Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Кривошеев, Интерполяция с оценками в $\mathbb{C}^n$ и ее применение, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 9, 39–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:40:51

УДК 517.55

А. С. Кривошеев

Интерполяция с оценками в $\mathbb{C}^n$ и ее применение

В работе исследуется проблема интерполяции в пространствах целых функций многих комплексных переменных конечного порядка и типа. Продолжение осуществляется с нулевого множества целой функции f конечного порядка и типа. Получены достаточные условия для интерполяции в терминах оценок снизу на первые отличные от нуля производные функции f в точках ее нулевого множества. Результат применяется к проблеме фундаментального принципа в пространствах решений однородных уравнений свертки.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Введение

Пусть PSH_ρ обозначает множество функций, плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^n$ и положительно однородных порядка $\rho > 0$, т.е.

$$p(tz) = t^\rho p(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, \quad t \geq 0, \quad p \in \text{PSH}_\rho;$$

H_ρ – пространство целых функций $\varphi(z)$ порядка (не выше) ρ и конечного типа (при порядке ρ), т.е. для некоторых $A, B > 0$ выполнено неравенство:

$$|\varphi(z)| \leq A \exp[B|z|^\rho] \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Для каждой функции $\varphi \in H_\rho$ через

$$L_\varphi^*(z) = \overline{\lim}_{y \rightarrow z} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\varphi(ty)|}{t^\rho}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

будем обозначать регуляризованный радиальный индикатор φ . Известно (см., например, [1; гл. 1, §6, п. 2]), что верно включение $L_\varphi^* \in \text{PSH}_\rho$. Пусть $P = \{p_m(z)\}_{m=1}^\infty$ – последовательность непрерывных функций из PSH_ρ , удовлетворяющих следующему условию: для каждого $m = 1, 2, \dots$ существует $B_m > 0$ такое, что

$$p_m(z) + B_m |z|^\rho \leq p_{m+1}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n. \quad (1.1)$$

Для всех номеров $m = 1, 2, \dots$ введем нормированные пространства целых функций

$$\Phi_m = \{\varphi \in H(\mathbb{C}^n) : \|\varphi\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} |\varphi(z)| \exp[-p_m(z)] < +\infty\}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00655) и Президента РФ (грант № 00-15-99283).

Очевидно, что имеют место вложения $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \dots \subset \Phi_m \subset \dots$. Кроме того, введем также пространство

$$\Phi(P) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind } \Phi_m$$

как индуктивный предел Φ_m . Заметим, что в силу определения $\Phi(P)$ и теоремы Хартогса о семействах субгармонических функций (см., например, [1; гл. 1, §6, теорема 6.1]) пространство $\Phi(P)$ состоит из тех и только тех функций $\varphi \in H_\rho$, для каждой из которых найдется номер $m = 1, 2, \dots$ такой, что

$$L_\varphi^*(z) \leq p_m(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Согласно индикаторной теореме (см., например, [2; гл. 3, §5, теорема 3.5.1]) для каждого $m \geq 1$ существует функция $\varphi \in H_\rho$ такая, что

$$L_\varphi^*(z) = p_m(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Это, в частности, означает, что пространство $\Phi(P)$ непусто. Сходимость последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset \Phi(P)$ равносильна тому, что для некоторого номера m пространство Φ_m содержит $\{\varphi_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ сходится по норме $\|\cdot\|_m$.

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция. Через $N(f)$ обозначим ее нулевое множество, а через $k(z, f)$ – кратность нуля функции $f(y)$ в точке z , равную минимуму кратностей соответствующих нулей сужений функции $f(y)$ на комплексные прямые, проходящие через точку z . Число $k(z, f)$ равно также порядку первой отличной от нуля производной функции $f(y)$ в точке z . Если $f(z) \neq 0$, то положим $k(z, f) = 0$. Отметим, что для открытого и плотного на единичной сфере (с центром в начале координат) $S \subset \mathbb{C}^n$ множества точек ξ функция $F(\lambda) = f(z + \lambda\xi)$ имеет в точке $\lambda = 0$ нуль кратности $k(z, f)$. Кроме того, если функции φ и g аналитичны в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ и $k(z, \varphi) \leq k(z, g)$ для всех $z \in \Omega$, то функция g/φ также аналитична в Ω (см. [3; гл. 1, п. 1.5, предложение 3]).

Кратным нулевым множеством $f \in H(\Omega)$ будем называть множество

$$N_0(f) = \{(z, \alpha) : z \in N(f), \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, 0 \leq |\alpha| < k(z, f)\},$$

где $\mathbb{Z}_+^n$ – множество n -мерных векторов с неотрицательными целочисленными компонентами и $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Будем говорить, что функция $g(z, \alpha)$, определенная на множестве $N_0(f)$, аналитична на нем, если для каждого $z \in N(f)$ существуют окрестность $U_z \subset \mathbb{C}^n$ точки z и функция $g_z \in H(U_z)$ такие, что

$$D^\alpha g_z(y) = g(y, \alpha) \quad \forall y \in N(f) \cap U_z, \quad 0 \leq |\alpha| < k(y, f),$$

где $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^{\alpha_1} \dots \partial z^{\alpha_n}}$. Таким образом, согласно этому определению для каждого непустого пересечения $U_z \cap U_y$ выполнено неравенство: $k(x, g_z - g_y) \geq k(x, f)$, $x \in U_z \cap U_y$. Следовательно, функция $(g_z - g_y)/f$ аналитична в $U_z \cap U_y$. Если Ω – область голоморфности (например, $\mathbb{C}^n$), то отсюда, как известно, вытекает существование функции G , аналитической в Ω , для которой имеют место равенства:

$$D^\alpha G(z) = g(z, \alpha), \quad z \in N(f), \quad 0 \leq |\alpha| < k(z, f).$$

Таким образом, в этом случае пространство функций, аналитических на $N_0(f)$, можно отождествить с факторпространством $H(\Omega)/J$, где подпространство $J \subset H(\Omega)$ состоит из всех функций G , делящихся на f , т.е. для которых $k(z, G) \geq k(z, f)$ для всех $z \in N(f)$.

Пусть $f \in H(\mathbb{C}^n)$ и H_f обозначает пространство функций, аналитических на $N_0(f)$. Для всех номеров $m = 1, 2, \dots$ введем нормированные пространства функций

$$\Phi_{m,f} = \left\{ g \in H_f : \|g\|_m = \sup_{z \in N(f)} \left[\sum_{|\alpha|=0}^{k(z,f)-1} \left| \frac{g(z,\alpha)}{\alpha!} \right| \right] \exp[-p_m(z)] < +\infty \right\},$$

где $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ и семейство $P = \{p_m\}$ такое же, как и в (1.1). Кроме того, положим

$$\Phi_f(P) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind } \Phi_{m,f}.$$

Рассмотрим отображение $T_0: H(\mathbb{C}^n) \rightarrow H_f$, которое каждой функции $\varphi \in H(\mathbb{C}^n)$ ставит в соответствие функцию $g \in H_f$ по правилу:

$$g(z, \alpha) = D^\alpha \varphi(z), \quad z \in N(f), \quad 0 \leq |\alpha| < k(z, f).$$

Введем еще пространство функций

$$J(P, f) = \{\varphi \in \Phi_f(P) : \varphi/f \text{ — целая функция}\}.$$

Отображение T_0 индуцирует отображение

$$T: \Phi(P)/J(P, f) \rightarrow \Phi_f(P). \quad (1.2)$$

Из определений пространств $\Phi_f(P)$ и $J(P, f)$ легко следует, что T корректно определено. При этом естественно возникает вопрос об области определения этого отображения и о нахождении условий на функцию f и последовательность $P = \{p_m(z)\}$, при которых оно сюръективно, т.е. разрешима интерполяционная задача с оценками.

Проблема интерполяции с оценками является очень важной. Это обусловлено тем, что ее решение тесно связано с фундаментальным принципом в пространстве решений однородного уравнения свертки, т.е. с возможностью представления произвольных решений такого уравнения посредством его элементарных решений — экспоненциальных многочленов (подобно тому, как это делается в частном случае сверточных уравнений — линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, когда каждое решение таких уравнений может быть представлено посредством линейной комбинации элементарных решений вида $z^k \exp(\lambda_j z)$). Решению проблемы интерполяции посвящены десятки работ многих математиков. Наиболее полно эта проблема в различных пространствах целых функций изучена в случае одной переменной. Здесь получены разнообразные достаточные условия, которые в некоторых случаях дают критерий для разрешимости интерполяционной задачи. Отметим работы [4]–[16], которые наиболее близки к исследованиям в нашей работе. Вкратце условия разрешимости интерполяционной задачи в случае

одной переменной состоят в следующем. Интерполяция с оценками будет иметь место, если первые отличные от нуля производные функции f (по нулям которой производится интерполяция) имеют подходящие оценки снизу во всех нулях f .

В случае нескольких переменных решение проблемы интерполяции с оценками значительно усложняется. Прежде всего, это связано с недискретностью нулевого множества аналитической функции многих переменных. В дискретном случае интерполяционную задачу можно решить следующим образом. Вначале осуществить продолжение в попарно не пересекающиеся окрестности (например, круги) всех узлов интерполяции, причем так, что на границах этих окрестностей будут выполнены необходимые для следующего этапа интерполяции оценки снизу на функцию f , нули которой являются узлами интерполяции. Такое продолжение легко осуществимо благодаря налагаемым ограничениям на первые отличные от нуля производные функции f в узлах интерполяции. Далее следует заключительный этап уже глобального продолжения, например посредством склейки указанных локальных продолжений при помощи установления тривиальности некоторых групп когомологий с оценками. В случае многих переменных, когда нулевое множество недискретно, поступают примерно так же, как и в случае одной переменной, т.е. вначале осуществляют локальное продолжение с оценками в окрестности точек нулевого множества f . Однако в таком случае любые окрестности этих точек уже пересекаются, что существенно усложняет ситуацию. Для дальнейшего (глобального) продолжения теперь необходимо налагать дополнительные достаточно жесткие условия на окрестности (например, условие наличия подходящего измельчения покрытия нулевого множества f , которое образуют эти окрестности, подобно тому, как это делается в книге Л. Хёрмандера [17; гл. 7, п. 7.6], только с существенно более жесткими ограничениями на измельчение). Кроме того, на границе (вернее, на ее части) окрестности, как и в случае одной переменной, необходимо наличие подходящих оценок снизу на функцию f . В принципе понятно, что эти оценки могли бы быть достигнуты при помощи наложения условий на производные по направлению функции f в ее нулевых точках. Однако в отличие от случая одной переменной у f теперь уже много таких производных, и, как показывает опыт решения интерполяционной задачи, проблема выбора подходящего направления для каждой нулевой точки сама по себе является, вообще говоря, достаточно нетривиальной. Отметим еще, что глобальный этап продолжения осуществляется посредством установления тривиальности некоторых групп когомологии, т.е. в общих чертах так же, как и в хорошо известных результатах Картана о продолжении с аналитических множеств без оценок. Но при этом в случае интерполяции с оценками необходимо тщательно следить за сохранностью последних на всех этапах продолжения, что существенно усложняет ситуацию по сравнению со случаем интерполяции без оценок.

Таким образом, суммируя сказанное, можно выделить следующие основные задачи в теории интерполяции с оценками (по крайней мере, в случае интерполирования с нулевого множества одной целой функции).

1. Построение специального покрытия нулевого множества f , которое удовлетворяет ряду необходимых условий.
2. Обеспечение сохранности оценок на всех этапах продолжения.

Методы исследования следует различать по тем способам, которыми решаются указанные задачи. Если последние одинаковы, то и методы можно считать одинаковыми несмотря даже на то, что они используются для интерполяции в разных функциональных пространствах. Решение поставленных задач достигается выбором подходящих способов продолжения на разных этапах интерполяции и, прежде всего, выбором подходящих оценок снизу на рост функции f и ее производных. При этом основной целью является, безусловно, нахождение как можно более простых и слабых ограничений на f . Поскольку в случае одной переменной найденные там условия на f являются в ряде случаев необходимыми и достаточными, то именно они и должны служить в некотором роде эталоном для многомерной ситуации, конечно, в той мере, насколько сама эта ситуация позволяет.

Как мы уже вкратце отметили, проблема интерполяции с оценками в случае многих переменных обрастает новыми сложными задачами, которых не было в случае одной переменной, а также усложняются старые задачи, идущие от одномерной ситуации. В связи с этим успехи в развитии интерполяционной теории для многих переменных гораздо более скромные, чем для одной переменной. Достаточно отметить, что в общем случае (т.е. в случае, когда f — не многочлен) все основные результаты относятся к пространствам целых функций, которые являются алгебрами, т.е. с грубыми оценками на рост. Кроме того, условия, налагаемые до сих пор на функцию f , являются очень жесткими и оставляют желать много лучшего. Тем не менее, и в случае многих переменных имеется достаточное количество публикаций по проблеме интерполяции с оценками. Подробное изложение результатов этих публикаций можно найти в обзоре К. Беренштейна и Д. Струшсы [18], который охватывает период вплоть до конца 80-х годов. В последующие годы никаких более или менее существенных продвижений в изучении этой проблемы не появилось. Вторая глава этого обзора, определяемая самими авторами как основная, посвящена так называемым периодическим в среднем функциям (т.е. функциям, являющимся решениями однородных уравнений свертки) и их представлениям посредством экспоненциальных многочленов (т.е. фундаментальному принципу), а следовательно, и интерполяционным проблемам. Мы здесь отметим лишь три работы из освещаемых в обзоре, поскольку они являются ключевыми во всей теории интерполяции для многих переменных. Остальные содержат лишь уточнения и обобщения результатов этих трех работ, не отличаясь от них принципиально ни методами исследования, ни решаемыми задачами.

Прежде всего, отметим работы В.П. Паламодова [19] и Л. Эренпрайса [20], которые включают в себя результаты по одноименному фундаментальному принципу для пространств решений линейных однородных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами (частных случаев пространств решений однородных уравнений свертки) и их систем. Эти результаты (для одного уравнения) основаны на решении проблемы интерполяции с оценками в случае, когда функция f является многочленом. Здесь удалось доказать, что интерполяция с оценками всегда имеет место (без каких-либо условий на f). Это оказалось возможным благодаря наличию у многочленов хороших оценок как сверху, так и снизу и их вполне предсказуемому поведению вблизи своих нулевых множеств. Б. Тейлор и К. Беренштейн обобщили этот результат в работе [21]. В ней рассматривается задача интерполяции в ситуации, когда пространство $\Phi(P)$, введенное нами ранее,

определяется последовательностью

$$p_m(z) = mp(z), \quad m \geq 1,$$

где $p(z)$ — плюрисубгармоническая функция с некоторыми дополнительными свойствами ($\Phi(P)$ является так называемой алгеброй Хёрмандера) и функция f принадлежит $\Phi(P)$. Здесь уже (в отличие от полиномиального случая) для разрешимости интерполяционной задачи с оценками приходится налагать на f дополнительные ограничения. В работе [21] в роли таковых выступают следующие условия. Предполагается, во-первых, что функция f является медленно убывающей, т.е. для нее существует так называемое аналитическое почти параллельное семейство плоскостей, заполняющих в совокупности все $\mathbb{C}^n$. Во-вторых, требуется наличие подходящих оценок снизу на первые отличные от нуля производные функции f во всех точках ее нулевого множества по направлениям, которые задаются векторами, параллельными плоскостям этого семейства. Доказывается, что при этих условиях интерполяционная задача разрешима. Отметим здесь, что понятие аналитического почти параллельного семейства достаточно громоздко и трудно проверяемо. Оно вводится таким образом, что первая из указанных выше основных задач интерполяции автоматически решается. Существование требуемого покрытия нулевого множества f , по сути дела, постулируется самим этим понятием. Доказательство же основного результата работы [21] представляет собой, по существу, решение задачи 2. Метод доказательства, используемый при этом, как нам кажется, нельзя назвать естественным. Вначале осуществляются глобальные продолжения (которые также проходят через этап локальных продолжений) на каждую плоскость из указанного выше семейства. С помощью этих продолжений склеиваются локальные продолжения в полномерные окрестности всех точек нулевого множества f (существование подобных окрестностей как раз и требуется в медленном убывании). Далее следует этап полулокального продолжения в окрестность всего нулевого множества, и уже только затем идет глобальное продолжение в $\mathbb{C}^n$.

В настоящей работе мы решаем интерполяционную задачу с оценками в гораздо более общей ситуации, чем это было ранее: в пространствах целых функций в $\mathbb{C}^n$ с более тонкими, чем в [21], оценками на рост (в частности, наши пространства алгебрами, вообще говоря, не являются) и при более естественных ограничениях на f , сходных с таковыми в случае одной переменной. К примеру, наличие оценок снизу на производные функции f (необходимость которых в случае одной переменной не вызывает сомнений) предполагается по какому-либо произвольному направлению (зависящему от $z \in N(f)$), что делает совершенно излишним понятие аналитического почти параллельного семейства плоскостей, используемое в [21]. Эти ограничения являются, безусловно, принципиально более слабыми, чем в [21].

Такое ослабление условий на f привело к возникновению ряда дополнительных нетривиальных задач. Теперь уже (в отличие от работы [21]) задача 1 автоматически не решается. Приходится строить требуемое покрытие нулевого множества f , основываясь только лишь на оценках для производных функции f . Кроме того, существенно осложняется и решение задачи 2 в связи с тем, что мы имеем дело с более тонкими, чем это было ранее, весовыми пространствами целых функций. Специалистам по теории целых функций и сверточным операторам хорошо известно, что в случаях, когда приходится строить целые функции со специальными

ростовыми свойствами или просто доказывать их принадлежность тем или иным пространствам, ситуация принципиально меняется при переходе от пространств, являющихся алгебрами, к пространствам, которые таковыми не являются. Отметим еще полную прозрачность метода интерполяции, используемого в нашей работе. Продолжение осуществляется всего в два этапа – локальное продолжение в предварительно построенные окрестности точек нулевого множества f и сразу вслед за этим глобальное продолжение, основанное на установлении тривиальности некоторых групп когомологий с оценками.

Опишем вкратце структуру работы. Основная ее цель – доказательство того, что отображение (1.2) является изоморфизмом линейных топологических пространств. Эта задача решается поэтапно. Первый этап, которому посвящен §2, состоит из доказательства инъективности и непрерывности отображения T , что имеет место без дополнительных ограничений на целую функцию f . Для сюръективности T и непрерывности обратного отображения необходимо уже наложить на f некоторые условия. В §3 мы формулируем эти условия и приводим примеры функций, для которых они выполнены. Параграф 4 посвящен построению специального покрытия нулевого множества f . При помощи этого покрытия в следующем параграфе осуществляется этап локального продолжения с оценками функций, аналитических на кратном нулевом множестве f . Наконец, §6 посвящен уже глобальному продолжению и, таким образом, завершает доказательство требуемого изоморфизма. В заключительном параграфе дается применение интерполяционной задачи к вопросу представления решений однородного уравнения свертки посредством элементарных решений, т.е. решается проблема фундаментального принципа.

§2. Непрерывность и инъективность отображения T

Для достижения цели, заявленной в названии параграфа, нам необходимо доказать, прежде всего, два вспомогательных утверждения.

