Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Существование оптимального управления без предположения выпуклости в эволюционной системе первого порядка, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 9, 125–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm597>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:18:10

УДК 517.97

А. А. Толстоногов

Существование оптимального управления без предположения выпуклости в эволюционной системе первого порядка

Доказывается теорема существования в задаче оптимального управления с ограничениями, описываемой линейным эволюционным уравнением первого порядка. Мы не делаем общепринятых предположений выпуклости, относящихся к управлению. Результат получен путем использования свойств многозначного интеграла и условий квазивогнутости, относящихся к переменной состояния. Подробно рассмотрен пример управляемой параболической системы.

Библиография: 20 названий.

Введение и постановка задачи

Проблема существования оптимального управления занимает принципиальное место в теории оптимальных процессов. Как отмечает Л. Янг [1], теория необходимых условий оптимальности является наивной, если не выяснен вопрос о существовании решения вариационной задачи в заданном классе допустимых функций. Историю проблемы и существующие подходы к ее решению можно найти в приложении к обзору [2]. В подавляющем большинстве публикаций, посвященных существованию оптимального управления в системах, описываемых уравнениями в частных производных или эволюционными уравнениями, рассматриваются выпуклые задачи (см., например, [3]–[7] и др.). Термин “выпуклость” подразумевает, что множество допустимых управлений является выпуклым и минимизируемый функционал является выпуклой по управлению функцией. При изучении подобных задач, как правило, используется метод Лебега–Тонелли, который состоит в доказательстве полунепрерывности снизу минимизируемого функционала на компактном множестве допустимых кривых. В конечном итоге доказательство существования решения задачи сводится к применению классической теоремы Вейерштрасса в соответствующих функциональных пространствах.

К невыпуклым относятся задачи, в которых множество допустимых управлений не является выпуклым, а минимизируемый функционал не является выпуклой по управлению функцией. Невыпуклые задачи оптимального управления, описываемые уравнениями в частных производных, изучались в работах [8]–[12]. Поскольку не существует достаточно общих схем для изучения таких задач, то в каждой из указанных выше работ рассматриваются конкретные управляемые системы с конкретным видом минимизируемого функционала и с конкретными ограничениями.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00216).

Следует отметить, что подавляющее большинство результатов по невыпуклым задачам было получено путем использования различных версий теоремы Ляпунова о выпуклости и замкнутости множества значений неатомической меры в конечномерном пространстве или ее следствия о выпуклости и замкнутости многозначного интеграла (см., например, [3]).

В настоящей работе рассматривается следующая задача.

Пусть $T = [0, 1]$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^N$, $H = L^2(\Omega)$ и V – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, которое плотно, непрерывно и компактно вложено в H . Отождествляя H с его топологически сопряженным, мы имеем $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$, где V^* – пространство, топологически сопряженное к V . При этом все вложения являются непрерывными, плотными и компактными. Такая тройка пространств обычно называется *эволюционной* или *тройкой Гельфанда*.

Пусть $\mathcal{L}(V, V^*)$ – пространство непрерывных линейных операторов из V в V^* . Как обычно, пространство $\mathcal{H} = L^2(T, L^2(\Omega))$ мы отождествляем с пространством $L^2(T \times \Omega)$, используя для элемента $u \in \mathcal{H}$ представление $u(t)(z) = u(t, z)$, $t \in T$, $z \in \Omega$. Всюду в дальнейшем сокращение п.в. означает почти всюду.

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(t)x(t) &= u(t) & \text{п.в.,} \\ x(0) &= x_0 \in H, & u \in \mathcal{H}, \end{aligned} \quad (0.1)$$

с ограничениями на управление

$$u(t)(z) = u(t, z) \in U(t, z) \quad \text{п.в.,} \quad (0.2)$$

где $A(t) \in \mathcal{L}(V, V^*)$, а $U: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ является многозначным отображением с замкнутыми, не обязательно выпуклыми значениями.

Мы изучаем *задачу (P)* минимизации функционала

$$J(x, u) = G(x) + F(u) \quad (0.3)$$

на решениях управляемой системы (0.1), (0.2) при ограничениях

$$\Phi_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (0.4)$$

$$Q_j(u) \leq d_j, \quad j = 1, \dots, l, \quad (0.5)$$

где

$$F(u) = \int_T \int_\Omega f(t, z, u(t, z)) dz dt. \quad (0.6)$$

Здесь $G: C(T, H) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\Phi_i: C(T, H) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $Q_j: \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ являются квазивогнутыми функциями, а функция $f: T \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ является невыпуклым нормальным интегрантом (см. [13; гл. 8, § 1, определение 1.1]).

При определенных предположениях о полунепрерывности снизу соответствующих функций и условиях их роста мы доказываем, что задача (P) имеет решение.

Работа состоит из введения и пяти параграфов.

Во введении дается постановка задачи.

В §1 вводятся основные обозначения, предположения и формулируется основной результат.

В §2 доказывается ряд вспомогательных результатов, которые используются при доказательстве основной теоремы.

В §3 рассматривается овыпукленная, так называемая релаксационная, задача и доказывается существование решения этой задачи.

Четвертый параграф посвящен доказательству основного результата.

В §5 рассматривается пример управляемой параболической системы.

§1. Основной результат

Пусть (V, H, V^*) – эволюционная тройка пространств с нормами $\|\cdot\|, |\cdot|, \|\cdot\|_*$. Под $\langle x, x' \rangle$, $x \in V$, $x' \in V^*$, мы понимаем каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между V и V^* , а $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в H . Мы считаем, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ согласованы, т.е. сужение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $V \times H$ совпадает с $(\cdot, \cdot)$.

Введем следующие пространства: $\mathcal{V} = L^2(T, V)$, $\mathcal{H} = L^2(T, H)$, $\mathcal{V}^* = L^2(T, V^*)$ и $W = \{\nu \in \mathcal{V}; \dot{\nu} \in \mathcal{V}^*\}$, где производная $\dot{\nu}$ понимается в смысле векторных распределений.

Пространство W с нормой $\|\nu\| = (\|\nu\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\dot{\nu}\|_{\mathcal{V}^*}^2)^{1/2}$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством и $W \hookrightarrow \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$. Известно, что любой элемент $\nu \in W$ после изменения на множестве меры нуль можно отождествить с элементом пространства $C(T, H)$. При этом вложение $W \hookrightarrow C(T, H)$ является непрерывным, а вложение $W \hookrightarrow \mathcal{H}$ является компактным [14].

