Общероссийский математический портал

С. В. Пчелинцев, О тождествах свободных конечно порожденных альтернативных алгебр над полем характеристики 3, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 9, 109–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm596>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:11:06

УДК 512.554.5

С. В. Пчелинцев

О тождествах свободных конечно порожденных альтернативных алгебр над полем характеристики 3

В 1981 году В. Т. Филиппов получил положительное решение проблемы Шестакова о строгости включений в цепочках многообразий, порожденных свободными альтернативными и мальцевскими алгебрами конечного ранга над полем характеристики, отличной от 2 и 3. В работе доказан аналогичный результат для альтернативных алгебр над полем характеристики 3. Доказательство основано на построении трех серий тождеств, выполняющихся в алгебрах соответствующего ранга. Опровержение тождеств на алгебрах большего ранга проводится с помощью первичной коммутативной альтернативной алгебры.

Кроме того, доказано, что в многообразиях альтернативных алгебр над полем характеристики 3 конечного базисного ранга всякая разрешимая алгебра нильпотентна.

Библиография: 9 названий.

Введение

В 1977 году И. П. Шестаков [1] доказал, что тождества свободных альтернативных алгебр над полем Φ характеристики 0 зависят от их ранга (ранг свободной алгебры – это минимальное число ее порождающих). Им же был поставлен вопрос о строгости включений в цепочке многообразий

$$\text{Alt}_1 \Phi \subset \text{Alt}_2 \Phi \subset \dots \subset \text{Alt}_n \Phi \subset \dots, \quad (*)$$

порожденных свободными альтернативными Φ -алгебрами конечного ранга. Положительное решение проблемы Шестакова в 1981 году получил В. Т. Филиппов [2] при условии, что кольцо операторов Φ содержит $\frac{1}{6}$.

Целью настоящей работы является доказательство аналогичного результата для альтернативных алгебр над полем характеристики 3¹. Работа состоит из пяти параграфов. В § 1 вводится понятие почти муфанговой функции и дается способ построения таких функций; затем определяются почти муфанговы функции типа G_n и F_n . В § 2 формулируется основная лемма, позволяющая с помощью почти муфанговых функций указывать тождества алгебр заданного ранга – G_n , F_n и H_n (для подходящих значений n). В § 3 устанавливается, что в исключительной первичной коммутативной альтернативной алгебре нет тождеств типа G_n , F_n и H_n .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 0001-00339).

¹Небольшой модификацией рассуждений последнее требование можно было бы заменить условием “кольцо Φ содержит $\frac{1}{2}$ ”, однако мы этого делать не будем, чтобы не усложнять доказательств.

На основании этих результатов в § 4 доказывается теорема о строгости включений в цепочке многообразий $(*)$ алгебр над полем Φ характеристики 3. Наконец, в § 5 получаем, что всякая разрешимая алгебра из многообразия $\text{Alt}_n \Phi$ нильпотентна.

§ 1. Вспомогательные функции

1.1. Обозначения. Предварительные замечания. На протяжении всей работы используются следующие обозначения: A – *альтернативная алгебра над полем характеристики 3*, т.е. алгебра, в которой ассоциатор $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ является кососимметрической функцией своих аргументов; $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$ – присоединенные йорданова и мальцевская алгебры, умножения в которых получены соответственно симметризацией и кососимметризацией умножения в алгебре A : $x \circ y := xy + yx$; $[x, y] := xy - yx$; операторы $R_x, R_x^{(+)}, R_x^{(-)}$ обозначают операторы правого умножения на элемент x в алгебрах $A, A^{(+)}, A^{(-)}$ соответственно. Напомним, что операторы $R_x^{(-)}, R(x, y) := R_x R_y - R_{xy}, D(x, y) := [R_x^{(+)}, R_y^{(+)}]$ являются дифференцированиями присоединенной йордановой алгебры $A^{(+)}$.

Все недостающие определения и обозначения можно найти в книге [3].

Следуя работе [4], введем операторные функции:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, x_3\}_c &= (\mathbf{Id} + (13) + (23))D(x_1, x_2)R(x_3, c), \\ \nabla_a(x_1, x_2, x_3) &= (\mathbf{Id} + (13) + (123))R(a, x_1)D(x_2, x_3), \end{aligned}$$

где в скобках перед операторами записаны подстановки, действующие, как обычно, на индексы ($\mathbf{Id}$ обозначает единичную подстановку), например:

$$(\mathbf{Id} + (123))D(x_1, x_2)R(x_3, c) = D(x_1, x_2)R(x_3, c) + D(x_2, x_3)R(x_1, c).$$

Далее, напомним, что функция $f(x, y)$ называется *муфанговой относительно x и y* , если она по этим переменным линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству

$$f(xT(y), y) = f(x, y)T^*(y), \quad \text{где } T \in \{R, L\} \text{ и } R^* = L, \quad L^* = R.$$

В общем случае функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *муфанговой относительно набора переменных $x_1, \dots, x_n$* , если она является муфанговой относительно любых двух переменных из этого списка. Центральным пример муфанговой функции в альтернативных алгебрах – ассоциатор.

Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений. Первые две леммы доказаны в работе [4].

ЛЕММА 1. *Во всякой альтернативной алгебре следующие функции являются муфанговыми относительно переменных x, y, z, t, v :*

- (а) $\{x, y, a\}_z$;
- (б) $R(x, a)\{y, z, a\}_t$;
- (в) $g(5) := g_a(x, y, z, t) := [x, a]\{y, z, a\}_t$;
- (г) $G(6) := G_a(x, y, z, t, v) := (x, y, a)\{z, t, a\}_v$.