Пусть $B(z, \delta)$ обозначает шар с центром в точке z радиуса $\delta > 0$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $p(z)$ – непрерывная положительно однородная порядка $\rho > 0$ функция в $\mathbb{C}^n$, $V(z)$ – система множеств в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условиям: $z \in V(z)$ и z пробегает некоторое подмножество в $\mathbb{C}^n$, для каждого $t > 0$ найдется $C > 0$ такое, что $\text{diam } V(z) \leq C \quad \forall z \in B(0, t)$ и*

$$\frac{\text{diam } V(z)}{|z|} \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

где символ diam обозначает диаметр множества. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $A > 0$ такое, что верно неравенство:

$$\sup_{y \in V(z)} p(y) \leq \inf_{y \in V(z)} p(y) + \varepsilon |x(z)|^\rho + A \quad \forall z,$$

где $x(z)$ – произвольная точка из $V(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равномерной непрерывности $p(y)$ на компактных подмножествах найдем $\delta \in (0, 1/3)$, удовлетворяющее условию:

$$|p(y) - p(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in \mathbb{S}, \quad y \in B(x, 3\delta). \quad (2.2)$$

Согласно (2.1) выберем $t > 0$ так, чтобы для всех $z \notin B(0, t)$ имело место включение: $V(z) \subset B(z, \text{diam } V(z)) \subset B(z, \delta|z|)$. Пусть $x(z) \in V(z)$. Поскольку $\delta < 1/3$, то верно вложение $B(z, \delta|z|) \subset B(x(z), 3\delta|x(z)|)$. Тогда из (2.2) и однородности p получаем:

$$\begin{aligned} |p(y) - p(w)| &\leq |p(y) - p(x(z))| + |p(x(z)) - p(w)| \\ &= |x(z)|^\rho \left| p\left(\frac{y}{|x(z)|}\right) - p\left(\frac{x(z)}{|x(z)|}\right) \right| + |x(z)|^\rho \left| p\left(\frac{w}{|x(z)|}\right) - p\left(\frac{x(z)}{|x(z)|}\right) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}|x(z)|^\rho + \frac{\varepsilon}{2}|x(z)|^\rho = \varepsilon|x(z)|^\rho \quad \forall y, w \in V(z), \quad |z| > t. \end{aligned}$$

Из условий леммы следует, что множество $\bigcup_{z \in B(0, t)} V(z)$ ограничено. В силу ограниченности непрерывной функции на ограниченном подмножестве существует $A > 0$ такое, что для любых $x, y \in V(z)$, $z \in B(0, t)$, имеет место оценка: $|p(y) - p(x)| \leq A$. Это вместе с предыдущим дает нам требуемое утверждение.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\varphi \in \Phi_m$. Тогда для некоторого $c > 0$, зависящего от номера m , но не от функции φ , выполняется неравенство:

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{|D^\alpha \varphi(z)|}{\alpha!} \leq c \|\varphi\|_m \exp[p_{m+1}(z)] \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом из предложения 3.1 работы [21]. Фиксируем произвольную точку $z \in \mathbb{C}^n$. Положим

$$M(\alpha) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i + 1), \quad (\xi - z)^\alpha = \prod_{i=1}^n (\xi_i - z_i)^{\alpha_i}$$

и пусть символ $\bar{k}$ обозначает n -мерный вектор $(k, k, \dots, k)$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(\xi, z) = (\xi - z)^{\bar{1}} D_{\xi}^{\bar{1}} [(\xi - z)^{\bar{1}} D_{\xi}^{\bar{1}} [(\xi - z)^{\bar{1}} \varphi(\xi)]].$$

Легко видеть, что имеет место равенство:

$$\psi(\xi, z) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ 1 \leq \alpha_i \leq 3, \beta_i \leq 2, i=1, \dots, n}} A_{\alpha, \beta} (\xi - z)^\alpha D^\beta \varphi(\xi),$$

где $A_{\alpha,\beta}$ – некоторые неотрицательные целые числа. Применяя интегральную формулу Коши, получаем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{D^\beta \varphi(\xi)}{\beta!} \right| &= \left| \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1 - \zeta_1|=1} \cdots \int_{|\xi_n - \zeta_n|=1} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - \xi)^{\beta+1}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \right| \\ &\leq \sup_{|\zeta_j - \xi_j|=1, j=1, \dots, n} |\varphi(\zeta)| \leq \sup_{\zeta \in B(\xi, \sqrt{n})} |\varphi(\zeta)|. \end{aligned}$$

Пусть $|\xi_j - z_j| = 1, j = 1, \dots, n$. Применим лемму 2.1, где в качестве множеств $V(z)$ возьмем шары $B(z, 2\sqrt{n})$, а в качестве ε – число B_m (то же, что и в (1.1)). Согласно этой лемме, определению пространства Φ_m и неравенству (1.1) получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{\zeta \in B(\xi, \sqrt{n})} |\varphi(\zeta)| &\leq \sup_{\zeta \in B(z, 2\sqrt{n})} |\varphi(\zeta)| \leq \sup_{\zeta \in B(z, 2\sqrt{n})} \|\varphi\|_m \exp[p_m(\zeta)] \\ &\leq \|\varphi\|_m \exp[p_m(z) + B_m|z| + A] \leq \|\varphi\|_m \exp[p_{m+1}(z) + A]. \end{aligned}$$

Отсюда и из предыдущих соотношений следует, что

$$\left| \frac{D^\beta \varphi(\xi)}{\beta!} \right| \leq \|\varphi\|_m \exp[p_{m+1}(z) + A]$$

для любых $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $z \in \mathbb{C}^n$ и ξ таких, что $|\xi_j - z_j| = 1, j = 1, \dots, n$. Таким образом, получаем неравенство:

$$\begin{aligned} |\psi(\xi, z)| &\leq 2^n \cdot \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ 1 \leq \alpha_j \leq 3, \beta_j \leq 2, j=1, \dots, n}} A_{\alpha, \beta} \|\varphi\|_m \exp[p_{m+1}(z) + A] \\ &= \tilde{c} \|\varphi\|_m \exp[p_{m+1}(z)], \quad |\xi_j - z_j| = 1, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Используя эту оценку и формулу Коши для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, имеем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{D_\xi^\beta \psi(z, z)}{\beta!} \right| &= \left| \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1 - z_1|=1} \cdots \int_{|\xi_n - z_n|=1} \frac{\psi(\xi, z)}{(\xi - z)^{\beta+1}} d\xi_1 \cdots d\xi_n \right| \\ &\leq \tilde{c} \|\varphi\|_m \exp[p_{m+1}(z)]. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Применяя еще несколько раз формулу Коши, убеждаемся, что

верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
D_{\xi}^{\alpha+\bar{1}}\psi(z, z) &= \frac{(\alpha + \bar{1})!}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1 - z_1|=1} \cdots \int_{|\xi_n - z_n|=1} \frac{\psi(\xi, z)}{(\xi - z)^{\alpha+\bar{2}}} d\xi_1 \cdots d\xi_n \\
&= \frac{M(\alpha)\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1 - z_1|=1} \cdots \int_{|\xi_n - z_n|=1} \frac{D_{\xi}^{\bar{1}}[(\xi - z)^{\bar{1}} D_{\xi}^{\bar{1}}[(\xi - z)^{\bar{1}} \varphi(\xi)]]}{(\xi - z)^{\alpha+\bar{1}}} d\xi_1 \cdots d\xi_n \\
&= M(\alpha) D_{\xi}^{\alpha} [D_{\xi}^{\bar{1}}[(\xi - z)^{\bar{1}} D_{\xi}^{\bar{1}}[(\xi - z)^{\bar{1}} \varphi(\xi)]]]_{\xi=z} \\
&= M(\alpha) D_{\xi}^{\alpha+\bar{1}} [(\xi - z)^{\bar{1}} D_{\xi}^{\bar{1}}[(\xi - z)^{\bar{1}} \varphi(\xi)]]_{\xi=z} \\
&= \frac{M(\alpha)(\alpha + \bar{1})!}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1 - z_1|=1} \cdots \int_{|\xi_n - z_n|=1} \frac{(\xi - z)^{\bar{1}} D_{\xi}^{\bar{1}}[(\xi - z)^{\bar{1}} \varphi(\xi)]}{(\xi - z)^{\alpha+\bar{2}}} d\xi_1 \cdots d\xi_n \\
&= \frac{[M(\alpha)]^2 \alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1 - z_1|=1} \cdots \int_{|\xi_n - z_n|=1} \frac{D_{\xi}^{\bar{1}}[(\xi - z)^{\bar{1}} \varphi(\xi)]}{(\xi - z)^{\alpha+\bar{1}}} d\xi_1 \cdots d\xi_n \\
&= [M(\alpha)]^2 D_{\xi}^{\alpha+\bar{1}} [(\xi - z)^{\bar{1}} \varphi(\xi)]_{\xi=z} \\
&= \frac{[M(\alpha)]^2 (\alpha + \bar{1})!}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1 - z_1|=1} \cdots \int_{|\xi_n - z_n|=1} \frac{(\xi - z)^{\bar{1}} \varphi(\xi)}{(\xi - z)^{\alpha+\bar{2}}} d\xi_1 \cdots d\xi_n \\
&= \frac{[M(\alpha)]^3 \alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1 - z_1|=1} \cdots \int_{|\xi_n - z_n|=1} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{\alpha+\bar{1}}} d\xi_1 \cdots d\xi_n \\
&= [M(\alpha)]^3 D^{\alpha} \varphi(z).
\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом оценок, полученных выше, на производные $D_{\xi}^{\beta} \psi(z, z)$ имеем неравенство:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{|D^{\alpha} \varphi(z)|}{\alpha!} &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{|D_{\xi}^{\alpha+\bar{1}} \psi(z, z)|}{[M(\alpha)]^3 \alpha!} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{|D_{\xi}^{\alpha+\bar{1}} \psi(z, z)|}{[M(\alpha)]^2 (\alpha + \bar{1})!} \\
&\leq \tilde{c} \|\varphi\|_m \exp[p_{m+1}(z)] \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{[M(\alpha)]^2}.
\end{aligned}$$

Поскольку последний ряд сходится, то это дает нам требуемое неравенство. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве предложения 3.1 в работе [21] вместо вспомогательной функции $\psi(\xi, z)$ использована функция

$$(\xi - z)^{\bar{1}} D_{\xi}^{\bar{1}} [(\xi - z)^{\bar{1}} \varphi(\xi)].$$

Это неправильно. Верный результат там получен лишь благодаря ошибке, допущенной в последнем неравенстве доказательства предложения 3.1 (аналогичном последнему неравенству нашей леммы).

В следующем утверждении мы доказываем, что отображение T непрерывно и инъективно. Кроме того, попутно показывается, что T определено на всем пространстве $\Phi(P)/J(P, f)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Отображение T непрерывно и инъективно переводит пространство $\Phi(P)/J(P, f)$ в пространство $\Phi_f(P)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[\varphi_1]$ и $[\varphi_2]$ – классы эквивалентности из $\Phi(P)/J(P, f)$, порожденные соответственно функциями φ_1 и φ_2 из $\Phi(P)$, такие, что $T([\varphi_1]) = T([\varphi_2])$. Тогда $\varphi_1 - \varphi_2 \in \Phi(P)$ и согласно определению оператора T имеют место равенства:

$$D^\alpha(\varphi_1 - \varphi_2)(z) = 0, \quad z \in N(f), \quad 0 \leq |\alpha| < k(z, f).$$

Следовательно, для всех $z \in \mathbb{C}^n$ величина $k(z, f)$ не превосходит $k(z, \varphi_1 - \varphi_2)$. Как уже отмечалось во введении, это означает, что отношение $(\varphi_1 - \varphi_2)/f$ является целой функцией. Тогда согласно определению множества $J(P, f)$ оно должно содержать разность $\varphi_1 - \varphi_2$. Последнее влечет за собой равенство $[\varphi_1] = [\varphi_2]$. Таким образом, T является инъекцией. Пусть $\varphi \in \Phi_m$. По лемме 2.2 выполнено неравенство:

$$\sum_{|\alpha|=0}^{k(z, f)-1} \frac{|T([\varphi])(z, \alpha)|}{\alpha!} \leq c \|\varphi\|_m \exp[p_{m+1}(z)], \quad z \in N(f).$$

Это дает включение: $T([\varphi]) \in \Phi_{m+1, f}$. Кроме того, последнее неравенство означает также непрерывность T . Предложение доказано.

§3. Некоторые примеры

Для последовательности $P = \{p_m(z)\}_{m=1}^\infty \subset \text{PSH}_\rho$ положим:

$$I(P) = \{z \in \mathbb{C}^n : \lim_{m \rightarrow \infty} p_m(z) = +\infty\}.$$

В силу однородности p_m , $m \geq 1$, множество $I(P)$ является конусом. Через $M(\delta)$ будем обозначать δ -вздутие множества $M \subset \mathbb{C}^n$. Наша цель в дальнейшем – показать, что при определенных условиях на $f \in H_\rho$ отображение T является сюръективным, т.е. каждая функция $g \in \Phi_f(P)$ может быть аналитически продолжена на все $\mathbb{C}^n$ с сохранением оценок на рост. В этой связи рассмотрим следующие условия:

i) индикатор L_f^* непрерывен на множестве

$$X = W(f) \setminus \text{int } I(P),$$

здесь int обозначает внутренность множества, а $W(f)$ состоит из всевозможных пределов сходящихся последовательностей вида $\{y_k/|y_k|\}_{k=1}^\infty$, где $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset N(f)$ и $|y_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$;

ii) существует число k_0 такое, что

$$k(z, f) \leq k_0 \quad \text{для всех } z \in N(f);$$

iii) а) для каждого $z \in N(f)$ существует вектор $\eta(z) \in \mathbb{S}$ такой, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ z \in N(f) \cap X(\delta, 0)}} \left[|z|^{-\rho} \ln \left| \frac{d^{k(z, f)} f_z}{d\lambda^{k(z, f)}}(0) \right| - L_f^* \left(\frac{z}{|z|} \right) \right] = 0,$$

здесь $f_z(\lambda) = f(z + \lambda\eta(z))$, $\lambda \in \mathbb{C}$, и

$$X(\delta, t) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |z| > t, \frac{z}{|z|} \in X(\delta) \right\}, \quad t \geq 0;$$

$$\text{б) } \inf_{z \in N(f)} \nu(z) \ln \left| \frac{d^{k(z, f)} f_z}{d\lambda^{k(z, f)}}(0) \right| > -\infty, \text{ где } \nu(z) = \min\{1, |z|^{-\rho}\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае одной переменной условие i) автоматически выполнено, поскольку индикатор L_f^* является непрерывным всюду в комплексной плоскости для любой целой функции f порядка ρ и конечного типа.

Приведем некоторые примеры функций $f \in H_\rho$, удовлетворяющих условиям i)–iii). В случае одной переменной в качестве f достаточно взять любую функцию из H_ρ вполне регулярного роста, нулевое множество которой также является регулярным. Хорошо известно (см., например, [22; гл. 1, §6, п. 5, теорема 6.5]), что для таких функций i)–iii) всегда выполнены. В случае многих переменных построение подобных примеров естественно вызывает трудности, как и построение любых аналитических функций нескольких переменных с наперед заданными свойствами. Однако и здесь можно привести некоторые примеры. Самыми простыми из них являются функции, определенные как суперпозиции функций одной переменной и полиномов по многим переменным.

Пусть $F(z)$ – целая функция порядка ρ и конечного типа в $\mathbb{C}$, имеющая вполне регулярный рост и регулярное нулевое множество, $F(0) \neq 0$, и $\eta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Положим

$$f(z) = F^p(\langle z, \eta \rangle^k), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где p, k – натуральные числа и $\langle z, \eta \rangle = z_1\eta_1 + \dots + z_n\eta_n$. Тогда $f(z)$ – целая функция порядка $k\rho$ в $\mathbb{C}^n$. Найдем индикатор L_f^* :

$$\begin{aligned} L_f^*(z) &= \overline{\lim}_{y \rightarrow z} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(ty)|}{t^{k\rho}} = \overline{\lim}_{y \rightarrow z} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F^p(\langle ty, \eta \rangle^k)|}{t^{k\rho}} \\ &= p \overline{\lim}_{y \rightarrow z} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(t^k \langle y, \eta \rangle^k)|}{t^{k\rho}} = p \overline{\lim}_{y \rightarrow z} \overline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(\tau \langle y, \eta \rangle^k)|}{\tau^\rho} \\ &= \overline{\lim}_{y \rightarrow z} p L_F^*(\langle y, \eta \rangle^k) = p L_F^*(\langle z, \eta \rangle^k), \quad z \in \mathbb{C}^n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Отсюда сразу получаем условие i), поскольку, как уже отмечалось выше, функция $L_F^*(\lambda)$ непрерывна в $\mathbb{C}$. В условии ii) в качестве k_0 можно взять число $p = k(z, f)$, $z \in N(f)$, так как $F(0) \neq 0$, а регулярность нулевого множества функции F означает, в частности, что все ее нули имеют кратность один. Положим $\eta_j(z) = \bar{\eta}_j/|\eta|$, и пусть $\eta(z) = (\eta_1(z), \dots, \eta_n(z))$. Тогда для каждого $z \in N(f)$ имеем:

$$\frac{d^p f_z}{d\lambda^p}(0) = p! [F'(\langle z, \eta \rangle^k)]^p \cdot k^p \cdot \langle z, \eta \rangle^{p(k-1)} |\eta|^p. \quad (3.2)$$

Из регулярности нулевого множества функции F и регулярности ее роста следует (см. [22; гл. 1, §6, п. 5, теорема 6.5]), что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $t > 0$ такое, что при $|\lambda| > t$ и $F(\lambda) = 0$ выполнена оценка:

$$\ln |F'(\lambda)| \geq L_F^*(\lambda) - \varepsilon |\lambda|^\rho. \quad (3.3)$$

Кроме того, из свойств индикаторов следует, что для всех достаточно больших по модулю $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место также оценка (см. [1; гл. 1, §6, п. 2, свойство г]):

$$\ln |F(\lambda)| \leq L_F^*(\lambda) + \varepsilon |\lambda|^\rho.$$

Отсюда, используя интегральную формулу Коши, как и в лемме 2.2, получаем неравенство:

$$\ln |F'(\lambda)| \leq L_F^*(\lambda) + 2\varepsilon |\lambda|^\rho \quad (3.4)$$

для всех чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, модуль которых превосходит некоторое $t_1 > t$. Пусть $z \in N(f)$. Тогда из (3.1) и (3.2) получаем:

$$\begin{aligned} & \left| |z|^{-k\rho} \ln \left| \frac{d^p f_z}{d\lambda^p}(0) \right| - L_f^* \left(\frac{z}{|z|} \right) \right| \\ & \leq \left| \frac{p \ln |F'(\langle z, \eta \rangle^k)| - p L_F^*(\langle z, \eta \rangle^k)}{|z|^{k\rho}} \right| + |z|^{-k\rho} (\ln p! + p \ln(k|\eta| \cdot |\langle z, \eta \rangle|^{k-1})) \\ & = A + B. \end{aligned}$$

Поскольку $F(0) \neq 0$, то нетрудно заметить, что величина B стремится к нулю, когда $z \in N(f)$ и $|z| \rightarrow \infty$. Если $|\langle z, \eta \rangle| > t_1$, то согласно (3.3) и (3.4) имеем:

$$A \leq \frac{2p\varepsilon |\langle z, \eta \rangle|^{k\rho}}{|z|^{k\rho}} = 2p\varepsilon \left| \left\langle \frac{z}{|z|}, \eta \right\rangle \right|^{k\rho} \leq 2p\varepsilon |\eta|^{k\rho}.$$

Если же $|\langle z, \eta \rangle| \leq t_1$, то в силу того, что производная F' отлична от нуля в нулях F , величина A также будет стремиться к нулю, когда $z \in N(f)$ и $|z| \rightarrow \infty$. Таким образом, условие iii) а) выполнено для функции f , причем в качестве X здесь можно взять все множество $W(f)$. Последнее согласно определениям $W(f)$ и $X(\delta, t)$ означает, что для некоторого $T > 0$ (зависящего от δ и t) множество $N(f) \setminus B(0, T)$ лежит в $X(\delta, t)$. В силу условия iii) а) найдем δ и t такие, что

$$|z|^{-\rho} \ln \left| \frac{d^{k(z,f)} f_z}{d\lambda^{k(z,f)}}(0) \right| - L_f^* \left(\frac{z}{|z|} \right) > -1$$

для всех $z \in X(\delta, t) \cap N(f)$. Поскольку индикатор $L_f^*(y)$ (за исключением случая $f \equiv 0$) ограничен снизу на сфере $\mathbb{S}$ (см., например, [2; гл. 3, §5, свойство к)), то из предыдущего следует, что

$$\inf_{z \in N(f) \setminus B(0, T)} |z|^{-\rho} \ln \left| \frac{d^{k(z,f)} f_z}{d\lambda^{k(z,f)}}(0) \right| > -\infty.$$

Чтобы завершить проверку условия iii) б), достаточно показать, что

$$\inf_{z \in N(f) \setminus B(0, T)} \nu(z) \ln \left| \frac{d^{k(z, f)} f_z}{d\lambda^{k(z, f)}}(0) \right| > -\infty$$

или, что эквивалентно,

$$\inf_{z \in N(f) \setminus B(0, T)} \ln \left| \frac{d^{k(z, f)} f_z}{d\lambda^{k(z, f)}}(0) \right| > -\infty.$$

Для каждого $z \in B(0, T)$ точка $\langle z, \eta \rangle^k$ лежит в круге с центром в нуле радиуса $T^k |\eta|^k$. Если же $z \in N(f) \cap B(0, T)$, то $\langle z, \eta \rangle^k$ совпадает с одним из конечного числа нулей функции F в круге $B(0, T^k |\eta|^k)$. Во всех этих нулях производная F' не равна нулю. Кроме того, в силу условия $F(0) \neq 0$ для каждого $z \in N(f) \cap B(0, T)$ число $\langle z, \eta \rangle^{p(k-1)}$ отлично от нуля. Следовательно, с учетом (3.2) в левой части последнего неравенства стоит инфимум лишь конечного множества чисел, не равных $-\infty$. Поэтому этот инфимум также не равен $-\infty$.