Пусть Z – отделимое локально выпуклое пространство (о.л.в.п.). Функция $g: Z \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *квазивогнутой*, если для любых $z_1, z_2 \in Z$, $0 \leq \lambda \leq 1$ имеет место неравенство

$$g(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \geq \min(g(z_1), g(z_2)). \quad (1.1)$$

Многозначное отображение $U: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *измеримым*, если для любого замкнутого множества $C \subset \mathbb{R}$ множество $\{(t, z) \in T \times \Omega; U(t, z) \cap C \neq \emptyset\}$ измеримо.

Сделаем следующие предположения.

ГИПОТЕЗЫ Н(А). $A(t) \in \mathcal{L}(V, V^*)$ является оператором таким, что:

- (1) отображение $t \rightarrow A(t)x$ измеримо для любого $x \in V$;
- (2) $\langle x, A(t)x \rangle \geq c_1 \|x\|^2$, $c_1 > 0$, для всех $t \in T$;
- (3) $\|A(t)x\|_* \leq c_2 \|x\|$, $c_2 > 0$, для всех $t \in T$.

ГИПОТЕЗА Н(У). $U: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ является измеримым многозначным отображением с замкнутыми значениями.

ГИПОТЕЗА Н(G). $G: C(T, H) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ является полунепрерывной снизу квазивогнутой функцией, удовлетворяющей неравенству

$$G(x) \geq -\beta_1 \|x\|_{C(T, H)}^2 - \beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 > 0. \quad (1.2)$$

ГИПОТЕЗА Н(f). $f: T \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ является невыпуклым нормальным интегрантом, удовлетворяющим неравенству

$$f(t, z, u) \geq \alpha_1 \|u\|_{\mathbb{R}}^2 - \alpha_2(t, z) \quad \text{п.в. на } T \times \Omega \quad (1.3)$$

для любого $u \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$.

ГИПОТЕЗА Н(Φ). $\Phi_i: C(T, H) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, \dots, k$, является полунепрерывной снизу квазивогнутой функцией.

ГИПОТЕЗА Н(Q). $Q_j: \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $j = 1, \dots, l$, является квазивогнутой функцией, полунепрерывной снизу в слабой топологии пространства $\mathcal{H}$.

Хорошо известно [14], что в рамках гипотез Н(A) для любого $u \in \mathcal{H}$ уравнение (0.1) имеет единственное решение $x \in W \hookrightarrow C(T, H)$.

Под *решением управляемой системы* (0.1), (0.2) мы понимаем пару $(x, u) \in W \times \mathcal{H} \hookrightarrow C(T, H) \times \mathcal{H}$, удовлетворяющую соотношениям (0.1), (0.2).

Пару $(x, u) \in W \times \mathcal{H} \hookrightarrow C(T, H) \times \mathcal{H}$ назовем *допустимой* для задачи (P), если она является решением управляемой системы (0.1), (0.2) и удовлетворяет ограничениям (0.4), (0.5).

Сделаем еще одно предположение.

ГИПОТЕЗА Н(J). Существует допустимая пара (x^*, u^*) задачи (P) такая, что

$$J(x^*, u^*) < \infty. \quad (1.4)$$

Всюду в дальнейшем мы считаем, что гипотезы Н(A), Н(U), Н(G), Н(f), Н(Φ), Н(Q), Н(J) имеют место.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Если $\alpha_1 > 2\beta_1$, то задача (P) имеет решение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Примером функции Q_j может служить функция

$$Q_j(u) = \min_{1 \leq i \leq m_j} \{q_{ji}(u) + r_{ji}\}, \quad r_{ji} \in \mathbb{R},$$

где $q_{ji}(\cdot)$ — непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathcal{H}$.

§2. Вспомогательные результаты

Пусть Z — отделимое локально выпуклое пространство, Z^* — его топологическое и сопряженное и $\langle z, z' \rangle_Z$ — каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между Z и Z^* .

ЛЕММА 2.1. Пусть $g: Z \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — полунепрерывная снизу квазивогнутая функция. Тогда для любого элемента $z_* \in Z$ существует элемент $z'_* \in Z^*$ такой, что

$$g(z_*) = \sup \{g(z); \langle z, z'_* \rangle_Z = \langle z_*, z'_* \rangle_Z\}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный фиксированный элемент $z_* \in Z$. Тогда очевидно, что для любого элемента $z' \in Z^*$ справедливо неравенство

$$g(z_*) \leq \sup\{g(z); \langle z, z' \rangle_Z = \langle z_*, z' \rangle_Z\}. \quad (2.2)$$

Если

$$g(z_*) = \sup\{g(z); z \in Z\},$$

то равенство (2.1) имеет место при любом $z'_* \in Z^*$.

Предположим, что

$$g(z_*) < \sup\{g(z); z \in Z\}.$$

Из неравенства (1.1) вытекает, что для любого $m \leq \sup\{g(z); z \in Z\}$ множество $\{z \in Z; g(z) > m\}$ является непустым и выпуклым. Тогда, воспользовавшись полунепрерывностью снизу функции $g(z)$, получаем, что множество

$$L = \{z \in Z; g(z) > g(z_*)\}$$

является непустым, выпуклым, открытым и $z_* \notin L$. Следовательно, согласно следствию 1.1 из [13; гл. 1, § 1] существует элемент $z'_* \in Z^*$ такой, что

$$\langle z, z'_* \rangle_Z > \langle z_*, z'_* \rangle_Z \quad \forall z \in L.$$

Поэтому

$$g(z) \leq g(z_*) \quad (2.3)$$

для любого $z \in Z$, удовлетворяющего неравенству

$$\langle z, z'_* \rangle_Z \leq \langle z_*, z'_* \rangle_Z.$$

Теперь справедливость равенства (2.1) вытекает из неравенств (2.2), (2.3). Лемма доказана.

Пусть X – о.л.в.п. Оператор $P: X \rightarrow Z$ называется *аффинным*, если

$$Px = z_0 + P_1x,$$

где $z_0 \in Z$ – некоторый фиксированный элемент, а $P: X \rightarrow Z$ – линейный оператор.

Очевидно, что если $P: X \rightarrow Z$ – аффинный оператор, а $g: Z \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – квазивогнутая функция, то функция $\tilde{g}: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\tilde{g}(x) = g(Px)$, $x \in X$, является квазивогнутой.

Пусть $B_{\mathcal{H}}(r) = \{u \in \mathcal{H}; \|u\|_{\mathcal{H}} \leq r\}$, $r > 0$, и $\mathcal{R}_r(x_0)$ – совокупность всех решений уравнения (0.1) с $u \in B_{\mathcal{H}}(r)$.