ЛЕММА 2. Во всякой альтернативной алгебре верно соотношение:

$$R(x, a)\{y, z, a\}_t = \nabla_x(y, z, a)R(a, t).$$

ЛЕММА 3. Пусть в произвольной альтернативной алгебре функция $f(v)$ линейна по переменной v и удовлетворяет тождеству

$$f(v)D(v, q)R(v, s) = 0. \quad (1)$$

Тогда

$$f(v)\{p, q, v\}_s = f(v)D(p, v)R(q, s) - f(p)D(v, q)R(v, s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линеаризация тождества (1) имеет вид:

$$f(p)D(v, q)R(v, s) + f(v)D(p, q)R(v, s) + f(v)D(v, q)R(p, s) = 0,$$

т. е.

$$f(v)D(p, q)R(v, s) = -f(p)D(v, q)R(v, s) - f(v)D(v, q)R(p, s).$$

Используя это тождество, преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} f(v)\{p, q, v\}_s &= f(v)(D(p, q)R(v, s) + D(v, q)R(p, s) + D(p, v)R(q, s)) \\ &= -f(p)D(v, q)R(v, s) - f(v)D(v, q)R(p, s) \\ &\quad + f(v)D(v, q)R(p, s) + f(v)D(p, v)R(q, s) \\ &= f(v)D(p, v)R(q, s) - f(p)D(v, q)R(v, s). \end{aligned}$$

1.2. Почти муфанговы функции. В дальнейшем важную роль играют почти муфанговы функции, которые вводятся следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_n)$ — однородная функция, зависящая только от указанных переменных, причем по переменным $x_1, \dots, x_{k-1}$ она имеет степень 2, а по остальным переменным линейна. Переменные $x_1, \dots, x_{k-1}$ назовем *двойными*, а остальные переменные $x_k, \dots, x_n$ — *простыми*. Функцию f назовем *почти муфанговой*, если выполнены следующие три условия:

- (а) число ее простых переменных ≥ 4 и по ним f кососимметрична;
- (б) функция f обращается в нуль, если вместо простой переменной подставить двойную переменную;
- (в) по простым переменным функция f муфангова.

К настоящему времени известны две почти муфанговы функции — это функция Филиппова $g(a \mid x, y, z, t)$ и ее аналог $G(a \mid x, y, z, t, v)$, построенные в работах [2], [4].

ЛЕММА 4 (достаточное условие почти муфанговости). Если функция f удовлетворяет условиям (а) и (б) определения и выполнены тождества $f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_n T(x_{n-1})) = f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_n)T^*(x_{n-1})$, то она является почти муфанговой и удовлетворяет следующим M -тождествам:

$$f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_n T(x_i)) = f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_n)T^*(x_i), \quad i < n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линеаризация исходного тождества

$$f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_n T(x_{n-1})) = f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_n) T^*(x_{n-1})$$

подстановкой $x_{n-1} \rightarrow x_i$ ($i < n$) приводит к тождеству

$$\begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_{n-2}, x_i, x_n T(x_{n-1})) + f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_n T(x_i)) \\ &= f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_{n-2}, x_i, x_n) T^*(x_{n-1}) \\ &+ f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_n) T^*(x_i). \end{aligned}$$

Замечая, что первые слагаемые в обеих частях этого равенства нулевые (по определению), получаем требуемое M -тождество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейную функцию $f(x)$ назовем D -функцией, если она является дифференцированием присоединенной йордановой алгебры $A^{(+)}$.

Заметим, что каждая муфангова функция $f(x, y)$ является D -функцией. В самом деле, во-первых, $f(x^2, x) = f(x, x)x = 0$, откуда линеаризацией по переменной x получаем $f(x \circ y, x) + f(x^2, y) = 0$; воспользовавшись теперь свойством муфанговости, имеем $f(x^2, y) = -f(x \circ y, x) = -f(y, x) \circ x = f(x, y) \circ x$.

ЛЕММА 5. Если функция $f(x, y)$ является D -функцией по каждой переменной, то она удовлетворяет тождеству $f(x, y)D_{x,y} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$\begin{aligned} & f(x, y)R_x^{(+)}R_y^{(+)} - f(x, y)R_y^{(+)}R_x^{(+)} = f(x^2, y)R_y^{(+)} - f(x, y^2)R_x^{(+)} \\ &= f(x^2, y^2) - f(x^2, y^2) = 0. \end{aligned}$$

Укажем простой способ построения почти муфанговых функций, сделав предварительное одно замечание.

ЛЕММА 6. Пусть $f(B_n \mid P_m)$ — почти муфангова функция, зависящая от двойных переменных из множества B_n и линейных переменных из множества P_m ($n \geq 4$), и допустим, что функция $f(u, v) := f(B_n \mid P_{m-2}, u, v)$ находится в условиях леммы 3, т.е. удовлетворяет тождеству (1). Тогда функция

$$f(B_{n+1} \mid P_{m+2}) = f(B_n \mid P_{m-2}, p, b) \cdot \{q, s, b\}_t,$$

где

$$B_{n+1} = B_n \cup \{b\}, \quad P_{m+2} = P_{m-2} \cup \{p, q, s, t\},$$

также является почти муфанговой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 3 и 5 имеем

$$\begin{aligned} f(p, v)\{p, q, v\}_s &= f(p, v)D(p, v)R(q, s) - f(p, p)D(v, q)R(v, s) \\ &= f(p, v)D(p, v)R(q, s) = 0, \end{aligned}$$

поскольку по условию функция $f(p, v)$ муфангова относительно p, v , а значит, D -функция. Следовательно, $f(p, v)\{q, s, v\}_t$ кососимметрична по p, q, s, t . Отсюда ввиду леммы 1 вытекает, что функция $f(B_{n+1} \mid P_{m+2})$ является муфанговой относительно переменных из множества P_{m+2} . Наконец, если вместо простой переменной подставить двойную переменную, то получим нуль: действительно, ввиду кососимметричности $f(p, v)\{q, s, v\}_t$ по простым переменным достаточно для функции $f(p, v)\{q, s, v\}_t$ рассмотреть подстановку $p = v$ и получить очевидным образом равенство $f(v, v) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. *Функция*

$$g(8) := g(a, b \mid x, y, z, p, q, s) := g_a(x, y, z, b)\{p, q, b\}_s$$

является почти муфанговой.