Таким образом, функция f обладает свойствами i)–iii).

Аналогично доказывается, что условиям i)–iii) удовлетворяет функция

$$f(z) = F^p(z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где p и k_j , $j = 1, \dots, n$, – натуральные числа и функция F – та же, что и выше. Здесь в качестве вектора $\eta(z)$ достаточно взять $\bar{\xi}(z)/|\xi(z)|$, где

$$\xi_j(z) = z_1^{k_1} \dots z_{j-1}^{k_{j-1}} z_{j+1}^{k_{j+1}} \dots z_n^{k_n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

§ 4. Построение специального покрытия $N(f)$

Продолжение функции $\psi \in \Phi_f(P)$ будем осуществлять поэтапно. Вначале мы продолжим ее в некоторую специальную окрестность $U(z) \subset \mathbb{C}^n$ каждой точки $z \in N(f)$. В этом параграфе мы займемся построением таких окрестностей. Для этого нам необходимо, прежде всего, оценить производные f и установить некоторые свойства функции $k(z, f)$. Этому посвящены следующие три утверждения.

ЛЕММА 4.1. Пусть $f \in H_\rho$ удовлетворяет условиям i), ii) и iii) а). Тогда существует $a > 0$ такое, что выполнено следующее: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся положительные постоянные δ и t такие, что верна оценка

$$\ln |F_z(y)| \geq L_f^*(z) - \varepsilon |z|^\rho, \\ y \in B(z, \exp[-a\varepsilon |z|^\rho]), \quad z \in X(\delta, t) \cap N(f),$$

$$\text{где } F_z(y) = \frac{d^{k(z, f)} f(y + \lambda \eta(z))}{d\lambda^{k(z, f)}} \Big|_{\lambda=0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу i) найдем $\mu > 0$ такое, что

$$|L_f^*(z) - L_f^*(y)| < b\varepsilon \quad \forall z \in X(\mu), \quad y \in B(z, 2\mu), \quad (4.1)$$

где $b > 0$ мы выберем ниже. Отсюда и из теоремы Хартогса для семейств субгармонических функций легко следует, что для некоторого $t_1 > 0$ выполнено неравенство (см., например, [1; гл. 1, § 6, п. 2, свойство в]):

$$\frac{\ln |f(\tau y)|}{\tau^\rho} \leq L_f^*(z) + 3b\varepsilon, \quad y \in B(z, \mu), \quad \tau > t_1, \quad z \in X(\mu). \quad (4.2)$$

Отметим, что для каждого фиксированного $z \in X(\mu)$ неравенство (4.2) выполнено и при отсутствии оценки (4.1). Однако при этом t_1 будет, вообще говоря, зависеть от $z \in X(\mu)$. Оценка же (4.1) обеспечивает существование единого $t_1 > 0$ для всех точек $z \in X(\mu)$.

В силу условия iii) а) найдутся положительные числа $\delta < \mu$ и $t_2 > t_1$ такие, что для всех $z \in X(\delta, t_2) \cap N(f)$

$$\left| \frac{d^{k(z,f)} f_z}{d\lambda^{k(z,f)}}(0) \right| = |F_z(z)| \geq \exp[L_f^*(z) - b\varepsilon|z|^\rho]. \quad (4.3)$$

Из условия ii) и интегральной формулы Коши получаем:

$$|F_z(y)| = \left| \frac{k(z,f)!}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(y + \xi\eta(z))}{\xi^{k(z,f)+1}} d\xi \right| \leq k_0! \max_{|\xi| \leq 1} |f(y + \xi\eta(z))|. \quad (4.4)$$

Пусть $y \in B(z, 1)$. Тогда $y + \xi\eta(z) \in B(z, 2)$ для любого ξ такого, что $|\xi| \leq 1$. Следовательно, найдется $t > t_2$ такое, что верно включение $(y + \xi\eta(z))|z|^{-1} \in B(z/|z|, \mu)$, как только $y \in B(z, 1)$, $|\xi| \leq 1$ и $|z| > t$. Увеличивая при необходимости t , считаем, что $k_0! \leq \exp[b\varepsilon|z|^\rho]$ при $|z| > t$. Тогда с учетом (4.2) и (4.4) имеем оценку:

$$|F_z(y)| \leq k_0! \exp[L_f^*(z) + 3b\varepsilon|z|^\rho] \leq \exp[L_f^*(z) + 4\varepsilon b|z|^\rho] \quad \forall y \in B(z, 1), \quad z \in X(\delta, t) \cap N(f). \quad (4.5)$$

Пусть $\zeta \in \mathbb{S}$ и ν – ближайший к точке $\lambda = 0$ нуль функции $F_z(z + \lambda\zeta)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $|\nu| < 1$, то из неравенств (4.3), (4.5) и теоремы о нулях аналитической функции в круге (см. [22; гл. 1, § 2, п. 1, теорема 2.1]) следует, что

$$|\nu|^{-1} \leq |F_z(z)|^{-1} \exp[L_f^*(z) + 4\varepsilon b|z|^\rho] \leq \exp[5\varepsilon b|z|^\rho].$$

Если же $|\nu| > 1$, то неравенство $|\nu|^{-1} \leq \exp[5\varepsilon b|z|^\rho]$ выполнено тривиально. Оно означает, что F_z не имеет нулей в шаре $B(z, \exp[-5\varepsilon b|z|^\rho])$. Следовательно, функция $\Psi_z(y) = \ln |F_z(y)| - L_f^*(z) - 4b\varepsilon|z|^\rho$ гармонична, а с учетом оценки (4.5) и неположительна в этом шаре. Для таких функций, как известно (см., например, [23]), имеет место неравенство Харнака, которое в нашем случае с учетом оценки (4.3) и определения функции $\Psi_z(y)$ можно записать в следующем виде:

$$\Psi_z(y) \geq 3 \cdot 2^{2n-2} \cdot \Psi_z(z) \geq -15 \cdot 2^{2n-2} b\varepsilon|z|^\rho \quad \forall y \in B(z, 2^{-1} \exp[-5\varepsilon b|z|^\rho]).$$

Поскольку при достаточно большом значении $|z|$ выполнено включение

$$B(z, \exp[-6b\varepsilon|z|^\rho]) \subset B(z, 2^{-1} \exp[-5b\varepsilon|z|^\rho]),$$

то из последней оценки легко следует утверждение леммы, если положить $b^{-1} = 15 \cdot 2^{2n-2} - 4$ и $a = 6b$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть $f \in H_\rho$ удовлетворяет условиям i), ii) и iii) а). Тогда существует $a > 0$ такое, что выполнено следующее: для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся положительные постоянные δ и t такие, что

$$k(y, f) = k(z, f), \\ y \in B(z, \exp[-a\varepsilon|z|^\rho]) \cap N(f), \quad z \in X(\delta, t) \cap N(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$ и числа a, δ, t выбраны согласно лемме 4.1. Тогда для каждого $z \in X(\delta, t) \cap N(f)$ и любого $y \in B(z, \exp[-a\varepsilon|z|^\rho])$ в силу леммы 4.1 производная функции f порядка $k(z, f)$ по направлению $\eta(z)$, вычисленная в точке y , отлична от нуля. Это означает, что выполнено неравенство: $k(y, f) \leq k(z, f)$. Аналогично доказывается и обратное неравенство (возможно, для большего t), если ограничиться точками y из множества $B(z, \exp[-(a+1)\varepsilon|z|^\rho]) \cap N(f)$. Действительно, для таких y при достаточно большом значении $|z|$ будет иметь место включение: $z \in B(y, \exp[-a\varepsilon|y|^\rho])$. Лемма доказана.

Совершенно аналогично лемме 4.2 доказывается

ЛЕММА 4.3. Пусть $f \in H_\rho$ удовлетворяет условиям ii) и iii) б). Тогда существует $A > 0$ такое, что

$$k(y, f) = k(z, f), \quad y \in B(z, A^{-1} \exp[-A|z|^\rho]) \cap N(f), \quad z \in N(f).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от лемм 4.1 и 4.2 в лемме 4.3 не требуется выполнения условия i). Оно было необходимо лишь для получения оценки (4.2). При доказательстве же леммы 4.3 роль (4.2) играет следующая оценка:

$$\ln |f(\tau y)| \leq A\tau^\rho + D, \quad y \in B\left(z, \frac{1}{2}\right), \quad z \in \mathbb{S}.$$

Она всегда верна, поскольку функция f имеет порядок ρ и конечный тип.

Пусть $z \in N(f)$. Через $\eta^1(z), \dots, \eta^n(z)$ обозначим совокупность единичных векторов в $\mathbb{C}^n$, переходящих при некотором унитарном преобразовании пространства $\mathbb{C}^n$ в соответствующие координатные плоскости. При этом считаем, что $\eta^n(z) = \eta(z)$. Для чисел $a_1, a_2 > 0$ положим

$$U_z(a_1, a_2) = \left\{ x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta^i(z), \lambda' \in B'(a_1), \lambda_n \in B^n(a_2) \right\}.$$

Здесь $\lambda = (\lambda', \lambda_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $B'(a_1) = B(0, \exp[-a_1\varepsilon|z|^\rho]) \subset \mathbb{C}^{n-1}$, $B^n(a_2) = B(0, \exp[-a_2\varepsilon|z|^\rho]) \subset \mathbb{C}$. Положим также $\varphi_z(\lambda) = f(z + \lambda_1 \eta^1(z) + \dots + \lambda_n \eta^n(z))$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$. В следующих двух утверждениях мы строим необходимое нам покрытие нулевого множества f . Таким образом, цель этого параграфа будет достигнута.

ЛЕММА 4.4. Пусть даны число $\alpha > 0$ и функция $f \in H_\rho$, удовлетворяющая условиям i), ii), iii) а). Тогда существуют постоянные $a_1 > a_2 > \alpha$ и $b > 0$ такие, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $t > 0$, так что при всех $z \in X(\delta, t) \cap N(f)$ выполнено следующее:

- 1) $\varphi_z(\lambda) \geq \exp[L_f^*(z) - b\varepsilon|z|^\rho] \quad \forall \lambda \in B'(a_1) \times \partial B^n(a_2)$;
- 2) функция $\varphi_z(\lambda', \lambda_n)$ при каждом фиксированном $\lambda' \in B'(a_1)$ имеет в круге $B^n(a_2)$ ровно один нуль кратности $k(z, f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$ и δ, t — положительные числа, для которых выполнены одновременно соотношения из лемм 4.1 и 4.2. Фиксируем $z \in X(\delta, t) \cap N(f)$. В силу определения $k(z, f)$ верно представление:

$$f(z + \lambda\eta(z)) = \lambda^{k(z, f)} h_z(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4.6)$$

где $h_z(\lambda)$ — некоторая целая функция. При этом функция $F_z(y)$ из леммы 4.1 удовлетворяет, очевидно, равенству:

$$F_z(z) = k(z, f)! h_z(0). \quad (4.7)$$

Для каждого $\delta > 0$ при достаточно большом значении $|z|$ точки $z + \lambda\eta(z)$ при всех $|\lambda| \leq 1$ принадлежит шару $B(z, \delta|z|)$. Поэтому с учетом равенства (4.6) для малых $\delta > 0$, как и в (4.2), получаем:

$$|h_z(\lambda)| = \left| \frac{f(z + \lambda\eta(z))}{\lambda^{k(z, f)}} \right| = |f(z + \lambda\eta(z))| \leq \exp[L_f^*(z) + 3\varepsilon|z|^\rho],$$

где $|\lambda| = 1$. Следовательно, по принципу максимума имеем:

$$|h_z(\lambda)| \leq \exp[L_f^*(z) + 3\varepsilon|z|^\rho], \quad |\lambda| \leq 1. \quad (4.8)$$

С другой стороны, согласно (4.7), лемме 4.1 и условию ii) верна оценка:

$$|h_z(0)| \geq (k_0!)^{-1} \exp[L_f^*(z) - \varepsilon|z|^\rho].$$

При достаточно больших $|z|$ величина $(k_0!)^{-1}$ будет больше чем $\exp[-\varepsilon|z|^\rho]$. Поэтому для таких точек z из предыдущего получаем:

$$|h_z(0)| \geq \exp[L_f^*(z) - 2\varepsilon|z|^\rho]. \quad (4.9)$$

Пусть ν — ближайший к точке $\lambda = 0$ нуль функции $h_z(\lambda)$. Как и в лемме 4.1, из соотношений (4.8) и (4.9) следует, что имеет место неравенство: $|\nu| \geq \exp[-5\varepsilon|z|^\rho]$. Таким образом, $h_z(\lambda)$ не обращается в нуль в круге $|\lambda| < \exp[-5\varepsilon|z|^\rho]$. Рассмотрим функцию

$$\psi_z(\lambda) = \ln |h_z(\lambda)| - L_f^*(z) - 3\varepsilon|z|^\rho.$$

По доказанному она гармонична, а в силу (4.8) и отрицательна в круге $|\lambda| < \exp[-5\varepsilon|z|^\rho]$. Поэтому, применяя к ней неравенство Харнака, как и в лемме 4.1, с учетом (4.9) получим:

$$\psi_z(\lambda) \geq 3 \cdot 2^{2n-2} \psi_z(0) \geq -15 \cdot 2^{2n-2} \varepsilon |z|^\rho, \quad |\lambda| < 2^{-1} \exp[-5\varepsilon|z|^\rho].$$

Отсюда при достаточно больших значениях $|z|$ имеем оценку:

$$|h_z(\lambda)| \geq \exp[L_f^*(z) - b_1\varepsilon|z|^\rho], \quad |\lambda| \leq \exp[-6\varepsilon|z|^\rho],$$

где $b_1 = 15 \cdot 2^{2n-2} - 3$. Пусть $a_2 > \max\{\alpha, 6\}$. Тогда из последней оценки, условия ii) и (4.6) получаем:

$$|f(z + \lambda\eta(z))| \geq \exp[L_f^*(z) - (k_0a_2 + b_1)\varepsilon|z|^\rho], \quad \lambda \in \partial B^n(a_2). \quad (4.10)$$

Заметим также, что функция $f(z + \lambda\eta(z))$, $\lambda \in \mathbb{C}$, не обращается в нуль на множестве $\overline{B^n(a_2)} \setminus \{0\}$.

Зафиксируем теперь произвольное $\lambda_n \in \partial B^n(a_2)$ и рассмотрим точку $z + \lambda_n\eta(z) = z + \lambda_n\eta^n(z)$. Как и в (4.2), при достаточно больших значениях $|z|$ будет верно неравенство:

$$|f(z + \lambda_1\eta^1(z) + \dots + \lambda_{n-1}\eta^{n-1}(z) + \lambda_n\eta^n(z))| \leq \exp[L_f^*(z) - 3\varepsilon|z|^\rho]$$

для всех $\lambda' \in B'(1)$. Используя эту оценку и (4.10), мы точно так же, как в лемме 4.1, можем применить вначале теорему о нулях аналитической функции в круге, а затем неравенство Харнака. При этом мы найдем $a_1 > a_2$ и $b > 0$ (не зависящие от ε и от $\lambda_n \in \partial B^n(a_2)$) такие, что верна оценка:

$$\ln |f(z + \lambda_1\eta^1(z) + \dots + \lambda_{n-1}\eta^{n-1}(z) + \lambda_n\eta^n(z))| \geq \exp[L_f^*(z) - b\varepsilon|z|^\rho]$$

для всех $\lambda' \in B'(a_1)$. Это дает нам первое утверждение нашей леммы.

Докажем теперь второе. Обозначим через m максимальное число геометрически различных нулей функции $\varphi_z(\lambda', \lambda_n)$ в круге $B^n(a_2)$ при фиксированных $\lambda' \in B'(a_1)$. Согласно п. 1) леммы φ_z не обращается в нуль на множестве $B'(a_1) \times \partial B^n(a_2)$. Поэтому согласно теореме из [3; гл. 1, § 1, п. 1.3] множество точек $\lambda' \in B'(a_1)$, над которыми этот максимум достигается, всюду плотно в $B'(a_1)$. Пусть $m > 1$. Тогда по доказанному существует последовательность $\lambda'_j \in B'(a_1)$, сходящаяся к нулю и такая, что для каждого $j = 1, 2, \dots$ функция $\varphi_z(\lambda'_j, \lambda_n)$ имеет в круге $B^n(a_2)$ по крайней мере два геометрически различных нуля μ_j и μ'_j . Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\mu_j\}$ и $\{\mu'_j\}$ сходятся соответственно к точкам μ_0 и μ'_0 . Тогда в силу непрерывности функции φ_z последовательности $\varphi_z(\lambda'_j, \mu_j)$ и $\varphi_z(\lambda'_j, \mu'_j)$ сходятся соответственно к $\varphi_z(0, \mu_0)$ и $\varphi_z(0, \mu'_0)$. Согласно выбору чисел μ_j и μ'_j верны равенства $\varphi_z(\lambda'_j, \mu_j) = 0$ и $\varphi_z(\lambda'_j, \mu'_j) = 0$. Но тогда верны также и равенства $\varphi_z(0, \mu_0) = 0$ и $\varphi_z(0, \mu'_0) = 0$. Как отмечалось выше, $\varphi_z(0, \lambda_n)$ не имеет нулей на множестве $\overline{B^n(a_2)} \setminus \{0\}$. Следовательно, $\mu_0 = \mu'_0 = 0$. Однако это противоречит лемме 4.2, из которой в нашем случае будет следовать, что кратность нуля функции f в точке z должна одновременно быть не меньше $2k(z, f)$ и равняться $k(z, f) \neq 0$. Таким образом, наше предположение о том, что $m > 1$, неверно, т.е. $\varphi_z(\lambda'_j, \lambda_n)$ при каждом фиксированном $\lambda'_j \in B'(a_1)$ может иметь не более одного (без учета кратности) нуля из круга $B^n(a_2)$. Поскольку $z \in N(f)$, то $\varphi_z(0) = 0$. Это означает, что $m > 0$. Как уже отмечалось, множество точек $\lambda'_j \in B'(a_1)$, для которых $\varphi_z(\lambda'_j, \lambda_n)$ имеет ровно m геометрически различных нулей в $B^n(a_2)$, плотно в $B'(a_1)$. Следовательно, для плотного

подмножества точек $\lambda'_j \in B'(a_1)$ функция $\varphi_z(\lambda'_j, \lambda_n)$ имеет по крайней мере один нуль в круге $B^n(a_2)$. Тогда по непрерывности уже для каждого $\lambda'_j \in B'(a_1)$ функция $\varphi_z(\lambda'_j, \lambda_n)$ имеет хотя бы один нуль в замкнутом круге $\overline{B^n(a_2)}$. Согласно п. 1) она не равна нулю на границе $\partial B^n(a_2)$ для всех $\lambda'_j \in B'(a_1)$. Поэтому указанный нуль лежит в открытом круге $B^n(a_2)$. Таким образом, мы показали, что $\varphi_z(\lambda'_j, \lambda_n)$ для каждого фиксированного $\lambda'_j \in B'(a_1)$ имеет ровно один нуль (без учета кратности) в круге $B^n(a_2)$.