ЛЕММА 2.2. *Существуют $M_i > 0$, $i = 0, \dots, 4$, такие, что для любого $x \in \mathcal{R}_r(x_0)$ справедливы оценки*

$$|x(t)| \leq M_1, \quad t \in T, \quad (2.4)$$

$$\|x\|_{\mathcal{V}} \leq M_2, \quad (2.5)$$

$$\|\dot{x}\|_{\mathcal{V}^*} \leq M_3, \quad (2.6)$$

$$\|x\|_W \leq M_4. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \mathcal{R}_r(x_0)$ — решение уравнения (0.1), соответствующее $u \in B_{\mathcal{H}}(r)$. Тогда

$$\langle x(t), \dot{x}(t) \rangle + \langle x(t), A(t)x(t) \rangle = (x(t), u(t)) \quad \text{п.в.}$$

Из этого равенства и гипотезы Н(А) (2) следует

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x(t)|^2 + c_1 \|x(t)\|^2 \leq |u(t)| \cdot |x(t)| \quad \text{п.в.} \quad (2.8)$$

Так как V вложено в H непрерывно, то существует $\gamma > 0$ такое, что $|\cdot| \leq \gamma \|\cdot\|$. Воспользовавшись неравенством Коши для $\varepsilon > 0$, мы получим

$$|f(t)| \cdot |x(t)| \leq \gamma |u(t)| \cdot \|x(t)\| \leq \frac{\varepsilon^2 \gamma}{2} |u(t)|^2 + \frac{\gamma}{2\varepsilon^2} \|x(t)\|^2 \quad \text{п.в.} \quad (2.9)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $2\varepsilon^2 = \gamma/c_1$. Тогда из (2.8), (2.9) вытекает

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x(t)|^2 \leq \frac{\gamma^2}{4c_1} |u(t)|^2 \quad \text{п.в.} \quad (2.10)$$

Интегрируя (2.10), мы получаем

$$|x(t)|^2 \leq \frac{\gamma^2}{2c_1} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + 2|x(0)|.$$

Следовательно, существует $M_1 > 0$ такое, что справедливо неравенство (2.4).

Используя это неравенство и (2.8), мы приходим к неравенству

$$2c_1 \int_0^t \|x(s)\|^2 ds \leq 2M_1 \int_0^t |u(s)| ds + 2|x(0)|^2.$$

Отсюда вытекает, что существует $M_2 > 0$ такое, что справедливо неравенство (2.5).

Пусть $h \in \mathcal{V}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle h(s), \dot{x}(s) \rangle ds &= \int_0^t \langle -h(s), A(s)x(s) \rangle ds + \int_0^t (h(s), u(s)) ds \\ &\leq \int_0^t \|A(s)x(s)\|_* \cdot \|h(s)\| ds + \gamma \int_0^t |u(s)| \cdot \|h(s)\| ds \\ &\leq \int_0^t c_2 \|x(s)\| \cdot \|h(s)\| ds + \gamma \int_0^t |u(s)| \cdot \|h(s)\| ds. \end{aligned}$$

Используя это неравенство, неравенство (2.5) и неравенство Гёльдера, мы получаем, что существует $M_3 > 0$ такое, что

$$\int_0^t \langle h(s), \dot{x}(s) \rangle ds \leq M_3 \|h\|_{\mathcal{V}}.$$

Отсюда вытекает неравенство (2.6).

Неравенство (2.7) является следствием неравенств (2.6), (2.7). Лемма доказана.

В дальнейшем для любого банахова пространства X символ w - X означает, что пространство X наделено слабой $\sigma(X, X^*)$ топологией [15]. Во всех остальных случаях мы считаем, что пространство X наделено сильной (нормированной) топологией.

ЛЕММА 2.3. Пусть $P: \mathcal{H} \rightarrow C(T, H)$ – оператор, который каждому элементу $u \in \mathcal{H}$ ставит в соответствие единственное решение $x = Pu$ уравнения (0.1). Тогда P является аффинным, т.е. $Pu = y_0 + P_1u$, где $y_0 \in C(T, H)$ – фиксированный элемент, а $P_1: \mathcal{H} \rightarrow C(T, H)$ является линейным компактным нерастягивающим оператором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y_0 \in W \hookrightarrow C(T, H)$ – единственное решение уравнения (0.1), соответствующее $u = \Theta_{\mathcal{H}}$, где $\Theta_{\mathcal{H}}$ – нулевой элемент пространства $\mathcal{H}$, и $y = P_1u$ – единственное решение $y \in W \hookrightarrow C(T, H)$ уравнения (0.1) с $x(0) = \Theta_H$, где Θ_H – нулевой элемент пространства H . Тогда, очевидно, $P_1: \mathcal{H} \rightarrow C(T, H)$ является линейным оператором и любое решение x уравнения (0.1) представимо в виде $x = Pu = y_0 + P_1u$.

Докажем компактность оператора P_1 . Пусть $B_{\mathcal{H}}(1)$ – замкнутый единичный шар пространства $\mathcal{H}$. Так как $B_{\mathcal{H}}(1)$ является метризуемым компактным подмножеством пространства $w\text{-}\mathcal{H}$, то нам достаточно показать, что если $u_n \in B_{\mathcal{H}}(1)$ сходится к u в пространстве $w\text{-}\mathcal{H}$, то последовательность $x_n = P_1u_n$ сходится к $x = P_1u$ в пространстве $C(T, H)$.

Пусть $u_n, u \in B_{\mathcal{H}}(1)$, $n \geq 1$, таковы, что

$$u_n \rightarrow u \quad \text{в } w\text{-}\mathcal{H} \quad (2.11)$$

и $x_n = P_1u_n$, $x = P_1u$. Из леммы 2.2 следует, что последовательность x_n , $n \geq 1$, ограничена в пространстве W и, следовательно, является относительно компактным метризуемым подмножеством пространства $w\text{-}W$. Переходя к подпоследовательности, если необходимо, мы можем предположить, что

$$x_n \rightarrow y \quad \text{в } w\text{-}W \quad (2.12)$$

для некоторого $y \in W$. Так как вложение $W \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно, то

$$x_n \rightarrow y \quad \text{в } \mathcal{H}. \quad (2.13)$$

Покажем, что $x = y$. Используя монотонность оператора $A(t)$ (см. гипотезу Н(А) (2)) и уравнение (0.1), мы получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|x_n(t) - x(t)|^2 &\leq \int_0^t (x_n(s) - x(s), u_n(s) - u(s)) ds \\ &\leq \int_0^t (x_n(s) - y(s), u_n(s) - u(s)) ds \\ &\quad + \int_0^t (y(s) - x(s), u_n(s) - u(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из последнего неравенства в (2.14) и (2.11), (2.13) вытекает, что

$$x_n(t) \rightarrow x(t) \quad \text{в } H, \quad t \in T. \quad (2.15)$$

Воспользовавшись (2.4), (2.13), (2.15), мы получим, что $x = y$. Следовательно, в соответствии с (2.13)

$$x_n \rightarrow x \text{ в } \mathcal{H}. \quad (2.16)$$

Учитывая, что уравнение (0.1) имеет единственное решение, и имея в виду первое неравенство в (2.14), а также (2.11), (2.16) и неравенство Гёльдера, мы заключаем, что вся последовательность x_n , $n \geq 1$, сходится к x в $C(T, H)$. Следовательно, оператор $P_1: \mathcal{H} \rightarrow C(T, H)$ компактен.