ЛЕММА 7. *Если $f(x, y, z, t)$ – муфангова функция относительно переменных x, y, z, t , то справедливы следующие свойства:*

- (а) *функция $h_a(x, y, z, t) := f(x, y, z, a)R(a, t)$ является D -функцией относительно переменных x, y, z, t и кососимметрична по этим переменным;*
- (б) $G_a(f(x, y, z, t), x, y, u, v) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Проверим сначала кососимметричность функции h_a по указанным переменным. В силу муфанговости функции f имеем:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, a)R(a, y) &= (f(x, y, z, a), a, y) = -(a, f(x, y, z, a), y) \\ &= -f(x, y, z, a)L(a)R(y) + f(x, y, z, a)R(y)L(a) \\ &= -f(xa, y, z, a)R(y) + f(x, y, yz, a)L(a) \\ &= -f(xa, y, yz, a) + f(xa, y, yz, a) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку ассоциатор является D -функцией, то D -функцией является и функция $h_a(x, y, z, t)$ относительно указанных переменных.

(б) Имеем:

$$\begin{aligned} G_a(f(x, y, z, t), x, y, u, v) &= f(x, y, z, t)R(x, a)\{y, u, a\}_v \\ &= f(x, y, z, t)\nabla_x(y, u, a)R(a, v) \quad (\text{на основании леммы 2 (б)}) \\ &= f(x, y, z, t)(R(x, y)D(u, a) + R(x, a)D(u, y) + R(x, u)D(a, y))R(a, v) \\ &= f(x, y, z, t)(R(x, a)D(u, y) + R(x, u)D(a, y))R(a, v) \quad (\text{в силу п. (а)}) \\ &= f(x, y, z, t)(-R(x, a)D(a, y)R(u, v)) \quad (\text{ввиду линеаризации по } a \\ &\quad \text{соотношения } R(x, a)D(a, y)R(a, v) = 0 \text{ [4; лемма 2]}) \\ &= f(x, y, z, t)R(x, a)D(y, a)R(u, v) = 0 \end{aligned}$$

(в силу п. (а) функция $f(x, y, z, t)R(x, a)$ является D -функцией по переменным y, a , значит, $(f(x, y, z, t)R(x, a))D(y, a) = 0$).

1.3. Вспомогательные функции типа G и F .

$$B_n = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}, \quad P_{2n} = \{p_1, \dots, p_{2n}\}.$$

Введем индукцией по n ($n \geq 1$) функции $G(3n+3) := G(B_n \mid P_{2n+3})$:

$$\begin{aligned} G(6) &:= G_{b_1}(p_1, p_2, x, y, z), \\ G(3n+6) &:= G(B_n \mid P_{2n}, p_{2n+1}, p_{2n+2}, b_{n+1}) \cdot \{x, y, b_{n+1}\}z \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Заметим, что функция $G(3n+3) = G(B_n \mid P_{2n}, x, y, z)$ имеет степень 2 по каждой переменной из множества B_n , а относительно каждой простой переменной эта функция линейна.

Наряду с функциями типа $G(n)$ введем еще одну серию функций:

$$\begin{aligned} F(3n+7) &= F(B_n, a, c \mid P_{2n}, x, y, z, t, v) \\ &= G_a(G(B_n \mid P_{2n}, x, y, c), c, z, t, v) \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

ЛЕММА 8. *Функции $G(3n+3)$, $F(3n+7)$ являются почти муфанговыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $G(3n+3)$ почти муфангова в силу леммы 6. Для проверки почти муфанговости функции $F(3n+7)$ достаточно заметить, что она обращается в нуль при $y = z$, что немедленно вытекает из леммы 7 (б).

§ 2. Основная лемма

Почти муфанговы функции являются тождествами конечно порожденных алгебр. Более точно, справедлива

ЛЕММА 9. *Пусть f_n — почти муфангова функция от n переменных. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- (а) *функция f_n является тождеством альтернативной алгебры ранга $n-1$;*
- (б) *если число простых переменных почти муфанговой функции f_n не меньше 5, то функция (f_n, u, v) является тождеством альтернативной алгебры ранга n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Докажем, что функция $f_n(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_n)$ обращается в нуль в альтернативной Ф-алгебре ранга $m := n-1$. Для этого достаточно проверить, что верно тождество

$$f_n(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_m, w(x_1, \dots, x_m)) = 0, \quad (2)$$

где $w(x_1, \dots, x_m)$ — произвольный многочлен от указанных переменных.

Проведем индукцию по степени одночлена $w := w(x_1, \dots, x_m)$. Основание индукции при $\deg w = 1$ следует из пп. (б) и (в) определения почти муфанговой функции. Для доказательства индукционного перехода заметим, что одночлен w является линейной комбинацией одночленов той же степени, что и w , вида $aT(b) \cdots T(c)$, где $a, b, \dots, c$ — элементы из множества $\{x_1, \dots, x_m\}$ порождающих алгебры. К каждому из одночленов вида $aT(b) \cdots T(c)$ применимо подходящее

M -тождество, значит, на основании индуктивного предположения получаем требуемое равенство (2) и для одночлена w .

(б) Пусть $A = \text{Alt}[x_1, \dots, x_n]$ – свободная альтернативная алгебра с множеством $\{x_1, \dots, x_n\}$ свободных порождающих.