Увеличивая при необходимости число a_2 (а вместе с ним и a_1), добьемся того, чтобы на множестве точек $y = z + U_z(a_1, a_2)$ выполнялось равенство из леммы 4.2 и неравенство из леммы 4.1 (это законно, поскольку при выборе a_2 присутствовала только его нижняя оценка). Тогда согласно уже сказанному и лемме 4.2 функция $\varphi_z(\lambda'_j, \lambda_n)$ для каждого фиксированного $\lambda'_j \in B'(a_1)$ имеет ровно один нуль кратности не меньше $k(z, f)$ в круге $B^n(a_2)$. Из неравенства же в лемме 4.1 следует, что эта кратность не превышает $k(z, f)$. Следовательно, она равна $k(z, f)$. Это завершает доказательство второго утверждения, а вместе с ним и всей леммы.

Аналогично лемме 4.4 доказывается

ЛЕММА 4.5. Пусть даны число $\alpha > 0$ и функция $f \in H_\rho$, удовлетворяющая условиям ii), iii) б). Тогда существуют постоянные $A_1 > A_2 > \alpha$ и $B, C > 0$ такие, что при всех $z \in N(f)$ выполнено следующее:

- 1) $\varphi_z(\lambda) \geq C \exp[-B|z|^\rho] \quad \forall \lambda \in \tilde{B}'(A_1) \times \partial \tilde{B}^n(A_2)$;
- 2) функция $\varphi_z(\lambda', \lambda_n)$ при каждом фиксированном $\lambda' \in \tilde{B}'(A_1)$ имеет в круге $\tilde{B}^n(A_2)$ ровно один нуль кратности $k(z, f)$.

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{B}'(A_1) &= B(0, A_1^{-1} \exp[-A_1|z|^\rho]) \subset \mathbb{C}^{n-1}, \\ \tilde{B}^n(A_2) &= B(0, A_2^{-1} \exp[-A_2|z|^\rho]) \subset \mathbb{C}. \end{aligned}$$

§ 5. Локальное продолжение

В этом параграфе мы осуществляем первый этап аналитического продолжения – локальное продолжение.

ЛЕММА 5.1. Пусть $P = \{p_m(x)\}$ – последовательность непрерывных функций из PSH_ρ , $m \geq 1$, и функция $f \in H_\rho$ удовлетворяет условиям i), ii) и iii) а). Существует $a > 0$ такое, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся положительные δ и t такие, что выполнено следующее: для любой функции $\psi \in \Phi_{m,f}$ с нормой $\|\psi\|_m \leq 1$ и любого $z \in X(\delta, t) \cap N(f)$ существует $\psi_z \in H(B(z, \exp[-a\varepsilon|z|^\rho]))$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $D^\alpha \psi_z(x) = \psi(x, \alpha)$, $x \in B(z, \exp[-a\varepsilon|z|^\rho]) \cap N(f)$, $0 \leq |\alpha| < k(x, f)$;
- 2) $|\psi_z(x)| \leq \exp[p_m(z) + \varepsilon|z|^\rho]$, $x \in B(z, \exp[-a\varepsilon|z|^\rho])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $\psi \in \Phi_{m,f}$. Как уже отмечалось выше, вслед за определением функций, аналитических на $N_0(f)$, существует целая функция $g(x)$ такая, что

$$D^\alpha g(x) = \psi(x, \alpha), \quad x \in N(f), \quad 0 \leq |\alpha| < k(x, f). \quad (5.1)$$

Пусть a_1, a_2, δ, t определены в лемме 4.4. Фиксируем $z \in X(\delta, t) \cap N(f)$. Положим

$$g_z(\lambda) = g(z + \lambda_1 \eta^1 + \dots + \lambda_n \eta^n(z))$$

и рассмотрим функцию

$$\tilde{\psi}_z(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B^n(a_2)} \frac{g_z(\lambda', x_n) [\varphi_z(\lambda', x_n) - \varphi_z(\lambda', \lambda_n)]}{(x_n - \lambda_n) \varphi_z(\lambda', x_n)} dx_n.$$

В силу неравенства из леммы 4.4 φ_z не обращается в нуль на множестве $B'(a_1) \times \partial B^n(a_2)$. Поэтому $\tilde{\psi}_z$ аналитична в области $B'(a_1) \times B^n(a_2)$. Фиксируем $\lambda' \in B'(a_1)$, и пусть $\mu_n \in B^n(a_2)$ такое, что $\varphi_z(\lambda', \mu_n) = 0$. Найдем производные функции $\tilde{\psi}_z(\lambda', \lambda_n)$ по λ_n в точке $\lambda_n = \mu_n$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial \lambda_n^k} \tilde{\psi}_z(\lambda', \mu_n) &= \frac{\partial^k}{\partial \lambda_n^k} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B^n(a_2)} \frac{g_z(\lambda', x_n)}{x_n - \lambda_n} dx_n \right]_{\lambda_n = \mu_n} \\ &\quad - \frac{\partial^k}{\partial \lambda_n^k} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B^n(a_2)} \frac{g_z(\lambda', x_n) \varphi_z(\lambda', \lambda_n)}{(x_n - \lambda_n) \varphi_z(\lambda', x_n)} dx_n \right]_{\lambda_n = \mu_n}, \quad 0 \leq k < k(z, f). \end{aligned}$$

Первый член в правой части этого равенства согласно формуле Коши совпадает с $\frac{\partial^k g_z(\lambda', \mu_n)}{\partial \lambda_n^k}$. Согласно п. 2) леммы 4.4 производные функции $\varphi_z(\lambda', \lambda_n)$ по λ_n порядка $k = 0, 1, \dots, k(z, f) - 1$, вычисленные в точке $\lambda_n = \mu_n$, равны нулю. Поэтому, дифференцируя под знаком интеграла во втором члене, находим, что он также равен нулю. Таким образом,

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda_n^k} \tilde{\psi}_z(\lambda', \mu_n) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda_n^k} g_z(\lambda', \mu_n), \quad 0 \leq k < k(z, f).$$

Это означает, что разность $\tilde{\psi}_z(\lambda', \lambda_n) - g_z(\lambda', \lambda_n)$ имеет в точке $\lambda_n = \mu_n$ нуль кратности, не меньшей чем $k(z, f)$. Функция же $\varphi_z(\lambda', \lambda_n)$ по лемме 4.4 обращается в нуль в точке $\lambda_n = \mu_n$ лишь с кратностью $k(z, f)$. Следовательно, частное $(\tilde{\psi}_z(\lambda', \lambda_n) - g_z(\lambda', \lambda_n)) / \varphi_z(\lambda', \lambda_n)$ является аналитической функцией по переменной λ_n в круге $B^n(a_2)$ для каждого фиксированного $\lambda' \in B'(a_1)$. Кроме того, из неравенства в п. 1) леммы 4.4 следует, что это частное является аналитической функцией по совокупности переменных в окрестности множества $B'(a_1) \times \partial B^n(a_2)$. Последние два факта согласно [3; приложение, §1, п. 1.1, лемма 2] влекут за собой аналитичность функции $(\tilde{\psi}_z - g_z) / \varphi_z$ по совокупности переменных в области $B'(a_1) \times B^n(a_2)$, т.е.

$$\frac{\tilde{\psi}_z - g_z}{\varphi_z} \in H(B'(a_1) \times B^n(a_2)). \quad (5.2)$$

Для каждого $\lambda' \in B'(a_1)$ рассмотрим функцию

$$q_z(\lambda', \lambda_n) = \sum_{k=0}^{k(z, f)-1} \frac{\beta_z^k(\lambda')}{k!} [\lambda_n - \lambda_n(\lambda')]^k, \quad \lambda_n \in B^n(a_2),$$

где $\beta_z^k(\lambda') = \frac{\partial^k g_z(\lambda', \lambda_n(\lambda'))}{\partial \lambda_n^k}$, $0 \leq k < k(z, f)$, и $\lambda_n(\lambda')$ – единственный (согласно п. 2) леммы 4.4) нуль кратности $k(z, f)$ функции $\varphi_z(\lambda', \lambda_n)$ в круге $B^n(a_2)$ при фиксированных $\lambda' \in B'(a_1)$. Для каждого $\lambda' \in B'(a_1)$ функция $q_z(\lambda', \lambda_n)$ является многочленом по переменной λ_n , а потому аналитична по ней.

Найдем верхнюю оценку для модуля q_z . Пусть $\lambda = (\lambda', \lambda_n) \in B'(a_1) \times \overline{B^n(a_2)}$. Поскольку $\lambda_n(\lambda')$ принадлежит $B^n(a_2)$, то $|\lambda_n - \lambda_n(\lambda')| \leq 2 \exp[-a_2 \varepsilon |z|^\rho]$, и поэтому с учетом условия ii) имеем:

$$|q_z(\lambda)| \leq \sum_{k=0}^{k(z,f)-1} \frac{|\beta_z^k(\lambda')|}{k!} 2^k \exp[-a_2 k \varepsilon |z|^\rho] \leq 2^{k_0} \sum_{k=0}^{k(z,f)-1} \frac{|\beta_z^k(\lambda')|}{k!}.$$

Вспоминая определения β_z^k , g_z и производя непосредственный подсчет, убеждаемся в истинности следующих соотношений:

$$\beta_z^k(\lambda') = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha g(z(\lambda'))}{\alpha!} \eta_1^{\alpha_1}(z) \cdots \eta_n^{\alpha_n}(z), \quad 0 \leq k < k(z, f),$$

где $(\eta_1(z), \dots, \eta_n(z)) = \eta(z)$ и $z(\lambda') = z + \lambda_1 \eta^1(z) + \cdots + \lambda_n \eta(z)$. Так как вектор $\eta(z)$ имеет единичную норму, то $|\eta_j(z)| \leq 1$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно, из предыдущего получаем:

$$|q_z(\lambda)| \leq 2^{k_0} \sum_{|\alpha|=0}^{k(z,f)-1} \frac{|D^\alpha g(z(\lambda'))|}{\alpha!}, \quad \lambda \in B'(a_1) \times \overline{B^n(a_2)}.$$

Согласно выбору $\lambda_n(\lambda')$ точка $z(\lambda')$ лежит на $N(f)$. Поэтому из последнего неравенства с учетом (5.1), условия на норму $\psi \in \Phi_{m,f}$ и определения нормы в пространстве $\Phi_{m,f}$ следует, что

$$|q_z(\lambda)| \leq 2^{k_0} \exp p_m(z(\lambda')), \quad \lambda \in B'(a_1) \times \overline{B^n(a_2)}. \quad (5.3)$$

Для любого $\lambda' \in B'(a_1)$ точка $z(\lambda')$ лежит также в шаре $B(z, n)$. Действительно, $\eta^j(z)$ имеют единичную норму и $|\lambda'|, |\lambda_n(\lambda')| < 1$, значит,

$$|z - z(\lambda')| \leq |\lambda_1 \eta^1(z)| + \cdots + |\lambda_n(\lambda') \eta(z)| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n(\lambda')| < n.$$

Поскольку $\text{diam } B(z, n)/|z| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, то согласно лемме 2.1 можно считать, что для всех z с условием $|z| > t$ верно неравенство $p_m(z(\lambda')) \leq p_m(z) + \varepsilon |z|^\rho$. Увеличивая при необходимости $t > 0$, считаем также, что при всех $|z| > t$ величина $\exp[\varepsilon |z|^\rho]$ превосходит 2^{k_0} . С учетом сказанного из (5.3) получаем оценку:

$$|q_z(\lambda)| \leq \exp[p_m(z) + 2\varepsilon |z|^\rho], \quad \lambda \in B'(a_1) \times \overline{B^n(a_2)}. \quad (5.4)$$

Из определения $q_z(\lambda)$ сразу вытекает, что для каждого $\lambda' \in B'(a_1)$ и всех $k = 0, \dots, k(z, f) - 1$ имеет место равенство:

$$\frac{\partial^k q_z(\lambda', \lambda_n(\lambda'))}{\partial \lambda_n^k} = \frac{\partial^k g_z(\lambda', \lambda_n(\lambda'))}{\partial \lambda_n^k}.$$

Следовательно, разность $q_z(\lambda', \lambda_n) - g_z(\lambda', \lambda_n)$, рассматриваемая как функция переменной λ_n , имеет в точке $\lambda_n(\lambda')$ нуль кратности, не меньшей чем $k(z, f)$. По определению точка $\lambda_n(\lambda')$ является единственным нулем функции $\varphi_z(\lambda', \lambda_n)$ в круге $B^n(a_2)$ кратности $k(z, f)$. Кроме того, как уже отмечалось, $\varphi_z(\lambda', \lambda_n)$ не имеет нулей на $\partial B^n(a_2)$. Из этого следует, что для каждого фиксированного $\lambda' \in B'(a_1)$ частное $(q_z(\lambda', \lambda_n) - g_z(\lambda', \lambda_n))/\varphi_z(\lambda', \lambda_n)$ является функцией, аналитической в замкнутом круге $B^n(a_2)$. Поскольку, очевидно, в этом же круге аналитична (по x_n) также и функция $(\varphi_z(\lambda', x_n) - \varphi_z(\lambda', \lambda_n))/(x_n - \lambda_n)$, то согласно интегральной теореме Коши будет верно равенство:

$$\int_{\partial B^n(a_2)} \frac{(g_z(\lambda', x_n) - q_z(\lambda', x_n))[\varphi_z(\lambda', x_n) - \varphi_z(\lambda', \lambda_n)]}{(x_n - \lambda_n)\varphi_z(\lambda', x_n)} dx_n = 0.$$

Вспоминая определение функции $\tilde{\psi}_z$, находим отсюда, что для всех $\lambda' \in B'(a_1)$ имеет место формула:

$$\tilde{\psi}_z(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B^n(a_2)} \frac{q_z(\lambda', x_n)[\varphi_z(\lambda', x_n) - \varphi_z(\lambda', \lambda_n)]}{(x_n - \lambda_n)\varphi_z(\lambda', x_n)} dx_n.$$

Оценим модуль $\tilde{\psi}_z$. Пусть $x_n \in \partial B^n(a_2)$ и $\lambda_n \in 2^{-1}B^n(a_2)$. Тогда

$$|x_n - \lambda_n| \geq 2^{-1} \exp[-a_2 \varepsilon |z|^\rho]. \quad (5.5)$$

Для всех $\lambda \in B'(a_1) \times B^n(a_2)$ точка $z + \lambda_1 \eta^1(z) + \dots + \lambda_n \eta(z)$ лежит в шаре $B(z, n)$. Последний же (каково бы ни было $\delta > 0$) целиком содержится в шаре $B(z, \delta|z|)$ при больших значениях $|z|$. Поэтому, используя те же доводы, что и при получении (4.2), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} |\varphi_z(\lambda', x_n) - \varphi_z(\lambda', \lambda_n)| &\leq 2 \exp[L_f^*(z) + \varepsilon |z|^\rho], \\ \lambda &\in B'(a_1) \times B^n(a_2), \quad x_n \in \partial B^n(a_2), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $|z| > t$ и $t > 0$ достаточно велико.

Таким образом, в силу п. 1) леммы 4.4 и (5.4)–(5.6) получаем:

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_z(\lambda)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B^n(a_2)} \frac{|q_z(\lambda', x_n)| |\varphi_z(\lambda', x_n) - \varphi_z(\lambda', \lambda_n)|}{|x_n - \lambda_n| |\varphi_z(\lambda', x_n)|} |dx_n| \\ &\leq \frac{8\pi \exp[p_m(z) + 2\varepsilon |z|^\rho] \exp[L_f^*(z) + \varepsilon |z|^\rho] \exp[-\varepsilon a_2 |z|^\rho]}{2\pi \exp[-\varepsilon a_2 |z|^\rho] \exp[L_f^*(z) - b\varepsilon |z|^\rho]} \\ &= 4 \exp[p_m(z) + (3+b)\varepsilon |z|^\rho], \quad \lambda \in B'(a_1) \times B^n(a_2). \end{aligned}$$

Положим

$$\psi_z(z + \lambda_1 \eta^1(z) + \dots + \lambda_n \eta(z)) = \tilde{\psi}_z(\lambda).$$

Для больших значений $|z|$ верно неравенство $4 \leq \exp[\varepsilon |z|^\rho]$. Поэтому из предыдущего получаем:

$$|\psi_z(z + y)| \leq \exp[p_m(z) + (4+b)\varepsilon |z|^\rho], \quad y \in U_z(a_1, a_2).$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то вместо него мы можем взять число $\varepsilon/(4+b)$. Полагая теперь $a = a_2/(4+b)$, мы тем самым завершаем доказательство п. 2) леммы. Пункт 1) сразу следует из (5.1) и (5.2). Таким образом, лемма полностью доказана.

Заменяя условие iii) а) на условие iii) б) и используя лемму 4.5 вместо леммы 4.4, нетрудно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 5.2. Пусть $P = \{p_m(x)\}_{m=1}^\infty$ – последовательность непрерывных функций из PSH_ρ и функция $f \in H_\rho$ удовлетворяет условиям ii) и iii) б). Существуют числа $A, B > 0$ такие, что для любой функции $\psi \in \Phi_{m,f}$ с нормой $\|\psi\|_m \leq 1$ и любого $z \in N(f)$ найдется функция $\psi_z \in H(B(z, A^{-1} \exp[-A|z|^\rho]))$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $D^\alpha \psi_z(x) = \psi(x, \alpha)$, $x \in B(z, A^{-1} \exp[-A|z|^\rho]) \cap N(f)$, $0 \leq |\alpha| < k(x, f)$;
- 2) $|\psi_z(x)| \leq B \exp[B|z|^\rho]$, $x \in B(z, A^{-1} \exp[-A|z|^\rho])$.

§6. Решение интерполяционной задачи

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного результата работы, дадим еще одно определение.

Пусть $P = \{p_m(x)\}$ – последовательность из PSH_ρ и $f \in H_\rho$. Будем говорить, что f совместима с P , если найдется последовательность непрерывных функций $\{\tilde{p}_k(x)\}$ из PSH_ρ , удовлетворяющая условиям:

- 1) для каждого $k = 1, 2, \dots$ существует номер m такой, что

$$L_f^*(x) + \tilde{p}_k(x) \leq p_m(x), \quad x \in \mathbb{C}^n;$$

- 2) для каждого $m = 1, 2, \dots$ существует номер k такой, что

$$L_f^*(x) + \tilde{p}_k(x) > p_m(x), \quad x \in W(f),$$

где множество $W(f)$ определено в условии i).