Пусть $u \in \mathcal{H}$ и $x = P_1 u$. По аналогии с неравенством (2.14) мы получаем

$$\frac{1}{2}|x(t)|^2 \leq \int_0^t |u(s)| \cdot |x(s)| ds.$$

Воспользовавшись леммой А.5 из [16], мы приходим к неравенству

$$|x(t)| \leq \int_0^t |u(s)| ds, \quad t \in T = [0, 1].$$

Последнее неравенство и неравенство Гёльдера нам дают, что

$$\|x\|_{C(T, H)} = \|P_1 x\|_{C(T, H)} \leq \|u\|_{\mathcal{H}}.$$

Следовательно, оператор $P_1: \mathcal{H} \rightarrow C(T, H)$ является нерастягивающим. Лемма доказана.

§ 3. Релаксационная задача

В этом параграфе мы рассмотрим вспомогательную, так называемую релаксационную, задачу.

Пусть $\tilde{f}: T \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — функция, определенная следующим образом:

$$\tilde{f}(t, z, u) = \begin{cases} f(t, z, u), & u \in U(t, z), \\ +\infty, & u \notin U(t, z), \end{cases} \quad (3.1)$$

и $f^{**}(t, z, u)$ — биполяр [13; гл. 1, § 4] функции $u \rightarrow \tilde{f}(t, z, u)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Функция $f^{**}(t, z, u)$ является нормальным интегралом и*

$$\alpha_1 \|u\|_{\mathbb{R}}^2 - \alpha_2(t, z) \leq f^{**}(t, z, u) \leq \tilde{f}(t, z, u) \quad \text{п.в.} \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ_0 — мера Лебега на $T \times \Omega$. Из [17; лемма 1.3] и [13; гл. 8, § 1, теорема 1.1] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $Q_\varepsilon \subset T \times \Omega$ такой, что $\mu_0((T \times \Omega) \setminus Q_\varepsilon) \leq \varepsilon$ и сужение $f(t, z, u)$ на $Q_\varepsilon \times \mathbb{R}$ является полунепрерывной снизу функцией, а сужение $U(t, z)$ на Q_ε имеет замкнутый график в $Q_\varepsilon \times \mathbb{R}$. Тогда согласно (3.1) сужение $\tilde{f}(t, z, u)$ на $Q_\varepsilon \times \mathbb{R}$ будет полунепрерывной снизу функцией. Воспользовавшись теоремой 1.1 из [13; гл. 8, § 1], получим, что функция $\tilde{f}(t, z, u)$ является нормальным интегралом. Тогда из [13; гл. 8, § 1, предложение 1.3] вытекает, что функция $f^{**}(t, z, u)$ также является нормальным интегралом. Так как функция $u \rightarrow \alpha_1 \|u\|_{\mathbb{R}}^2 - \alpha_2(t, z)$ является выпуклой,

то, воспользовавшись (1.3), (3.1) и предложением 4.1 из [13; гл. 1, § 4], мы приходим к неравенству (3.2). Утверждение доказано.

Рассмотрим *релаксационную задачу* (RP) минимизации функционала

$$J^{**}(x, u) = G(x) + F^{**}(u)$$

на решениях управляемой системы, описываемой уравнением (0.1) с ограничениями на управление

$$u(t)(z) = u(t, z) \in \overline{\text{co}} U(t, z) \quad \text{п.в.} \quad (3.3)$$

и ограничениями (0.4), (0.5), где

$$F^{**}(u) = \int_T \int_{\Omega} f^{**}(t, z, u(t, z)) dz dt,$$

а $\overline{\text{co}} U(t, z)$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества $U(t, z)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если $\alpha_1 > 2\beta_1$, то задача (RP) имеет решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 3.1 следует, что для любого $u \in \mathcal{H}$ функция $(t, z) \rightarrow f^{**}(t, z, u(t, z))$ измерима. Поэтому в соответствии с (1.2), (3.2) для любого решения (x, u) управляемой системы (0.1), (3.3) имеет место неравенство

$$-\infty < J^{**}(x, u) \leq +\infty. \quad (3.4)$$

Пусть (x_n, u_n) , $n \geq 1$, — минимизирующая последовательность задачи (RP) . Если (x^*, u^*) — допустимая пара задачи (P) , то из (3.3) следует, что (x^*, u^*) является допустимой парой и для задачи (RP) . Воспользовавшись неравенствами (1.4), (3.4), мы получим, что существует $M > 0$ такое, что

$$-\infty < J^{**}(x_n, u_n) < M, \quad n \geq 1.$$

Следовательно, в соответствии с (1.2), (3.2)

$$-\beta_2 - \beta_1 \|x_n\|_{C(T, H)}^2 + \alpha_1 \|u_n\|_{\mathcal{H}}^2 - \alpha_2 \leq M, \quad (3.5)$$

где $\alpha_2 = \int_T \int_{\Omega} \alpha_2(t, z) dz dt$.

Из (3.5) и леммы 2.3 вытекает

$$\begin{aligned} & -\beta_2 - 2\beta_1 \|y_0\|_{C(T, H)}^2 - 2\beta_1 \|u_n\|_{\mathcal{H}}^2 + \alpha_1 \|u_n\|_{\mathcal{H}}^2 - \alpha_2 \\ & \leq -\beta_2 - \beta_1 \|y_0\|_{C(T, H)}^2 + P_1 \|u_n\|_{C(T, H)}^2 + \alpha_1 \|u_n\|_{\mathcal{H}}^2 - \alpha_2 \leq M. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Так как $\alpha_1 - 2\beta_1 > 0$, то из неравенства (3.6) следует, что последовательность u_n , $n \geq 1$, ограничена в пространстве $\mathcal{H}$. Так как $\mathcal{H}$ является рефлексивным пространством, то, не нарушая общности, мы можем считать, что последовательность u_n , $n \geq 1$, сходится к некоторому элементу u_* в пространстве $w\text{-}\mathcal{H}$. Хорошо известно, что в этом случае

$$u_*(t, z) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{k \geq n} u_k(t, z) \in \overline{\text{co}} U(t, z) \quad \text{п.в.} \quad (3.7)$$

Воспользовавшись леммой 2.3, мы получим, что последовательность решений $x_n = Pu_n$, $n \geq 1$, уравнения (0.1) сходится в пространстве $C(T, H)$ к решению $x_* = Pu_*$ уравнения (0.1). Следовательно, в соответствии с (3.7) пара (x_*, u_*) является решением управляемой системы (0.1), (3.3).