Докажем индукцией по степени $\deg(w_1 w_2)$, что для любых одночленов w_1, w_2 от переменных $x_1, \dots, x_n$ верно тождество

$$(f_n, w_1, w_2) = 0. \quad (3)$$

Основание индукции верно в силу леммы 7 (а). Сделав индуктивное предположение и воспользовавшись правым линейаризованным тождеством Муфанг

$$(f_n, a, bc) + (f_n, b, ac) = (f_n, a, c)b + (f_n, b, c)a,$$

получаем, что без ограничения общности можно считать $\deg w_1 = 1$.

Обозначим через $I_2(A)$ линейное подпространство над полем Φ , порожденное в алгебре A квадратами всех элементов. Известно (см., например, [3; гл. 6, § 1]), что $I_2(A)$ – идеал в алгебре A и факторалгебра $A/I_2(A)$ нильпотентна индекса 4. Отсюда в силу индуктивного предположения и тождества $(f_n, a, b^2) = (f_n, a, b) \circ b$ получаем, что одночлен w_2 можно считать полилинейным длины ≤ 3 . Кроме того, без ограничения общности мы можем считать, что переменная w_1 не входит в состав одночлена w_2 .

Теперь для завершения доказательства тождества (3) осталось проверить равенство $(f_n, x_n, w) = 0$, где w – одночлен степени ≤ 3 , не содержащий переменной x_n . Снова в силу леммы 7 (а) функция $f(\cdot | \cdot, x, y, z, t, u)R(u, v)$ кососимметрична по переменным x, y, z, t, v , следовательно, без ограничения общности можно считать, что одночлен w имеет вид $w = (xy)z$ (случай, когда в одночлен w входит двойная переменная, легко получается линейаризацией). Тогда $f(\cdot | \cdot, x, y, z, t, u)R(u, w) = -f(\cdot | \cdot, x, y, z, w, u)R(u, t)$ и достаточно проверить, что $f(x, y, z, w) := f(\cdot | \cdot, x, y, z, w, u) = 0$. Имеем:

$$f(x, y, z, w) = f(x, y, z, (xy)z) = f(x, y, z, x)L(y)L(z) = 0.$$

Итак, мы доказали, что

$$(f_n, x_n, w) = 0, \quad \text{где } \deg w \leq 3 \text{ и } x_n \text{ не входит в состав } w.$$

Линейаризации последних тождеств подстановками $x_n \rightarrow x_i$ ($i \neq n$) показывают, что справедливы тождества $(f_n, x_i, w) = 0$, где $i = 1, \dots, n$; $\deg w \leq 3$. Тем самым тождества (3) доказаны.

§3. О значениях многочленов G_n, F_n, H_n на первичных коммутативных алгебрах

Всюду в этом параграфе S – первичная исключительная коммутативная альтернативная ниль-алгебра индекса 3 над полем характеристики 3; существование таких алгебр доказано в [5]. Пусть

$$H(3n+8) := H(B_n, a, c, d | P_{2n}, x, y, z, t, v) := F(B_n, a, c | P_{2n}, x, y, z, t, d)R(d, v).$$

Докажем, что в алгебре S не может выполняться ни одно из тождеств вида

$$H(3n + 8) = 0.$$

Попутно, очевидно, будет доказано, что многочлены G, F также ненулевые.

3.1. Слабо муфанговы функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(x, y)$, линейная по переменным x, y , называется *слабо муфанговой* (на алгебре S), если на S выполнены тождества:

$$f(x, x) = 0, \quad f(x^2, x) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Всякая слабо муфангова функция $f(x, y)$ на алгебре S удовлетворяет тождествам:

- (а) $f(x, y) = -f(y, x)$ — косоcимметричность;
- (б) $f(x^2, y) = f(xy, x)$;
- (в) $f(xy, z) = f(x, yz) + f(y, xz)$.

Действительно, указанные тождества получаются линеаризацией определяющих тождеств с учетом коммутативности алгебры S и условия на ее характеристику: $\text{char } S = 3$.

ЛЕММА 10. Пусть $f(x, y)$ — слабо муфангова функция на алгебре S . Тогда

- (а) $f((x_1, x_2, x_3), x_4) = ((14) + (24) + (34))f((x_1, x_2, x_3), x_4)$;
- (б) если $f((x, y, z), z) = 0$, то $f((x, y, z), t) = 0$;
- (в) если $f(x, y)$ — дифференцирование по x, y и $f((x, y, z), z) = 0$, то на алгебре S выполнено тождество $f(x, y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Используя свойства функции $f(x, y)$, перечисленные в замечании, получаем

$$\begin{aligned} f((x, y, z), t) &= f((xy)z, t) - f(x(yz), t) = f(xy, zt) + f(z, (xy)t) - f(yz, xt) \\ &\quad - f(x, (yz)t) = \{f(x, y(zt)) + f(y, x(zt))\} + f(z, (xy)t) \\ &\quad - \{f(y, z(xt)) + f(z, y(xt))\} - f(x, (yz)t) = \{f(x, y(zt)) - f(x, (yz)t)\} \\ &\quad + \{f(y, x(zt)) - f(y, z(xt))\} + \{f(z, (xy)t) - f(z, y(xt))\} \\ &= -f(x, (y, z, t)) + f(y, (z, t, x)) + f(z, (y, x, t)) \\ &= f((t, y, z), x) + f((x, t, z), y) + f((x, y, t), z). \end{aligned}$$

(б) Допустим теперь, что $f((x, y, z), z) = 0$. Тогда функция $f((x, y, z), t)$ косоcимметрична относительно указанных переменных и из п. (а) получаем

$$f((x, y, z), t) = f((t, y, z), x) + f((x, t, z), y) + f((x, y, t), z) = 3f((x, y, z), t) = 0.$$

(в) Наконец, если $f(x, y)$ — дифференцирование и $f((x, y, z), z) = 0$, то в силу п. (б) $f((x, y, z), t) = 0$, т.е. $f(V, S) = (0)$, где V — подпространство, порожденное всеми ассоциаторами алгебры S . Тогда $f(V^2, S) = (0)$ и, значит, $f(W, S) = (0)$, где W — идеал алгебры S , порожденный множеством (V, S, S) (см. [6]). Учитывая, что f — дифференцирование, получаем: $f(S, S)$ содержится в аннуляторе ненулевого идеала W , откуда в силу первичности S получаем требуемое утверждение.

