{\nu \in N(r_j)} c_\nu(r_j, g) \varphi_\nu(x), \quad (84)$$

где $\sum_{\nu \in N(r_j)} |c_\nu(r_j, g)| < \infty$ (см. (82) и (39)). Отсюда и из (83) находим

$$\mathcal{F}(x, g) = \sum_{k=1}^s \sum_{\nu \in N_k} \left(\sum_{j \in A_k} c_\nu(r_j, g) \right) \varphi_\nu(x). \quad (85)$$

Поскольку множества N_k попарно не пересекаются, из (85) и лемм 1, 5 заключаем, что $\sum_{j \in A_k} \mathcal{F}_j(x, g) = 0$, $k = 1, \dots, s$. Полагая $x = 0$, отсюда и из определения $\mathcal{F}_j$ получаем утверждение 1).

Далее, пусть $\mu_1, \dots, \mu_m$ — попарно различные положительные числа, причем $\mu_j \in N(r_j)$, $j = 1, \dots, m$. Положим $f_j = \varphi_{\mu_j}$, тогда $f_j \in C^\infty(X)$ и выполнены условия (2), (3) (см. (37) и следствие 6). Кроме того, из равенства (28) нетрудно получить, что функции f_j , $j = 1, \dots, m$, линейно независимы. Отсюда следует утверждение 2), и теорема 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Утверждение о совпадении функций f_1 и f_2 , а также равенство $f_1 = f_2 = 0$ при $N(r_1, r_2) = \emptyset$ непосредственно следуют из теоремы 1 при $m = 2 = s$ и $A_k = \{k\}$ при $k = 1, 2$. Далее, пусть $N(r_1, r_2) \neq \emptyset$ и $\mu \in N(r_1, r_2)$. Тогда функции $f_1 = f_2 = \varphi_\mu$ удовлетворяют (4), (5) и принадлежат классу $C^\infty(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Из определения φ имеем

$$\varphi(g_0) = \int_{g B_{r_2}} f(y) dy = \int_{B_{r_2}} f(gy) dy \quad (86)$$

при любом $g \in G$. Пусть χ — индикатор шара B_{r_1} . Тогда при любом $g_1 \in G$ из (86) находим

$$\int_G \chi(gg_1 o) \varphi(g_0) dg = \int_{B_{r_2}} \int_G f(gy) \chi(gg_1 o) dg dy.$$

Отсюда и из (6) следует, что $\int_{g B_{r_1}} \varphi(x) dx = 0$ для любого $g \in G$ (см. [28; гл. 1, § 1, теорема 1.9]). Применяя теорему 1 при $m = s = 1$, $A_1 = \{1\}$, $f_1 = \varphi$, из (7) получаем $\varphi = 0$. Это означает, что f имеет нулевые интегралы по всем шарам с радиусами r_1 и r_2 в X (см. (6)). Полагая в теореме 1 $m = s = 2$, $A_k = \{k\}$, $f_1 = f$, $f_2 = -f$, при $N(r_1, r_2) = \emptyset$ имеем $f = 0$. Если $N(r_1, r_2) \neq \emptyset$ и $\mu \in N(r_1, r_2)$, то для функции $f = \varphi_\mu$ выполнены (6) и (7). Наконец, если $\lambda \in N(r_1)$ и $f = \varphi_\mu$, то имеет место (6) и $M_r(\varphi) = O(r)$ при $r \rightarrow +\infty$ (см. (37) и следствие 6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. Совпадение функций f_j , $j = 1, 2, \dots$, следует, как и выше, из первого утверждения теоремы 1. Докажем (8). Для $g \in G$, $x \in X$ определим $\mathcal{F}_j(x, g)$ равенствами (83). Тогда $\mathcal{F}_j \in V_r(X)$ при всех $g \in G$ и $r \in \mathcal{N}_\lambda$. По теореме 5 при любом $r \in \mathcal{N}_\lambda$ имеем

$$\mathcal{F}_j(x, g) = \sum_{\nu \in N(r)} c_\nu(r, g) \varphi_\nu(x), \quad (87)$$

где $\sum_{\nu \in N(r)} |c_\nu(r, g)| < \infty$. Поскольку левая часть в (87) не зависит от r , из лемм 5, 8 вытекает, что $c_\nu(r, g) = 0$ при $\nu \neq \lambda$. Таким образом, $\mathcal{F}_j(x, g) = c_\lambda(r, g) \varphi_\lambda(x)$. Полагая $x = 0$, отсюда и из (1), (83) находим $c_\lambda(r, g) = \mathcal{F}_j(o, g) = f_j(g_0)$. Тогда $\int_K f_j(gkx) dk = \varphi_\lambda(x) f_j(g_0)$ при всех $g \in G$, откуда следует (см. [28; гл. 4, § 2, предложение 2.4]) требуемое утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4. 1)→2). Из условия следует, что существует $\lambda = \lambda(\Omega) > 0$ такое, что уравнение