Из гипотез $H(\Phi)$, $H(Q)$, сходимости x_n , $n \geq 1$, к x_* в $C(T, H)$, сходимости u_n , $n \geq 1$, к u_* в $w\mathcal{H}$ следует, что

$$\Phi_i(x_*) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.8)$$

$$Q_j(u_*) \leq d_j, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.9)$$

Воспользовавшись леммой 2.3, утверждением 3.1 и следствием 1.2 из [13; гл. 8, §1], получаем, что функция $u \rightarrow G(Pu) + F^{**}(u)$ секвенциально полунепрерывна снизу в топологии пространства $w\mathcal{H}$. Поэтому

$$J^{**}(x_*, u_*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J^{**}(x_n, u_n). \quad (3.10)$$

Принимая во внимание (3.7)–(3.10), мы получаем, что пара (x_*, u_*) является решением задачи (RP) . Теорема доказана.

§ 4. Доказательство основной теоремы

Рассмотрим задачу $(\tilde{P})$ минимизации функционала

$$\tilde{J}(x, u) = G(x) + \tilde{F}(u)$$

на решениях управляемой системы (0.1), (0.2) с ограничениями (0.4), (0.5), где

$$\tilde{F}(u) = \int_T \int_{\Omega} \tilde{f}(t, z, u(t, z)) dz dt.$$

Из (3.1) следует, что любая допустимая пара (x, u) задачи (P) является допустимой и для задачи $(\tilde{P})$. Тогда согласно (3.2)

$$\min J^{**}(x, u) \leq \inf \tilde{J}(x, u) < \infty \quad (4.1)$$

и, принимая во внимание (3.1), мы получаем, что задачи (P) и $(\tilde{P})$ эквивалентны.

Пусть (x_*, u_*) – решение задачи (RP) . Согласно (4.1) теорема будет доказана, если мы покажем, что существует допустимая пара (x_0, u_0) задачи $(\tilde{P})$ такая, что

$$J^{**}(x_*, u_*) = \tilde{J}(x_0, u_0).$$

Из (1.2), (3.2) следует, что

$$-\infty < \int_T \int_{\Omega} f^{**}(t, z, u_*(t, z)) dz dt < \infty.$$

Поэтому функция $f^{**}(t, z, u_*(t, z))$ интегрируема и, следовательно,

$$|f^{**}(t, z, u_*(t, z))| < \infty \quad \text{п.в.} \quad (4.2)$$

Воспользовавшись предложением 3.1 из [13; гл. 9, §3], мы получаем, что существуют измеримые функции $p_i: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, $u_i: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, такие, что

$$u_*(t, z) = \sum_{i=1}^2 p_i(t, z) u_i(t, z) \quad \text{п.в.}, \quad (4.3)$$

$$f^{**}(t, z, u_*(t, z)) = \sum_{i=1}^2 p_i(t, z) \tilde{f}(t, z, u_i(t, z)) \quad \text{п.в.}, \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^2 p_i(t, z) = 1 \quad \text{п.в.} \quad (4.5)$$

Положим

$$E_i = \{(t, z) \in T \times \Omega; u_i(t, z) \notin U(t, z)\}, \quad i = 1, 2.$$

Воспользовавшись утверждением е) теоремы 3.5 из [18], мы получим, что множества E_i , $i = 1, 2$, измеримы. Если $(t, z) \in E_i$ и $\mu_0(E_i) = 0$, то $u_i(t, z) \in U(t, z)$ п.в. на $T \times \Omega$. Если же $\mu_0(E_i) > 0$, то в соответствии с (3.1) $\tilde{f}(t, z, u_i(t, z)) = \infty$ п.в. на E_i . Тогда из (4.2), (4.4), (4.5) вытекает, что $p_i(t, z) = 0$ п.в. на E_i . Следовательно, не нарушая равенств (4.3), (4.4), мы можем изменить $u_i(t, z)$ на множестве E_i так, что $u_i(t, z)$ останутся измеримыми функциями и

$$u_i(t, z) \in U(t, z), \quad i = 1, 2, \quad \text{п.в. на } T \times \Omega. \quad (4.6)$$

Тогда в соответствии с (3.1), (4.4), (4.6)

$$f^{**}(t, z, u_*(t, z)) = \sum_{i=1}^2 p_i(t, z) f(t, z, u_i(t, z)) \quad \text{п.в.} \quad (4.7)$$

Воспользовавшись (4.3), (4.5), (4.6), мы получим

$$u_*(t, z) \in \text{co } U(t, z) \quad \text{п.в.}, \quad (4.8)$$

где $\text{co } U(t, z)$ означает выпуклую оболочку множества $U(t, z)$.

Из теоремы Лузина [13; гл. 8, §1] следует, что существует последовательность Q_l , $l = 1, 2, \dots$, $Q_l \subset T \times \Omega$, попарно непересекающихся компактных множеств таких, что $\mu_0(\bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l) = \mu_0(T \times \Omega)$ и сужение каждой из функций $u_i(t, z)$, $f(t, z, u_i(t, z))$, $i = 1, 2$, на любое из множеств Q_l непрерывно.

Рассмотрим измеримое многозначное отображение $\Gamma: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с компактными значениями, определенное следующим образом

$$\Gamma(t, z) = \bigcup_{i=1}^2 f(t, z, u_i(t, z)).$$

Тогда из (4.7) вытекает, что

$$f^{**}(t, z, u_*(t, z)) \in \text{co } \Gamma(t, z) \quad \text{п.в.} \quad (4.9)$$

Так как функции $f(t, z, u_i(t, z))$, $i = 1, 2$, непрерывны на каждом из множеств Q_l , $i = 1, 2, \dots$, то многозначное отображение $\Gamma(t, z)$ интегрируемо на каждом из множеств Q_l . Воспользовавшись свойствами многозначного интеграла в конечномерном пространстве [19], мы получим

$$\iint_{Q_l} \Gamma(t, z) dz dt = \iint_{Q_l} \text{co } \Gamma(t, z) dz dt.$$

Из этого равенства и (4.9) следует, что для каждого $l = 1, 2, \dots$ существуют попарно непересекающиеся множества Q_l^i , $i = 1, 2$, такие, что $\mu_0(\bigcup_{i=1}^2 Q_l^i) = \mu_0(Q_l)$ и

$$\begin{aligned} \iint_{Q_l} f^{**}(t, z, u_*(t, z)) dz dt &= \iint_{Q_l} \sum_{i=1}^2 p_i(t, z) f(t, z, u_i(t, z)) dz dt \\ &= \iint_{Q_l} \sum_{i=1}^2 \chi(Q_l^i)(t, z) f(t, z, u_i(t, z)) dz dt, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\chi(Q_l^i)(t, z)$ означает характеристическую функцию множества Q_l^i .