ЗАМЕЧАНИЕ. Заменяя, если необходимо, функцию $\tilde{p}_k$ на $\max_{1 \leq j \leq k} \tilde{p}_j$, можно считать, что для всех $x \in \mathbb{C}^n$ выполнены неравенства

$$\tilde{p}_1(x) \leq \dots \leq \tilde{p}_k(x) \leq \dots$$

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $P = \{p_m(x)\}$ – последовательность непрерывных функций из PSH_ρ , для которой выполнено (1.1); $f \in H_\rho$ совместима с P и удовлетворяет условиям i)–iii). Тогда отображение

$$T: \Phi(P)/J(P, f) \rightarrow \Phi_f(P)$$

является изоморфизмом линейных топологических пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.3 отображение T является инъективным и непрерывным. Остается доказать, что оно сюръективно и обратное к нему непрерывно. Последнее равносильно тому, что для каждого $m = 1, 2, \dots$ найдется номер $r = 1, 2, \dots$ и постоянная $C > 0$ такие, что для любой $\psi \in \Phi_{m,f}$ класс эквивалентности $T^{-1}(\psi)$ содержит функцию $\tilde{\psi}$, которая принадлежит пространству Φ_r , и верно неравенство

$$\|\tilde{\psi}\|_r \leq C \|\psi\|_m.$$

Итак, пусть $\psi \in \Phi_f(P)$. Поскольку $\Phi_f(P)$ как множество совпадает с объединением $\bigcup_m \Phi_{m,f}$, то для некоторого $m = 1, 2, \dots$ функция ψ лежит в $\Phi_{m,f}$. Выберем

произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $a_1 > a_2 > a$ и δ, t – положительные числа такие, что для всех $z \in \overline{X(\delta, t)} \cap N(f)$ выполнены утверждения из лемм 4.4 и 5.1. Отметим, что эти утверждения останутся верными, если число δ в них заменить любым меньшим положительным числом, а число t – любым большим числом. Далее мы воспользуемся этим наблюдением, выбирая δ настолько малым, а t настолько большим, насколько это будет нам необходимо. Положим

$$y(z) = z + \exp[-a_2\varepsilon|z|^\rho]\eta(z).$$

Поскольку $a_2 > a$, то (увеличивая при необходимости $t > 0$) можно считать, что имеет место вложение:

$$\begin{aligned} B(y(z), 16 \exp[-a_2\varepsilon|z|^\rho]) &\subset B(z, \exp[-a\varepsilon|z|^\rho]), \\ z &\in \overline{X(\delta, t)} \cap N(f). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Из покрытия $\overline{X(\delta, t)} \cap N(f)$ шарами $B(y(z), 2 \exp[-a_2\varepsilon|z|^\rho])$, $z \in \overline{X(\delta, t)} \cap N(f)$ (совокупность этих шаров действительно является покрытием, поскольку $z \in B(y(z), 2 \exp[-a_2\varepsilon|z|^\rho])$), выделим подпокрытие $B(y(z_k), 2 \exp[-a_2\varepsilon|z_k|^\rho])$, $k = 1, 2, \dots$, так, чтобы для некоторого натурального N каждая точка из $\mathbb{C}^n$ попадала не более чем в N шаров из семейства $B(y(z_k), 4 \exp[-a_2\varepsilon|z_k|^\rho])$, $k \geq 1$. Это можно осуществить, например, следующим образом. Фиксируем $p \geq 1$ и рассмотрим множество

$$(\overline{X(\delta, t)} \cap B(0, p^{1/\rho}) \cap N(f)) \setminus B(0, (p-1)^{1/\rho}) = Z_p,$$

если оно непусто (здесь под $B(0, 0)$ понимается пустое множество). Выберем в качестве $z_{p,1}$ какую-нибудь точку из Z_p . Предположим, что мы уже выбрали точки $z_{p,1}, \dots, z_{p,j}$. Тогда в качестве $z_{p,j+1}$ возьмем какую-нибудь точку из

$$Z_p \setminus \left[\bigcup_{i=1}^j B(y(z_{p,i}), 2 \exp[-a_2\varepsilon|z_{p,i}|^\rho]) \right]. \quad (6.2)$$

Продолжая такой процесс выбора, пока это возможно (т.е. пока (6.2) непусто), мы в результате получим конечный набор точек $z_{p,1}, \dots, z_{p,s(p)}$. Конечность обусловлена тем, что множество Z_p ограничено, а расстояние между любыми двумя точками $z_{p,i}$ и $z_{p,j}$ (согласно их выбору) не меньше чем $\exp[-a_2\varepsilon p]$. Множество Z_p покрывается объединением шаров $B(y(z_{p,i}), 2 \exp[-a_2\varepsilon|z_{p,i}|^\rho])$, $i = 1, \dots, s(p)$, поскольку процесс выбора $z_{p,j}$ продолжался до тех пор, пока (6.2) не стало пустым. Перенумеровывая теперь произвольным образом точки $z_{p,i}$, $i = 1, \dots, s(p)$, $p \geq 1$, мы получаем искомую последовательность $\{z_k\}$. Действительно, множество $\overline{X(\delta, t)} \cap N(f)$, совпадающее с объединением $\bigcup_{p=1,2,\dots} Z_p$, покрывается шарами $B(y(z_k), 2 \exp[-a_2\varepsilon|z_k|^\rho])$, $k \geq 1$. Остается показать, что для некоторого натурального N каждая точка из $\mathbb{C}^n$ попадает не более чем в N шаров из набора $B(y(z_k), 4 \exp[-a_2\varepsilon|z_k|^\rho])$, $k \geq 1$. Вначале покажем, что существует натуральное N_1 такое, что для любого $p \geq 1$ каждая точка из $\mathbb{C}^n$ попадает не более чем в N_1 шаров из группы

$$\Delta_p = \{B(y(z_{p,j}), 4 \exp[-a_2\varepsilon|z_{p,j}|^\rho]), j = 1, \dots, s(p)\}.$$

Пусть $x \in \mathbb{C}^n$ попадает хотя бы в один шар из группы Δ_p , и пусть q – число всех шаров из Δ_p , содержащих x . Без ограничения общности можно считать, что это шары с центрами $y(z_{p,j})$, $j = 1, \dots, q$. Тогда с учетом определения точек $y(z_{p,j})$ и того, что $|z_{p,j}| \geq (p-1)^{1/\rho}$, получаем:

$$\begin{aligned} |x - z_{p,j}| &\leq |x - y(z_{p,j})| + |y(z_{p,j}) - z_{p,j}| \leq 5 \exp[-a_2 \varepsilon |z_{p,j}|^\rho] \\ &\leq 5 \exp[-a_2 \varepsilon (p-1)], \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Следовательно, $z_{p,j}$, $j = 1, \dots, q$, лежат в $B(x, 5 \exp[-a_2 \varepsilon (p-1)])$, а значит, шары $B(z_{p,j}, \exp[-a_2 \varepsilon p])$, $j = 1, 2, \dots, q$, принадлежат шару $B(x, 6 \exp[-a_2 \varepsilon (p-1)])$. Как уже отмечалось, расстояние между $z_{p,j}$ и $z_{p,i}$ не меньше чем $\exp[-a_2 \varepsilon p]$, поэтому $B(z_{p,j}, 2^{-1} \exp[-a_2 \varepsilon p])$, $j = 1, \dots, q$, попарно не пересекаются.

Из сказанного следует, что сумма мер последних не превосходит меры шара $B(x, 6 \exp[-a_2 \varepsilon (p-1)])$, т.е.

$$q 2^{-2n} \exp[-2na_2 \varepsilon p] \leq 6^{2n} \exp[-2na_2 \varepsilon (p-1)].$$

Отсюда получаем: $q \leq 12^{2n} \exp[2na_2 \varepsilon]$. Следовательно, в качестве N_1 можно взять любое натуральное число, превосходящее $12^{2n} \exp[2na_2 \varepsilon]$.

Теперь мы покажем, что каждая точка $x \in \mathbb{C}^n$ может попасть лишь в шары из определенного конечного числа (не зависящего от x) групп Δ_p . Выберем номер p_0 такой, что для всех $p > p_0$ выполнены неравенства:

$$5 \exp[-a_2 \varepsilon (p-1)] < (p-1)^{1/\rho} - (p-2)^{1/\rho}, \quad (6.3)$$

$$5 \exp[-a_2 \varepsilon (p-1)] < (p+1)^{1/\rho} - p^{1/\rho}. \quad (6.4)$$

Существование такого номера легко вытекает из соотношений:

$$0 \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\exp[-a_2 \varepsilon (p + \alpha)]}{(p+1)^{1/\rho} - p^{1/\rho}} \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\exp[-a_2 \varepsilon (p + \alpha)]}{(1 + 1/p)^{1/\rho} - 1} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Последнее равенство здесь получается применением правила Лопиталья. Пусть $q = 1, 2, \dots$ и $x \in B(0, q^{1/\rho}) \setminus B(0, (q-1)^{1/\rho})$. Для каждого $p > \max\{q+1, p_0\}$ из включения $z_{p,j} \in B(0, p^{1/\rho}) \setminus B(0, (p-1)^{1/\rho})$ и вложений

$$\begin{aligned} B(y(z_{p,j}), 4 \exp[-a_2 \varepsilon |z_{p,j}|^\rho]) &\subset B(z_{p,j}, 5 \exp[-a_2 \varepsilon |z_{p,j}|^\rho]) \\ &\subset B(z_{p,j}, 5 \exp[-a_2 \varepsilon (p-1)]) \end{aligned}$$

с учетом неравенства (6.3) следует, что x не попадает в шары из группы Δ_p . Пусть теперь $p_0 < p \leq q-2$ (если, конечно, такие p имеются). Тогда из тех же включения и вложений с учетом (6.4) следует, что x не попадает в шары из группы Δ_p и при таких p . Таким образом, x может попасть лишь в шары из групп Δ_p с номерами $p = 1, \dots, p_0$ либо с номерами $p = q-1, q, q+1$, т.е. каждая точка $x \in \mathbb{C}^n$ может попасть лишь в шары из $p_0 + 3$ групп Δ_p .

С учетом всего сказанного в качестве указанного выше натурального N мы можем взять число $N_1(p_0 + 3)$.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} y_k^1 &= y(z_k), & B_k^1(r) &= B(y_k^1, r \exp[-a_2 \varepsilon |z_k|^\rho]), \\ \psi_k^1(x) &= \|\psi\|_m \psi_{z_k}(x), & k &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где ψ_z — функция, построенная в лемме 5.1 для элемента $\psi/\|\psi\|_m$ пространства $\Phi_{m,f}$. По этой лемме с учетом (6.1) имеем:

$$\begin{aligned} \psi_k^1 &\in H(B_k^1(16)), \\ |\psi_k^1(x)| &\leq \|\psi\|_m \exp[p_m(z_k) + \varepsilon |z_k|^\rho], \quad x \in B_k^1(16). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Не ограничивая общности, из последнего неравенства и леммы 2.1 получаем:

$$|\psi_k^1(x)| \leq \|\psi\|_m \exp[p_m(x) + 2\varepsilon |x|^\rho], \quad x \in B_k^1(16). \quad (6.6)$$

Кроме того, в силу п. 1) леммы 4.4

$$|f(y_k^1)| \geq \exp[L_f^*(z_k) - b\varepsilon |z_k|^\rho], \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Пусть теперь $A_1 > A_2 > A$ и $B, C > 0$ — числа, для которых верны утверждения из лемм 4.5 и 5.2. Положим

$$\tilde{y}(z) = z + A_2^{-1} \exp[-A_2 |z|^\rho] \eta(z).$$

Увеличивая при необходимости A_2 (что возможно согласно лемме 4.5), можно считать, что для всех $z \in N(f)$

$$B(\tilde{y}(z), 16A_2^{-1} \exp[-A_2 |z|^\rho]) \subset B(z, A^{-1} \exp[-A |z|^\rho]).$$

Как и выше, с использованием лемм 4.5 и 5.2 построим последовательности точек $\{\tilde{z}_k\} \subset N(f) \setminus X(\delta, t)$, шаров

$$B_k^2(r) = B(y_k^2, r A_2^{-1} \exp[-A_2 |\tilde{z}_k|^\rho]),$$

где $y_k^2 = \tilde{y}(\tilde{z}_k)$, и функций $\psi_k^2 \in H(B_k^2(16))$, $k = 1, 2, \dots$, таких, что:

1. семейство шаров $B_k^2(2)$, $k = 1, 2, \dots$, покрывает множество $N(f) \setminus X(\delta, t)$ так, что каждая точка x из $\mathbb{C}^n$ попадает не более чем в $\tilde{N}$ шаров из семейства $B_k^2(4)$, $k = 1, 2, \dots$ (число $\tilde{N}$ не зависит от x);
2. $D^\alpha \psi_k^2(x) = \psi(x, \alpha) \quad \forall x \in N(f) \cap B_k^2(16)$, $0 \leq |\alpha| < k(x, f)$;
3. $|\psi_k^2(x)| \leq B \|\psi\|_m \exp[B |\tilde{z}_k|^\rho] \leq \tilde{B} \|\psi\|_m \exp[\tilde{B} |x|^\rho] \quad \forall x \in B_k^2(16)$;
4. $|f(y_k^2)| \geq C \exp[-B |\tilde{z}_k|^\rho]$, $k = 1, 2, \dots$.

Таким образом, мы построили специальное покрытие нулевого множества $N(f)$. В каждом элементе этого покрытия задана аналитическая функция, которая является локальным решением нашей интерполяционной задачи. Теперь мы хотим из этих локальных решений “склеить” глобальное.

Для каждого непустого пересечения $B_k^i(4) \cap B_l^j(4)$, $i, j = 1, 2$, $k, l = 1, 2, \dots$, рассмотрим функцию

$$\psi_{k,l}^{i,j}(x) = \frac{\psi_k^i(x) - \psi_l^j(x)}{f(x)}, \quad x \in B_k^i(16) \cap B_l^j(16).$$

Она является аналитической. Чтобы показать это, достаточно (см. введение) установить неравенство $k(x, \psi_k^i - \psi_l^j) \geq k(x, f)$ для каждого $x \in B_k^i(16) \cap B_l^j(16) \cap N(f)$. А оно будет выполнено в силу п. 1) леммы 5.1 и свойства 2 функций ψ_l^2 . Пусть радиус шара $B_k^i(4)$ не меньше радиуса шара $B_l^j(4)$. Тогда верно вложение

$$B_l^j(8) \subset B_k^i(16) \cap B_l^j(16). \quad (6.8)$$

Разберем вначале случай, когда $i, j = 1$. Как и в (4.2), можно считать, что

$$\ln |f(y)| \leq L_f^*(z_l) + 3\varepsilon |z_l|^\rho, \quad y \in B_l^1(48).$$

Пусть $x \in B_l^1(4)$. Рассмотрим функцию

$$u(\lambda) = \frac{f(y_l^1 + \lambda(x - y_l^1))}{f(y_l^1)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

В силу последнего неравенства и (6.7) получаем:

$$\ln |u(\lambda)| \leq (b + 3)\varepsilon |z_l|^\rho \quad \forall \lambda \in B(0, 12).$$

Отсюда по теореме об оценке снизу модуля аналитической функции в круге (см. [22; гл. 1, § 4, п. 3, теорема 4.2]) следует неравенство:

$$\ln |u(\lambda)| > -\mu(b + 3)\varepsilon |z_l|^\rho, \quad \mu = 3 + \ln 48, \quad (6.9)$$

которое выполнено в круге $|\lambda| < 2$, но вне исключительных кружков с общей суммой радиусов равной $1/4$. Из сказанного следует, что мы можем выбрать число τ из интервала $(1, 2)$ такое, что на окружности $|\lambda| = \tau$ выполняется (6.9). Таким образом, с учетом (6.7) имеем оценку:

$$|f(y_l^1 + \lambda(x - y_l^1))| \geq \exp[L_f^*(z_l) - (b + \mu(b + 3))\varepsilon |z_l|^\rho], \quad |\lambda| = \tau.$$

Отсюда с учетом (6.5) и (6.8) получаем:

$$\begin{aligned} |\psi_{k,l}^{i,j}(y_l^1 + \lambda(x - y_l^1))| &\leq (\exp[p_m(z_k) + \varepsilon |z_k|^\rho] + \exp[p_m(z_l) + \varepsilon |z_l|^\rho]) \\ &\times \|\psi\|_m \exp[-L_f^*(z_l) + (b + \mu(b + 3))\varepsilon |z_l|^\rho], \quad |\lambda| = \tau. \end{aligned}$$

По принципу максимума это неравенство будет верно и для $\lambda = 1$, т.е.

$$\begin{aligned} |\psi_{k,l}^{i,j}(x)| &\leq \|\psi\|_m (\exp[p_m(z_k) + \varepsilon |z_k|^\rho] + \exp[p_m(z_l) + \varepsilon |z_l|^\rho]) \\ &\times \exp[-L_f^*(z_l) + (b + \mu(b + 3))\varepsilon |z_l|^\rho], \quad x \in B_k^i(4) \cap B_l^j(4). \end{aligned}$$

В силу леммы 2.1 (увеличивая при необходимости t и тем самым увеличивая радиус шара с центром в нуле, вне которого лежат $B_k^i(4)$) можно считать, что числа $p_m(z_k) + \varepsilon|z_k|^\rho$ и $p_m(z_l) + \varepsilon|z_l|^\rho$ не превосходят величины $p_m(x) + 2\varepsilon|x|^\rho$ для каждого $x \in B_k^i(4) \cap B_l^j(4)$. Точно так же можно считать, что верно неравенство:

$$(b + \mu(b + 3))\varepsilon|z_l|^\rho \leq (b + \mu(b + 3))\varepsilon|x|^\rho + \varepsilon|x|^\rho, \quad x \in B_k^i(4) \cap B_l^j(4).$$

Кроме того, как и в неравенстве (4.1), можно считать, что

$$L_f^*(z_l) \geq L_f^*(x) - \varepsilon|x|^\rho, \quad x \in B_k^i(4) \cap B_l^j(4).$$

Таким образом, из последних оценок получаем:

$$\begin{aligned} |\psi_{k,l}^{i,j}(x)| &\leq 2\|\psi\|_m \exp[p_m(x) + \gamma\varepsilon|x|^\rho - L_f^*(x)], \\ \gamma &= b + \mu(b + 3) + 4, \quad x \in B_k^i(4) \cap B_l^j(4). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Если $i = 2$ или $j = 2$, то при помощи аналогичных рассуждений имеем:

$$|\psi_{k,l}^{i,j}(x)| \leq \tilde{A}\|\psi\|_m \exp[\tilde{A}|x|^\rho], \quad x \in B_k^i(4) \cap B_l^j(4), \quad (6.11)$$

где $\tilde{A} > 0$ зависит только от m и f . Поскольку f фиксирована, то зависимость от нее мы больше указывать не будем. Введем еще множество

$$B_0^0 = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} [\overline{B_k^1(2)} \cup \overline{B_k^2(2)}].$$

Тогда шары $B_k^i(4)$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots$, и множество B_0^0 в совокупности покрывают все $\mathbb{C}^n$. Кроме того, положим $\psi_0^0 \equiv 0$ и

$$\begin{aligned} \psi_{k,0}^{i,0}(x) &= \frac{\psi_k^i(x) - \psi_0^0(x)}{f(x)}, \quad \psi_{0,k}^{0,i}(x) = -\psi_{k,0}^{i,0}(x), \\ x &\in B_0^0 \cap B_k^i(4), \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Функции $\psi_{k,0}^{i,0}$ являются аналитическими, поскольку B_0^0 не содержит точек нулевого множества $N(f)$. Как и для $\psi_{k,l}^{i,j}(x)$ доказывается, что $\psi_{k,0}^{1,0}$ удовлетворяют неравенству (6.10), а $\psi_{k,0}^{2,0}$ — неравенству (6.11).

Чтобы из ψ_k^i склеить целую функцию, дающую искомое аналитическое продолжение, нам необходимо ввести специальное разбиение единицы для покрытия $\mathbb{C}^n$ множествами B_0^0 , $B_k^i(4)$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть $k \geq 1$. Как обычно (см., например, [24; гл. 1, § 4, теорема 1.4.1 и формула (1.4.2)], найдем функции $q_k^i \in C^\infty$, $i = 1, 2$, обладающие следующими свойствами:

- 1) $0 \leq q_k^i(z) \leq 1 \quad \forall z, \quad i = 1, 2$;
- 2) $q_k^i(z) = 1, z \in \overline{B_k^i(3)}, i = 1, 2$;
- 3) $\text{supp } q_k^i \subset B_k^i(4), i = 1, 2$;
- 4) $\left| \frac{\partial q_k^1}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq c \exp[a_2 \varepsilon |z_k|^\rho], z \in \mathbb{C}^n,$
 $\left| \frac{\partial q_k^2}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq c A_2 \exp[A_2 |\tilde{z}_k|^\rho], z \in \mathbb{C}^n,$

где $j = 1, \dots, n$ и постоянная $c > 0$ зависит лишь от размерности n .