3.2. О некоторых центрах первичных алгебр.

ЛЕММА 11. Ассоциативный центр $N_{\text{Ass}}[S]$ алгебры S нулевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p \in N_{\text{Ass}}[S]$, то идеал алгебры S , порожденный элементом p , имеет вид $(p) = \Phi p + pS$, значит, $(p)^2 = (p^2)$ и $(p)^3 = (0)$. Так как первичная алгебра не имеет нильпотентных идеалов, то $p = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $P_x(y, z, t) := ((y, x, z), x, t)$. Центром $N_P[S]$ функции P в алгебре S называется множество

$$N_P[S] := \{p \in S : P_x(p, y, z) = 0 \quad \forall x, y, z \in S\}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Центр $N_P[S]$ алгебры S нулевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что функция $f(x, y) := (x, y, p)$, где $p \in N_P[S]$, удовлетворяет всем условиям леммы 10 (в), следовательно, $(x, y, p) = 0$ для любых элементов $x, y \in S$, т.е. $p \in N_{\text{Ass}}[S]$, и ввиду леммы 11 имеем $p = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Центром $N_G[S]$ функции G в алгебре S называется множество:

$$N_G[S] := \{p \in S : G_x(p, y, z, t, v) = 0 \quad \forall x, y, z, t, v \in S\}.$$

ЛЕММА 12. Центр $N_G[S]$ алгебры S нулевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in N_G[S]$, т.е. на основании леммы 3 для любых $x, y, z, t, v \in S$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} pR(y, x)R(z, x)R(t, v) &= pR(y, z)R(x, t)R(x, v), \\ ((p, y, x), z, x), t, v &= ((p, y, z), x, t), x, v. \end{aligned} \quad (4)$$

После линейаризации тождества (4) подстановкой $x \rightarrow x^2$ на основании тождеств $(a, b^2, c) = (a, b, b \circ c) = (a, b, c) \circ b$ получаем

$$(((p, y, x), z, x) \circ x, t, v) = (((p, y, z), x, t), x, v) \circ x, \quad (5)$$

следовательно,

$$((p, y, x), z, x)(x, t, v) = 0. \quad (6)$$

Далее, оператор $R(a, b)$ является дифференцированием алгебры S , значит, центр функции G замкнут относительно оператора $R(a, b)$, т.е.

$$N_G[S]R(a, b) \subseteq N_G[S]. \quad (7)$$

Учитывая соотношения (4) и (7), имеем

$$N_G[S]R(y, x)R(z, x)R(t, v) = N_G[S]R(y, z)R(x, t)R(x, v) \subseteq N_G[S]R(t, x)R(v, x),$$

следовательно, полагая $M(x) := ((N_G, S, x), S, x)$, имеем

$$M(x)R(S, S) \subseteq M(x). \quad (8)$$

Далее, тождество (6) в этих обозначениях принимает вид

$$M(x) \cdot (x, S, S) = (0). \quad (9)$$

Поскольку $R(a, x)R(b, x)R(c, x) = 0$ (см. [4; лемма 2]), то

$$(M(x), S, x) = (0)$$

и для любого $m \in M(x)$ имеем:

$$(m, a, (x, b, c)) = ((m, a, x), b, c) - ((m, b, c), a, x) - (m, (a, b, c), x) = 0,$$

откуда

$$(M(x), S, (x, S, S)) = (0). \quad (10)$$

Заметим теперь, что в силу (8) $M(x) + M(x)S$ является идеалом алгебры S , причем на основании (9) и (10) это идеал с нулевым умножением, значит, он равен нулю, т.е. $((N_G, S, x), S, x) = (0)$. Отсюда $N_G[S] \subseteq N_P[S]$. Поскольку $N_P[S] = (0)$ ввиду следствия из леммы 11, то центр $N_G[S]$ также нулевой.

3.3. Редукция от функции G к ассоциатору.

ЛЕММА 13. *Допустим, что a, b – такие элементы алгебры S , что для любых элементов x, y, z, t алгебры S верно равенство $G_x(a, b, y, z, t) = 0$. Тогда $(a, b, S) = (0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5) := G_x((a, b, \xi_1), \xi_2, \dots, \xi_5).$$

Докажем, что эта функция кососимметрична по переменным типа ξ . Для этого достаточно понять, что она обращается в нуль при $\xi_1 = \xi_2 = \xi$.

Вначале заметим, что

$$G_x((r, s, y), r, s, z, t) = 0; \quad (11)$$

действительно, в силу муфанговости функции G_x имеем

$$\begin{aligned} G_x((r, s, y), r, s, z, t) &= -G_x((r, y, s), r, s, z, t) \\ &= -G_x((ry)s, r, s, z, t) + G_x(r(y)s, r, s, z, t) \\ &= -G_x(ry, r, s, z, st) + G_x(ys, r, s, zr, t) \\ &= -G_x(y, r, s, zr, st) + G_x(y, r, s, zr, st) = 0. \end{aligned}$$

Из (11) вытекает кососимметричность функции $G_x((p, q, \xi), \xi, r, z, t)$ по переменным p, q, r, z, t , следовательно,

$$\begin{aligned} G_x((a, b, \xi), \xi, y, z, t) &= -G_x((y, b, \xi), \xi, a, z, t) \\ &= G_x((y, z, \xi), \xi, a, b, t) \in G_x(a, b, S, S, S) = (0). \end{aligned}$$

Тем самым доказана кососимметричность функции $f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5)$ по переменным типа ξ .