Покажем, что для любого измеримого разбиения Q_l^i , $i = 1, 2$, множества Q_l , для которого имеет место равенство (4.10), функция

$$g(t, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \chi(Q_l^i)(t, z) f(t, z, u_i(t, z)) \quad (4.11)$$

интегрируема на $T \times \Omega$.

Рассмотрим последовательность

$$g_n(t, z) = \sum_{l \leq n} \sum_{i=1}^2 \chi(Q_l^i)(t, z) (f(t, z, u_i(t, z)) + \alpha_2(t, z)). \quad (4.12)$$

Из (1.3) следует, что функции $g_n(t, z)$, $n \geq 1$, неотрицательны, интегрируемы на $T \times \Omega$, последовательность $g_n(t, z)$, $n \geq 1$, монотонно не убывает и почти всюду на $T \times \Omega$ сходится к функции $g(t, z) + \alpha_2(t, z)$. Воспользовавшись (4.10), (4.12), получим

$$\begin{aligned} \int_T \int_{\Omega} g_n(t, z) dz dt &= \sum_{l \leq n} \iint_{Q_l} \left(\sum_{i=1}^2 \chi(Q_l^i)(t, z) f(t, z, u_i(t, z)) + \alpha_2(t, z) \right) dz dt \\ &= \sum_{l \leq n} \iint_{Q_l} \left(\sum_{i=1}^2 p_i(t, z) f(t, z, u_i(t, z)) + \alpha(t, z) \right) dz dt \\ &= \sum_{l \leq n} \iint_{Q_l} (f^{**}(t, z, u_*(t, z)) + \alpha_2(t, z)) dz dt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из (3.2) следует, что функция $f^{**}(t, z, u_*(t, z)) + \alpha_2(t, z)$ неотрицательна. Так как функция $f^{**}(t, z, u_*(t, z))$ интегрируема на $T \times \Omega$, то из (4.13) и леммы Фату следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T \int_{\Omega} g_n(t, z) dz dt &= \int_T \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t, z) dz dt \\ &= \int_T \int_{\Omega} (g(t, z) + \alpha_2(t, z)) dz dt < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $g(t, z)$ интегрируема на $T \times \Omega$.

Рассмотрим функцию

$$u_0(t, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \chi(Q_l^i)(t, z) u_i(t, z). \quad (4.14)$$

Воспользовавшись (1.3), (4.11), получим $-\alpha_2(t, z) - \alpha_1 \|u_0(t, z)\|_{\mathbb{R}}^2 \leq g(t, z)$ п.в. Отсюда следует, что $u_0 \in \mathcal{H}$, $u_0(t, z) = u_0(t)(z)$. Согласно (4.6)

$$u_0(t, z) \in U(t, z) \text{ п.в.} \quad (4.15)$$

Для простоты изложения и краткости обозначений будем считать, что ограничения (0.4), (0.5) имеют вид

$$\Phi(x) \leq b, \quad Q(u) \leq d, \quad (4.16)$$

где $\Phi: C(T, H) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $Q: \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Воспользовавшись гипотезами Н(G), Н(Φ) и леммой 2.3, получим, что функции $u \rightarrow G(Pu)$, $u \rightarrow \Phi(Pu)$ являются квазивогнутыми и полунепрерывными снизу из $\mathcal{H}$ в $\mathbb{R}$, а функция $u \rightarrow Q(u)$ является квазивогнутой и полунепрерывной снизу из $w\text{-}\mathcal{H}$ в $\mathbb{R}$. Тогда согласно лемме 2.1 существуют элементы $h_j \in \mathcal{H} = \mathcal{H}^*$, $j = 1, 2, 3$, такие, что

$$G(Pu_*) = \sup\{G(Pu); \langle u, h_1 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u_*, h_1 \rangle_{\mathcal{H}}\}, \quad (4.17)$$

$$\Phi(Pu_*) = \sup\{\Phi(Pu); \langle u, h_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u_*, h_2 \rangle_{\mathcal{H}}\}, \quad (4.18)$$

$$Q(u_*) = \sup\{Q(u); \langle u, h_3 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u_*, h_3 \rangle_{\mathcal{H}}\}, \quad (4.19)$$

где

$$\langle u, h_j \rangle_{\mathcal{H}} = \int_T \int_{\Omega} \langle u(t, z), h_j(t, z) \rangle_{\mathbb{R}} dz dt, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.20)$$

Рассмотрим измеримые функции $\gamma_i: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \gamma_i(t, z) = \{ &\langle u_i(t, z), h_1(t, z) \rangle_{\mathbb{R}}, \langle u_i(t, z), h_2(t, z) \rangle_{\mathbb{R}}, \\ &\langle u_i(t, z), h_3(t, z) \rangle_{\mathbb{R}}, f(t, z, u_i(t, z)) \}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $u_i(t, z)$ удовлетворяют равенству (4.3).

Пусть $\Gamma^*: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ — измеримое многозначное отображение с компактными значениями, определенное следующим образом

$$\Gamma^*(t, z) = \bigcup_{i=1}^2 \gamma_i(t, z).$$

Так как на каждом из множеств Q_l , $l = 1, 2, \dots$, функции $u_i(t, z)$, $f(t, z, u_i(t, z))$, $i = 1, 2$, непрерывны, то на каждом из множеств Q_l , $l = 1, 2, \dots$, многозначное отображение $\Gamma^*(t, z)$ интегрируемо.