$$\Delta u + (\lambda^2 + \rho^2)u = \chi_\Omega \quad (88)$$

имеет (обобщенное) решение $u \in C^1(X)$ с компактным носителем [32; с. 1224, 1225]. Достаточно доказать, что всякий линейный непрерывный функционал Ψ на $L(X)$, аннулирующий индикаторы шаров gB_r ($g \in G$, $r \in \mathcal{N}_\lambda$), аннулирует и χ_Ω . Из теоремы Рисса и следствия 3 вытекает, что такой функционал Ψ имеет вид

$$\Psi(f) = \int_X f(x)\omega(x) dx, \quad (89)$$

где $\omega \in L^\infty(X)$ и $\Delta\omega = -(\lambda^2 + \rho^2)\omega$. Из последнего равенства и эллиптичности оператора Δ получаем (см. [28; гл. 2, § 2, п. 4]), что ω совпадает почти всюду (по мере dx) с функцией, вещественно аналитичной на X . Учитывая [28; гл. 2, § 2, предложение 2.3], из (88), (89) находим

$$\Psi(\chi_\Omega) = \int_X u(x)(\Delta\omega + (\lambda^2 + \rho^2)\omega)(x) dx = 0,$$

что и требовалось.

2)→1). При $\lambda = \lambda(\Omega) > 0$ функция φ_λ ограничена на X (см. (20) и (28)) и $\varphi_\lambda \in V_r(X)$ для любого $r \in \mathcal{N}_\lambda$ (см. (37)). Поэтому из условия имеем $\int_{g\Omega} \varphi_\lambda(x) dx = 0$ при всех $g \in G$. Отсюда следует 1), и следствие 4 доказано.

Список литературы

1. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations / ed. B. Fuglede et al. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. P. 177–186.
2. *Беренштейн К. А., Струнна Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 54. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–111.
3. *Zalcman L.* Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. V. 47. P. 237–254.
4. *Zalcman L.* Mean values and differential equations // Israel J. Math. 1973. V. 14. P. 339–352.
5. *Berenstein C. A., Zalcman L.* Pompeiu's problem on spaces of constant curvature // J. Anal. Math. 1976. V. 30. P. 113–130.
6. *Berenstein C. A., Zalcman L.* Pompeiu's problem on symmetric spaces // Comment. Math. Helv. 1980. V. 55. № 4. P. 593–621.
7. *Zalcman L.* Offbeat integral geometry // Amer. Math. Monthly. 1980. V. 87. № 3. P. 161–175.
8. *Berenstein C. A., Gay R.* A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. 1986. V. 55. P. 267–288.
9. *Smith J. D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1972. V. 72. P. 403–416.
10. *Berenstein C. A., Gay R., Yger A.* Inversion of the local Pompeiu transform // J. Anal. Math. 1990. V. 54. P. 259–287.
11. *Аграновский М. Л.* Преобразование Фурье на $SL_2(\mathbb{R})$ и теоремы типа Морера // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 6. С. 1353–1356.

12. *Sitaram A.* Fourier analysis and determining sets for Radon measures on $\mathbb{R}^n$ // Illinois J. Math. 1984. V. 28. P. 339–347.
13. *Thangavelu S.* Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // J. Anal. Math. 1994. V. 63. P. 255–286.
14. *Agranovsky M., Berenstein C. A., Chang D. C., Pascuas D.* Théorèmes de Morera et Pompeiu pour le groupe de Heisenberg // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1992. V. 315. P. 655–658.
15. *Agranovsky M., Berenstein C. A., Chang D. C.* Morera theorem for holomorphic H^p spaces in the Heisenberg group // J. Reine Angew. Math. 1993. V. 443. P. 49–89.
16. *Cohen J. M., Picardello M. A.* The 2-circle and 2-disk problems on trees // Israel J. Math. 1988. V. 64. P. 73–86.
17. *Волчков В. В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 15–34.
18. *Волчков В. В.* Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 30–36.
19. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 9. С. 13–30.
20. *Волчков В. В.* О множествах инъективности преобразования Помпейю // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 51–66.
21. *Волчков В. В.* Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 182–194.
22. *Волчков В. В.* Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 7. С. 71–78.
23. *Волчков В. В.* О множествах инъективности преобразования Радона на сферах // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 3. С. 63–76.
24. *Волчков В. В.* Теоремы единственности для некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 1. С. 59–65.
25. *Волчков В. В.* Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 3. С. 351–358.
26. *Волчков В. В.* Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 3. С. 300–302.
27. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
28. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
29. *Волчков В. В.* Экстремальные задачи множествах Помпейю // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 3–22.
30. *Волчков В. В.* Экстремальные варианты проблемы Помпейю // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 5. С. 671–680.
31. *Shahshahani M., Sitaram A.* The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric spaces // Contemp. Math. 1987. V. 63. P. 267–277.
32. *Berenstein C. A., Shahshahani M.* Harmonic analysis and the Pompeiu problem // Amer. J. Math. 1983. V. 105. P. 1217–1229.
33. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1973.
34. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.