Далее, учитывая, что оператор $R(r, s)$ является дифференцированием алгебры S , получаем также (ввиду условия леммы) симметричность функции $G_x((a, r, s), b, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$ по переменным a, b . Поскольку функция $f_2(p, q) := G_x(p, q, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$ является слабо муфанговой, то в силу леммы 10 (а) верно равенство:

$$f_2((a, r, s), b) = f_2((b, r, s), a) + f_2((a, b, s), r) + f_2((a, r, b), s),$$

из которого в силу симметричности $f_2((a, r, s), b)$ по переменным a, b имеем

$$f_2((a, b, s), r) + f_2((a, r, b), s) = 0,$$

т.е. функция $f_2((a, b, s), r)$ симметрична по r, s . Итак, функция

$$G_x((a, b, \xi_1), \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$$

одновременно симметрична и кососимметрична по переменным ξ_1 и ξ_2 , значит, она является нулевой. Таким образом, (a, b, S) содержится в центре $N_G[S]$ и, значит, в силу леммы 12 получаем требуемое утверждение.

3.4. Опровержение тождеств типа G, F, H .

ТЕОРЕМА 1. *В первичной исключительной коммутативной альтернативной алгебре S все функции типа G, F, H являются ненулевыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно, очевидно, доказать утверждение только для функций типа H . Итак, допустим, что $H(3n + 8) = 0$ — тождество алгебры S .

Тогда $F(B_n, a, c \mid P_{2n}, x, y, z, t, d)R(d, v) = 0$ и, вводя дифференцирование $rD := F(B_n, a, c \mid P_{2n}, x, y, z, t, r)$, получаем в силу тождества $(rD, r, s) = 0$:

$$\begin{aligned} (q, r, s)D &= (qD, r, s) + (q, rD, s) + (q, r, sD) \\ &= (qD, r, s) - (r, qD, s) - (s, r, qD) = 3(qD, r, s) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, рассуждая аналогично доказательству леммы 10 (в), имеем

$$F(B_n, a, c \mid P_{2n}, x, y, z, t, W(S)) = (0), \quad \text{т.е.} \quad F(B_n, a, c \mid P_{2n}, x, y, z, t, d) = 0.$$

Последнее равенство принимает вид $G_a(G(B_n \mid P_{2n}, x, y, c), c, z, t, v) = 0$. Тогда в силу леммы 13 получаем $G(B_n \mid P_{2n}, x, y, c)R(c, z) = 0$. Применяя теперь для дифференцирования $rD := G(B_n \mid P_{2n}, x, y, r)$ аналогичные рассуждения, приходим к равенству $G(B_n \mid P_{2n}, x, y, W(S)) = (0)$, т.е. $G(B_n \mid P_{2n}, x, y, z) = 0$.

Используя лемму 2, по индукции легко проверить, что функция $G(3n + 3)$ допускает представление:

$$G(B_n \mid P_{2n+3}) = p_1 \nabla_{p_2}(p_3, p_4, b_1) \cdot \left(\prod_{i=2}^n \nabla_{b_{i-1}}(p_{2i+1}, p_{2i+2}, b_i) \right) R(b_n, p_{2n+3}).$$

Тогда на основании той же леммы 2 имеем

$$G_{b_n}(Q_{n-1}, b_{n-1}, p_{2n+1}, p_{2n+2}, p_{2n+3}) = 0,$$

где

$$Q_{n-1} = p_1 \nabla_{p_2}(p_3, p_4, b_1) \cdot \left(\prod_{i=2}^{n-1} \nabla_{b_{i-1}}(p_{2i+1}, p_{2i+2}, b_i) \right).$$

Применяя теперь лемму 13, получаем равенство $(Q_{n-1}, b_{n-1}, p_{2n+1}) = 0$, которое в принятых обозначениях имеет вид $G(B_{n-1} \mid P_{2n+1}) = 0$. Тем самым, по индукции получаем, что в алгебре S выполнено тождество $G(6) = 0$, но тогда алгебра S в силу леммы 13 должна быть ассоциативна. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

§ 4. Цепочки многообразий

4.1. Формулировка основных результатов. Пусть, как и прежде, Φ – поле характеристики 3; $\text{Alt}_n \Phi$ – многообразие Φ -алгебр, порожденное свободной альтернативной Φ -алгеброй ранга n .

ТЕОРЕМА 2. Пусть V – произвольное многообразие альтернативных алгебр над полем Φ характеристики 3, содержащее хотя бы одну исключительную первичную коммутативную алгебру. Тогда в цепочке многообразий

$$V_8 \subset V_9 \subset \dots \subset V_n \subset \dots$$

все включения строгие.

ТЕОРЕМА 3. В цепочке многообразий $\text{Alt}_4 \Phi \subset \dots \subset \text{Alt}_n \Phi \subset \dots$ альтернативных алгебр над полем Φ характеристики 3 все включения строгие.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. В цепочке многообразий $\text{Alt}_1 \Phi \subset \dots \subset \text{Alt}_n \Phi \subset \dots$ альтернативных алгебр над полем Φ характеристики 3 все включения строгие.