Рассмотрим функцию $\gamma^*: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\gamma^*(t, z) = \{ \langle u_*(t, z), h_1(t, z) \rangle_{\mathbb{R}}, \langle u_*(t, z), h_2(t, z) \rangle_{\mathbb{R}}, \\ \langle u_*(t, z), h_3(t, z) \rangle_{\mathbb{R}}, f^{**}(t, z, u_*(t, z)) \}. \quad (4.22)$$

Тогда из (4.3), (4.7), (4.21) следует, что

$$\gamma^*(t, z) \in \text{co } \Gamma^*(t, z) \quad \text{п.в.} \quad (4.23)$$

Так как множество $\Gamma^*(t, z)$ состоит из двух точек в пространстве $\mathbb{R}^4$, то из (4.23) и свойств многозначного интеграла следует, что для каждого $l = 1, 2, \dots$ существует измеримое разбиение Q_l^i , $i = 1, 2$, множества Q_l такое, что

$$\iint_{Q_l} \gamma^*(t, z) dz dt = \iint_{Q_l} \sum_{i=1}^2 \chi(Q_l^i)(t, z) \gamma_i(t, z) dz dt. \quad (4.24)$$

Воспользовавшись (4.21), (4.22), (4.24), получим

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_l} \langle u_*(t, z), h_j(t, z) \rangle_{\mathbb{R}} dz dt \\ &= \iint_{Q_l} \left\langle \sum_{i=1}^2 \chi(Q_l^i)(t, z) u_i(t, z), h_j(t, z) \right\rangle_{\mathbb{R}} dz dt, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \iint_{Q_l} f^{**}(t, z, u_*(t, z)) dz dt &= \iint_{Q_l} \sum_{i=1}^2 \chi(Q_l^i)(t, z) f(t, z, u_i(t, z)) dz dt \\ &= \iint_{Q_l} f\left(t, z, \sum_{i=1}^2 \chi(Q_l^i)(t, z) u_i(t, z)\right) dz dt. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Определим измеримую функцию

$$u_0(t, z) = \sum_l \sum_{i=1}^2 \chi(Q_l^i)(t, z) u_i(t, z). \quad (4.27)$$

Тогда из (4.6), (4.27) следует, что

$$u_0(t, z) \in U(t, z) \quad \text{п.в. на } T \times \Omega. \quad (4.28)$$

Выше было показано, что для любого измеримого разбиения Q_l^i , $i = 1, 2$, множества Q_l , для которого имеет место равенство (4.10), функция (4.14) является элементом пространства $\mathcal{H}$. Воспользовавшись (4.26), (4.27), получаем, что $u_0 \in \mathcal{H}$, где $u_0(t)(z) = u_0(t, z)$. Из (4.25), (4.26) вытекает

$$\int_T \int_{\Omega} \langle u_0(t, z), h_j(t, z) \rangle_{\mathbb{R}} dz dt = \int_T \int_{\Omega} \langle u_*(t, z), h_j(t, z) \rangle_{\mathbb{R}} dz dt, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.29)$$

$$\int_T \int_{\Omega} f^{**}(t, z, u_*(t, z)) dz dt = \int_T \int_{\Omega} f(t, z, u_0(t, z)) dz dt. \quad (4.30)$$

Пусть $x_0 = Pu_0$ – решение уравнения (0.1). Тогда из (4.16)–(4.19), (4.29), (4.30) получаем

$$G(Pu_0) \leq G(Pu_*), \quad (4.31)$$

$$\Phi(Pu_0) \leq \Phi(Pu_*) \leq b, \quad (4.32)$$

$$Q(u_0) \leq Q(u_*) \leq d. \quad (4.33)$$

Воспользовавшись (3.1), (4.1), (4.30), (4.31), мы приходим к равенству

$$\tilde{I}(x_0, u_0) = I(x_0, u_0) = I^{**}(x_*, u_*). \quad (4.34)$$

Теперь из (4.28), (4.32)–(4.34) следует, что пара x_0, u_0 является решением задачи (P). Основная теорема доказана.

§ 5. Пример

В этом параграфе мы рассмотрим задачу оптимального управления, описываемую параболической системой.

Рассмотрим задачу (P') минимизации функционала

$$I(x, u) = \min_{1 \leq i \leq n} \int_T \int_{\Omega} g_i(t, z, x(t, z)) dz dt + \int_T \int_{\Omega} f(t, z, u(t, z)) dz dt$$

на решениях системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial z_i} \left(a_{ij}(t, z) \frac{\partial x}{\partial z_j} \right) + a(t, z)x &= u, \\ x|_{T \times \partial\Omega} &= 0, \quad x(0, z) = x_0(z) \end{aligned} \quad (5.1)$$

с ограничениями

$$u(t, z) \in U(t, z), \quad (5.2)$$

$$\min_{1 \leq j \leq k} \int_T \int_{\Omega} \varphi_j(t, z, x(t, z)) dz dt \leq b, \quad (5.3)$$

$$\min_{1 \leq s \leq l} \left(\int_T \int_{\Omega} \langle h_s(t, z), u(t, z) \rangle_{\mathbb{R}} dz dt + r_s \right) \leq d. \quad (5.4)$$

Введем следующие предположения, которые всюду в дальнейшем считаем выполненными.

ГИПОТЕЗА Н(а). $a_{ij}(t, z), a(t, z) \in L^{\infty}(T \times \Omega)$, $i, j = 1, \dots, N$, и для некоторого $0 < \alpha \leq c$ и всех $(t, z) \in T \times \Omega$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ справедливы неравенства

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, z) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^N \xi_i^2, \quad (5.5)$$

$$|a_{ij}(t, z)| \leq c, \quad \alpha \leq a(t, z) \leq c. \quad (5.6)$$

ГИПОТЕЗА Н(g). Функции $g_i: T \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, i = 1, \dots, h$, являются нормальными интегрантами такими, что:

- 1) функции $x \rightarrow g_i(t, z, x)$ являются вогнутыми при почти всех (t, z) ;
- 2) $g_i(t, z, x) \geq -\beta_1 \|x\|^2 - \beta_2(t, z)$ п.в., $i = 1, \dots, n$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2(\cdot) \in L^1(T \times \Omega, \mathbb{R}^+)$.

ГИПОТЕЗА Н(φ). Функции $\varphi_j: T \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, j = 1, \dots, k$, являются нормальными интегрантами такими, что:

- 1) функции $x \rightarrow \varphi_j(t, z, x)$ являются вогнутыми при почти всех (t, z) ;
- 2) $\varphi_j(t, z, x) \geq -\gamma_1 \|x\|^2 - \gamma_2(t, z)$ п.в., $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2(\cdot) \in L^1(T \times \Omega, \mathbb{R}^+)$.

ГИПОТЕЗА Н(h). Функции $h_s(t, z), s = 1, \dots, l$, являются элементами пространства $L^2(T \times \Omega)$.

ГИПОТЕЗА Н₀. $x_0 \in L^2(\Omega)$.

Сведем задачу (P') к задаче (P) в соответствующих функциональных пространствах.

Пусть $H_0^1(\Omega)$ – соболевское пространство. Тогда его сопряженным является пространство $H^{-1}(\Omega)$. Положим $V = H_0^1(\Omega)$, $V^* = H^{-1}(\Omega)$. Из теорем вложения для соболевских пространств хорошо известно, что вложения $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ непрерывны, плотны и компактны.