Вспомним, что $z_k \in B_k^1(2)$ ($\tilde{z}_k \in B_k^2(2)$). Поэтому $|z_k| \leq |z| + 6 \exp[-a_2 \varepsilon |z_k|^\rho] \leq |z| + 6$ ($|\tilde{z}_k| \leq |z| + 6A_2^{-1}$) для всех $z \in B_k^1(4)$ ($z \in B_k^2(4)$). Следовательно, для достаточно больших k имеем: $|z_k|, |\tilde{z}_k| \leq 2|z| \quad \forall z \in B_k^1(4), B_k^2(4)$ соответственно. Тогда с учетом свойства 3) функций q_k^i для таких k свойство 4) можно переписать следующим образом:

$$4a) \quad \left| \frac{\partial q_k^1}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq c \exp[2^\rho a_2 \varepsilon |z|^\rho], \quad z \in \mathbb{C}^n, \\ \left| \frac{\partial q_k^2}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq c A_2 \exp[2^\rho A_2 |z|^\rho], \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Увеличивая при необходимости c (в зависимости от a_2 и A_2 , а в конечном счете, от f , но не от ε , поскольку ε естественно считать ограниченным, например единицей), можно считать, что 4a) выполнено для всех k .

Теперь мы хотим построить ограниченную гладкую функцию с носителем, лежащим в B_0^0 , которая обладает необходимыми для нас оценками на рост производных. Введем множества

$$\widehat{B}_0^0 = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} [\overline{B_k^1(3)} \cup \overline{B_k^2(3)}], \quad \widehat{B}^2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^2(4) + B(0, 1)$$

и для каждого $p = 8, 9, \dots$ рассмотрим компакт

$$\overline{\widehat{B}_0^0 \cap B(0, p)} \setminus (B(0, p-1) \cup \widehat{B}^2) = Q_p.$$

По построению Q_p лежит в B_0^0 . Оценим расстояние от Q_p до границы множества B_0^0 . Пусть $z \in Q_p$ и точка $y \in \partial B_0^0$ реализует минимум расстояний от z до ∂B_0^0 . Тогда согласно определению множества B_0^0 точка y принадлежит одному из шаров $\overline{B_k^1(2)}$ или $\overline{B_k^2(2)}$, $k = 1, 2, \dots$. Если $y \in \overline{B_k^2(2)}$, то в силу определения множества $\widehat{B}^2$ расстояние между z и y будет не меньше единицы. Пусть $y \in \overline{B_k^1(2)}$. Из включения $z \in \widehat{B}_0^0$ вытекает, что $z \notin \overline{B_k^1(3)}$. Следовательно, имеет место оценка:

$$|z - y| \geq \exp[-a_2 \varepsilon |z_k|^\rho].$$

Предположим, что $|z - y| \leq 1$. Тогда с учетом вложения

$$B_k^1(2) \subset B(z_k, 3 \exp[-a_2 \varepsilon |z_k|^\rho])$$

получаем неравенства

$$|z - z_k| \leq |z - y| + |y - z_k| \leq 1 + 3 \exp[-a_2 \varepsilon |z_k|^\rho] \leq 4.$$

Отсюда, учитывая еще включение $z \in Q_p$, имеем: $|z_k| \leq |z| + 4 \leq p + 4$. Таким образом, расстояние от компакта Q_p до границы B_0^0 не меньше чем $\exp[-a_2 \varepsilon (p+4)^\rho]$.

Как и выше, мы можем найти неотрицательную ограниченную единицей бесконечно дифференцируемую функцию τ_p с носителем, лежащим в $Q_p + B(0, \exp[-a_2\varepsilon \times (p+4)^\rho]) \subset B_0^0$, равную единице на компакте Q_p и такую, что

$$\left| \frac{\partial \tau_p}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq c_1 \exp[a_2\varepsilon(p+4)^\rho], \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad j = 1, \dots, n,$$

где постоянная c_1 зависит лишь от размерности n .

Пусть z принадлежит носителю функции τ_p . Легко видеть, что этот носитель лежит в множестве $B(0, p+1) \setminus B(0, p-2)$. Поэтому $|z| \geq p-2$. Тогда в силу предыдущего неравенства получаем:

$$\left| \frac{\partial \tau_p}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq c_1 \exp[a_2\varepsilon(|z|+6)^\rho], \quad z \in \text{supp } \tau_p, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поскольку $p \geq 8$, то из неравенства $|z| \geq p-2$ следует, что $|z|+6 \leq 2|z|$ для всех z из $\text{supp } \tau_p$. Таким образом, для этих z верна оценка:

$$\left| \frac{\partial \tau_p}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq c_1 \exp[2^\rho a_2\varepsilon |z|^\rho], \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.12)$$

Это же неравенство, очевидно, выполнено и вне носителя τ_p .

Рассмотрим, наконец, компакты

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{B}_0^0 \cap B(0, p)} \setminus B(0, p-1) &= \widetilde{Q}_p, \quad p = 1, \dots, 7, \\ \overline{\widehat{B}_0^0 \cap \widehat{B}^2 \cap B(0, p)} \setminus B(0, p-1) &= \widetilde{Q}_p, \quad p = 8, 9, \dots \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$1 > \exp[-a_2\varepsilon(p+4)^\rho] \geq A_2^{-1} \exp[-A_2(p+4)^\rho], \quad p \geq 1. \quad (6.13)$$

Тогда точно так же, как и выше, показывается, что расстояние от компакта $\widetilde{Q}_p \subset B_0^0$ до границы B_0^0 не меньше чем $A_2^{-1} \exp[-A_2(p+4)^\rho]$. Кроме того, как и ранее, мы можем найти неотрицательную ограниченную единицей бесконечно дифференцируемую функцию $\widetilde{\tau}_p$ с носителем, лежащим в $\widetilde{Q}_p + B(0, A_2^{-1} \exp[-A_2(p+4)^\rho]) \subset B_0^0$, равную единице на компакте $\widetilde{Q}_p$ и такую, что

$$\left| \frac{\partial \widetilde{\tau}_p}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq c_1 A_2 \exp[A_2(|z|+6)^\rho], \quad z \in \text{supp } \widetilde{\tau}_p, \quad j = 1, \dots, n.$$

Это же неравенство, конечно, выполнено и вне носителя $\widetilde{\tau}_p$. Увеличивая при необходимости A_2 , легко получаем отсюда следующую оценку:

$$\left| \frac{\partial \widetilde{\tau}_p}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq c_1 A_2 \exp[2^\rho A_2 |z|^\rho], \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.14)$$

Введем функцию:

$$q_0^0(z) = \sum_p (\tau_p(z) + \widetilde{\tau}_p(z)), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

В силу сказанного выше относительно того, в каком множестве лежит носитель функции τ_p ($\tilde{\tau}_p$), последний может пересекаться не более чем с девятью носителями других функций $\tau_m, \tilde{\tau}_m, m = 1, 2, \dots$. Поэтому в каждой точке $z \in \mathbb{C}^n$ (и даже в некоторой ее окрестности) отличны от нуля лишь не более десяти членов нашего ряда. Отсюда следует, что

$$0 \leq q_0^0(z) \leq 10, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (6.15)$$

По построению функция $q_0^0(z)$ бесконечно дифференцируема, равна нулю вне множества B_0^0 и в окрестности его границы. Кроме того, так как совокупность множеств $Q_p, \tilde{Q}_p, p = 1, 2, \dots$, покрывает $\hat{B}_0^0$, а функции $\tau_p, \tilde{\tau}_p$ равны единице на $Q_p, \tilde{Q}_p$ соответственно, то верно также неравенство:

$$q_0^0(z) \geq 1, \quad z \in \hat{B}_0^0. \quad (6.16)$$

Оценим теперь производные функции $q_0^0(z)$. Сделаем это вначале вне носителей функций $\tilde{\tau}_p, p = 1, 2, \dots$. Последние лежат соответственно на множествах $\tilde{Q}_p + B(0, A_2^{-1} \exp[-A_2(p+4)^\rho]), p = 1, 2, \dots$, а каждое $\tilde{Q}_p$ принадлежит $\overline{\hat{B}^2} \cup \overline{B(0, 7)}$. Следовательно, с учетом (6.13) вне

$$B^2 = (\overline{\hat{B}^2} \cup \overline{B(0, 7)}) + B(0, 1)$$

все функции $\tilde{\tau}_p$ равны нулю. Тогда из (6.12) и определения q_0^0 получаем:

$$\left| \frac{\partial q_0^0}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq 10c_1 \exp[2^\rho a_2 \varepsilon |z|^\rho], \quad z \notin B^2, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.17)$$

Можно считать, что всюду в $\mathbb{C}^n$

$$\exp[2^\rho a_2 \varepsilon |z|^\rho] \leq A_2 \exp[2^\rho A_2 |z|^\rho].$$

Тогда из (6.14) получим также оценку:

$$\left| \frac{\partial q_0^0}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq 10c_1 A_2 \exp[2^\rho A_2 |z|^\rho], \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.18)$$

Мы все подготовили для того, чтобы определить требуемое разбиение единицы. Для всех используемых нами значений k и i введем функции

$$E_k^i(z) = q_k^i(z) \cdot \left[\sum q_m^j(z) \right]^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где суммирование также ведется по всем допустимым m и j . Ранее было отмечено, что каждая точка из $\mathbb{C}^n$ попадает не более чем в N шаров из совокупности $B_k^1(4), k \geq 1$, и в $\tilde{N}$ шаров из совокупности $B_k^2(4), k \geq 1$. Кроме того, она может попасть в B_0^0 . По построению носители функций q_k^1, q_k^2 и q_0^0 лежат соответственно в множествах $B_k^1(4), B_k^2(4)$ и B_0^0 . Следовательно, для каждой точки из $\mathbb{C}^n$ в последнем ряде отлично от нуля самое большее $N + \tilde{N} + 1$ слагаемых.

В силу определения $\widehat{B}_0^0$ множества $\widehat{B}_0^0, \overline{B_k^1(3)}, \overline{B_k^2(3)}, k \geq 1$, в совокупности покрывают все $\mathbb{C}^n$. Поэтому согласно (6.15) и свойству 2) функций q_k^1, q_k^2 в каждой точке из $\mathbb{C}^n$ хотя бы одна из функций q_k^i не меньше единицы. Следовательно, верно неравенство

$$\sum q_k^i(z) \geq 1, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (6.19)$$

Оно, в частности, означает, что E_k^i корректно определены. Из определения этих функций следует, что их сумма тождественно равна единице в $\mathbb{C}^n$. Легко видеть, что E_k^i бесконечно дифференцируемы, а их носители совпадают с носителями функций q_k^i , лежащими в множествах $B_0^0, B_k^1(4)$ и $B_k^2(4)$ соответственно. Таким образом, семейство функций E_k^i является разбиением единицы для покрытия пространства $\mathbb{C}^n$ множествами $B_0^0, B_k^1(4)$ и $B_k^2(4)$.

Оценим производные $\frac{\partial E_k^i}{\partial \bar{z}_j}, j = 1, \dots, n$. С учетом (6.19) получаем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial E_k^i}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| &= \left| \frac{\partial q_k^i}{\partial \bar{z}_j}(z) \sum q_m^l(z) - q_k^i(z) \sum \frac{\partial q_m^l}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \left(\sum q_m^l(z) \right)^{-2} \\ &\leq 2 \sum q_m^l(z) \sum \left| \frac{\partial q_m^l}{\partial \bar{z}_j}(z) \right|. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Как уже отмечалось, в этих рядах в каждой точке из $\mathbb{C}^n$ могут не равняться нулю лишь функция q_0^0 , не более N функций q_k^1 и $\tilde{N}$ функций q_k^2 . Поэтому согласно условию 1) для q_k^i и неравенству (6.15) имеем:

$$\sum q_m^l(z) \leq 10 + N + \tilde{N}. \quad (6.21)$$

Пусть $z \notin B^2$. Тогда z не попадает ни в один из шаров $B_k^2(4), k \geq 1$, а значит, ни в один из носителей функций q_k^2 . Поэтому производные $\frac{\partial q_k^2}{\partial \bar{z}_j}, k \geq 1$, в этой точке равны нулю. Тогда, учитывая свойство 4а) для функций q_k^1 и соотношения (6.17), (6.20), (6.21), получаем:

$$\left| \frac{\partial E_k^i}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq \tilde{c} \exp[2^\rho a_2 \varepsilon |z|^\rho], \quad z \notin B^2, \quad (6.22)$$

где $\tilde{c} = 2(Nc + 10c_1)(10 + N + \tilde{N})$. Из (6.18), (6.20), (6.21) и свойства 4а) для функций q_k^i получаем также оценку:

$$\left| \frac{\partial E_k^i}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq \tilde{c}_1 \exp[2^\rho A_2 |z|^\rho], \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (6.23)$$

где $\tilde{c}_1 = 2(N + \tilde{N} + 10)(NcA_2 + \tilde{N}cA_2 + 10c_1A_2)$. Отметим, что числа $\tilde{c}, \tilde{c}_1$ зависят лишь от ε (N зависит от ε).

Используя введенные выше функции $\psi_{k,l}^{i,j}$ и построенное разбиение единицы E_k^i , для всех допустимых значений i, j, k и l (т.е. для всех значений i, j, k и l , для которых определены $\psi_{k,l}^{i,j}$) введем еще функции

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{k,l}^{i,j}(z) &= \begin{cases} E_l^j(z) \psi_{k,l}^{i,j}(z), & z \in B_k^i \cap B_l^j, \\ 0, & z \in B_k^i \setminus B_l^j, \end{cases} \\ g_k^i(z) &= \sum_{l,j} \tilde{g}_{k,l}^{i,j}(z), \quad z \in B_k^i. \end{aligned}$$

Здесь через B_k^i мы для единообразия обозначили множество $B_k^i(4)$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots$. Как обычно (см., например, [25; гл. 4, § 16, п. 46, теорема 2]), показывается, что $g_k^i(z)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями и, кроме того, верно равенство:

$$\psi_{k,l}^{i,j}(z) = g_k^i(z) - g_l^j(z), \quad z \in B_k^i \cap B_l^j. \quad (6.24)$$

Найдем оценки для $g_k^i(z)$ и их производных. Пусть множество $B_k^i \setminus B^2$ непусто и $z \in B_k^i \setminus B^2$. Поскольку шары B_l^2 лежат в B^2 , то $i \neq 2$ и, кроме того, в силу определения $\tilde{g}_{k,l}^{i,j}$ функции $\tilde{g}_{k,l}^{i,2}$ равны нулю в точке z . Если $i, j = 0, 1$, то для функций $\psi_{k,l}^{i,j}$ выполнено неравенство (6.10). Используя его и то, что сумма $\sum E_l^j$ тождественно равна единице, получаем:

$$|g_k^i(z)| \leq 2\|\psi\|_m \exp[p_m(z) + \gamma\varepsilon|z|^\rho - L_f^*(z)], \quad z \in B_k^i \setminus B^2. \quad (6.25)$$

Учитывая еще (6.11) и считая, что

$$2\|\psi\|_m \exp[p_m(x) + \gamma\varepsilon|x|^\rho - L_f^*(x)] \leq \tilde{A}\|\psi\|_m \exp[\tilde{A}|x|^\rho]$$

(такое предположение законно, поскольку функции p_m и L_f^* ограничены), получаем также оценку:

$$|g_k^i(z)| \leq \tilde{A}\|\psi\|_m \exp[\tilde{A}|z|^\rho], \quad z \in B_k^i. \quad (6.26)$$

Прежде чем перейти к оценке $\frac{\partial g_k^i}{\partial \bar{z}_s}$, заметим, что в силу аналитичности функций $\psi_{k,l}^{i,j}$ производная $\frac{\partial \tilde{g}_{k,l}^{i,j}}{\partial \bar{z}_s}$ равна $\psi_{k,l}^{i,j} \frac{\partial E_l^j}{\partial \bar{z}_s}$. По тем же соображениям, что и выше, в точке $z \in B_k^i \setminus B^2$ будут равны нулю все производные $\frac{\partial \tilde{g}_{k,l}^{i,2}}{\partial \bar{z}_s}$. Поэтому из (6.10) и (6.22) получаем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_k^i}{\partial \bar{z}_s}(z) \right| &\leq c_2 \|\psi\|_m \exp[p_m(z) + (\gamma + 2^\rho a_2)\varepsilon|z|^\rho - L_f^*(z)], \\ z &\in B_k^i \setminus B^2, \quad s = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (6.27)$$

где $c_2 = 2(N+1)\tilde{c}$. Учитывая еще (6.11) и (6.23), имеем также оценку:

$$\left| \frac{\partial g_k^i}{\partial \bar{z}_s}(z) \right| \leq \tilde{c}_2 \|\psi\|_m \exp[(\tilde{A} + 2^\rho A_2)|z|^\rho], \quad z \in B_k^i, \quad (6.28)$$

где $\tilde{c}_2 = (N + \tilde{N} + 1)\tilde{A}\tilde{c}_1$.

Оценки (6.25)–(6.28) понадобятся нам в несколько иной форме. Мы хотим их видоизменить, используя при этом свойства последовательности $\{p_k\}$. Прежде всего, отметим, что ε , которое мы фиксировали выше, может принимать любые достаточно малые положительные значения. Поэтому можно считать, что выполнено неравенство $(\gamma + 2\rho a_2)\varepsilon < B_m$, где B_m – то же, что и в (1.1) (напомним, что числа γ и a_2 не зависят от ε). Тогда с учетом (1.1) из неравенств (6.25), (6.27) соответственно получаем:

$$|g_k^i(z)| \leq 2\|\psi\|_m \exp[p_{m+1}(z) - L_f^*(z)], \quad z \in B_k^i \setminus B^2, \quad (6.29)$$

$$\left| \frac{\partial g_k^i}{\partial \bar{z}_s}(z) \right| \leq c_2\|\psi\|_m \exp[p_{m+1}(z) - L_f^*(z)], \quad z \in B_k^i \setminus B^2, \quad s = 1, \dots, n. \quad (6.30)$$

В силу определения $I(P)$ (см. §3) и условия 2) совместимости функции f с последовательностью $P = \{p_l\}$ (см. начало §6) выполнено следующее:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{p}_j(z) = +\infty \quad \forall z \in W(f) \cap I(P). \quad (6.31)$$

Действительно, это сразу следует из неравенства в условии 2) совместимости, если учесть замечание, сделанное вслед за определением совместимости, и то, что функция L_f^* ограничена сверху на любом ограниченном подмножестве. Кроме того, также в силу условия 2) совместимости найдется номер l (зависящий только от m) такой, что

$$p_{m+1}(z) - L_f^*(z) < \tilde{p}_l(z), \quad z \in X = W(f) \setminus \text{int } I(P).$$

Функции p_{m+1} и $\tilde{p}_l$ непрерывны всюду, а функция L_f^* согласно условию i) непрерывна на X . Поэтому последнее неравенство продолжается в некоторую окрестность компакта X . Другими словами, уменьшая при необходимости $\delta > 0$, можно считать, что верно неравенство

$$p_{m+1}(z) - L_f^*(z) < \tilde{p}_l(z), \quad z \in X(2\delta). \quad (6.32)$$

Покажем, что для некоторого $t_1 > 0$ множество $\bigcup_k B_k^1 \setminus B(0, t_1)$ попадает в $X(2\delta, t_1)$. Предположим противное. Тогда найдется последовательность $\{x_j\} \subset \bigcup_k B_k^1$ такая, что $|x_j| \rightarrow \infty$ и $x_j/|x_j| \notin X(2\delta)$, $j \geq 1$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{x_j/|x_j|\}$ сходится к некоторой точке $\tilde{x} \notin X(2\delta)$. Пусть k_j – номер того из шаров B_k^1 , который содержит x_j . Как уже отмечалось выше, $B_{k_j}^1$ вкладывается в $B(z_{k_j}, 5 \exp[-a_2\varepsilon|z_{k_j}|^\rho])$. Поэтому $x_j = z_{k_j} + r_j$, причем норма вектора r_j не превосходит числа $5 \exp[-a_2\varepsilon|z_{k_j}|^\rho]$. Легко видеть, что последовательности $(z_{k_j} + r_j)/|z_{k_j} + r_j|$ и $z_{k_j}/|z_{k_j}|$ сходятся (или расходятся) одновременно и имеют один и тот же предел. Следовательно, $z_{k_j}/|z_{k_j}|$ сходится к $\tilde{x}$. С другой стороны, z_{k_j} выбирались из $N(f) \cap \overline{X(\delta, t)}$. Это, в частности, означает, что $\tilde{x} \in \overline{X(\delta)}$. Получили противоречие. Таким образом, указанное выше число

$t_1 > 0$ существует. Тогда, используя неравенства (6.29), (6.30), (6.32) и однородность p_{m+1} , L_f^* и $\tilde{p}_l$, получаем:

$$\left| \frac{\partial g_k^i}{\partial \bar{z}_s}(z) \right|, |g_k^i(z)| \leq C_2 \|\psi\|_m \exp[\tilde{p}_l(z)], \quad (6.33)$$

$$z \in B_k^i \setminus (B^2 \cup B(0, t_1)), \quad s = 1, \dots, n,$$

где $i = 1, k = 1, 2, \dots$ и $C_2 = \max\{c_2, 2\}$. По тем же соображениям неравенство (6.33) будет выполнено для $i = k = 0$ во всех точках $z \in [B_0^0 \setminus (B(0, t_1) \cup B^2)] \cap [\bigcup_k B_k^1]$. Оценка (6.33) верна также при $i = k = 0$ и в точках $z \in [B_0^0 \setminus (B(0, t_1) \cup B^2)] \setminus [\bigcup_k B_k^1]$. Действительно, пусть z — одна из таких точек. Функция $g_0^0 \left(\frac{\partial g_0^0}{\partial \bar{z}_s} \right)$ представляет собой сумму функций $\tilde{g}_{0,l}^{0,j} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{0,l}^{0,j}}{\partial \bar{z}_s} \right)$.