4.2. Доказательство теорем. Проще всего доказать теорему 2. Из леммы 9 и теоремы 1 вытекает, что функции $G(3n+3)$, $F(3n+4)$, $H(3n+5)$ ($n \geq 2$) являются нетривиальными тождествами V -свободных алгебр ранга $3n+2$, $3n+3$, $3n+4$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Заметим, что в силу теоремы 2 и существования исключительной первичной коммутативной альтернативной Φ -алгебры в цепочке многообразий $\text{Alt}_4 \subset \text{Alt}_5 \subset \dots \subset \text{Alt}_n \subset \dots$ все включения строгие, за исключением, быть может, начального отрезка $\text{Alt}_4 \subset \dots \subset \text{Alt}_8$. Для доказательства строгости включений на этом отрезке достаточно проверить утверждения:

- а) функция $g(5)$ различает многообразия Alt_4 и Alt_5 ;
- б) функция $G(6)$ различает многообразия Alt_5 и Alt_6 ;
- в) функция $G_a(x, y, z, t, p)R(p, v)$ различает многообразия Alt_6 и Alt_7 ;
- г) функция $g(8)$ различает многообразия Alt_7 и Alt_8 .

Указанные функции, как следует из результатов §2, на самом деле являются тождествами свободных альтернативных алгебр соответствующего ранга, например $g(8) = 0$ – тождество в алгебре ранга 7. Осталось убедиться, что эти четыре функции не являются тождествами свободной альтернативной алгебры.

Для функций из пп. б) и в) это утверждение было доказано в § 3. Покажем, что функция $g(8)$ принимает ненулевые значения на свободной центрально метабелевой альтернативной алгебре F . Итак, допустим от противного, что $g(8) = 0$ на алгебре F (напомним, что алгебра F называется *центрально метабелевой*, если $(F^2)^2 \subseteq \text{Ann } F$). Тогда

$$[x, a]\{y, z, a\}_b\{p, q, b\}_s = 0. \quad (12)$$

Пусть $v, w \in F^2$. Поскольку по модулю $\text{Ann } F$ имеем $p(ab)p = (pa)(bp) = 0$ (ввиду центрального тождества Муфанга), то

$$\begin{aligned} vD(p, q) &= (v \circ p) \circ q - (v \circ q) \circ p = 2(v \circ p) \circ q = 2(v \circ p)q + 2q(v \circ p) \\ &= 2p(vq) + 2(qv)p = 2(qv)p - 2q(vp) = 2(q, v, p) = 2(vp)q. \end{aligned}$$

Выполнив линеаризацию $a \rightarrow v$ тождества (12), получим

$$\begin{aligned} 0 &= [x, v]\{y, z, a\}_b\{p, q, b\}_s \\ &= 2[x, v]\{R(y, z)R(a, b) + R(a, z)R(y, b) + R(y, a)R(z, b)\}\{p, q, b\}_s \\ &= 2[x, v]R(y, a)R(z, b)\{p, q, b\}_s; \end{aligned}$$

линеаризация по $b \rightarrow w$ последнего тождества дает:

$$\begin{aligned} 0 &= 2[x, v]R(y, a)R(z, b)\{p, q, w\}_s \\ &= [x, v]R(y, a)R(z, b)\{R(p, q)R(w, s) + R(w, q)R(p, s) + R(p, w)R(q, s)\} \\ &= [x, v]R(y, a)R(z, b)R(p, q)R(w, s). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[F^2, F]R^6(F) \cdot F^3 = (0).$$

Однако, как следует из [7], последнее невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.

Основная теорема вытекает из теоремы 3 и классических результатов Артина, Дорофеева, Хумм и Клейнфельда (см. [3]).

§ 5. Нильпотентность разрешимых алгебр из многообразий Alt_n

ЛЕММА 14. Пусть A — свободная конечно порожденная альтернативная алгебра над произвольным полем ранга n ; $f(x, y, z, t)$ — муфангова функция на алгебре A , записанная в виде линейной комбинации ассоциаторов; $R^*(A, A)$ — подалгебра алгебры умножений, порожденная операторами $R(a, b)$. Тогда алгебра $R^*(A, A)$ действует нильпотентно на идеале (f) , порожденном функцией f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала тождество

$$(f(a, b, x, y), a, b) = 0. \quad (13)$$

Используя кососимметричность ассоциатора, преобразуем выражение в левой части

$$\begin{aligned} (f(a, b, x, y), a, b) &= -(a, f(a, b, x, y), b) \\ &= -f(a, b, x, y)L(a)R(b) + f(a, b, x, y)R(b)L(a). \end{aligned}$$

Преобразуем теперь каждое из полученных слагаемых, применяя муфанговость функции f :

$$\begin{aligned} f(a, b, x, y)L(a)R(b) &= f(a, b, xa, y)R(b) = f(a, b, xa, by), \\ f(a, b, x, y)R(b)L(a) &= f(a, b, x, by)L(a) = f(a, b, xa, by). \end{aligned}$$

Тем самым тождество (13) доказано.

Аналогично тождеству (13) проверяется, что $f(a, b, x, y)[R(a), R(b)] = 0$:

$$f(a, b, x, y)R(a)R(b) = f(a, b, ax, by) = f(a, b, ax, y)R(b)R(a).$$

Отсюда ввиду тождества (13) имеем

$$f(a, b, x, y)[a, b] = 0, \quad (14)$$

поскольку $f(a, b, x, y)[a, b] = f(a, b, x, y)[R(a), R(b)] = 0$.

Далее, из тождества (14) вытекает

$$f(a, b, x, y) \cdot [a, b]^4 = 0. \quad (15)$$

Последовательная линейаризация тождества (15) по переменной a , а затем по переменной b приводит к тождествам вида:

$$f(r, b, x, y) \cdot [a, b]^4 + f(a, b, x, y) \cdot w_r(a, b) = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} f(r, s, x, y) \cdot [a, b]^4 + f(r, b, x, y) \cdot w_s(b, a) \\ + f(a, s, x, y) \cdot w_r(a, b) + f(a, b, x, y) \cdot w_{r,s}(a, b) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $w_r(a, b) = \Delta_a^1(r)[a, b]^4$ и $w_{r,s}(a, b) = \Delta_b^1(s)w_r(a, b)$.