Рассмотрим форму Дирихле $a: T \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, определенную по формуле

$$a(t, x, y) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, z) \frac{\partial x}{\partial z_i} \frac{\partial y}{\partial z_j} + a(t, z)xy \right) dz. \quad (5.7)$$

Из неравенств (5.5), (5.6) следует, что

$$|a(t, x, y)| \leq c_2 \|x\|_V \|y\|_V, \quad t \in T, \quad (5.8)$$

$$c_1 \|x\|_V^2 \leq c_1 a(t, x, x) \quad (5.9)$$

при некоторых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ (см., например, [3], [20]). Воспользовавшись (5.7)–(5.9), получим, что существует оператор $A(t): V \rightarrow V^*$, определенный по правилу

$$\langle y, A(t)x \rangle = a(t, x, y), \quad (5.10)$$

$A(t) \in \mathcal{L}(V, V^*)$, $t \in T$, для которого имеют место все гипотезы Н(A).

Как обычно, под *решением* уравнения (5.1) при фиксированном $u \in L^2(T \times \Omega) = L^2(T, L^2(\Omega))$ мы понимаем обобщенное решение, т.е. решение уравнения (0.1) с оператором $A(t)$, определенным по формуле (5.10) (см., например, [3], [20]).

Решением управляемой системы (5.1), (5.2) является пара (x, u) , $u \in L^2(T \times \Omega)$, такая, что x является решением уравнения (0.1) и почти всюду на $T \times \Omega$ имеет место включение (5.2).

Пару (x^*, u^*) , $x^* \in C(T, L^2(\Omega))$, $u^* \in L^2(T \times \Omega)$, назовем *допустимой* для задачи (P'), если она является решением управляемой системы (5.1), (5.2) и удовлетворяет ограничениям (5.3), (5.4).

Сделаем еще одно предположение.

ГИПОТЕЗА Н(І). Существует допустимая пара (x^*, u^*) задачи (P') такая, что

$$I(x^*, u^*) < \infty.$$

Всюду в дальнейшем считаем, что гипотезы Н(а), Н(г), Н(ф), Н(U), Н(φ), Н(н), Н₀ и Н(І) имеют место.

ТЕОРЕМА 5.1. Если $\alpha_1 > 2\beta_1$, то задача (P') имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\begin{aligned} G(x) &= \min_{1 \leq i \leq n} \int_T \int_{\Omega} g_i(t, z, x(t, z)) dz dt, \\ \Phi(x) &= \min_{1 \leq j \leq k} \int_T \int_{\Omega} \varphi_j(t, z, x(t, z)) dz dt, \\ Q(u) &= \min_{1 \leq s \leq l} \left(\int_T \int_{\Omega} \langle h_s(t, z), u(t, z) \rangle_{\mathbb{R}} dz dt + r_s \right). \end{aligned}$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что функции $G(x)$, $\Phi(x)$, $Q(u)$ удовлетворяют гипотезам Н(Г), Н(Ф), Н(Q).

Пусть $x \in C(T, L^2(\Omega))$. Так как функции $(t, z) \rightarrow x(t)(z) = x(t, z)$ является измеримой, а функции $(t, z, x) \rightarrow g_i(t, z, x)$ являются нормальными интегрантами, то функции $(t, z) \rightarrow g_i(t, z, x(t, z))$ измеримы. Воспользовавшись гипотезой Н(г), получим, что функция $G: C(T, L^2(\Omega)) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ определена, является вогнутой и

$$-\infty < G(x) \leq +\infty, \quad (5.11)$$

$$G(x) \geq -\beta_1 \|x\|_{C(T, L^2(\Omega))}^2 - \beta_2, \quad (5.12)$$

$$\text{где } \beta_2 = \int_T \int_{\Omega} \beta_2(t, z) dz dt.$$

Из гипотезы Н(І), (1.3), (5.11) следует, что

$$G(x^*) < \infty. \quad (5.13)$$

Воспользовавшись (5.12), (5.13) и предложением 2.5 из [13; гл. 1, §2] (применительно к функции $-G(x)$), мы получаем, что $G(x)$ является вогнутой непрерывной функцией. Тем самым, для функции $G(x)$ выполняется гипотеза Н(Г).

Аналогично можно показать, что $\Phi(x)$ является вогнутой непрерывной функцией из $C(T, L^2(\Omega))$ в $\mathbb{R}$. Следовательно, гипотеза Н(Ф) имеет место для функции $\Phi(x)$.

И наконец, так как функции $\int_T \int_{\Omega} \langle h_s(t, z), u(t, z) \rangle_{\mathbb{R}} dz dt$, $s = 1, \dots, l$, являются непрерывными линейными функционалами на $L^2(T \times \Omega)$, то функция $u \rightarrow Q(u)$ является вогнутой непрерывной функцией из $w\text{-}L^2(T \times \Omega) = w\text{-}L^2(T, L^2(\Omega))$ в $\mathbb{R}$. Тем самым, гипотеза Н(Q) имеет место для функции $Q(u)$. Теперь теорема 5.1 вытекает из основной теоремы. Теорема доказана.

В заключение отметим, что подобная задача без ограничений (0.4), (0.5) и при более жестких предположениях рассматривалась в [9].

Список литературы

1. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1979.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимального управления // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1976. С. 133–261.
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. М.: Мир, 1972.
4. Ahmed N. U., Teo K. L. Optimal control of distributed parameter systems. New York: North-Holland, 1981.
5. Литвинов В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987.
6. Иваненко В. И., Мельник В. С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. Киев: Наукова думка, 1988.
7. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
8. Suryanarayana M. B. Existence theorems for optimization problems concerning linear, hyperbolic partial differential equations without convexity conditions // J. Optim. Theory Appl. 1976. V. 19. № 1. P. 47–61.
9. Raymond J. P. Existence theorems without convexity assumptions for optimal control problems governed by parabolic and elliptic systems // Appl. Math. Optim. 1992. V. 26. P. 39–62.
10. Bressan A., Flores F. Multivariable Aumann integrals and controlled wave equation // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 189. № 2. P. 315–334.
11. Толстоногов Д. А. О минимуме в вариационных эллиптических задачах без предположения выпуклости // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 1. С. 130–142.
12. Толстоногов А. А. Теорема существования оптимального управления в задаче Гурса–Дарбу без предположения выпуклости // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 4. С. 163–182.
13. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
14. Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its applications. II. New York: Springer-Verlag, 1990.
15. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
16. Brezis H. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. Amsterdam: North-Holland, 1973.
17. Толстоногов А. А. К теореме Скорца–Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 109–120.
18. Himmelberg C. J. Measurable relation // Fundamenta Math. 1975. V. 87. P. 53–72.
19. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
20. Cesari L., Hou S. H. Existence of solution and existence of optimal solutions. The quasi-linear case // Rend. Circ. Math. Palermo. (2). 1985. V. 34. № 1. P. 5–45.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
г. Иркутск
E-mail: aatol@icc.ru

Поступила в редакцию
27.09.2000