Все они, за исключением $\tilde{g}_{0,0}^{0,0} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{0,0}^{0,0}}{\partial \bar{z}_s} \right)$, равны нулю в точке z согласно их определению. Функция же $\tilde{g}_{0,0}^{0,0} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{0,0}^{0,0}}{\partial \bar{z}_s} \right)$ тождественно равна нулю, поскольку $\psi_{0,0}^{0,0} = (\psi_0^0 - \psi_0^0)/f \equiv 0$. Таким образом, в указанных точках z функции из левой части (6.33) равны нулю, а потому (6.33) для этих z выполнено тривиально. Покажем теперь, что оценка (6.33) будет выполнена и для достаточно больших по модулю точек множества B^2 , если $\tilde{p}_l$ в ней заменить на некоторую функцию $\tilde{p}_{l_1}$ с номером $l_1 \geq l$. Для этого нужно оценить правые части (6.26) и (6.28) на множестве B^2 . Согласно определению $X(\delta)$ компакт $W(f) \setminus X(\delta)$ лежит в $W(f) \cap I(P)$. Тогда в силу (6.31) для каждого $x \in W(f) \setminus X(\delta)$ найдется номер $l(x)$ такой, что $\tilde{p}_{l(x)}(x) > \tilde{A} + 2^\rho A_2$. В силу непрерывности $\tilde{p}_{l(x)}$ эта оценка продолжается в некоторую окрестность $U(x)$ точки x . Из покрытия $U(x)$, $x \in W(f) \setminus X(\delta)$, выделим конечное подпокрытие $U(x_1), \dots, U(x_s)$ компакта $W(f) \setminus X(\delta)$. Пусть $l_1 \geq \max_{1 \leq j \leq s} l(x_j)$. Можно считать, что $l_1 \geq l$. Поскольку $\{\tilde{p}_r\}$ — возрастающая последовательность (см. замечание вслед за определением совместимости f с P), то из сказанного следует оценка

$$\tilde{p}_{l_1}(x) > \tilde{A} + 2^\rho A_2, \quad x \in U, \quad (6.34)$$

где $U = U(x_1) \cup \dots \cup U(x_s)$. Отметим, что номер l_1 зависит только от m и δ , а в конечном счете от m и ε .

Согласно определению B^2 множество $B^2 \setminus \overline{B(0, 7)}$ лежит в $\bigcup_k B_k^2 + B(0, 2)$. Поэтому, используя рассуждения, аналогичные тем, которые проводились для $\bigcup_k B_k^1$, нетрудно показать, что для некоторого $t_2 > t_1$ и каждого $z \in B^2 \setminus B(0, t_2)$ точка $z/|z|$ принадлежит U . Тогда, учитывая положительную однородность $\tilde{p}_{l_1}$, из (6.26), (6.32) и (6.34) получаем:

$$\left| \frac{\partial g_k^i}{\partial \bar{z}_s}(z) \right|, |g_k^i(z)| \leq C_3 \|\psi\|_m \exp[\tilde{p}_{l_1}(z)], \quad (6.35)$$

$$z \in B_k^i \cap B^2 \setminus B(0, t_2), \quad s = 1, \dots, n,$$

где $C_3 = \max\{\tilde{A}, \tilde{c}_2\}$. Поскольку $\tilde{p}_{l_1}$ (как непрерывная функция) ограничена снизу в $B(0, t_2)$, то найдется $C_4 \geq \max\{C_2, C_3\}$ такое, что

$$C_4 \exp \tilde{p}_{l_1}(z) \geq \max\{\tilde{c}_2 \exp[(\tilde{A} + 2^\rho A_2)|z|^\rho], \tilde{A} \exp[\tilde{A}|z|^\rho]\}.$$

Отсюда с учетом (6.26) и (6.28) имеем:

$$\left| \frac{\partial g_k^i}{\partial \bar{z}_s}(z) \right|, |g_k^i(z)| \leq C_4 \|\psi\|_m \exp[\tilde{p}_{l_1}(z)], \quad (6.36)$$

$$z \in B_k^i \cap B(0, t_2), \quad s = 1, \dots, n.$$

Так как $l_1 \geq l$, то $\tilde{p}_{l_1}(z) \geq \tilde{p}_l(z)$. Тогда из (6.33), (6.35) и (6.36) окончательно получаем:

$$\left| \frac{\partial g_k^i}{\partial \bar{z}_s}(z) \right|, |g_k^i(z)| \leq C_4 \|\psi\|_m \exp[\tilde{p}_{l_1}(z)], \quad z \in B_k^i. \quad (6.37)$$

Отметим, что C_4 зависит лишь от ε и m . Найдем теперь подходящие для нас оценки на ψ_k^i и f . Из неравенства (6.6) (здесь мы еще раз при необходимости уменьшим $\varepsilon > 0$, а в дальнейшем считаем его фиксированным, поэтому не будем указывать зависимости от него), равенства $\psi_0^0 = 0$ и свойства 3 для ψ_k^2 при помощи рассуждений, аналогичных тем, которые использовались при получении (6.37), нетрудно получить оценку

$$|\psi_k^i(z)| \leq C_5 \|\psi\|_m \exp[\tilde{p}_{m_1}(z)], \quad z \in B_k^i, \quad (6.38)$$

где C_5 и m_1 зависят лишь от m . В силу условия 1) совместимости f с P найдем m_2 (зависящее только от l_1 , а в конечном счете от m) такое, что

$$L_f^*(z) \leq p_{m_2}(z) - \tilde{p}_{l_1}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (6.39)$$

Поскольку $\{p_j\}$ – возрастающая последовательность, то можно считать, что $m_2 \geq m_1$. Учитывая непрерывность правой части в (6.39), по свойству индикаторов (см., например, [1; гл. 1, § 6, п. 2, свойство г)) имеем:

$$|f(z)| \leq C_6 \exp[p_{m_2}(z) - \tilde{p}_{l_1}(z) + B_{m_2}|z|^\rho], \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (6.40)$$

где B_{m_2} – то же, что и в (1.1), а C_6 зависит лишь от m_2 и l_1 , а следовательно, лишь от m .

Для всех возможных значений k и i рассмотрим дифференциальную форму $\omega_k^i = \bar{\partial} g_k^i$. В силу (6.24) и аналитичности $\psi_{k,l}^{i,j}$ формы ω_k^i и ω_l^j совпадают на пересечении $B_k^i \cap B_l^j$. Напомним, что множества B_k^i в совокупности покрывают все $\mathbb{C}^n$. Следовательно, в $\mathbb{C}^n$ определена гладкая $(0, 1)$ -форма ω , которая на каждом из множеств B_k^i совпадает с ω_k^i . Поскольку квадрат оператора $\bar{\partial}$ равен нулю, то эта форма является замкнутой. Тогда, как известно (см., например, [2; гл. 3, § 6, п. 2, теорема 3.6.2]), в пространстве локально интегрируемых с квадратом модуля функций в $\mathbb{C}^n$ найдется элемент g , который (в обобщенном смысле) удовлетворяет равенству

$$\bar{\partial} g = \omega \quad (6.41)$$

и, кроме того, оценке

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^n} |g(z)|^2 \exp(-2\tilde{p}_{l_1}(z) - B_{m_2+1}|z|^\rho)(1 + |z|^2)^{-2} d\sigma(z) \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}^n} \|\omega\|^2 \exp(-2\tilde{p}_{l_1}(z) - B_{m_2+1}|z|^\rho) d\sigma(z) = \tilde{C}_4 \|\psi\|_m^2, \end{aligned} \quad (6.42)$$

где B_{m_2+1} — то же, что и в (1.1), $d\sigma$ — мера Лебега в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $\|\omega\|^2 = \sum |\omega_s|^2$ и $\omega = \omega_1 d\bar{z}_1 + \dots + \omega_n d\bar{z}_n$. Отметим, что $\tilde{C}_4$ конечно и зависит лишь от m . Действительно, из определения ω и (6.37) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^n} \|\omega\|^2 \exp(-2\tilde{p}_{l_1}(z) - B_{m_2+1}|z|^\rho) d\sigma(z) \\ & \leq nC_4^2 \|\psi\|_m^2 \int_{\mathbb{C}^n} \exp(-B_{m_2+1}|z|^\rho) d\sigma(z). \end{aligned}$$

Поскольку C_4 зависит лишь от m , то этим свойством обладает и $\tilde{C}_4$. Выберем $C'_4 > 0$ такое, что

$$\exp[-B_{m_2+1}|z|^\rho] \leq C'_4(1 + |z|^2)^{-2}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Отсюда и из (6.42) получаем:

$$\int_{\mathbb{C}^n} |g(z)|^2 \exp(-2\tilde{p}_{l_1}(z) - 2B_{m_2+1}|z|^\rho) d\sigma(z) \leq C_7^2 \|\psi\|_m^2, \quad (6.43)$$

где $C_7 = (\tilde{C}_4 C'_4)^{1/2}$.

Для всех возможных k и i рассмотрим функцию

$$\tilde{\psi}_k^i(z) = \psi_k^i(z) - (g_k^i(z) - g(z))f(z), \quad z \in B_k^i.$$

Из (6.41) и определения формы ω следует, что в обобщенном смысле $\bar{\partial}(g_k^i - g) = 0$. Следовательно (см., например, [2; гл. 3, §6, п. 2, рассуждение вслед за формулой (3.6.38)]), функция $g_k^i - g$, а вместе с ней и $\tilde{\psi}_k^i$, является аналитической в B_k^i . В силу (6.24) и определения $\psi_{k,l}^{i,j}$ разность $\tilde{\psi}_k^i - \tilde{\psi}_l^j$ тождественно равна нулю на $B_k^i \cap B_l^j$. Поэтому в $\mathbb{C}^n$ определена целая функция $\tilde{\psi}$, которая в каждом из B_k^i совпадает с $\tilde{\psi}_k^i$. Покажем, что $\tilde{\psi}$ дает искомое аналитическое продолжение ψ . В каждом B_k^i с учетом лемм 5.1 1) и 5.2 1) имеем

$$\begin{aligned} D^\alpha \tilde{\psi}(z) &= D^\alpha \tilde{\psi}_k^i(z) = D^\alpha \psi_k^i(z) + D^\alpha ((g_k^i(z) - g(z))f(z)) = D^\alpha \psi_k^i(z) = \psi(z, \alpha), \\ & \quad z \in B_k^i \cap N(f), \quad 0 \leq |\alpha| < k(z, f). \end{aligned}$$

Следовательно, отображение T_0 , определенное в §1, переводит $\tilde{\psi} \in H(\mathbb{C}^n)$ в $\psi \in \Phi_j(P) \subset H_f$. Если теперь мы докажем включение $\tilde{\psi} \in \Phi(P)$, то это будет

означать сюръективность отображения T . Для этого необходимо установить подходящие оценки на $\tilde{\psi}$. Используя определение функции $\tilde{\psi}$, интегральное неравенство для субгармонических функций, неравенство Коши–Буняковского для интегралов, оценки (6.38), (6.37), (6.40), (6.43), (1.1), а также то, что $p_{m_2}(z) \geq p_{m_1}(z)$, получаем цепочку неравенств (через C_8 мы обозначили здесь величину, обратную к объему единичного шара):

$$\begin{aligned}
|\tilde{\psi}(z)| &\leq C_8 \int_{B(z,1)} |\tilde{\psi}(y)| d\sigma(y) \leq C_8 C_5 \|\psi\|_m \int_{B(z,1)} \exp p_{m_1}(y) d\sigma(y) \\
&\quad + C_8 C_4 C_6 \|\psi\|_m \int_{B(z,1)} \exp[p_{m_2}(y) + B_{m_2}|y|^\rho] d\sigma(y) \\
&\quad + C_8 C_6 \int_{B(z,1)} |g(y)| \exp[p_{m_2}(y) - \tilde{p}_{l_1}(y) + B_{m_2}|y|^\rho] d\sigma(y) \\
&\leq C_8 (C_5 + C_4 C_6) \|\psi\|_m \int_{B(z,1)} \exp p_{m_2+1}(y) d\sigma(y) \\
&\quad + C_8 C_6 \left[\int_{B(z,1)} |g(y)|^2 \exp(-2\tilde{p}_{l_1}(y) - 2B_{m_2+1}|y|^\rho) d\sigma(y) \right]^{1/2} \\
&\quad \times \left[\int_{B(z,1)} \exp(2p_{m_2}(y) + 2B_{m_2}|y|^\rho + 2B_{m_2+1}|y|^\rho) d\sigma(y) \right]^{1/2} \\
&\leq C_8 (C_5 + C_4 C_6) \|\psi\|_m \int_{B(z,1)} \exp p_{m_2+1}(y) d\sigma(y) \\
&\quad + C_8 C_6 C_7 \|\psi\|_m \left[\int_{B(z,1)} \exp(2p_{m_2+2}(y)) d\sigma(y) \right]^{1/2} \\
&\leq (C_5 + C_4 C_6) \|\psi\|_m \sup_{y \in B(z,1)} \exp p_{m_2+1}(y) \\
&\quad + C_6 C_7 \|\psi\|_m \sup_{y \in B(z,1)} \exp p_{m_2+2}(y) \\
&\leq C_9 \|\psi\|_m \sup_{y \in B(z,1)} \exp p_{m_2+2}(y),
\end{aligned}$$

где $C_9 = C_5 + C_4 C_6 + C_6 C_7$. Согласно лемме 2.1 с учетом неравенства (1.1) найдем число $C_{10} > 0$ такое, что для всех $z \in \mathbb{C}^n$

$$C_9 \sup_{y \in B(z,1)} \exp p_{m_2+2}(y) \leq C_{10} \exp p_{m_2+3}(z).$$

Тогда в силу предыдущих неравенств имеем:

$$|\tilde{\psi}(z)| \leq C_{10} \|\psi\|_m \exp p_{m_2+3}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\|\tilde{\psi}\|_{m_2+3} \leq C_{10} \|\psi\|_m.$$

При этом C_{10} и m_2 зависят от m , но не зависят от функции $\psi \in \Phi_{m,f}$. Это означает, что $\tilde{\psi} \in \Phi(P)$, т.е. отображение T сюръективно. Из этого же неравенства следует, что T^{-1} непрерывно. Теорема доказана.

§ 7. Представление решений однородного уравнения свертки

В заключительной части работы мы рассмотрим применение основного результата к вопросу представления произвольных решений однородных уравнений свертки в выпуклых областях посредством элементарных решений – экспоненциальных многочленов. Прежде всего, напомним некоторые известные факты и понятия, относящиеся к теории операторов свертки. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ и $\{K_m\}$ – последовательность выпуклых компактов из области D , являющаяся ее строгим исчерпанием, т.е. удовлетворяющая условиям:

$$K_m \subset \text{int } K_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = D.$$

Положим

$$p_m(z) = H_{K_m}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$H_K(z) = \sup_{z \in K} \text{Re}\langle z, y \rangle = \sup_{z \in K} \text{Re}(z_1 y_1 + \dots + z_n y_n)$$

– опорная функция компакта K . Тогда $P = \{p_m(z)\}$ – последовательность непрерывных функций из PSH_1 , удовлетворяющая (1.1), а множество $I(P)$ в этом случае совпадает с

$$I_D = \{z : H_D(z) = +\infty\}.$$

Известно (см., например, [1; гл. 3, § 12, п. 7]), что пространство $H^*(D)$ – пространство линейных непрерывных функционалов на $H(D)$ (называемое еще пространством аналитических функционалов в D) – при помощи преобразования Лапласа

$$f(z) = (\nu, \exp\langle z, y \rangle), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \nu \in H^*(D),$$

отождествляется с подпространством целых функций экспоненциального типа, совпадающим с $\Phi(P)$.

Пусть $\nu \neq 0$ – аналитический функционал в $\mathbb{C}^n$ такой, что для некоторого $y \in \mathbb{C}^n$ выполнено неравенство

$$\text{Re}\langle z, y \rangle + L_f^*(z) < H_D(z), \quad z \in \mathbb{S},$$

где f – преобразование Лапласа функционала ν . Тогда ν порождает оператор свертки M_ν , действующий на пространстве $H(D)$ по правилу:

$$M_\nu[\varphi](z) = (\nu, \varphi(z + y)), \quad \varphi \in H(D).$$

Значениями M_ν являются функции, аналитические в выпуклой области (см., например, [26]):

$$G = G(D, f) = \{z : \text{Re}\langle z, x \rangle < H_D(x) - L_f^*(x), \quad x \in \mathbb{S}\}.$$

Рассмотрим однородное уравнение свертки

$$M_\nu[\varphi] = 0. \tag{7.1}$$

Пусть $x \in N(f)$ и $0 \leq |\alpha| < k(x, f)$. С учетом определения f нетрудно видеть (см., например, [26]), что функция

$$z^\alpha \exp\langle z, x \rangle = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \exp\langle z, x \rangle$$

является решением этого уравнения. Решения такого вида (экспоненциальные мономы) называются *элементарными решениями* (7.1). Через $W(D, \nu)$ обозначим пространство всех решений из $H(D)$ уравнения (7.1.), т.е. ядро оператора $M_\nu: H(D) \rightarrow H(G)$. Так как $H(D)$ есть пространство типа Фреше–Шварца (см., например, [1; гл. 1, § 4, п. 3, теорема 4.6]), то имеют место следующие изоморфизмы (см. [27]):

$$W(D, \nu) \cong [H^*(D)/W^0(D, \nu)]^* \cong [\Phi(P)/J(D, f)]^*,$$

где $J(D, f)$ – пространство, состоящее из преобразований Лапласа элементов подпространства $W^0(D, \nu) \subset H^*(D)$, а $W^0(D, \nu)$ состоит из функционалов, обращающихся в нуль на функциях из $W(D, \nu)$. Пусть φ – произвольная функция из пространства $W(D, \nu)$ и функционал $\mu \in [\Phi(P)/J(D, f)]^*$ сопоставляется ей при указанных изоморфизмах. Если δ_z – функционал Дирака, сосредоточенный в точке z , то

$$\varphi(z) = \delta_z(\varphi) = (\delta_z, \varphi) = (\mu, [\widehat{\delta_z}]), \quad z \in D,$$

где $[\widehat{\delta_z}]$ – класс эквивалентности из пространства $\Phi(P)/J(D, f)$, содержащий преобразование Лапласа $\widehat{\delta_z}$ функционала δ_z . Функция $\widehat{\delta_z}(\eta)$, как легко видеть, совпадает с $\exp\langle z, \eta \rangle$. Таким образом, имеет место равенство

$$\varphi(z) = (\mu, [\exp\langle z, y \rangle]), \quad z \in D.$$

В [28] (см. также [26]) доказано, что

$$J(D, f) = \{\psi \in \Phi(P) : \psi/f \text{ — целая функция}\}.$$

Отсюда согласно данному ранее определению пространства $J(P, f)$ следует, что $J(D, f) = J(P, f)$.