Поскольку функции $[a, b]^4$, $w_r(a, b)$, $w_{r,s}(a, b)$ содержатся в ассоциативном центре $N_{\text{Ass}}[A]$ и перестановочны с произвольным ассоциатором, то справедливы равенства:

$$\begin{aligned} f(r, b, x, y) \cdot [a, b]^4 &= w \cdot f(a, b, x, y), \\ f(r, s, x, y) \cdot [a, b]^4 &= \sum_i w_i \cdot f(u, v, x, y), \end{aligned}$$

где $u \in \{a, b\}$, $w, w_i \in N_{\text{Ass}}[A]$. Используя тождества (16) и (17), получаем для некоторого $w \in N_{\text{Ass}}[A]$

$$f(r, s, x, y) \cdot [a, b]^8 = w \cdot f(a, b, x, y).$$

Откуда в силу (15) имеем

$$f(r, s, x, y) \cdot [a, b]^{12} = 0. \quad (18)$$

Напомним, что во всякой альтернативной алгебре A для элемента $w \in N_{\text{Ass}}[A]$ справедливы утверждения (см. [3; гл. 7, §§ 1, 2]):

- а) если $w \in N_{\text{Ass}}[A]$, то $\text{Ideal}(w) = A^\# w A^\#$;
 - б) $[w, A] \in N_{\text{Ass}}[A]$;
 - в) если $w \in N_{\text{Ass}}[A]$, то $[w, (A, A, A)] = (0)$.
- Положим для сокращения записи

$$f := f(r, s, x, y), \quad w := [a, b]^{12}$$

и проверим справедливость тождества:

$$f(pw^2q) = 0. \quad (19)$$

Учитывая (18) и приведенные утверждения об ассоциативном центре, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} f(w^2p) &= (fw^2)p = 0, \\ f[p, w^2] &= f(w \circ [p, w]) = (fw)[p, w] + (f[p, w])w = ([p, w]f)w = [p, w](fw) = 0, \\ f(pw^2) &= f(w^2p) + f[p, w^2] = 0, \\ (f, pw^2, q) &= (f, w^2p, q) = (f(w^2p))q - f((w^2p)q) = -f((w^2p)q) \\ &= -f(w^2(pq)) = 0, \\ f(pw^2q) &= (f(pw^2))q = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство $f \cdot (w^2) = (0)$ и, аналогично, $(w^2) \cdot f = (0)$, следовательно, идеал (w^2) содержится в аннуляторе идеала (f) . Применив теперь теорему Шестакова [8] об ассоциаторной нильпотентности конечно порожденных альтернативных алгебр с тождеством $[x, y]^m = 0$, получим требуемое в лемме утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *В многообразии Alt_n альтернативных алгебр конечного базисного ранга над полем характеристики 3 всякая разрешимая алгебра нильпотентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу редукции Дорофеева [9] теорему достаточно доказать для произвольной метабелевой (разрешимой индекса 2) алгебры из многообразия Alt_n . Пусть B – метабелева алгебра из многообразия Alt_n . По лемме 14 существует число N , зависящее только от ранга n , такое, что в многообразии Alt_n справедливо тождество

$$G_x(y, z, t, u, v)R(a_1, a_2) \cdots R(a_{2N-1}, a_{2N}) = 0.$$

Тогда после линеаризации по x имеем в алгебре B :

$$\begin{aligned} 0 &= G_{rs,x}(y, z, t, u, v)R(a_1, a_2) \cdots R(a_{2N-1}, a_{2N}) \\ &= (y, z, rs)D(x, t)R(u, v)R(a_1, a_2) \cdots R(a_{2N-1}, a_{2N}) \\ &= 2((rs, y), x, t)R(u, v)R(a_1, a_2) \cdots R(a_{2N-1}, a_{2N}) \\ &= 2(rs)R(y)R(z)R(x)R(t)R(u)R(v)R(a_1)R(a_2) \cdots R(a_{2N-1})R(a_{2N}), \end{aligned}$$

следовательно, алгебра B нильпотентна.

Теорема 4 для альтернативных алгебр над полем характеристики 0 доказана И. П. Шестаковым [1], ее аналог для алгебр характеристики, отличной от 2 и 3, был получен В. Т. Филипповым [2].

Список литературы

1. Шестаков И. П. Об одной проблеме Ширшова // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. №2. С. 227–246.
2. Филиппов В. Т. О цепочках многообразий, порожденных свободными мальцевскими и альтернативными алгебрами // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. №5. С. 1082–1085.
3. Жевлаков К. А., Слинко А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
4. Пчелинцев С. В. О кручении свободного альтернативного кольца // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32. №6. С. 142–149.
5. Пчелинцев С. В. О нильпотентных элементах и ниль-радикалах альтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. №6. С. 674–695.
6. Пчелинцев С. В. Теорема о высоте для альтернативных алгебр // Матем. сб. 1984. Т. 124. №4. С. 557–567.
7. Пчелинцев С. В. Разрешимость и нильпотентность альтернативных алгебр и алгебр типа $(-1, 1)$ // Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности. Новосибирск: Наука, 1984. С. 81–101.
8. Шестаков И. П. Альтернативные алгебры с тождеством $[x, y]^m = 0$ // Алгебра и логика. 1981. Т. 20. №5. С. 575–596.
9. Дорофеев Г. В. О локально нильпотентном радикале неассоциативных колец // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. №4. С. 355–364.

Московский городской педагогический университет

Поступила в редакцию
17.10.2000