ЛЕММА 7.1. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ и функция $f \in H_1$ такова, что область $G = G(D, f)$ непуста. Предположим, что индикатор L_f^* непрерывен на $W(f) \setminus \text{int } I_D$ и выполнено равенство

$$L_f^*(z) = H_D(z) - H_G(z), \quad z \in W(f) \setminus \text{int } I_D. \quad (7.2)$$

Тогда f совместима с последовательностью $P = \{H_{K_m}\}$, где компакты K_m , $m = 1, 2, \dots$, определены в начале § 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{Q_l\}$ – возрастающая последовательность выпуклых компактов из области G , исчерпывающая ее. Из определений G и опорной функции легко следует, что

$$L_f^*(z) + H_G(z) \leq H_D(z), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Поэтому для каждого $l = 1, 2, \dots$ верно неравенство

$$L_f^*(z) + H_{Q_l}(z) < H_D(z), \quad z \in \mathbb{S}.$$

Отсюда и из определения опорной функции области D вытекает существование точки $y \in D$ такой, что

$$L_f^*(z) + H_{Q_l}(z) < \operatorname{Re}\langle z, y \rangle.$$

Поскольку левая часть этого неравенства полунепрерывна сверху, а правая непрерывна, то оно продолжается в некоторую окрестность $U(z)$ точки $z \in \mathbb{S}$. Область D представляет собой объединение компактов K_m , $m \geq 1$. Поэтому найдется номер $m(z)$ такой, что $z \in K_{m(z)}$. Из покрытия сферы $\mathbb{S}$ множествами $U(z)$, $z \in \mathbb{S}$, выделим конечное подпокрытие $U(z_1), \dots, U(z_k)$. Пусть $m = \max_{1 \leq j \leq k} m(z_j)$. Так как $\{K_s\}$ – возрастающая последовательность, то с учетом включения $z_j \in K_{m(z_j)}$ имеем: $z_j \in K_m$, $j = 1, \dots, k$. Из всего сказанного и определения опорной функции для компакта K_m следует неравенство

$$L_f^*(z) + H_{Q_l}(z) \leq H_{K_m}(z), \quad z \in \mathbb{S}.$$

Это дает нам первое условие совместимости f с P , если положить $\tilde{p}_l \equiv H_{Q_l}$, $l = 1, 2, \dots$, и воспользоваться положительной однородностью функций из последнего неравенства. Докажем, что выполняется и второе условие. Согласно (7.2) для каждого $m = 1, 2, \dots$

$$L_f^*(z) + H_G(z) = H_D(z) > H_{K_m}(z), \quad z \in W(f) \setminus \operatorname{int} I_D.$$

Отсюда и из определения опорной функции для области G следует, что для каждого $z \in W(f) \setminus \operatorname{int} I_D$ найдется $y(z) \in G$ такое, что

$$L_f^*(z) + \operatorname{Re}\langle z, y(z) \rangle > H_{K_m}(z).$$

С учетом условий леммы функции из этого неравенства непрерывны в точке z . Поэтому найдется ее окрестность $V(z)$ такая, что

$$L_f^*(x) + \operatorname{Re}\langle x, y(z) \rangle > H_{K_m}(x), \quad x \in V(z), \quad (7.3)$$

где $z \in W(f) \setminus \operatorname{int} I_D$. Пусть теперь $z \in W(f) \cap \operatorname{int} I_D$. Покажем, что $z \in I_G$, т.е. для каждого $A > 0$ существует $y(z) \in G$ такое, что $A < \operatorname{Re}\langle y(z), z \rangle$. В силу выпуклости функции H_D множество $\mathbb{C}^n \setminus I_D$ (где она конечна) выпукло. Поэтому для точки z (лежащей в $\operatorname{int} I_D$) по теореме об отделимости для выпуклых множеств найдется $\eta \in \mathbb{S}$ такое, что $\operatorname{Re}\langle \eta, z \rangle > 0$ и полупространство $\Pi = \{x : \operatorname{Re}\langle \eta, x \rangle > 0\}$ целиком лежит в I_D . Пусть $y \in G$ и $x \in \Pi$. Тогда

$$L_f^*(x) + \operatorname{Re}\langle y + t\eta, x \rangle < H_D(x) = +\infty, \quad t > 0.$$

Пусть теперь $x \in \mathbb{C}^n \setminus [\Pi \cup \{0\}]$. Тогда $\operatorname{Re}\langle t\eta, x \rangle \leq 0$ для всех $t > 0$. Поэтому с учетом определения области G и включения $y \in G$ получаем:

$$L_f^*(x) + \operatorname{Re}\langle y + t\eta, x \rangle \leq L_f^*(x) + \operatorname{Re}\langle y, x \rangle < H_D(x).$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re}\langle y + t\eta, x \rangle < H_D(x) - L_f^*(x)$$

для всех $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ и всех $t > 0$. Согласно определению G это означает, что $y + t\eta \in G$ для всех $t > 0$. Поскольку $z \in \Pi$, то

$$\operatorname{Re}\langle y + t\eta, z \rangle = \operatorname{Re}\langle y, z \rangle + t\operatorname{Re}\langle \eta, z \rangle \rightarrow +\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, найдется точка $y(z) = y + t\eta \in G$ такая, что

$$\operatorname{Re}\langle y(z), z \rangle > H_{K_m}(z) - B,$$

где $B = \inf_{x \in S} L_f^*(z) > -\infty$. Как и выше, найдем окрестность $V(z)$ точки z такую, что

$$L_f^*(x) + \operatorname{Re}\langle x, y(z) \rangle \geq B + \operatorname{Re}\langle y(z), x \rangle > H_{K_m}(x), \quad x \in V(z).$$

Отсюда с учетом (7.3) получаем:

$$L_f^*(x) + \operatorname{Re}\langle x, y(z) \rangle > H_{K_m}(x), \quad x \in V(z), \quad z \in W(f). \quad (7.4)$$

Из покрытия компакта $W(f)$ множествами $V(z)$, $z \in W(f)$, выделим конечное подпокрытие $V(z_s)$, $s = 1, \dots, k$. Поскольку объединение компактов Q_j совпадает с G и $\{Q_j\}$ – возрастающая последовательность, то найдется l такое, что $y(z_s) \in Q_l$, $s = 1, \dots, k$. Тогда из (7.4) следует, что

$$L_f^*(x) + H_{Q_l}(x) > H_{K_m}(x), \quad x \in W(f).$$

Это дает нам условие 2) совместимости f с P . Лемма доказана.

Мы все подготовили, чтобы сформулировать и доказать так называемый фундаментальный принцип для пространства решений однородного уравнения свертки.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, ν – аналитический функционал в $\mathbb{C}^n$ с преобразованием Лапласа f , для которого область $G = G(D, f)$ непуста. Пусть далее $\{U_k\}_{k=1}^\infty$ – семейство связанных компактных подмножеств $N(f)$, покрывающее $N(f)$, такое, что для некоторых $z_k \in U_k$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\frac{\operatorname{diam} U_k}{|z_k|} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad |z_k| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Предположим, что f удовлетворяет условиям i)–iii) (с $I(P) = I_D$) и

$$L_f^*(z) = H_D(z) - H_G(z), \quad z \in W(f) \setminus \operatorname{int} I_D.$$

Тогда для каждой функции $\varphi \in W(D, \nu)$ существует семейство мер $\mu_{k, \alpha}$, $k = 1, 2, \dots$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $0 \leq |\alpha| < l(k)$ ($l(k)$ зависит лишь от f и U_k , $k = 1, 2, \dots$), таких, что

$$\varphi(z) = \sum_{\substack{k=1,2,\dots \\ 0 \leq |\alpha| < l(k)}} \int_{U_k} z^\alpha \exp\langle z, \eta \rangle d\mu_{k, \alpha}(\eta), \quad z \in D,$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из D и для каждого $\eta \in U_k$ функция $z^\alpha \exp\langle z, \eta \rangle$, $0 \leq |\alpha| < l(k)$, является элементарным решением уравнения (7.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{K_m\}$ – последовательность выпуклых компактов из D такая же, как и выше. Из связности U_k и леммы 4.3 следует, что функция $k(z, f)$ постоянна на U_k . Через $l(k)$ обозначим значение $k(z, f)$ на U_k . Пусть $k = 1, 2, \dots$, $0 \leq |\alpha| < l(k)$ и $E_{k,\alpha}$ обозначает пространство непрерывных на U_k функций $q(z)$ с нормой

$$\|q\|_{k,\alpha} = \sup_{z \in U_k} |q(z)|.$$

Введем пространства последовательностей:

$$\Theta_m = \{g = (g_{k,\alpha}) : g_{k,\alpha} \in E_{k,\alpha}; \|g\|^m = \sup_{k,\alpha} \|g_{k,\alpha}\|_{k,\alpha} \exp(-H_{K_m}(z_k)) < \infty\},$$

$$\Theta^\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind } \Theta_m.$$

Пусть Θ_0^∞ обозначает подпространство пространства Θ^∞ , состоящее из элементов $g = (g_{k,\alpha})$ таких, что

1. если $U_k \cap U_j \neq \emptyset$, то

$$g_{k,\alpha}(z) = g_{j,\alpha}(z), \quad z \in U_k \cap U_j, \quad 0 \leq |\alpha| < l(k) = l(j)$$

(последнее равенство, как и выше, следует из связности множества $U_k \cup U_j$ при условии, что непусто пересечение $U_k \cap U_j$);

2. для каждого $z \in N(f)$ существуют окрестность V_z точки z в $\mathbb{C}^n$ и функция $g_z \in H(V_z)$ такие, что $D^\alpha g_z(x) = g_{k,\alpha}(x)$, $x \in V_z \cap U_k$.

Рассмотрим пространство $\Phi_f(P)$, где $P = \{H_{K_m}\}$, и отображение

$$\Gamma = (\Gamma_{k,\alpha}) : \Phi_f(P) \rightarrow \Theta_0^\infty,$$

действующее по правилу:

$$\Gamma_{k,\alpha}(\psi) = \psi(x, \alpha), \quad x \in U_k.$$

Отображение Γ является изоморфизмом. Действительно, инъективность Γ и Γ^{-1} следует непосредственно из определений Γ , $\Phi_f(P)$ и Θ_0^∞ . Докажем непрерывность Γ . Пусть $\psi \in \Phi_{m,f}$. Тогда для всех $z \in N(f)$, $0 \leq |\alpha| < k(z, f)$ имеем:

$$|\psi(z, \alpha)| \leq \alpha! \|\psi\|_m \exp H_{K_m}(z).$$

Отсюда с учетом условия ii), леммы 2.1 (которую мы можем применить, поскольку система множеств U_k , очевидно, удовлетворяет ее условиям) и неравенства (1.1) получаем:

$$\begin{aligned} \|\Gamma(\psi)\|^{m+1} &= \sup_{k,\alpha} \sup_{z \in U_k} |\psi(z, \alpha)| \exp(-H_{K_{m+1}}(z_k)) \\ &\leq k_0! \|\psi\|_m \sup_{k,\alpha} \sup_{z \in U_k} \exp H_{K_m}(z) \exp(-H_{K_{m+1}}(z_k)) \\ &\leq k_0! \|\psi\|_m \sup_{k,\alpha} \exp(H_{K_m}(z) + B_m|z_k| + A) \exp(-H_{K_{m+1}}(z_k)) \\ &\leq k_0! \|\psi\|_m \exp A. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Это означает непрерывность Γ . Непрерывность обратного отображения доказывается аналогично. Пусть $\varphi \in W(D, \nu)$. Как уже отмечалось ранее, существует функционал $\mu \in [\Phi(P)/J(P, f)]^*$ такой, что

$$\varphi(z) = (\mu, [\exp\langle z, y \rangle]), \quad z \in D.$$

По теореме 6.1 пространство $\Phi(P)/J(P, f)$ изоморфно $\Phi_f(P)$, а по доказанному только что $\Phi_f(P)$ изоморфно Θ_0^∞ . Следовательно, найдется функционал $\gamma \in (\Theta_0^\infty)^*$ такой, что

$$\varphi(z) = (\gamma, \Gamma(T([\exp\langle z, y \rangle])), \quad z \in D.$$

Можно считать, что γ продолжен на все пространство Θ^∞ .

Пусть K — произвольный компакт в области D . В силу выбора последовательности $\{K_m\}$ для некоторого m компакт K_m содержит K . Тогда

$$\begin{aligned} \|\exp\langle z, \eta \rangle\|_m &= \sup_{\eta \in \mathbb{C}^n} |\exp\langle z, \eta \rangle| \exp(-H_{K_m}(\eta)) \\ &= \sup_{\eta \in \mathbb{C}^n} \exp[\operatorname{Re}\langle z, \eta \rangle - H_{K_m}(\eta)] \leq 1, \quad z \in K. \end{aligned}$$

С учетом этого по лемме 2.2 найдем $c > 0$ такое, что

$$\|T([\exp\langle z, \eta \rangle])\|_{m+1} \leq c, \quad z \in K.$$

Используя теперь (7.5), получаем:

$$\|\Gamma(T([\exp\langle z, \eta \rangle]))\|^{m+2} \leq k_0! c \exp A, \quad z \in K.$$

Таким образом, семейство последовательностей

$$g(z) = \Gamma(T([\exp\langle z, \eta \rangle])), \quad z \in K,$$

принадлежит пространству Θ_{m+2} и ограничено в нем. Отметим еще, что в силу определений отображений T и Γ имеют место равенства:

$$(g(z))_{k, \alpha}(\eta) = z^\alpha \exp\langle z, \eta \rangle, \quad \eta \in U_k, \quad 0 \leq |\alpha| < l(k), \quad k \geq 1.$$

Пусть $\{g_j(z)\}_{j=1}^\infty$ — семейство $(g(z))_{k, \alpha}$, $0 \leq |\alpha| < l(k)$, $k \geq 1$, перенумерованное произвольным образом. Соответственно этой перенумерации из пространств $E_{k, \alpha}$ получим пространства E_j с нормой $\|\cdot\|^j$, из точек z_k — точки $\tilde{z}_j$, а из множеств U_k — множества $\tilde{U}_j$.

Пусть γ_j — функционал из $(E_j)^*$ такой, что

$$(\gamma_j, q) = (\gamma, (0, \dots, q, 0, \dots)), \quad q \in E_j,$$

где символ q в скобках справа стоит на j -м месте. В силу непрерывности γ в пространстве Θ_{m+3} (как и в любом другом Θ_l), ограниченности семейства $g(z)$, $z \in K$, в Θ_{m+2} и неравенства (1.1) получаем:

$$\begin{aligned}
& \sup_{z \in K} \left| (\gamma, g(z)) - \sum_{i=1}^j (\gamma_i, g_i(z)) \right| \\
&= \sup_{z \in K} |(\gamma, g(z)) - (\gamma, (g_1(z), \dots, g_j(z), 0, \dots))| \\
&\leq C \sup_{z \in K} \|g(z) - (g_1(z), \dots, g_j(z), 0, \dots)\|_{m+3} \\
&= C \sup_{z \in K} \sup_{i > j} \|g_i(z)\|^i \exp(-H_{K_{m+3}}(\tilde{z}_i)) \\
&= C \sup_{z \in K} \sup_{i > j} \|g_i(z)\|^i \exp(-H_{K_{m+2}}(\tilde{z}_i) + H_{K_{m+2}}(\tilde{z}_i) - H_{K_{m+3}}(\tilde{z}_i)) \\
&\leq C \sup_{z \in K} \sup_{i > j} \|g_i(z)\|^i \exp(-H_{K_{m+2}}(\tilde{z}_i) - B_{m+2}|\tilde{z}_i|) \\
&\leq C \sup_{z \in K} \|g(z)\|_{m+2} \sup_{i > j} \exp(-B_{m+2}|\tilde{z}_i|) \\
&\leq \tilde{C} \sup_{i > j} \exp(-B_{m+2}|\tilde{z}_i|) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеет место равенство:

$$\varphi(z) = (\gamma, g(z)) = \sum_{j=1}^{\infty} (\gamma_j, g_j(z)),$$

где ряд сходится равномерно на компактах из D . Так как перенумерация выше производилась произвольно, то этот ряд сходится абсолютно. Остается заметить, что в силу теоремы Рисса для каждого $j = 1, 2, \dots$ найдется мера μ_j на $\tilde{U}_j$ такая, что

$$(\gamma_j, g_j(z)) = \int_{\tilde{U}_j} g_j(z) d\mu_j.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
2. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
3. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985.
4. Леонтьев А. Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка // Докл. АН СССР. 1948. Т. 61. № 5. С. 785–787.
5. Леонтьев А. Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66. № 2. С. 153–156.
6. Леонтьев А. Ф. Об интерполяционной задаче // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66. № 3. С. 331–334.
7. Леонтьев А. Ф. К вопросу об интерполировании в классе целых функций конечного порядка // Матем. сб. 1957. Т. 41. № 1. С. 81–96.
8. Фурсакова О. С. Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. № 3. С. 477–480.

9. *Лапин Г. П.* Интерполирование в классе целых функций конечного порядка // Изв. вузов. 1959. Т. 5. С. 146–153.
10. *Лапин Г. П.* О целых функциях конечного порядка, принимающих вместе с производными заданные значения в заданных точках // Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6. № 6. С. 1267–1281.
11. *Гришин А. Ф., Руссаковский А. М.* Свободная интерполяция целыми функциями // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). 1985. № 44. С. 32–42.
12. *Руссаковский А. М.* Об интерполировании в классе целых функций, имеющих индикатор не выше данного // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). 1984. № 41. С. 119–122.
13. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. Math. 1979. V. 33. № 2. P. 109–143.
14. *Братищев А. В.* Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 3. С. 451–475.
15. *Братищев А. В.* Об интерполяционной задаче в некоторых классах целых функций // Сиб. матем. журн. 1976. Т. 17. № 1. С. 30–44.
16. *Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф.* Кратная интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточненного порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 5. С. 1102–1127.
17. *Хёрмандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
18. *Бернштейн К., Струнна Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 54. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–112.
19. *Паламодов В. П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.
20. *Ehrenpreis L.* Fourier analysis in several complex variables. New York: Wiley Interscience, 1970.
21. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic analysis // J. Anal. Math. 1980. V. 38. P. 188–254.
22. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.
23. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.
24. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
25. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Часть II. М.: Наука, 1985.
26. *Кривошеев А. С., Напалков В. В.* Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. 1992. Т. 47. № 6(288). С. 3–58.
27. *Гротендик А. О.* О пространствах (F) и (DF) // Математика. 1958. Т. 2. № 3. С. 81–127.
28. *Юлмухаметов Р. С.* Однородные уравнения свертки // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 2. С. 312–315.